中国运筹学发展研究报告

中国运筹学会

摘要 运筹学是自 20 世纪三四十年代发展起来的一门新兴交叉学科，主要研究如何应用数学和计算的理论与方法对社会系统和工程系统做出最优或满意的决策。为了更好地推动中国运筹学及相关领域的研究和应用，学会组织国内运筹学领域的部分专家，并参考了国内外运筹学多个分支代表性人物对运筹学的起源和发展的回忆与评述，共同完成了此报告。报告概述了运筹学的主要特征和方法，简述了运筹学的发展历程，剖析了运筹学研究中的成功经验，综述了运筹学几个主要分支的发展状况，介绍了运筹学中十几个有代表性的难题，展望了运筹学未来发展的方向。希望此报告能引起读者进一步思考运筹学的本质，运筹学是如何成长和将如何发展，并在一定程度上推动中国运筹学更好地发展。

关键词 运筹学，建模，优化，算法

中图分类号 O22

数学分类号 90-XX, 91-XX

Research report on the development of operations research in China

The Operations Research Society of China

Abstract Operations Research (OR) is an interdisciplinary subject emerged in the 1930s. It mainly studies how to make optimal or satisfactory solutions through mathematical and computational theories and methods for social and engineering systems. In order to promote the research and application of OR in China, we invite a dozen of experts in OR and related areas to complete this report making reference to the review of OR development by many top experts in representative areas in OR. In this report, we first summarize the features and methodology of OR and make a brief review on the development of OR with analysis on successful experiences in OR study. Then, we survey the status of some main directions of this discipline along with some its typical open problems. In the end of the survey we prospect for the trend of OR in the future. We hope that this report could motivate readers to reflect upon what is the essence of OR and how OR has grown up and will develop in next decades, and in such a way advance OR development in China.

Keywords Operations research, mathematical modeling, optimization, algorithms

Chinese Library Classification O22

2010 Mathematics Subject Classification 90-XX, 91-XX

收稿日期： 2012 年 4 月 17 日

0 引言

运筹学是自 20 世纪三四十年代发展起来的一门新兴交叉学科。它主要研究人类对各种资源的运用及筹划活动，以期通过了解和发展这种运用及筹划活动的基本规律，发挥有限资源的最大效益，达到总体最优的目标。从问题的形成开始，到构造模型、提出解案、进行检验、建立控制，直至付诸实施为止的所有环节构成了运筹学研究的全过程。运筹学研究对象的客观普遍性，以及强调研究过程完整性的重要特点，决定了运筹学应用的广泛性，它的应用范围遍及工农业生产、经济管理、工程技术、国防安全、自然科学等各个方面和领域。

运筹学从创建时期开始起就表现出其理论与实践结合的鲜明特点，在它的发展过程中还充分表现出多学科的交叉结合，物理学家、化学家、数学家、经济学家、工程师等联合组成研究队伍，各自从不同学科的角度出发提出各自对实际问题的认识和见解，促使解决大型复杂现实问题的新途径、新方法、新理论更快地形成。

运筹学的学科体系主要包含 3 大部分：模型、理论和算法。无论是早期解决二战中的兵力部署和武器调配，还是生产组织问题或交通、通讯问题，相关领域的运筹学工作者都建立了各种各样的模型，在这些模型下逐步地建立了比较完整的理论体系，提出了求解相应问题的各种类型的算法。

运筹学经过 60 多年的发展，已经逐步形成了一套系统地研究和解决实际问题的方法，它可以概括为以下几个阶段：

(1) 构建所关心问题的数学模型，将一个实际问题表示为一个运筹学问题。

(2) 分析问题 (最优) 解的性质和求解问题的难易程度，寻求合适的求解方法。

(3) 设计求解相应问题的算法，并对算法的性能进行理论分析。

(4) 编程实现算法，并分析模拟数值结果。

(5) 判断模型和解法的有效性，提出解决原始实际问题的方案。

这些阶段并不是相互独立的，也决非依次进行的。正如邦德 [1](美国工程院院士，曾任美国军事运筹学会主席和美国运筹学会主席) 在谈到他几十年建模和分析的体会时指出的那样：“对于模型的开发应该是一种连续的研究、开发、分析、改进 $\cdots\cdots$ 的过程，是一个原型化和呈螺旋状发展的过程，而不是一个单个事件！在短期内建造一个原型（假若有必要，加上一些不切实际的假设），然后通过去除那些不切实际的假设，增加过程，增加系统等等不断地将模型改进。”

线性规划是运筹学模型、理论和算法的最典型的代表之一。 20 世纪 40 年代前学者们缺乏对事物进行优化的兴趣和动力，在文献中虽然有四五十篇关于线性不等式系统的文章，但其中没有一篇提及目标函数 [1] 。 1947 年，丹齐格基于其二战时担任实践计划规划者的经历，认识到多数的实际计划关系都可以用一组线性不等式来刻画，并用一个目标函数来取代为选取一个较好计划而设定的一组基本规则，从而提出了线性规划模型和求解方法，单纯形法。运筹学以后的发展表明，线性规划及单纯形法不仅是证明理论的一个有力的分析工具，还是一个强有力的计算工具，更是运筹学研究的一个催化剂。学者们对线性规划和单纯形法的计算复杂性的持续研究，最终产生了椭球算法和内点算法等一系列理论成果，并形成了新的研究课题。线性规划的产生和巨大成功极大地推动了数学规划发展。

邦德 [1] 在回顾运筹学在美国军事力量的改造中所起的重要作用时指出：“对一个过

程、一个系统、或者一个企业的建模是一种艺术。这项艺术在于确定哪些因素与活动需要包含在模型之中，哪些是变量、常数、随机的、约束等；在建立变量之间关系时，应做些什么假设；以及在逐步运作中，如何排除在建立初始模型时所引入的某些不切实际的假设。并且，这是一种可以学习的艺术。”马吉 (曾任美国管理科学学会主席) 对建模的艺术是这样解读的：“要用简单的方法去解释现实，而不要让现实去迎合预先精心设计的模型”，他强调：“重视研究实际数据并通过设计实验来验证假设”的研究策略。在此意义下，我们不能简单地视运筹学为应用数学的一部分；实际上，我们更应该将其视为是广义的解决问题的方法研究。尽管运筹学大部分内容采用的是数学的定量方法，但是它也包含了行为科学和心理学等学科的方法，敏锐的观察和熟练的数据分析。

运筹学作为一门新兴的交叉学科，业已在军事国防、企业民生、科技工程和经济金融等领域中产生了深刻而广泛的影响。近年来，世界科技发展突飞猛进，经济全球化愈演愈烈，市场竞争日趋激烈；中国经济已经从计划体制转入市场体制的轨道，并持续高速发展，举国正在实施建设创新型国家的发展战略。在此形势下，我们希望本研究报告能对我国从事运筹学研究、教学和应用的学者、师生和实践者有所启迪，使得我国运筹学工作者能为现代科技的日新月异的发展、社会和经济的可持续发展做出贡献。

1 运筹学发展的历程

数学既是所有学科的共同语言，也是有力的工具。尽管运筹学作为一门有着不长历史的新兴交叉学科，已形成了比较完整的学科体系，但它通常还是作为数学的一个分支。实际上，数学与运筹学有着紧密的关系。数学是解决运筹问题和实现运筹思想的最基本的工具之一。运筹学工作者主要用数学方法构造问题模型，建立相应理论，设计和分析求解算法。在这个过程中，他们不仅可以用数学方法解决实际问题，也可以发现新的数学问题，丰富数学的内涵，推动数学的发展。下面两节对数学 [2] 和运筹学 [3] 的发展分别做了一个简要的回顾，藉此我们可以更好地理解运筹学的内涵和特征。

1.1 数学的发展概述

数学从开始就是从实际中产生出来，就是为生产服务。反过来，随着生产的发展，人类对数学的要求也相应提高，四则运算逐渐成为生活所必需。由于尼罗河水的特殊条件，每年春天上游的水大量集中直冲而下，将下游的耕地冲刷成为平原。为了恢复原来的土地面积的分配，引发了对某些平面图形，如矩形、三角形、圆等的面积计算，进而对它们之间的关系进行研究。这些研究对于重新分配土地面积是必要的。到了公元前 600 年左右，埃及的几何学传到了雅典，一些人对之进行学术性研究，初等几何逐渐发展成一门学科。亚里斯多德等人强调对事物的分类和比较，重视思维的条理化，并将逻辑推理方法引入了数学研究。公元前 300 年左右，在亚历山大城建立了一个博物馆，为学者们研究和讲授数学与地学。

虽然由于欧几里德和阿波罗尼奥斯等人根据前人的积累，将几何学提升到了一个新的高度，但由于当时计数方法的繁琐以及随之而来的生产方法的停顿，对数学提不出新的有意义的要求，计算也仅局限于一些简单的四则运算，因而学者们探究的问题必然脱离现实。正如后来威尔斯在其所著的《世界史纲》所评述的那样“智慧离开了亚历山大

城，留下的只是卖弄学问的学究气。书籍的崇拜代替了书籍的利用。有学问的人很快地变成了一个特殊化的古怪阶级，具有种种令人讨厌的特点。博物馆成立后不到六七十年，亚历山大城就为新的一种类型的人所盘踞了：胆小、偏执、不讲实际、不学无术、做学问时对一些琐碎的事情又异常吹毛求疵、对圈子内的同行和圈子外无学识的人 —— 学究式的人一样地忌妒。”

在经历了中世纪战争频发、人群不断流动的这段漫长时期之后，14—16 世纪意大利的文艺复兴唤醒了人类。各种阻碍人类社会发展的繁琐哲学和无谓的神学辩论逐步被抛弃，随之而来的是生产的进步和工业的繁荣。因而给数学提出了许多问题，促使数学得到快速的发展。首先是波兰的哥白尼根据观测和分析，提出了与神学对抗的日心说。由于三角学在天文、航海、物理等方面都有广泛应用，对三角函数的数值计算 (手算) 成了一项重要工作。随后开普勒根据第谷累积的观测资料，提出了著名的开普勒三定律，并最终导致牛顿发现万有引力定律。期间物理学和天文学的进展，也使数学得到了相应的发展。特别是计算方面，纳皮尔创造了对数，帕斯卡发明了加法机，大大提高了计算速度。实际的需要促进了计算技术的进步。然而因为当时工业生产还处于小作坊方式，计算工具也很初等，所以生产实践中不可能对数学提出非常有意义的问题。

17 世纪初期解析几何的出现是数学发展的一大飞跃，它将几何图形与数学表达式联系起来。由于开普勒的启蒙，积分的概念被正式提出，它用来求曲线之长，曲线所围成的面积等等。而稍后提出的微分，则可以用来描述物体在运动的瞬间状态。17 世纪下半叶由牛顿和莱布尼兹分别从运动学和几何学的角度分别独立创立的微积分学，无疑是数学的一大进步，它使得数学与其他自然科学，特别是物理学和天文学，紧密相连并相互促进；它也使得数学自身的研究范围得以伸延，从而引出了许多新问题，开辟了一些新的方向。

尽管数学因微积分得到快速发展，但是物理学和天文学，由于受到当时物质条件的限制，发展速度远比数学逊色，因而对数学难以提出明确的新问题。因此，当时包括欧拉、拉格朗日等在内的一些著名数学家对数学的发展前途感到了悲观，因为他们认为物质世界才是数学发展的泉源。但是，他们没有意识到，当时发展起来的数学本身存在着许多问题需要解决，数学自身需要有一段相当长的时间使自己臻于完善。例如，微分和积分的理论基础如何，级数的收敛性，复平面的必要性，五次和五次以上的代数方程的可解性，等等。若这些数学内在问题不解决，以数学作为工具所导出的物理和天文等的实际问题的解答就没有坚实的理论基础。当然，物理学也是在发展之中，在 18 世纪末，如热力学、流体力学、测地学等也逐渐发展起来，数学在其中得到了广泛的应用和进一步的发展。

由于数学的发展很快，大约从 18 世纪中开始，研究数学逐渐成为一种专业。许多大学相继建立了数学系，数学家就成为一项得到全社会承认的职业。数学系的建立对数学的发展产生了两方面的影响。一方面，它便于培养数学人才，也使得数学家可以悉心致力于数学内在问题的研究，有利于促进数学自身的发展。但另一方面，在数学系工作的人很容易脱离社会的实践，从而给数学的发展带来很大的副作用。因为真正有意义的数学的内在问题是很有限的，所以大多数人只能在前人的工作中去寻找问题，或者是同行中相互提出问题。在评价彼此的工作时，也主要依据所解决的问题的难度，而不注意这些工作对社会是否能生产积极的作用。著名科学家拉格朗日曾说过，一个数学家，只有当他能够走出去，对他在街上碰到的第一个人清楚地解释自己的工作时，他才完全理解

了自己的工作。美国哈佛大学第 25 任校长博克在其撰写的《走出象牙塔 —— 现代大学的社会责任》一书中，对学术研究和技术创新需求及学术研究的社会责任做了深入的剖析，主张美国大学逐渐融入到社会中去。

在二次世界大战结束后，计算机的诞生和快速发展，大型工商业的兴起以及产品新陈代谢的加速，为数学的发展提供了一股新的推动力。一种以图灵创立的计算的模型和理论为主要基础的新数学逐渐形成，它与已有的数学有很大的差异：

(1) 研究对象一般都是大规模的，其变量数目一般都很大甚至巨大，变量所须满足的条件个数很多且复杂；

(2) 研究的问题通常不能仅以数学式子来描述，即使可以描述，也因变量或者条件过多，使得无法在计算机上处理；

(3) 研究的问题变量或者条件的离散性，使得微积分等连续性方法和工具的作用十分有限；

(4) 算法的设计与分析成为一个非常重要的内容。

社会发展的需要就是学科发展的泉源，计算技术的革命性进步过程为数学工作者提供了一个广阔的研究领域，一定会有许多新的思想、新的方法被提出来，数学的发展也将会随之有一个新的飞跃。

1.2 运筹学发展简史

“就技术发明对战争的影响或就为未来事件的筹划来说，运筹学可认为是起源于古中国或古埃及”[13]。的确，朴素的运筹思想在中国古代历史发展中源远流长。公元前 6 世纪的著作《孙子兵法》研究如何筹划兵力以争取全局胜利，是我国古代军事运筹思想最早的典籍。同一时期，我国创造的轮作制、间作制与绿肥制等先进的耕作技术暗含了现代运筹学中二阶段决策问题的雏形。总之，统筹、多阶段决策、多目标优化、合理运输、选址问题、都市规划、资源综合利用等运筹思想方法屡见不鲜，但很少有人从数学的角度将这些运筹思想和方法进行提升。

西方国家的科学家一方面，试图从朴素的运筹问题和运筹思想中发展新的数学内涵，另一方面，又试图利用已经建立的数学概念和方法解决实际问题。1736 年，欧拉用图论思想成功地解决了哥尼斯堡七桥问题。1738 年，贝努利首次提出了效用的概念，并以此作为决策的标准。1777 年，布冯发现了用随机投针试验来计算的方法，这是随机模拟方法（蒙特卡洛法）最古老的试验。1896 年，帕累托首次从数学角度提出多目标优化问题，引进了帕累托最优的概念。1909 年，丹麦电话工程师埃尔朗利用概率论，开展了关于电话局中继线数目的话务理论的研究，开创了排队论研究的先河。1912 年，策梅洛首次用数学方法来研究博弈问题。

现代运筹的思想萌芽于一战时期，这段时间人们开始用数学的方法探讨各种运筹问题，只是由于人力不足，资料有限，经费不足的原因限制了运筹学研究的深度。1915 年，哈里斯对商业库存问题的研究是库存论模型最早的工作。1916 年，兰彻斯特开展了关于战争中兵力部署的理论，这是现代军事运筹最早提出的战争模型。1921 年，博雷尔引进了博弈论中最优策略的概念，对某些博弈问题证明了最优策略的存在。1926 年，博鲁夫卡最早发现了拟阵与组合优化算法之间的关系。1928 年，冯 · 诺依曼提出了二人零和博弈的一般理论。1932 年，威布尔研究了维修问题和替换问题，这是可靠性数学理论最早

的工作。1939 年，康托罗维奇开创性地提出线性规划，并据此模型研究了工业生产的资源合理利用和计划等问题，因而在 1975 年获得了诺贝尔经济奖。上述这些先驱性的成就对运筹学的发展有着深远的影响。

现代运筹学真正起源于 20 世纪二次大战期间，并因其在军事作战方面的大量成功运用而得到蓬勃发展。1935−1938 年被视作运筹学基本概念酝酿期。英国为了有效地运用新研制的雷达系统来对付德国飞机的空袭，在皇家空军中组织了一批科学家，进行新战术试验和战术效率的研究，并取得了满意的效果。他们把自己从事的这种工作叫做 “Operational Research”(译作 “运筹学 ”) 。二战期间英军每一个大的指挥部大都成立了这种运筹研究小组。在美国和加拿大的军事部门也成立了若干运筹研究小组，称之为 “Operations Research” 。他们广泛地研究有关战果评价、战术革新、技术援助、战略决策和战术计划等问题。美国运筹学会创始人之一莫尔斯 (曾获美国总统功绩奖章) 在 20 世纪 50 年代初给运筹学做出了如下定义：“运筹学是为领导机构对其控制下的业务活动作决策时提供定量依据的科学方法 ”，它反映出运筹学初期的主要作用。

1949 年，美国成立了著名的兰德公司，与此同时，许多运筹学工作者逐步从军方转移到政府及产业部门进行研究。在新的、更宽阔的环境中，运筹学的理论和应用研究得到了蓬勃的发展。随之产生的理论成果主要有线性规划、整数规划、图论、网络流、几何规划、非线性规划、大型规划、最优控制理论等；同时也为欧美等国创造了巨大的社会财富。

研究优化模型的规划论，研究排队 (或服务) 模型的排队论 (亦称随机服务系统), 及研究博弈模型的博弈论 (亦称对策论) 是运筹学最早的三个重要分支，通常称为运筹学早期的三大支柱。随着学科的发展和计算机的出现，现在分支更细，名目更多；例如线性与整数规划、图与网络、组合优化、非线性规划、多目标规划、动态规划、随机规划、博弈论、随机服务系统、库存论、可靠性理论、决策分析、马尔可夫决策过程 (亦称马尔可夫决策规划) 、搜索论、随机模拟、管理信息系统等基础学科分支，工程技术运筹学、管理运筹学、工业运筹学、农业运筹学、军事运筹学等交叉与应用学科分支也先后形成。

在运筹学快速地发展和不断地拓广其应用领域的过程中，至少如下两个因素起了非常重要的作用：

(1) 运筹学方法的实质性改进。二次世界大战以后，许多参加过运筹学小组或者听说过这项工作的科学家都对相关领域进行了更深入的研究。很多欧美国家的大学里设立了运筹系、管理科学系、工业工程系、系统科学系，在这些系和数学系及计算机科学系开设了运筹学及其一些分支学科的课程，培育了一大批运筹学及相关领域的人才。

(2) 现代计算机的诞生、发展和应用。运筹学中的复杂问题的求解通常需要进行大量的计算工作，借助于计算机人们所能完成的计算工作量要比手工计算快千百万倍。在 20 世纪 50 年代前后，美国的军事分析领域中的许多测算多数都是借助滑动计算尺和福利登计算器完成的；而资源分配方案是通过对固定在大桌子上的效用图，用直尺和三角板测量直线的斜率得到的 [1] 。计算机及相关软件的普及更易于人们应用运筹学的方法解决实际问题，从而大大地推动了运筹学的进一步发展。比克斯比 [1](美国工程院院士，曾任数学规划学会主席) 在回顾求解线性规划的实际问题的几十年的发展历程时指出：“计算机的进步对线性规划的实际应用起到了巨大的作用；我们知道，如果没有计算机的话，那么线性规划根本就不可能存在。” 拉森 [1](曾任美国运筹学会主席) 在回顾他在美国公共部门开展运筹学实践活动的经历时，谈到都市警察急救通讯中心应答的排队系统模型的

例子。他指出："实现快速调配的限制看来不在于运筹数学，而是计算机的性耗比，地理信息系统的用户接口技术以及地理信息数据库的普遍化。所有这些因素合在一起在当今似乎产生一种有广泛需求的管理工具。"

1.3 中国运筹学发展简史

现代运筹学被引入中国是在 20 世纪 50 年代后期。中国第一个运筹学小组是在钱学森、许国志先生的推动下，在 1956 年于中国科学院力学研究所成立。钱学森先生在麻省理工学院取得硕士学位，在加州理工大学取得博士学位后成为该校的第一位戈达德讲座教授。许国志先生在堪萨斯大学取得博士学位后，在马里兰大学流体力学和应用数学研究所当研究员。他们两人于 1955 年回到祖国致力于新中国的科技事业。可见在中国运筹学一开始就被理解为与工程有密切联系的学科。

1959 年，第二个运筹学部门在中国科学院数学研究所成立，这是大跃进中数学家们投身于国家建设的一个产物。力学所小组与数学所的小组于 1960 年合并成为数学研究所的一个研究室，当时的主要研究方向为排队论、非线性规划和图论，还有人专门研究运输理论、动态规划和经济分析 (例如投入产出方法) 。 1963 年是中国运筹学教育史上值得一提的一年，数学研究所的运筹学研究室为中国科技大学应用数学系的第一届学生 (1958 届) 开设了较为系统的运筹学专业课，这是第一次在中国的大学里开设运筹学专业和授课。今天在中国，运筹学的课程已成为几乎所有大学的商学院、工学院乃至数学系和计算机系的基本课程了。

20 世纪 50 年代后期，运筹学在中国的应用集中在运输问题上。其中一个代表性工作是研究"打麦场的选址问题"，解决在手工收割为主的情况下如何节省人力。此外，国际上著名的"中国邮路问题"模型也是在那个时期由管梅谷教授提出的。可以看出现在非常热门的"物流学"，在当时就形成一些研究雏形，但可惜中国在计划经济体制下，大工业落后，使我国在相当长的时期中远离了当代"物流学"的发展主流。

中国运筹学早期普及与推广工作的亮点是由华罗庚先生点燃的。在文化大革命期间，他身为中国数学会理事长和中科院数学所所长，亲自率领一个小组，大家称为"华罗庚小分队"，到农村、工厂讲解基本的优化技术和统筹方法，使用于日常的生产和生活中。自 1965 年起的十年中，他到了约二十个省和无数个城市，受到各界人士的欢迎，他的辛勤劳动得到了毛泽东主席的肯定和表扬。华罗庚先生这一时期的推广工作播下了运筹学哲学思想的种子，大大推动了运筹学在中国的普及和发展。直到今天，许多中国人还记得"优选法"和"统筹法"。

20 世纪六七十年代，中国各种政治运动不断，机关单位、科研院所、工矿企业都受到了巨大冲击。令人钦佩的是，在如此动荡和艰苦的环境下，许国志和越民义等中国运筹学的开拓者们始终未停止运筹学的研究和实践。他们在排队论的瞬时概率性态问题、非线性规划梯度算法收敛问题、组合优化中的排序问题等取得了一批重要成果，得到了国外同行的关注和好评。美国数学会 1977 年出版的访华报告中指出："在应用数学方面，中国在诸如排队论等领域已十分讯捷地达到了这些领域的前列"。相关成果在 1978 年全国科学大会上获得大会奖和中科院重大成果奖；也为中国运筹学的发展打下了坚实的基础，同时培养了一批学科带头人和骨干。

自 20 世纪 80 年代以来，随着改革开放，国内外学术交流不断增加。中国运筹学有

了快速的发展，运筹学工作者取得了一批有国际影响的理论和应用成果。例如，将全局最优化、图论、神经网络等运筹学理论及方法应用于分子生物信息学中的若干应用基础性问题的研究中；将优化及决策分析方法，应用于金融风险控制与管理、资产评估与定价分析模型等相关问题研究中；将随机过程方法应用于排队网络的数量指标分析中；将随机动态规划模型应用于供应链管理中的多重决策的最优策略计算中。特别是，他们因在组合优化、生产系统优化、图论和非线性规划领域的突出贡献曾先后获得国家自然科学奖二等奖四项，因在经济信息系统评估和粮食产量预测方面取得突出成绩曾先后获得国际运筹学会联合会运筹学进展奖一等奖二项。

此外，中国运筹学工作者继续坚持运筹学研究与国民经济建设等重大项目和问题紧密结合。他们在山东省与大连市经济发展计划的制定，兰州铁路局铁路运输的优化安排，中外合资经营项目经济评价，宝钢和武钢等大型企业的调度优化，若干国家重大工程中的综合风险分析等方面，都发挥了积极的作用，产生了良好的经济效益和社会效益。

最后值得一提的是，在中国运筹学几十年的发展过程中，中国运筹学会起到了非常重要的作用。中国运筹学会于文化大革命后的 1980 年成立，当时它作为中国数学会的一个分会。第一届全国大会在山东省济南市召开，华罗庚被选为第一届理事长，副理事长为许国志和越民义。中国运筹学会在 1982 年加入国际运筹学联合会 (IFORS), 成为其成员。在时任中国科协主席的钱学森的大力支持下， 1992 年中国运筹学会获批从中国数学会独立出来，成为国家一级学会。这是中国运筹学发展史上的一个重要事件，它凸显了运筹学以数学为基础，但与数学学科有本质不同的特征。目前，中国运筹学会有十四个专业分会，涵盖了现今运筹学的大多数分支方向。它在未来中国运筹学的发展中将起到更大的作用。

2 运筹学发展的状况

六十多年以来，运筹学在研究与解决复杂的实际问题中不断地发展和创新，各种各样的新模型、新理论和新算法不断涌现，有线性的和非线性的、连续的和离散的、确定性的和不确定性的。至今它已成为一个庞大的、包含多个分支的学科 [4], 其中一些已经发展得比较成熟，另外一些还有待完善，还有一些才刚刚形成。

2.1 数学规划

数学规划是在决策变量满足一定约束下求一个或多个函数的极小值或者极大值。它以大量实践中抽象出来的典型最优化模型为研究对象，利用数学工具研究这些模型的数学性质，构造与实现求解方法，以及将算法应用于实际问题。自从 1939 年康托罗维奇提出线性规划模型、 1947 年丹齐格提出求解线性规划问题的单纯形法、卡罗胥和库恩与塔克先后分别独立地给出一般非线性规划问题的最优性条件以来，数学规划得到了快速发展，形成了多个分支。

2.1.1 线性规划

自 1939 年苏联数学家康托罗维奇提出线性规划问题和 1947 年美国数学家丹齐格求解线性规划问题的通用方法 — 单纯形法以来，线性规划可以说是研究得最为透彻的一个研究方向。单纯形法统治线性规划领域达 40 年之久，而且至今仍是最好的应用最广泛的

算法之一。虽然它在最坏情况具有指数复杂性，但在平均意义下已经证明是一个多项式算法。目前，关于单纯形算法的研究主要在于如何选取主元。另一大类算法是内点法，它起源于 1979 年苏联数学家卡奇扬提出的多项式椭球算法，而因 1984 年美籍印度裔数学家卡玛卡提出的多项式时间算法而迅速成为国际热点，各式各样的算法大量涌现：仿射变换法、势函数方法、对数罚函数法、路径跟踪法、原始对偶法、不可行内点法等等。目前线性规划的内点法也趋于成熟，这方面的研究者们目前大都致力于以线性规划作为特例的锥规划，以及如何利用线性规划松弛求解整数规划等方面的研究。然而，就线性规划而言，是否存在强多项式算法仍然是一个重要且困难的理论问题。

2.1.2 非线性规划

等式约束规划问题的最优性条件可追溯到拉格朗日，一般非线性规划问题的最优性条件则归功于卡罗胥和库恩与塔克，是他们奠定了非线性规划的理论基础。然而，目前还有不少人试图在没有强互补的条件下进行理论分析和算法研究。对偶理论是非线性规划理论研究的另一个重点。在计算方法方面，早期的方法以最速下降法和牛顿法为主。1959 年拟牛顿法的引入和 1964 年非线性共轭梯度法的出现，吸引了许多研究者研究非线性规划。目前，序列二次规划算法是一类被用于广泛求解一般非线性规划的有效算法，同时也还有许多研究者在为改善这类算法作努力，其中包括序列线性规划算法以及内点算法等。非线性规划算法通常使用线搜索策略选取步长，或通过求解信赖域子问题而得到新的迭代点。这两个方面的研究非常基本，但仍有改善的空间。 2001 年弗莱彻和勒斐通过将非线性规划问题视为双目标问题而提出的滤子方法和 2002 年鲍威尔提出的基于二次插值的直接法是近些年来两个重要的算法进展。对于约束规划问题，如何推广鲍威尔的直接法；对于大规模问题，如何设计子空间算法；以及如何有效求解一般非线性规划的全局最优，和一些来自于图像处理等领域的特殊的非光滑问题是目前非线性规划比较重要的研究问题。总之，尽管在表面上看非线性规划已经有许许多多的研究，但由于非线性的存在，好的研究结果还将会不断出现，并且随着问题的不同而产生更加具有针对性的特殊算法。

2.1.3 锥规划

锥规划是线性空间中凸锥上的数学规划，它是线性规划与非线性规划的推广。自 20 世纪 90 年代中期开始，它一直是国际优化领域的研究热点。相关的研究带动了数学规划学科的深入发展，促进代数、群论、拓扑学、几何学、非线性分析等分支在数学规划中的融合，及优化理论与技术在工程、交通、经济与金融、管理等领域的广泛应用。

目前的锥规划方面的研究成果主要包括以下四个方面：

(1) 二阶锥优化和半定优化。线性二阶锥优化和半定优化已经得到了很好的发展，并且广泛地应用于各种实际问题。近些年，人们开始致力于非线性二阶锥优化和非线性半定优化的理论与算法的研究。

(2) 对称锥优化。 20 世纪末国际优化专家开始致力于这一领域的研究工作，主要集中在求解对称锥上线性优化问题的内点算法方面。近几年，人们开始探讨对称锥上的非线性优化问题和非凸优化问题的理论与各种算法。

(3) 齐次锥优化。齐次锥的理论早在 1963 年就有相关研究，但齐次锥优化问题的研究最近才开始。

(4) 双曲锥优化。这方面目前只有很少的理论研究，需要寻求合适的工具开展其理论

与算法的研究。

2.1.4 矩阵规划

在众多的科学领域与社会经济中，很多优化问题的决策变量是一个具有特殊结构的矩阵，这样的优化问题被称为矩阵优化或者矩阵规划。矩阵规划的早期研究可以追溯到 1981 年，然而真正的研究是在 20 世纪 90 年代，它以被誉为 21 世纪的线性规划 — 半定规划为研究起点。至今，线性半定规划的理论趋于完善，人们正在发掘它在实际中的应用。然而，目前的数值软件只能有效地求解矩阵维数小于 500 的小规模线性半定规划问题，因此，开展大规模半定规划的数值方法研究是当前一项十分迫切而又重要的课题。此外，由著名华裔数学家陶哲轩等人在 2006 年提出的压缩传感理论而引发的低秩矩阵问题，其理论与算法研究是当今优化领域与信息科学领域 (例如，信号处理、图像恢复与重建) 共同关心的热点研究课题。在未来一段时期里，矩阵 (锥) 优化理论与算法、张量 (锥) 优化理论与算法、多项式优化理论与算法研究等方向必将引起人们的关注。

2.1.5 变分不等式与互补问题

变分不等式与互补问题是一类具有普遍意义的均衡优化模型。它不仅为非线性优化、极大极小、博弈论、非线性方程、微分方程等提供了一个统一的理论框架，而且在力学工程、交通、经济、管理等实际部门有广泛的应用。互补问题首先由丹齐格和科特尔于 1963 年提出。次年，科特尔在他的博士论文中第一次提出求解它的非线性规划算法。变分不等式问题首先被哈特曼和斯塔姆巴切在 1966 年提出。后来发现，变分不等式是互补问题的一个推广，且其数学性质和应用有惊人的相似之处。所以，它们经常在文献中成对出现。变分不等式与互补问题被提出后，很快引起了当时运筹学界和应用数学界的广泛关注和浓厚兴趣，许多人参与了这类问题的研究。经过 40 余年的探索，特别是 20 世纪最后 10 年的研究，人们在理论与算法方面取得了丰富、系统的成果，并在科技与经济中得到了广泛的应用。

当前主要是对于广义变分不等式和锥互补问题的研究，而对于不确定信息下变分不等式和互补问题的研究无疑是发展的必然。归纳起来，对它们的研究可分为理论与算法两方面：前者主要研究解的存在性、唯一性、稳定性与灵敏度分析、以及它们与其他数学问题的联系等；后者则主要建立有效的求解方法及相应的理论和数值分析。

2.1.6 整数规划

整数规划是带整数变量的最优化问题，即求解一个全部或部分变量为整数的多元函数受约束于一组等式和不等式条件的最优化问题。整数规划的历史可以追溯到 20 世纪 50 年代，丹齐格首先发现可以用 0-1 变量来刻画最优化模型中的固定费用、变量上界、非凸分片线性函数等。他和富尔克森、约翰逊对旅行商问题的研究成为后来分支定界法和现代混合整数规划算法的开端。1958 年戈莫里发现了第一个一般线性整数规划的收敛算法 —— 割平面方法。随着整数规划理论和算法的发展，整数规划已成为应用最广泛的最优化方法之一，特别是近年来整数规划算法技术和软件系统的发展和推广，整数规划得到了广泛的应用和发展。

整数规划问题的困难和挑战来源于三个方面：一是大部分整数规划问题都是 NP- 难的，故本质上不太可能存在和线性规划和凸规划一样有效的算法；二是对整数点集合 (如多面体格点理论和全单模理论) 和整数变量的函数在数学上缺乏有力的理论和工具；三是实际问题的规模往往超过现有算法的求解能力，尽管现有的一些整数规划软件可以求解

任意线性、二次和非线性整数规划问题，但往往不能处理来源于实际问题的整数规划模型，例如运输和交通中的大规模 0-1 混合线性整数规划问题，金融优化中的离散约束问题等。整数规划未来发展方向和关键问题包括：(1) 整数多面体凸包的刻画；(2) 随机整数规划；(3) 多层整数规划；(4) 混合 0-1 二次整数规划；(5) 协正规划；(6) 半定整数规划。

2.1.7 动态规划

当系统模型具备马尔科夫性，同时目标函数可分且嵌套单调时，基于贝尔曼提出的最优性原理，运用动态规划可将求解多阶段全局最优决策问题分解为一系列在各个时间段上的局部优化问题。相比其它解法，特别是在有扰动或在随机情况下，动态规划总是能有效地提供一个在当前信息集下的最优反馈控制策略。在过去的若干年里，动态规划取得了不少可喜的进展，特别是它被扩展到多目标动态规划；动态规划应用在本世纪前后的一个重大突破是其在海量数据分析中的应用，特别是人类基因组计划完成以后，它成为生物信息学的一个基本模型和工具。

然而，在克服被贝尔曼称之为“维数灾”的这一动态规划致命弱点的方面，至今尚未取得突破性的进展。所以寻求克服维数灾的有效算法对动态规划在高维问题中的应用具有它的紧迫性。另外，求解不可分优化问题得到的最优策略并不满足最优性原理，或不具备时间一致性。这牵涉到不可分优化问题模型本身的合理性。因此怎样找出一组可分优化问题来逼近一个给定的不可分优化问题也对动态规划发展具有显然的重要性。

2.1.8 向量优化

近几十年来向量优化 (亦称多目标优化) 理论研究有了迅猛发展，在各种解的存在性、稳定性以及最优性条件等方面获得了丰富的结果，并创造性地建立了向量优化问题解集的结构定理、连通性定理和稠密性定理，被应用到经济问题中。通过向量广义凸性的研究，很好地处理了一大类非线性向量优化问题；通过提出向量变分不等式模型，开拓了研究向量优化问题的新方向。由于向量优化中衡量向量“大小”的是不完全的偏序，致使大量的向量优化问题没有解，甚至在向量目标函数光滑并有下界的情况下没有数值优化意义下的近似解。由于任何优化问题算法每一步获得的迭代项都是该优化问题的一个近似解，因此研究向量优化问题近似解的存在性以及拉格朗日和卡罗胥 - 库恩 - 塔克等优化性条件仍然是具有基础性作用的主要问题也是求解算法的有力保障。分式向量优化问题是具有重要经济意义的数学模型，关于这类模型的求解问题，也是今后向量优化问题研究的重点。利用次微分，使用变分分析技术和方法研究非光滑向量优化问题，就变分分析和向量优化进行交叉研究仍将是未来很有生命力的方向。

2.1.9 全局优化

全局优化是非线性规划的一个分支，主要研究求解非凸优化问题的全局最优或近似全局最优解。由于非凸优化问题可能存在多个不同的局部最优点，基于导数信息的卡罗胥 - 库恩 - 塔克最优性条件不再适用于刻画非凸问题的全局最优性，从而，经典的局部优化方法不能保证收敛到全局最优解。全局优化较系统的研究始于 20 世纪 70 年代。图伊和霍斯特是早期全局优化研究的先驱者，他们在凹规划的系统研究成果使全局优化开始形成一门真正的学科。在 90 年代初全局优化作为非线性规划的一个分支开始受到广泛的关注，越来越多的研究者开始从事该领域的研究，特别是对一些具有特殊结构的非凸优化问题的研究取得了许多突破性的成果，如非凸二次规划、非凸多项式规划、机会约

束问题的凸逼近，以及在实际应用中遇到的许多特殊形式的非凸优化问题的研究都有很多深刻的研究成果。一些基于分支 - 定界的全局优化通用软件的发展及其在优化建模系统中的嵌入应用使学术界和工业界可以方便地求解一定规模的非凸问题的全局解。

全局优化问题的困难在于非凸性使卡罗胥 - 库恩 - 塔克条件一般不足以保证全局最优性，从而我们无法利用局部优化算法寻找全局最优点。本质上，由于导数是局部性质，因而不能期望基于导数性质的传统优化算法有希望求到全局解，全局算法需要函数和问题的全局性质。目前的数学理论很难或无法刻画一般多元函数的全局性质，这是全局优化问题的本质困难所在。全局优化的未来发展方向和关键问题包括：(1) 凸逼近和凸松弛方法；(2) 非凸二次规划；(3) 基于模拟仿真技术的全局优化算法；(4) 特殊结构的全局优化问题。

除了上面所介绍的九个分支外，数学规划在近些年来出现了若干新的分支。例如，近十年来国际上对鲁棒优化 [5] 、微分方程所控制的优化、多项式优化、稀疏优化的研究相当重视，这些新方向的研究十分活跃。在 2012 年第 21 届国际数学规划大会上这些新兴的分支都安排了专题报告。我国数学规划工作者，特别是青年科技工作者要充分重视这些新的方向，力争在国际上刚刚起步的阶段参与研究，这样有可能很快取得国际制高点。

2.2 组合优化

组合优化是 20 世纪 60 年代逐渐发展起来的一个交叉学科分支，它的研究对象是有限集合上的极值问题。一个组合优化问题由三部分构成：已知条件的输入、可行解的描述、目标函数的定义。经典的组合优化问题包括网络流、旅行商、排序、装箱、着色、覆盖、最短网络等等。组合优化的一个理论基础是计算复杂性理论，据此组合优化的可以分为两类： P- 问题类和 NP- 难问题类；属于前者的问题有多项式时间算法，属于后者的问题一般认为不存在多项式时间算法，通常采用精确算法、启发式算法和近似算法等方法求解。精确算法包括简单枚举法、分而治之法、分支定界法、动态规划法等；启发式算法包括贪婪策略、局部搜索、禁忌搜索、神经网络、模拟退火、遗传算法等；近似算法包括贪婪策略法、局部搜索法、原始对偶法、划分法、松弛法、内点算法、半定规划等；这些算法并不是彼此无关的。特别是近十几年，针对某个问题的特点，将多个已有算法结合起来设计一个高效的集成型算法得到了发展。组合优化与图论、组合学、数理逻辑等有密切关系，在计算机科学、信息科学、管理科学和生命科学等学科有广泛的应用。

2.2.1 图论

1736 年欧拉解决了哥尼斯堡的七桥问题，这被公认为图论的第一个结果。此后的 200 多年里，图论并未被视为是数学的一个分支，图论的问题通常被看作一类智力游戏。然而，自 20 世纪 30 年代开始，图论通过其广泛的应用以及与数学其他分支的紧密联系日显其重要性。尤其是，图论作为计算机科学的基础之一，在运筹学中扮演着不可或缺的角色，很多非常难解的组合优化问题都属于 NP- 完全的图论问题。

在图论近几十年的研究中，学者们在取得一系列重要成果的同时，提出了包括整数流、子图覆盖和经典拉姆齐函数的估值在内的许多猜想或未解的难题 [6] 。未来受人关注的一些课题包括 [7]:(1) 图论中大多数结果都可以推广到超图中（通常推广方式不止一种），相应的超图问题有很多没有解决。对超图的相应性质和问题的研究不仅仅可以发现

新的有意义的研究课题，而且还有助于解决图论中的一些已有问题。 (2) 对随机图的一些特殊性质的刻画，特别是随机图在生成的过程中，其结构有时会发生突变，这种变化常常与日常的某种物理现象相关，对这种相变现象的研究是非常具有挑战性的课题。 (3) 对超大图或者无限网络的研究将是图论的一个新热点方向。它有广泛的应用背景，其中包括实实在在的计算机通讯网络、无形但无处不在的万维网、基于因特网的社交网络、人脑的神经网络等等。对这些超大图的性质的研究，需要新的数学工具；引入连续化方法，让这些超大图趋于 “无穷 ” ，然后研究其 “极限图 ” 的性质，是一个探索方向。这一方向同目前受到物理学界、控制论界重视的 “复杂网络 ” 研究方向不谋而合。

2.2.2 近似算法

近似算法是求解组合优化问题的一类多项式时间算法，它们尽管不能确保对问题的每一个实例都可以求得最优解，但是可以保证求得的解的目标值与最优解的目标值相差不多。自 20 世纪 60 年代末格雷厄姆在研究排序问题时提出第一个近似算法以后，特别是 70 年代初库克首次证明了存在 NP- 完全问题以来，为各种各样的组合优化问题设计近似算法就一直是组合优化领域的一个重要研究方向。它主要包括三个方面：设计近似比越来越小的近似算法；设计运行时间越来越短的近似算法；证明近似比的下界或者不可近似性。已有的大量研究主要都集中在第一个方面，人们先后提出了对偶、半定规划、随机算法、平面划分和次模函数等技巧。第二方面的工作主要是针对存在多项式时间近似方案的 NP- 难问题，而第三方面的工作主要是利用 20 世纪 90 年代阿罗拉等人提出的概率可验证系统。这一方向中有很多问题有待解决。

2.2.3 组合多面体

给定一个线性系统，判定其是否定义了一个整数多面体、是否为全对偶整数系统、是否为盒式对偶整数系统，这三个判定问题是整数规划的核心问题，也构成了组合多面体理论的基本内容；这是因为当一个整数规划实例是由一个整数多面体所定义的，那么它可以在多项式时间内求解 (一般的整数规划是 NP- 难解的) 。包括罗瓦兹、施瓦维尔和埃德蒙兹在内的许多著名数学家都研究过组合多面体的结构刻画、计算复杂性等相关问题。另外，由于很多组合优化问题都可以非常容易地表示为整数规划问题，因而这些问题也是组合优化的重要研究课题。比如，组合优化中的一大类问题都可以用超图中的装填问题和覆盖问题来描述；装填问题是求含有边数最多的装填，而覆盖问题是求一个顶点覆盖其中所有顶点的权值之和最小。已经知道装填问题和覆盖问题都是 NP- 难解的，因此除非 P=NP, 它们都不存在多项式时间的算法。这两个组合优化问题都可以通过组合多面体的理论和方法研究，特别是：有向图和无向图上的圈装填和覆盖对偶关系和有向图上的装填和反馈集覆盖对偶关系。

2.2.4 组合数学

组合数学是近几十年来发展最为迅速的一个数学分支，它与分析、代数、数论、概率论等基础数学的多个学科有密切联系，组合结构已经成为许多数学理论不可或缺的组成部分。离散结构在信息科学、物理学、生物学和化学等众多领域中大量出现，为组合数学的发展提供了强大的动力。近年来，组合数学的思想和方法在数据结构和算法分析中都有重要的应用；利用符号计算中的算法，数学软件正在为越来越多的数学领域服务。组合设计为现代移动通信以及光纤通信中的编码技术提供了基础；它还应用于身份认证、密钥分享、数字签名等密码系统的设计中。此外，利用组合数学为处理基因序列比对和

物种关系分析中的大量数据提供了一个有效的途径。组合数学在信息时代将有着非常广阔的应用研究前景。

2.2.5 生物分子网络

生物分子网络是系统生物学的基本出发点和主要研究对象，因为从系统的观点看，生命系统是通过基因之间、蛋白之间、代谢物之间以及基因、蛋白质、代谢物、环境与功能和表象之间的相互作用来运行的，正是这些相互作用确定了细胞、组织、器官和生物个体的动态行为。所以系统生物学的根本挑战在于建立完整的、细致的生物分子间联系的描述，并藉此在分子水平及系统的观点来探索生命机理，解释复杂生命现象。最优化理论包括连续优化、组合优化和网络优化等运筹学方法和理论在生物分子网络的研究中都起到了重要作用。典型的研究内容和问题包括：基因调控网络和蛋白质相互作用网络的数学建模；从生物进化角度出发的生物分子网络进化模型和算法；从高通量生物实验数据出发的网络重构算法；着眼于功能预测与标注的基因蛋白功能联系网络的构建和分析，以及生物分子网络的功能模块探测、网络比对等系统生物学和生物信息学算法。这些研究可以用于蛋白质功能预测和注释，以及进一步地为研究某些与特殊疾病相关的蛋白质功能注释提供有效的工具。

2.3 随机优化

随机最优化问题是特指带有随机因素的最优化问题，需要利用概率统计、随机过程以及随机分析等工具。所谓的随机因素，包括环境的随机因素、控制变量不确定因素、准则值的不确定因素等等。例如，在考虑水库优化调度问题的时候，天然来水一般是三阶皮尔逊分布的随机变量。在考虑库存管理问题时，变动的需求常常考虑为外生的随机变量。这些都属于环境的不确定因素。在排队系统中服务速率确定后，真实的服务时间依然是随机变化的，这属于控制变量的不确定因素。使用药物最终能够达到的效果往往不是确定的，评判最优的值函数在很多问题中也具有不确定性等等。通常人们处理随机因素的第一种方法是期望值方法，将随机的因素用它的期望值代替，将问题转化为确定性问题考虑。第二种方法是在概率意义下考虑优化问题。例如在置信区间范围内考虑优化问题，将问题转换为概率约束或者是机会约束的优化问题；又例如考虑极大化某些事件的概率问题，也称为相关机会约束问题。第二种方法相对于期望值方法的优点是考虑到各种风险的影响，缺点是使得问题的处理变得相对困难。

2.3.1 排队论

排队论模型被人们广泛用于半导体生产加工与设计、计算机通讯网络、交通运输等行业。随着科学技术的发展，描述上述类型的排队网络变得极为复杂，使得与传统的排队网络有很多本质的区别。当今人们对复杂的随机排队网络关心的问题有三个：一是它的遍历性问题，即给定一个随机排队网络、若网络中每一服务台的服务强度严格小于 1，那么描述系统的马氏过程是不是遍历？二是在便利条件下，当每一服务台服务强度趋向于 1，描述系统的指标如队长、等待时间的扩散逼近是不是存在？三是在遍历的条件下如何找出最优的服务规则？第一个问题归结为针对排队系统、找出构造李雅普诺夫函数的一般有效方法，第二个问题的解决归结为具有可料性的动态补问题。

2.3.2 马氏决策

随着人们对实际问题的深入理解，马氏决策理论的应用范畴越来越广泛。因此，提出的马氏决策理论问题越来越具有特殊性和广泛性。研究特殊结构的马氏决策理论越来越具有重要的意义。例如大规模对抗与合作系统的问题、金融监管的需求、一般监管理论的研究等等，都为马氏决策理论带来了新挑战。非标准准则的深入研究是应对这些需求的必要条件，如有超大状态空间问题的求解问题、带有纳什均衡的多阶段决策问题、带有适应性参数影响的非时齐问题等等。这些研究工作对于国民经济中的重大问题研究有着重要的帮助。

2.3.3 复杂系统可靠性

现代化技术和设备的飞速发展和更新，使得人们面对的系统越来越复杂，诱发了许多人们无法理解的现象，例如：利用原来的系统可靠性理论得到的可靠性与实际系统人们感觉到的完全不同。如何发展相关的数学分析工具以解释这些问题就显得非常重要。在人们已经做出的工作中，已经出现一些有意义的研究，例如：功能相依性分析、功能冗余性研究、概率理论的深入研究等等。因此，如何将系统可靠性理论的结论和方法上升到解决复杂系统可靠性问题中是核心的难点。

2.3.4 软件可靠性

软件是随着计算机硬件诞生的同时产生的，其重要程度是不言而喻，现在已经成为人们生活中必不可缺的成份，特别是科技水平越高，就越离不开软件的支持。由于软件系统的高度复杂性 (其复杂程度远远高于通常的复杂系统，事实上，软件系统往往不是一个有限的系统了) 导致了人们通常在系统可靠性中使用的方法完全无效。人们有必要探索有效的相关理论，特别是数学工具，以有效地研究软件可靠性问题。事实上，将软件可靠性问题与软件测试过程结合是一种有效的方法。一方面，可以有效地指导软件的测试过程 (目前，用于软件测试的费用已经占到整个软件开发费用的 50%) ；另一方面，可以正确地评估软件的可靠性。将测试过程与软件可靠性分析结合的过程中，人们发现必须发展诸如随机过程、排队理论、马氏决策理论以及相关的数学方法，以适用于分析软件的问题。

2.3.5 供应链的优化设计

随机环境下的复杂供应链系统的优化与设计问题是从管理科学中提出的数学问题。与传统的供应链模型相比，描述系统的随机性不再由简单的普阿松过程与独立同分布随机变量序列给出，而由相依的一些高斯过程来刻画。通常面临三个基本数学问题：一是如何来找出求解人们所关心的系统数量指标的一般方法？二是找出这些求解方法之后，基于这些解如何找出最优策略？三是供应链协调时，如何找出最优的协调策略即平衡点。这些问题的解决需要借助随机分析、随机最优控制和博弈论，且根据模型的自身特点，发展一套新的数学方法和理论。

2.3.6 随机模拟

随机模拟这一学科是人们从运筹学研究过程中的构造模型、提出解案、进行检验这些环节提出来的，它随着计算机这门学科的发展而产生和发展的。根据所处的不同环节，随机模拟的研究通常有两种不同的目的：其一，以计算机为工具，对所研究问题在系统建模的基础上，对系统进行动态的模拟、实时追踪系统的动态变化行为，从而模拟给出系统的最优或次最优模拟解；其二，人们已经构造了模型，且提出解案，利用计算机模

拟来检验模型的合理性和解案的有效性与正确性。通过所研究实际问题的特征，随机模拟可粗略分为静态模拟和动态模拟；根据所研究实际问题的自身性质，可以分为离散型模拟和连续性模拟。运筹学中随机模拟的研究一般遵循如下几个步骤：第一步，对实际问题进行系统地、全面地分析，从而构造模型；第二步，根据管理者对实际问题所积累的数据初步判别所构造模型的合理性和科学性；第三步，在已构造的模型基础上进行模拟，根据模拟的结果看是否与实际问题想吻合，若不是，需进一步调整模型直到相吻合为止；第四步，对建好的模型进行随机模拟运行和调试结果分析，然后决定是否用随机模拟的结果进行实施，提出原实际问题的解决方案。

随机模拟是针对实际问题含有随机因素所建立的模型进行的模拟。这种模型的定量描述往往用随机变量和随机过程，由此随机模拟研究中所形成的理论问题有： (1) 均匀或非均匀随机数的生成； (2) 离散时间的马氏或半马氏过程的模拟； (3) 模拟输出的分析 (包括用自回归过程、再生过程、谱分析、平稳非平稳时间序列方法); (4) 方差缩小方法 (如使用对偶变量法、共同随机数法、重要抽样法、控制变量法); (5) 随机优化 (如极大似然法、扰动分析、随机逼近等) 。可以说随机模拟是运筹学理论研究和实际应用之间的一个桥梁，它受到越来越多的运筹学理论研究工作者和计算机领域学者的重视，它是运筹学、管理科学、计算机科学领域的一个重要分支。

2.4 博弈论

现代博弈论 (亦称对策论) 起源于 20 世纪初，以策梅洛、博雷尔和冯 · 诺依曼等人的工作为代表。二次世界大战为博弈论的应用提供了广泛的背景，加快了博弈论体系的形成。冯 · 诺伊曼和摩根斯顿在 1944 年合著的《博弈论与经济行为》完善了博弈论的数学理论，使之系统化和公理化。此外，纳什等人也对博弈论做出了重大贡献，奠定了非合作博弈的基础。博弈论的研究对象与社会、政治、军事、经济、科学、技术等很多领域都有密切关系和广泛应用，一直是运筹学及相关领域的重要研究热点。

2.4.1 非合作博弈

截至目前，博弈论体系中最为完善的组成部分是零和博弈，其在应用方面最著名的例子是冷战时期美国和原苏联之间的军备竞赛以及著名的核遏制战略。1994 年诺贝尔经济学奖得主纳什在 20 世纪 50 年代初奠定了非合作博弈的基础，对非合作博弈论体系的建立做出了重大贡献。事实上，因在 ” 非合作博弈论中开创性的均衡分析 ” 方面的杰出贡献，泽尔腾、海萨尼与纳什同时获得 1994 年诺贝尔经济学奖，他们的贡献涵盖了具有完全或不完全信息的静态、动态博弈的均衡分析理论。

近 20 年合作与非合作的争论，纳什均衡以及非合作概念成为博弈论研究的热点。从合作到非合作理论这种历史转变有三个原因： (1) 大多数合作理论忽视了外部效应：联盟可能会被不属于这个联盟的局中人的行动影响； (2) 合作博弈论假设能够得到帕雷托有效的结果； (3) 合作博弈论认为会形成极大联盟 (所有局中人的联盟) 。合作博弈论的这些特性是存在问题的，因为在大多数经济学的应用环境中外部效应是重要的，帕雷托无效也会发生，而且极大联盟也可能不会形成。纳什曾经提议将合作与非合作理论统一起来，这就是著名的纳什仲裁方案，但它在应用上还没有产生太大的影响。

2.4.2 合作博弈

在本世纪初， 19 位世界博弈论领域的权威学者接受采访，回答同样的 5 个问题，并

对博弈论研究领域未来发展前景做出预测 [8] 。有多位学者一致认为合作博弈论在 20 世纪被忽视或者应该得到更多重视。经典合作博弈主要关注多个局中人之间的联盟形成方式及联盟效用分配方案，即多人结盟合作博弈的解，在 20 世纪中叶有过较多的研究，提出了一些重要的多人结盟合作博弈的解概念。目前多人合作博弈的发展明显滞后于多人非合作博弈，经典合作博弈论的突出特征是局中人的完全理性假设以及理论体系的不完善，因而 “合作博弈让人们苦恼很长时间 ” 。

近年来，合作博弈论的进展基本上包括以下几个方面 (区别于下文将介绍的合作演化): (1) 建立新的最优准则，从而导致新的合作解。但是上述经典合作解的缺陷通常会依然存在，即要么这些解集合内有很多个元素即联盟效用分配方案，要么一个元素也没有，也即多人结盟合作博弈的解不存在，或者没有可行的联盟效用分配方案； (2) 经典合作解在具有非完全合作特性、广义合作方式的博弈、微分博弈以及 NTU 博弈模型中的扩展或变型； (3) 在局中人具有 “有限理性 ” 的合作博弈中合作解的建立、存在性及其特性； (4) 经典合作解在动态合作博弈、图上博弈以及网络博弈中的运用； (5) 运用公理化方法建立或研究合作解； (6) 经典合作解在社会、经济、管理领域模型中的应用研究。

2.4.3 网络博弈

网络博弈完全是在近二十年产生与发展起来的。针对网络博弈、网络生成和演化的动态过程的研究是 20 世纪后期博弈论领域具有重大突破的博弈论课题 [8] 。其中网络生成博弈论是网络博弈领域中相对完善的组成部分。网络环境下的策略互动以及学习一般被认为是网络演化的内因。内生或外生的网络结构表现出节点所代表的局中人之间的互动模式，局中人之间的互动也是在该网络中信息流动和传播得以实现的载体。

早在 20 世纪 90 年代初人们就提出了网格上策略互动相关的概念，并对不同网络上的局部互动和全局互动的异同进行了比较性研究。而后人们又对一般网络中基于协同博弈的互动进行了研究，并对基于协同博弈的互动模型中个体的行动选择与邻居不同行动选择情况之间的关系进行了深入的研究。在很多近期的研究工作中，互动邻居不再仅仅是局中人的直接邻居，其邻居的邻居或者邻居的邻居的邻居也可能参与到与该局中人的互动过程。事实上，这类似于经济网络中的行为主体既可能从他们的直接竞争对手处获得信息，又可以从那些与他们间接相关的主体那里得到有关信息。

20 世纪末人们开始研究模仿行为 (学习), 相关工作重视区别信息结构 (“模仿谁 ”) 和行为准则 (“局中人如何模仿 ”) 。一般来说，模仿谁比如何模仿更重要。特别地，如果一个人模仿的是他的对手，那么结果将变得非常具有竞争性；如果一个人模仿的是与自己面临同样问题，但与别的对手进行对局的局中人，那么最终将得到纳什均衡。

本世纪以来人们开始研究模仿准则下有效行动的蔓延，互动博弈的网络与行动选择的协同进化。此外，网络博弈研究领域中的非常有价值的研究课题还包括博弈论在解决网络安全问题及一般冲突控制系统的优化问题中的应用。

2.4.4 微分博弈

微分博弈的研究始于 20 世纪 40 年代。艾萨克斯在 1965 年对完全对抗的二人零和微分博弈问题的研究，奠定了微分博弈论的基础。由于微分博弈模型中局中人决策相对于时间的连续性、对支付函数所应满足条件的严格限制以及研究结果在除军事之外的其他领域长期没有得到有效的应用等原因，微分博弈在过去甚至是现在都是一个颇具争议的研究领域。2004 年诺贝尔经济学奖授予挪威经济学家基德兰德和美国经济学家普雷斯科

特，以表彰他们在动态宏观经济学方面做出的杰出贡献。事实上，他们的主要理论贡献是关于复杂冲突控制系统中的时间一致性问题，而关于合作随机微分博弈的子博弈一致性的理论体系正是建立在关于时间一致性的研究基础上。

2.4.5 机制设计

机制设计理论被认为是经济学中的“工程学”部分。机制设计者为了特定的目标或目的需要一个机制或博弈以使所期待的目标出现在均衡中，即博弈是被选择的而不是给定的。博弈由机制设计者选择而不是由“自然”给定，这具有三个分析上的优点。首先，因为设计者提前制定了规则，所以局中人应该能准确地知道他们所进行的博弈；其次，设计者观察研究博弈的执行，当然也知道博弈的准则；最后，在机制设计中，可以选择具有吸引力的博弈。2007 年诺贝尔经济学奖授予赫尔维茨、马斯金以及迈尔森，以表彰他们为“机制设计理论奠定了基础”。

2.4.6 合作的演化

合作演化的问题严格的说不能算是纯粹的博弈问题。非合作博弈中合作行为的产生是一个在近期受到众多学科关注并且具有重要发展潜力的前沿问题，博弈论在该领域应该扮演关键的角色。当今世界面临很多紧迫的问题，如森林砍伐、过渡捕捞、气温变化，这些被称为公共问题，这些问题的解决方案需要成百上千人的合作。然而如此大范围的合作，却被合作困境所困扰。在每个人仅考虑个人兴趣的标准预测中，大部分合作是不实现的，因为具有搭便车行为的人不可能在不考虑个人成本的情况下考虑公共利益。

合作演化研究手段主要包括实体实验和仿真实验两种，研究重点是，在非合作博弈的条件下，什么机制导致合作行为的出现？具体的研究课题大体上可以分成以下几个方向：(1) 基于选择模式的研究 (包括群体选择、亲缘选择、文化选择以及多层选择等理论); (2) 基于互惠机制理论的研究 (包括直接互惠与间接互惠); (3) 基于多行为主体的研究; (4) 基于空间结构的研究。

此外，相关的研究还包括进化博弈。上个世纪 70 年代，生态学家史密斯和普赖斯结合生物进化论与经典博弈论，在研究生态演化现象的基础上提出了进化博弈论的基本均衡概念 —— 进化稳定策略。

2.4.7 算法博弈论

近 20 年以来，算法博弈论逐渐成为博弈论的一个热点方向。它将一个系统的形成和运行看作一个博弈过程，假设规划者从整体利益出发，优化设计系统以达到全局最优，但博弈的参与者却从自身利益出发，做出自私的行动选择以达到个体最优；这常常使得系统的实际性能低于规划者期望的全局最优。算法博弈论研究的主要问题包括：(1) 如何描述和计算参与者的自私行为所导致的系统性能； (2) 如何分析和刻画博弈中参与者的自私行为与系统整体性能之间的关系； (3) 如何设计一个合理的机制使得其系统在实际运行中能够真正实现整体利益最大化。算法博弈论的特点是，它不仅仅关心均衡解或者机制的存在性，还强调计算它们的复杂性，并设计有效的算法求出 (或者近似) 它们。

2.5 管理科学

管理科学与运筹学有着非常紧密的关系。20 世纪 60 年代，管理科学被视为运筹学在商业领域中的应用；现如今，管理科学的内涵更加广泛，其中还包含研究若干个体是如

何组成一个组织结构，它是如何运作的，组织内部的个体应如何协调，以发挥出个体最大潜能，给组织带来最大的利益，以及组织之间所形成的社会关系，而这些关系又是怎样影响个体的表现等等方面。与运筹学一样，管理科学也是一门交叉学科，主要研究经济、商业和工程等领域中的最优决策问题。管理科学家的主要任务是采用合理的、系统的和科学的方法，找出和改进各种各样的决策方案。他们最关心的是如何建立和应用模型与概念，以清楚地阐明并有效地解决管理问题，同时设计和发展出新的和更好的优秀的管理模式。

2.5.1 决策理论与方法

决策理论是将第二次世界大战以后发展起来的系统理论、运筹学、计算机科学等综合运用于管理决策问题而形成的一门有关决策过程、准则、类型及方法的较完整的理论体系。决策理论已形成了以 1978 年诺贝尔经济学奖得主西蒙为代表人物的决策理论学派。决策理论是有关决策概念、原理、学说的总称。决策一般分为确定型决策、风险型决策和不确定型决策三种。决策的目标可以是单一目标或多种目标。备选方案数量有限的多目标决策问题称为多准则决策或多属性决策。 20 世纪 70 年代中期由美国运筹学家塞特提出的层次分析法是一种用于多准则决策的、定性和定量相结合的、系统化、层次化的有效方法。备选方案无限的多目标决策问题也称多目的决策。美国运筹学家查恩斯和库伯 1961 年提出的目标规划是解决多目的决策的有效方法。对于风险型决策问题，方法有决策树法、期望值法、边际分析法、贝叶斯法、马尔可夫法等。

2.5.2 评价理论与方法

运用多个指标对多个参评对象进行评价的理论和方法。目前较成熟的评价方法有主成份分析法、数据包络分析法和模糊评价法等。主成份分析法是一种降维的统计方法。借助于一个正交变换，将其分量相关的原随机向量转化为其分量不相关的新随机向量。这在代数上表现为将原随机向量的协方差阵变换成对角形阵，在几何上表现为将原坐标系变换成新的正交坐标系，使之指向样本点散布最开的 p 个正交方向，然后对多维变量系统进行降维处理，使之能以一个较高的精度转换成低维变量系统，再通过构造适当的价值函数，进一步把低维系统转化成一维系统。数据包络分析法由美国运筹学家查恩斯和库伯 1986 年提出，它是对拥有多投入和多产出的多个决策单元进行效率评价的一种数学方法。目前已发展出适用于不同数据和条件的多种数据包络分析模型，是评价理论最活跃的一个分支。模糊综合评价法是一种基于模糊数学的综合评价方法。该方法根据模糊数学的隶属度理论把定性评价转化为定量评价，具有结果清晰、系统性强的特点，能较好地解决模糊的、难以量化的问题，适合各种非确定性问题的解决。

2.5.3 预测理论与方法

采集历史数据并用某种数学模型来外推将来。预测方法有四种基本的类型：定性预测、时间序列分析、因果联系法和模拟。定性预测是基于估计和评价的主观判断。常见的定性预测方法包括：市场调研法、小组讨论法、历史类比、德尔菲法等。时间序列分析是将过去相关的历史数据用于预测未来。常见的时间序列分析方法主要有：简单移动平均、加权移动平均、指数平滑、回归分析、詹金斯法、西斯金时间序列等。因果联系法是根据未来事件的某些内在因素或周围环境的外部因素的相关性进行预测。常见的因果联系法主要有：回归分析、经济模型、投入产出模型、系统动力学模型等。模拟模型对预测的条件作一定程度的假设，并建立模拟模型进行预测。

2.5.4 信息管理与信息系统

信息管理是人类为了有效地开发和利用信息资源，以现代信息技术为手段，对信息资源进行计划、组织、领导和控制的社会活动。简单地说，信息管理就是人对信息资源和信息活动的管理。信息管理是指在整个管理过程中，人们收集、加工和输入、输出的信息的总称。信息管理的过程包括信息收集、信息传输、信息加工和信息储存。信息管理的基本方法包括逻辑顺序方法、物理过程方法、企业系统规划方法和战略数据规划方法等。管理信息系统是一个以人为主导，利用计算机硬件、软件、网络通信设备以及其他办公设备，进行信息的收集、传输、加工、储存、更新和维护，以企业战略竞优、提高效益和效率为目的，支持企业的高层决策、中层控制、基层运作的集成化的人机系统。完整的管理信息系统包括：决策支持系统、工业控制系统、办公自动化系统以及数据库、模型库、方法库、知识库和与外界交换信息的接口。办公自动化系统、与外界交换信息等需结合企业内部网及互联网应用。

2.5.5 风险管理

风险管理的目标就是要以最小的成本获取最大的安全保障。因此，它不仅仅只是一个安全生产问题，还包括识别风险、评估风险和处理风险，涉及财务、安全、生产、设备、物流、技术等多个方面，是一套完整的方案，也是一个系统工程。风险管理的基本程序包括风险识别、风险估测、风险评价、风险控制和风险管理效果评价等环节。风险的识别是经济单位和个人对所面临的以及潜在的风险加以判断、归类整理，并对风险的性质进行鉴定的过程。风险的估测是指在风险识别的基础上，通过对所收集的大量的详细损失资料加以分析，运用概率论和数理统计，估计和预测风险发生的概率和损失程度。风险估测的内容主要包括损失频率和损失程度两个方面。风险管理方法分为控制法和财务法两大类，前者的目的是降低损失频率和损失程度，重点在于改变引起风险事故和扩大损失的各种条件；后者是事先做好吸纳风险成本的财务安排。风险管理效果评价是分析、比较已实施的风险管理方法的结果与预期目标的契合程度，以此来评判管理方案的科学性、适应性和收益性。

2.5.6 工业工程

工业工程是对人、物料、设备、能源和信息等所组成的集成系统，进行设计、改善和实施的一门学科，它综合运用数学、物理和社会科学的专门知识和技术，结合工程分析和设计的原理与方法，对该系统所取得的成果进行确认、预测和评价。工业工程针对以生产现场为中心的作业进行，主要内容包括 (1) 系统的分析：作为现在的系统应该达到的成果，实际没有达到预计的成果时，发现问题并进行控制管理的研究。 (2) 系统的改善：现在的系统达到的成果不够充分和作业不方便而有必要改善其中一部分的时候，研究其改善的办法。 (3) 系统的设计：发生新的状况使得现在的系统难以达到充分的成果时，查找需求来研究设计新的系统。主要研究领域包括 (1) 人因工程：在设施的工程设计时综合应用关于感觉、知觉、智力和精神运动的知识，以提高操作的水平和工人工作的质量。 (2) 制造系统工程：需求计划，分析和制造方法的设计，工艺和综合的系统包含装备、控制、服务、管理和新的技术如计算机：计算机辅助设计 / 计算机辅助设计制造、自动控制、机器人和电脑控制。 (3) 生产管理：分析、设计、安装和维护一个包含生产和分发商品和服务的生产或管理系统的方法和理论。其任务是计划、调度、配置和控制生产过程并有效利用资金、人力、资源。

2.5.7 项目管理

项目管理是指把各种系统、方法和人员结合在一起，在规定的时间、预算和质量目标范围内完成项目的各项工作。即从项目的投资决策开始到项目结束的全过程进行计划、组织、指挥、协调、控制和评价，以实现项目的目标。在项目管理方法论上主要有：阶段化管理、量化管理和优化管理三个方面。项目管理工具方法体系体现了多学科知识与技能的融合。主要有要素分层法、方案比较法、资金的时间价值、评价指标体系、项目财务评价、国民经济评价法、不确定性分析、环境影响评价、项目融资、模拟技术、里程碑计划、工作分解结构、责任矩阵、网络计划技术、甘特图、资源费用曲线、质量技术文件、并行工程、数理统计、偏差分析法、决策树、鱼骨刺图、直方图、生命周期成本等工具方法。项目管理内容包括：(1) 项目范围管理；(2) 项目时间管理；(3) 项目成本管理；(4) 项目质量管理；(5) 人力资源管理；(6) 项目沟通管理；(7) 项目风险管理；(8) 项目采购管理；(9) 项目集成管理等。

2.5.8 应急管理

应急管理主要是研究围绕非常规突发事件的一系列科学问题。它是本世纪以来人们十分关心的热点问题之一，得到国际上学术界和政府有关管理部门越来越多的关注。应急管理所涉及的突发公共事件包括：自然灾害、事故灾难、公共卫生事件和社会安全事件。它们具有突发性、紧迫性、弱经济性、信息不确定性和物资需求量大等特点。目前的研究大都局限在个案的研究上，缺乏以数学为基础的系统理论。事实上，这种理论的形成已经有了雏形，例如：随机混杂系统的理论研究工作渐渐成为描述应急过程一种有效工具。随着两种时间尺度差异的变大，微观与宏观之间的相互影响机制在这种变化中不断显现，而应急过程在不同环境下的差异性变化被有效地刻画，随着环境变化的决策方案的适时性和有效性可以充分体现。这正是应急管理所关心的核心内容，既包括了应急事件的发起，也包括了应急事件的发展，还包括了应急事件恢复的控制等等。另外，将预备阶段的预案和实施阶段的调整方案紧密结合在一起，使预案在实际应用时能根据所得的实时信息做出迅速调整，这种研究非常必要。针对应急管理的不同问题的数学模型需研究它们相应的求解算法，特别是大规模问题的快速求解算法的设计，也值得重视和深入研究。

2.6 智能计算

智能计算是涉及数学、运筹学、生命科学、计算机科学等的一个交叉研究方向。智能计算主要是借鉴仿生学和拟物的思想，基于人们对生物体智能机理和某些自然规律的认识，采用数值计算的方法去模拟和实现人类的智能、生物智能和其它社会与自然的规律。智能计算的发展具有较悠久的历史。尽管 20 世纪 50 年代后，符号智能体系就取得了巨大的成功，但是 80 年代以后，这种经典人工智能的发展一度受到了阻碍。而后，智能计算在遗传算法和神经网络的带动下又迅猛发展。特别是，它与生命科学、系统科学联系在一起，使得计算机学者还有其他学科的学者也加入到智能计算的研究中来，极大地促进了智能计算的发展。虽然，至今没有一个统一的定义来精确刻画智能计算，但智能计算愈来愈引起人们广泛的关注。尤其随着随机理论、模糊理论、不确定理论、人工神经网络理论的快速发展，智能计算为研究不精确、不完整、不确定性等问题提供了有效的处理技术和方法，并且在许多应用领域取得了长足的进展。

2.6.1 遗传算法

遗传算法是模拟达尔文生物进化论的遗传学机理和自然选择的生物进化过程的计算模型，是通过模拟自然界的进化过程来搜索最优解的一种方法。它起源于 20 世纪 50 年代。1965 年霍兰德首次提出了人工遗传操作的重要性，并把这些应用于自然系统和人工系统中。1975 年他发表了著名专著《自然系统和人工系统的适应性》，系统地阐述了遗传算法的基本理论和方法。

遗传算法是从一个问题的可行解的种群开始的，通过对所产生的每个染色体进行评价，并根据适应度来选择染色体，使适应度好的染色体比适应度差的染色体有更多的繁殖机会。末代种群中的最优个体可以作为问题近似最优解。它的主要特点是群体搜索策略和群体之间的信息交换。与解析法、穷举法、随机法等传统搜索方法相比，遗传算法具有不需搜索空间的知识、并行爬峰、编码方法适应性广等特点。遗传算法尤其适用于处理传统搜索方法难以解决的复杂的非线性问题，可广泛用于组合优化、机器学习、自适应控制、规划设计和人工生命等领域，是 21 世纪有关智能计算中的关键技术之一。

2.6.2 模拟退火

模拟退火算法是受物理学领域启发而来的一种优化算法。其主要思想来源于物理上的退火过程：在某一给定初温下，通过缓慢下降温度参数，使算法能够在多项式时间内给出一个近似最优解。人们可以用数学中“马尔可夫链”对模拟退火算法进行严格的形式化描述。基于马尔可夫过程理论，可以证明模拟退火算法以概率 1 收敛于全局最优值这一很好的数学特性。模拟退火算法从某一较高初温出发，伴随温度参数的不断下降，结合概率突跳特性在解空间中随机寻找目标函数的全局最优解。与以往的近似算法相比，模拟退火算法具有描述简单、使用灵活、运用广泛、运行效率高和较少受到初始条件约束等优点。此外，由于模拟退火算法从理论上可以达到全局极小值，所以对该算法的研究更有实际意义，众多学者正在努力钻研将其一般化，使其具有普遍适用性。

模拟退火算法是一种解决组合优化问题的通用算法，只要优化问题能提供一个对候选方案的适应性函数或费用函数，即可使用模拟退火算法对它求解。作为一种通用和有效的近似算法，目前它已被广泛应用于生产调度、控制工程、机器学习、神经网络、信号处理等领域。

2.6.3 禁忌搜索

禁忌搜索算法通过引入一个灵活的存储结构和相应的禁忌准则来避免迂回搜索，并通过藐视准则来赦免一些被禁忌的优良状态，从而找到全局最优解。禁忌搜索的思想是对局部领域搜索的一种扩展，即逐步地向全局最优解搜索。它是对人类智力过程的一种模拟。

禁忌搜索最重要的思想是对已搜索的局部最优解的一些对象进行标记，并在后面的搜索中尽量避开这些对象，但不是绝对的禁止，从而获得更多的搜索区间。禁忌搜索涉及到领域、禁忌表、禁忌长度、候选解、藐视准则等概念。其中领域函数、禁忌表和藐视准则构成了禁忌搜索算法的关键。

与传统的优化算法相比，禁忌搜索是一种搜索特点不同的亚启发式随机搜索算法，在搜索过程中可以接受劣解，因此具有较强的“爬山”能力。迄今为止，禁忌搜索算法在组合优化、机器学习、神经网络等领域得到了广泛应用，并取得了很大的成功。近些年又在函数全局优化方面得到较多的研究，并有很好的发展前景。

2.6.4 粒子群算法

粒子群算法，又称粒子群优化算法，它是 20 世纪 90 年代中发展起来的一种较新的进化算法。它是通过模拟鸟群觅食行为而发展起来的一种基于群体协作的随机搜索算法。通常被认为是群集智能的一种。在这类算法中，每个优化问题的解都是搜索空间中的一只鸟，称之为“粒子”。粒子群算法初始化为一群随机粒子，然后通过迭代找到最优解。在每一次迭代中，粒子通过跟踪两个“极值”来更新自己。一个就是粒子本身所找到的最优解，这个解叫做个体极值，另一个极值是整个种群目前找到的最优解，这个极值是全局极值。

粒子群算法同遗传算法类似，是一种基于迭代的优化算法。但是与遗传算法相比较，粒子群算法的信息共享机制是很不同的，在大多数情况下，所有的粒子可更快地收敛于最优解。这种算法由于其实现容易、精度高、收敛快等优点而受到学术界的重视。目前它已广泛应用于函数优化，神经网络训练，模糊系统控制以及其它应用领域。

2.6.5 蚁群算法

蚁群算法，是一种基于群体的、用于求解复杂优化问题的通用搜索技术。与真实的蚂蚁通过外激素的留存 / 跟随行为进行间接通讯相似。蚁群算法的基本思想来源于蚂蚁在寻找食物过程中发现路径的行为。它是一种用来在图中寻找优化路径的机率型算法。每只蚂蚁在事先不知道食物在什么地方的情况下开始寻找食物。当一只蚂蚁找到食物后，它就会向周围发出信息，吸引其他的蚂蚁过来，这样就会有越来越多的蚂蚁找到食物。然而并不是每只蚂蚁的路径都是一样的。如果有一只蚂蚁的路径比之前其他的蚂蚁的路径要短，就会吸引后面的蚂蚁走这条短的路径。经过一段时间后，可能会出现一条最短的路径被大多数蚂蚁重复着。

蚁群算法是一种求解组合优化问题的新型通用启发式方法，它具有正反馈、分布式计算和富于建设性的贪婪启发式搜索的特点。其不同于其他人工智能算法之处在于：(1) 蚁群算法采用正反馈机制；(2) 蚁群算法一般需要较长搜索时间，且容易出现停滞现象；(3) 蚁群算法的收敛性能对初始化参数的设置比较敏感。

蚁群算法首先被应用于求解旅行商问题，并获得了较大的成功。随后被用于解决各种组合优化问题、函数优化问题、机器人路径规划等问题方面取得了很大成功。此外，近年人们根据模拟自然界中猴群爬山的全过程设计的爬、望、跳三个过程，提出了一种猴群算法，用它求解高维的、非线性的和不可微函数的优化问题的全局最优解。

2.6.6 人工神经网络算法

人工神经网络 (简称神经网络) 是在现代生物学研究人脑组织成果的基础上提出的，用来模拟人类大脑神经网络的结构和行为。神经网络反映了人脑功能的基本特征，如并行信息处理、学习、联想、模式分类、记忆等。

神经网络是一种运算模型，由大量的节点 (或称神经元) 和之间相互连接构成。每个节点代表一种特定的输出函数，称为激励函数。每两个节点间的连接都代表一个对于通过该连接信号的加权值，即为权重，相当于人工神经网络的记忆功能。网络的输出则依据网络的连接方式，权重值和激励函数的不同而不同。

神经网络的特点和优越性主要有三点：(1) 自学习功能；(2) 联想存储功能；(3) 高速寻找优化解的能力。神经网络主要应用在模式识别、自动控制、人工智能领域。近年来，神经网络与其他方法相结合的策略也得到了广泛的应用，且取得了很大的进展。

2.6.7 DNA 计算

DNA 计算是基于 DNA 、生物化学以及分子生物学原理的一种电脑运算形式。20 世纪 90 年代初，阿德莱曼利用 DNA 计算解决了 7 个点的哈密顿圈问题。 DNA 计算可以分为 3 类：分子内、分子间和超分子 DNA 计算。分子内计算主要是借助于分子内的形态转移操作，用单 DNA 分子构建可编程的状态机。分子间主要是在不同 DNA 分子间的杂交反应，使其作为计算的一个基本步骤。超分子 DNA 计算式利用不同序列的原始 DNA 分子的子装配过程进行计算。 DNA 计算的未来研究重点包括，如何充分发挥 DNA 并行运算的优势，真正解决大规模的计算难题，让 DNA 计算机向高速化和精确化方向迈进。

2.7 其他

运筹学的研究和应用除了以上 6 个大的方向和领域 (这种分类也不是相互独立的), 还有许多其他方向和领域。

2.7.1 金融工程

用运筹学理论来研究金融方面的问题可追溯到 20 世纪 50 年代初，那时运筹学理论工作者从研究现金流的管理问题出发，研究了一类金融领域的问题。稍后，金融领域中最优投资组合、金融衍生产品的最优设计、最优定价理论、投资风险的最小化等问题的出现，因运筹学的核心之一就是优化，顺理成章金融当中这类优化问题也引起了运筹学工作者的极大关注和兴趣。事实上，被国际上公认的金融工程领域的奠基工作之一 – 将随机分析成功用于证券市场的套利研究，就是出自一个运筹学理论研究工作者 - 斯坦福大学哈里森教授，他也是运筹学中随机排队网络扩散逼近工作的开拓者之一。当今金融工程是运筹学领域最为活跃的一个研究方向，其主要研究内容包括： (1) 信用风险度量；(2) 证券衍生产品的定价； (3) 金融模型等。

2.7.2 统计和优化

统计学是一门研究如何有效地收集数据和分析数据的学科。它以数据为对象，研究各种实验和现象中的数量关系，以概率论等为基础，发展了一套系统地处理数据的统计理论和方法。随着科技进步和社会经济的发展，我们面临的数据量正以指数量级的速度增长，产生了许多高维数据、缺失数据和复杂结构数据。对这些复杂数据，人们已经很难依赖直观对现象进行判断，高维复杂数据的有效分析遇到了前所未有的挑战，这些挑战为统计学的发展创造了难得的历史机遇。现在经常遇到一些复杂现象中产生的海量数据，我们对这些复杂现象缺乏理解，需要从这些数据出发来寻找和发现规律，这就要求开展 “数据驱动 ” 的研究。以概率论和随机分析为基础，以计算机为工具、引入最优化思想的统计方法将会成为一个发展方向。

2.7.3 模糊系统的优化

由模糊现象所产生的不精确的、非完备的、非定量的信息，称为模糊信息。在客观的世界中，存在大量的模糊现象，与之相关的信息并非是不可靠的信息，而是它们往往与人的主观感受密切相关，并与各种精确信息交织在一起，形成了更加复杂的信息系统。20 世纪 60 年代美国加利福尼亚大学伯克利分校的查德首先提出了模糊集理论，并用模糊数学的方法处理模糊信息，通过抽象、概括、综合和推理，可以从中得到具有一定精度的结论。几十年来，模糊信息理论有了很大的发展。从模糊信息的获取方式，到模糊类数

据的挖掘方法；从模糊信息的分析手段，到模糊信息的处理技巧；从模糊信息的理论研究，到工程技术中的实际应用等，都取得了丰富的成果。

对许多系统的性能标准和参数决策变量的精确量化往往是不可能的，也不总是必要的。当变量值不能被精确地确定，则说是模糊的。借助刻画模糊性的隶属函数可以对一些定性的描述进行量化，如干或湿，热或冷，干净或脏，高或低等。模糊优化是在模糊环境中的求极值问题。用模糊信息处理方法处理模糊优化问题称为模糊优化方法，它是 20 世纪 70 年代从最简单的一类模型 —— 模糊线性规划发展起来的。现在模糊优化模型和方法包括：目标模糊型、约束模糊型、系数模糊型、变量模糊型、全模糊型、模糊对偶理论及模糊最优性条件等。 20 世纪 80 年代开始，模糊优化的研究范围得到了很大的扩展，包括模糊非线性规划、模糊多目标规划、模糊动态规划、模糊整数规划、模糊几何规划、模糊关系优化等。这些模糊优化模型和问题在工业工程、经济管理、信息科学中都获得了实际应用。

最后，值得强调的是，尽管运筹学在上述一些研究分支和方向及其在数学上取得的理论进展远远超前于其实践成果，然而，几十年来在这些方向累积取得的数学研究成果看来并未使得实践成果的水平有所提高 [1] 。其中的一个原因就是这些研究工作大多忽视了所使用的大量数据通常是 “脏 ” 的，而且远远脱离这些应用领域中的主流软件。因而未来的研究重点应在运筹学实践中产生的核心重要问题。

3 运筹学中若干难题

爱因斯坦曾经说过： “提出一个问题往往比解决一个问题更为重要 ” 。形成一个公认的科学难题的过程本身就是科学研究的一个结果，同时也是开启新的、未知大门的敲门砖。在许多科学家看来，科学难题是科学进步的阶梯。随着一个又一个科学难题的解决，科学技术不断登上新的台阶，人类文明上升到一个新的高度。上个世纪伊始，著名数学家希尔伯特在国际数学家大会上提出了 23 个数学难题。在过去的一百年里，这些问题激发了众多数学家的热情，引导了数学研究的方向，对现代数学的发展产生了难以估量的巨大影响。

在运筹学发展的 60 多年里，几代运筹学工作者在运筹学的各个方向取得了许许多多的成果，应用数学的理论和方法奠定了运筹学的基础，也对数学的发展做出了贡献。著名数学科普作家卡斯蒂 [9] 在总结上个世纪意义重大的数学成果时，他从众多的数学定理中遴选出了 5 个，其中 4 个都与运筹学有非常紧密的关系，它们是：极小极大定理 (博弈论) 、单纯形法 (线性规划) 、停机定理 (计算的理论) 、布劳威尔不动点定理 (博弈论的基础工具) 。

著名数学家波利亚曾经说过： “数学就是解决问题的艺术 ” 。随着一个又一个运筹学难题的解决，新的难题不断地从新的土壤破土而出。其中一些不仅仅是运筹学的相关研究方向的重大问题，也是数学及相关学科的一些核心问题。在著名数学家斯米尔 [7] 给出的 21 世纪 18 个数学难题中，其中以下 4 个就与运筹学相关： (3)“P 是否等于 NP” ，也被列为本世纪的七个数学难题之一； (4) 单变量多项式整解的个数； (8) 这个问题可描述价格调整的一般均衡理论的数学模型； (9) 实系数线性规划是否多项式时间可解。以下 12 个问题是运筹学相关方向具有一定代表性的未解难题 [6] ：

(1) 凸多面体的 d- 步猜想;

(2) 有限多个二次函数最大值的极小化问题;
(3) 推广的 Lax 猜想;
(4) DFP 拟牛顿法的收敛性;
(5) 最小阻力凸体问题;
(6) 是否存在求解线性规划的强多项式时间算法？
(7) 组合优化反问题的计算复杂性;
(8) 求解旅行商问题的更好的近似算法;
(9) k- 服务器猜想;
(10) 装箱问题是否存在绝对近似算法;
(11) 随机排队网络的遍历性;
(12) PH- 分布的最小表示。

显然，运筹学未解的难题远不止上述这些。特别是，这些问题在运筹学的各个方向之间的分布并不平衡，个别方向甚至未能得到反映；此外，它们对运筹学的理论及应用的意义和重要性各不相同，难易程度也有千差万别。有兴趣的读者可以在此基础上开展研究，也可以提出和研究其他有意义的问题。毕竟发现问题、提出问题、分析问题和解决问题的过程构成了运筹学的发展进程。

4 运筹学发展态势

社会进步的需要就是学科发展的泉源。从数学几千年来发展的历程来看，从埃及因土地测量而引发的关于初等几何图形的考虑、直至欧几里德的《几何原本》的完成，以及随之而来的亚历山大城的博物馆的衰落，可以视为农业时期的数学；再从刻画连续变化状态而产生的微积分学的出现到 19 世纪中叶，经典数学趋于完善，可以看成是工业革命时期的数学 [2]; 20 世纪随着计算机的诞生及信息科技的飞速发展，逐渐形成以离散结构为对象的信息时代的数学。

21 世纪随着生物科技的日新月异的发展，经济发展的全球化，可以预测在探索生命和社会发展规律的过程中将形成崭新的数学。而运筹学将在这一过程中，起到重要作用，并形成新的交叉领域与学科增长点。

4.1 运筹学与生命科学的交叉

这里所指的生命科学包括生物学、医学和药物学等。传统的生命科学和其他自然科学如物理学相比，更多地关注于定性的研究，而不是定量的研究。但是这种现象正在迅速改变。 20 世纪中期，随着蛋白质空间结构的解析和 DNA 双螺旋结构的发现，形成了以遗传信息载体核酸和生命功能执行者蛋白质为主要研究对象的分子生物学。21 世纪初人类基因组计划的完成，标志着生命科学研究进入了一个崭新的后基因组时代，其特征和标志包括：高通量生物技术的成熟应用、大型生物数据库的建立、从单个的组学 (如基因组学、蛋白质组学等) 到系统生物学的研究方法等。

运筹学已经逐步应用到生物信息学和系统生物学等诸多新兴的生命科学研究领域，发挥着重要的作用。目前在生命科学中得到广泛应用的运筹学分支有：图论与组合数学、动态规划、人工神经网络、线性规划、非线性规划、整数规划等。例如，基于动态规划的

序列比对算法是目前最重要的生物信息学基本工具之一。线性规划、非线性规划和整数规划在蛋白质结构比对和结构预测中作为重要工具经常使用。另一方面，现代生命科学对运筹学理论和方法提出了新的需求和巨大的挑战。例如基因组学和蛋白质组学中的数学模型大多涉及求解总体极值和大规模变量的问题，促进了启发式算法和近似算法的研究。生命科学的迅猛发展和对运筹学理论和方法的巨大需求，吸引了大量的运筹学家加入了运筹学与生命科学交叉领域的研究。运筹学理论和方法在生命科学的研究中越来越普遍和重要，而运筹学本身也从中得到了发展的动力。

运筹学是一门 “优化的科学 (Science of Better)” ，而生命的进化过程本身就是一个自然选择和遗传优化的过程，所以许多生命科学问题的数学模型都与优化有关。而且这些模型大多是 NP- 难的，所以近似算法和启发式算法的研究在这方面起到重要的作用。生命科学被称为 21 世纪的科学，从过去 10 年的发展可以预见，未来的 30 年将是生命科学飞速发展的时期。在日新月异的现代生物实验和医学技术的帮助下，生物学家和医学工作者对生命和疾病的过程和机制的了解将越来越深刻，生命科学领域的数据和数学模型也会越来越多。运筹学工作者应该抓住这个难得的机会，使运筹学成为未来 30 年中生命科学研究的主要工具之一。

与运筹学发展早期的工业生产、经济管理等领域类似，未来 30 年生命科学领域与运筹学的联系将越来越紧密。运筹学不仅可以帮助生命科学研究人员建立从微观 (基因、蛋白、细胞器、细胞) 到宏观 (组织、器官、物种) 的数学模型，帮助生命科学研究人员更好、更合理地设计实验和改进技术，还可以通过模型优化来更好地探寻生命科学中的规律和机制，更好地为人类健康服务。

运筹学与生命科学的交叉研究将更加全面和深入。首先，除了已经在生命科学中得到广泛应用的分支 (如线性规划、动态规划等) 将继续得到重视，运筹学的其他分支将找到用武之地。例如随机优化模型可能用于研究细胞内部的调控策略和信号传导机制；博弈论可能帮助分子遗传进化研究找到新的突破。其次，运筹学与生命科学的交叉研究将扩展到更多的生命科学分支领域，例如生命起源的研究、个性化医疗中的最优医疗策略等。

最重要的是，与生命科学的交叉研究可能促进新的运筹学理论和方法的出现，甚至产生新的运筹学分支。可能对运筹学发展产生促进作用的因素有很多，例如生命科学的海量数据对计算复杂性的挑战、现有运筹学模型在描述复杂生命系统时的不足、生命系统和其他物理系统的显著差异、生命过程和生命现象的不确定性和随机性等。

此外，系统生物学尚处在起步阶段。它要成为一门独立的分支学问，在未来的 30 年内，需要建立自己的 “公理系统 ” 、 “基本理论 ” 、以及实验和算法体系，运筹学将在这一过程中起到独特的作用。

4.2 运筹学与网络科学的交叉

网络科学是本世纪刚刚兴起的一个新的交叉学科。它以复杂网络为主要研究对象，通过对复杂网络特性的提取和刻画，探究其所反应的复杂系统的普遍规律。网络科学是将运筹学的思想和方法应用于生命科学 (特别是系统生物学) 的主要桥梁之一。网络科学在过去的 10 余年间飞速发展，在计算机、社会学、生物学等领域都产生了重大影响，已经成为研究复杂系统、解决复杂性问题的重要理论和方法。例如大量基于复杂网络社团

结构 (模块) 的分析方法已经成为系统生物学中研究生物功能的基本工具。运筹学的各个分支，特别是最优化方法和图论已经在网络科学中发挥了重要作用。

今后几十年内网络科学预期将有重大的突破，并成为应用科学的主流性分支。运筹学同网络理论有着天然的联系：运筹学有可能给出网络的表达方式、理论刻画以及分析方法。未来 30 年网络科学和运筹学的交叉研究可能在以下两个方面有所突破。

(1) 网络生成模型。随着各种实际网络数据的大量产生，人们对实际网络基本特征的认识必将深化，对普适性的网络和个性化的网络建立合适的网络模型的时机将更为成熟。例如生命科学中，各种生物网络迅速积累和扩张。在过去十余年间伴随着网络科学的发展，生物网络相关研究已经成为系统生物学研究最基本的部分。但是网络数据的复杂性和实际网络的不确定性都使得刻画网络的产生机制成为重要且极具挑战性的问题。可以预见的是，随着网络数据的积累和发展，人们终将认识其产生机制。运筹学的最优化理论、图论与随机运筹模型和方法等，将会在模型的建立与分析起到无可替代的作用。

(2) 网络演化特征的刻画。现实的网络是一个不断更新、变化着的复杂系统。揭示和刻画网络演化的特征对理解网络的功能和结构具有重要的意义。随着生物技术与计算机的高速发展，大规模时序数据的积累将成为可能，如何有效地分析和利用这些数据，运筹学、统计学等应用数学分支将会为彻底地认识、解决这一问题起到无比重要的作用。

此外，网络科学目前尚处于实证研究为主的阶段。它要真正成为一门独立的科学分支，必须建立其基础理论、运算理论，以及从目前的实证地从实际世界中提炼网络模型，发展到应用网络理论去建立自然界的或技术性的系统，使其具有特定的性质。在这一过程中，运筹学可以成为一个主要的工具。在这一方面，运筹学的发展历史可以借鉴。在线性规划的算法背后，是强有力的对偶理论；在非线性规划算法的后面，是收敛性理论和凸分析理论；在图论和组合方面，是计算复杂性理论。由此构成运筹学这门学科。而网络理论势必在以后的 30 年中完成这一过程。

4.3 运筹学与管理科学的交叉

管理科学从其一开始就与运筹学有着密切的关系，其早期的重点是用运筹学的方法来研究有管理背景的实际问题。例如，应用优化理论和概率理论来研究生产、调度及存储管理问题，利用线性规划来研究交通问题。在著名的《管理科学》杂志创刊 50 周年特刊上所选的最有影响的 10 篇论文中 [10], 有 3 篇是关于优化， 4 篇是关于生产库存理论， 1 篇是关于排队论， 1 篇是关于建模。这足以说明运筹学在管理科学中的地位。基于两学科之间的关系，在 90 年代，美国运筹学会与管理科学学会整合成一个学会，即运筹与管理科学联合会 (INFORMS) 。管理科学不仅为运筹学的研究和实践提供了一个很好的应用领域，而且它也为运筹学的发展提供了很多挑战性的课题。下述就是几个具有代表性的研究方向。

(1) 管理科学中的一些实证研究。随着信息技术的飞速发展，企业和一些政府部门对自己的运营状况有很好的记载，即数据积累。由此产生的一个非常重要的问题是，如何根据这些可用的信息或数据对企业或政府部门提出有价值的科学管理策略？要解决好这个问题，既需要统计学来很好地处理数据，也需要运筹学来建立很好的定量模型。

(2) 风险管理问题。风险是一个企业或政府部门不可回避的问题。要有效地处理这个问题，就要研究建立什么样的风险度量可以对企业或政府部门所关心的风险问题进行合

理的量化。当今人们熟悉的风险度量如均值 – 方程度量， VaR 度量， CVaR 度量，效用函数度量等也能进行一些有效的风险定量研究，但它们都依赖于参数的合理选取。什么样的参数更加科学和客观，人们只能作定性的说明和分析。所以如何回避这个参数选择问题，从而建立新的客观的风险度量是人们所要解决的一个核心问题。

(3) 一些经典的随机存储问题。对于复杂的库存存储问题，如具有串联结构的随机存储、具有配送结构的随机存储和具有组装结构的随机存储，如何确定这些随机存储模型的最优策略。

(4) 多服务台随机排队系统的人力资源管理。多服务台随机排队模型广泛应用于银行的顾客服务，呼叫中心的人员配置等。其中的核心问题是，如何根据顾客的需求如何动态调整服务台的个数使服务质量与系统经济效益之间达到一个合理的平衡？相关研究领域称为服务型工程管理学。这类问题也出现在医护人员的配置和病人床位在各个科室之间的调配等医院的管理问题中。

4.4 服务科学与行为运筹学

服务科学是近年来在国际和国内引起人们普遍关注的关于服务经济的管理理念。它是一门研究管理与被管理关系的、旨在形成二者良性互动的和谐关系的现代先进管理科学。由于服务是 “协同创造和获取价值的供应商 / 客户交互行为 ” ，因此服务必须要有客户的参与才能实现其价值。这里的客户可以是自然人也可以是组织，组织中最基本的构成要素仍然是人。因而，我们可以说服务中最关键的要素是人，必须考虑人的行为。一般地，一个系统所涉及的理论工作包括系统性能分析、系统最优设计和系统最优控制。对于不含人的 “机械 ” 系统，系统的行为是 “完全理性 ” 的。运用经典的运筹学、统计学和信息学对这类系统可以进行令人比较满意的理论分析，并相应地提出了较理想的解决策略。但对于涉及人的系统，许多研究表明，人的行为表现出一些特有的现象，如损失厌恶、参照依赖、现状偏见、不等值贴现等，导致人们在行为上并不总是追求 “效用最大 ”，而是会根据对环境的认知和自己有限的思维，做出 “让自己满意的选择 ” ，亦即人的行为的一个最基本特征是 “有限理性 ” 。因此，对于以人为中心的服务系统，由于人并不等同于机械，这就导致了经典的运筹学、统计学和信息学不能被直接应用于处理这类系统中的问题。

分析人的行为规律的科学被称为 “行为科学 ” ，将它与一些传统的学科进行交叉，可对科学和经济的发展起到推动作用。为此，需要研究的关键科学问题是，如何将行为科学与经典的运筹学、统计学和信息学相结合，建立 “行为运筹学 ” 、 “行为统计学 ” 和 “行为信息学 ” 的理论体系，为以人为中心的服务系统的性能分析、最优设计和最优控制奠定理论基础。

国外许多学者将行为科学引入到运筹学中，开展行为运筹学与行为运作管理的研究工作，并迅速成为当今的学术热点。基于策略性消费行为的行为运筹学和行为运营管理已经成为学术界的新兴研究领域，研究策略性消费行为产生的原因及对企业运营管理、定价决策、供应链管理等的影响，进一步探讨其负面影响的控制与消除等问题。

目前，服务科学的研究仍然处在非常初级的阶段，相关的基础理论应聚焦在行为运筹学、行为统计学和行为信息学。投入到行为运筹学与行为运作管理研究的学者们，不能将自己的研究思路仅仅局限于行为经济学的成功带来的启示，将这个研究领域只作为

运筹学的一个新的结合点，更要将行为运筹学的研究看作为服务科学奠定理论基础的一种全新的探索。将两者结合，方可形成的一个新的学科：服务科学。另外，具有行为复杂性的管理问题，例如：复杂金融系统的动力学；行为运作与复杂供应链管理的基础问题；复杂交通 / 物流网络规划与管理；复杂重大工程项目管理研究等，也是未来运筹学在管理科学领域的一个重要应用领域。

除了上述的 4 个交叉领域，由于任何存在决策的问题都是优化问题，任何有参数需要选取的问题都是运筹问题，所以运筹学的应用到处可见。运筹学的广泛应用使得它和其他科学领域的交叉日益加强。这些交叉不仅为运筹学的应用提供了很好的舞台，同时也为运筹学的新兴分支的产生和发展提供了土壤。运筹学与信息领域的交叉是一个很成功的例子。信息领域中的许多问题，如数据挖掘、模式识别、图像处理、分类、信息安全、互联网数据分析、无线传感定位问题、多通道通讯干扰最小问题等等都归结于运筹学问题。这些问题的提出和研究极大地推动了运筹学的发展。

当运筹学经过 60 多年的发展，其理论越来越艰深，应用愈来愈广泛，目前已经没有任何一个人可以是运筹学所有方向的专家。因而对未来运筹学的任何一个具有挑战性的课题的研究，尤其是对出现在新的学科交叉领域的重大问题的探索，更需要一组具有运筹学的不同专长的人才组成的类似于运筹学发展初期时的研究团队，其中还应该包含概率论、统计学、经济学、工商管理、计算机科学、行为科学等学科背景的人才，才能做出重要的科学发现和贡献。

5 运筹学发展的思考

回顾和分析运筹学的发展历程，能给我们怎样的启迪呢？在本节中我们将从以下两个方面探究运筹学发展的规律和面临的挑战。

5.1 运筹学发展的动力

人类社会不断进步得益于科学与技术的相互促进与发展。一百多年前中国近代启蒙思想家梁启超曾对 “(科) 学 ” 与 “(技) 术 ” 之间的关系做过精辟的分析 [11]:“试语其概要，则学也者，观察事物而发明其真理者也；术也者，取所发明之真理而致诸用者也。例如以石投水则沉，投以木则浮。观察此事实以证明水之有浮力，此物理也。应用此真理以驾驶船舶，则航海术也。研究人体之组织，辨别各器官之机能，此生理学也。应用此真理以疗治疾病，则医术也。学与术之区分及其相互关系，凡百皆准此。 ”“由此言之，学者术之体，术者学之用。二者如辅车相依而不可离。学而不足以应用于术者，无益之学也；术而不以科学上之真理为基础者，欺世误人之术也。 ” 此外，严复在翻译苏格兰经济学家、哲学家亚当 · 斯密所著的《原富》时，对 “(科) 学 ” 与 “(技) 术 ” 的关系也写道： “盖学与术异。学者考自然之理，立必然之例。术者据既知之理，求可成之功。学主知，术主行。 ” 两位中国近代启蒙思想家的先驱对 “(科) 学 ” 与 “(技) 术 ” 的看法，可谓殊途同归。

数学是现代科学体系中所有自然学科的基本语言，它为先进技术提供分析工具和方法。人类对物质世界的不断探索及认识和人类社会进步的需求是数学最初的、也是能持续发展的核心驱动力，而数学自身矛盾的解决和体系的完善是数学健康发展的内在驱动力。这两股力量水乳交融，相互作用和促进也是运筹学不断向前发展的推动力。

著名科学家冯 · 诺伊曼 [2] 曾经这样分析这两股力量对数学的影响："当数学学科走向远离其经验泉源或更远些时，当这门学科进入第二代、第三代，仅能依靠来自 '现实' 思想的间接的启迪时，它就会被很严重的困难所包围。它变得越来越纯审美的，越来越纯粹地为艺术而艺术的。当然，这也不一定是坏事，因为这个领域可能仍然与那些更接近经验的有关学科交融着，或者这个学科处在具有极高鉴赏能力的人们的影响之下。但是存在着很大的危险，这个领域会沿着最省力的方向再向前发展，这条发自源头的川流会分道为数目众多的、无意义的支流，这个学科将会成为既琐碎又复杂的一团杂乱无章之物。换句话说，在远离其经验泉源之后，在过于"抽象的"内部繁殖之后，一个数学学科处于退化的危险之中。不论怎样，只要到了这个地步，我认为唯一的解决办法就是使之返老还童，回到其源，回到或多或少的直接经验的概念。我确信这样做是使这门学科保持新鲜的生命力的必要条件；这一点在未来仍将是正确的。"

著名数学家韦尔 [2] 也曾经说道："当一个数学分支不再引起除去其专家以外的任何人的兴趣时，这个分支就快要僵死了，只有把它重新栽入生气勃勃的科学土壤之中才能挽救它。"这实际上也指出了运筹学研究一旦脱离现实世界将给其发展带来的后果。

如何才能使得运筹学保持活力，使其健康发展呢？美英两个国的运筹学发展自始至终处于世界领先地位，他们在运筹学的研究和实践中所积累的丰富经验值得借鉴，特别是以下基本原则。

(1) 生活在系统中。利特尔 (曾任美国运筹学与管理科学学会首任主席) 在回顾他从事军事分析领域的 40 年经历时，讲述了他从始至终坚持的传统 [1]:"在我们开始运筹项目研究的第一天，都到现场去获取第一手材料，生活在系统中"。拉森 [1](曾任美国运筹学会主席) 在回忆他如何帮助学生到地方政府部门从事运筹学应用项目时，讲了一个小故事：他让三个学生到麻省的一个小镇优化校车系统，即用尽量少的校车并设计合理的路线满足学生上下学的需求。三个学生驾着自己的车跟随校车，以了解路线及有关停车时间和允许调头的地点等细节。有一天他们被当地警察拦下盘问。原来麻省法律规定禁止蓄意跟随校车！

(2) 实事求是。交通理论的创始人赫尔曼 (美国艺术与科学院院士) 始终坚信，交通理论研究首先本质上是一种实验科学；其次应该构造最合适的数学模型来描述某一特定的现象，而不应该让现象去吻合研究者所熟知或者特别感兴趣的某个模型，即不应去选定一个理论来拟合某一个问题，而是让一个恰当的理论找到它处理该问题的途径。他经常看到一些"先有答案，再找问题"的论文，作者使用他们所喜欢的数学理论去描述找到的问题，而不管这些理论是否符合问题的实际物理背景。他特别强调，研究问题的出发点不仅仅是使得所建模型尽可能地与数据吻合，更要让模型具有合理性；当前随着从事运筹学研究和实践的人数越来越多，人们急于将自己的学科知识用到所面临的问题中，因而更应避免先入为主的陋习。

(3) 应用驱动理论。当今的运筹学研究工作多是从已有的文献出发到发表新的文献为止。库珀 [1](美国管理科学学会首任主席) 回忆他与查尼斯等人开展线性规划在工业领域的应用时提到，他们两位冯 · 诺伊曼理论奖获得者在长期合作中形成了"应用驱动理论"的运筹学研究方法："首先，解决提出的问题并导致成功的应用。然后，为了完善、扩展与推广这一应用去研究文献。最后，将这些进一步描述，获得结果写成文章发表，并且报告应用的结果；此外，再转向更进一步的应用，等等。"这与有着极其丰富运筹学工作阅历的耶鲁大学舒必克教授的观点不谋而合。当他决定从工作得十分舒心的通用电器公

司重新回到学术圈时，他主要考虑到，他能提出一些核心问题并寻觅出一些基本猜想，由此鼓励其他人去开创解决这些猜想的数学或者提出模型。而这样的工作并不会立刻对一个公司产生回报。此外，大学的学术氛围比公司的工作环境要自由得多。

(4) 算法和公式一样重要。在运筹学发展的初期，人们研究的重点是各种运筹学问题和模型的数学理论，很少认真地讨论如何真正地求解问题。例如，排队论的早期研究者很少关注数值计算，当时他们的主要精力都放在如何构造排队模型中一些令人感兴趣的随机变量，如平均等待时间和队长的母函数或者拉普拉斯变换的公式，他们认为这些公式就是问题的解了，而所需要的结果可以通过“标准的技术”得到。在某种程度上，这些公式阻碍了很多好理论的发展。著名应用概率专家纽斯曾经感叹道 [1]:“我热切地希望标注式的计算很快消失。我不希望这个领域消失，而是希望更多的人都来关注算法的研究。我希望所有应用随机模型方面的严肃的文章是算法型的。”

(5) 执行责任。许许多多运筹学实践的成功案例都表明 [1]:“对一个实际问题找出运筹学方法和解答仅仅是完成了任务的一半，另一半是促使有人担起行政责任去执行它。”让一个企业或者一个组织接受一种创新方法或者改革方案一般是非常困难的，这主要源自提出者与具体实施者之间缺乏足够的尊重和信任。因而大多数运筹学工作者往往不愿承担使得他们给出的改革方案得到执行或者提出的创新方法得以实现的责任。实际上，这不仅使得他们前功尽弃，还会失去发现新的、更有意义的问题的机会。

5.2 运筹学发展的挑战

我们从给运筹学的发展做出重要贡献的开拓者的经历中，不仅可以汲取他们成功的经验，也能够感受到他们对运筹学发展的一些担忧。这些远见卓识为运筹学今后更好的发展提供战略方向。

5.2.1 与数学的关系

前面已经论述了运筹学与数学的关系，这里主要强调的是，相当多的运筹学工作者都有很强的数学背景或者就是在数学系任职。因为数学理论和方法是运筹学最主要的方法和工具，所以他们中的很多人对运筹学的发展做出了重要贡献。

很多运筹学前辈在他们学术生涯的早期并不是学习或者从事运筹学方面研究的。例如，排队网络理论的创始人杰克逊 (曾被选为美国管理科学学会主席) 是在加州大学洛杉矶分校获得纯粹数学的博士学位。是就业市场将其推向了早期运筹学的研究，因为他当时找到的唯一感兴趣的工作是设在洛杉矶的海军后勤研究计划 (后更名为管理科学研究计划) 。基于他受过的系统的数学训练和追求纯粹的东西的秉性，他先后完成了一些简单的手工和计算机的模拟后，构思出了一个光滑的、非常理想化和简单化的机器加工车间，这就是排队网络的雏形。另外一个著名的例子是诺贝尔经济奖获得者阿罗 (曾任美国管理学会主席), 他是最优存储策略的创始人之一。他最初是在数学系读研究生，但因导师无法帮他获得奖学金，他转到了经济系。由于二战的原因，学业被迫中止，在军队做了三年的气象预报人员，因而接触到了序列统计分析思想。在任职斯坦福大学不久，他参加了兰德公司的存储控制的小型讨论会和随后的相关项目。可以说阿罗涉足并开创动态存储策略的研究是有某种偶然性，但是他能在相关方向做出重要贡献又具有必然性，因为他有很强的数学基础和有力的合作者。

在前一节中提到，当大学设立了数学系，数学研究成为一种职业以后，一些研究数

学的人为了要出“成果”，常常只能是去钻牛角尖，将前人的成果作一些无实质意义的改进；或去解决一些凭空编造出来的“猜想”；或将已有的概念加以推广，再去推广一些有关的结论；或者更进一步，将一个公理系统推广到另一个公理系统，只要能举出一个哪怕是牵强附会的例子来说明新的系统确实包含旧的作为特例，就可以成为研究题材，而不必追问它在现实社会中反映的是什么。其结果只会如数学家韦尔所描述的那样：“数学对这样一些方法特别地感兴趣，即用其它的概念来定义一个概念，以及用其它的断言来推导一个断言。”数学家埃文斯也曾指出了数学界存在的这一现象和趋势：“在现代意义上，数学的特征是在于它以自由的精神去构造假设与定义，而不是在于它对事实的承认。”而罗素则指出数学脱离了现实世界的后果：“数学并不关系到真实世界，它毕竟只有对其自己的世界下结论的权利。”

一些在数学系任职的运筹学工作者，多多少少、潜移默化地受到上述工作和出成果的方式的影响。这对运筹学的健康发展尤其不利，特别是在中国，大多数从事运筹学研究的人在数学系任教。如何消除不良的学术氛围的影响，做出对运筹学的发展有实质性贡献的工作，这是中国运筹学界面临的一个挑战。

5.2.2 与管理科学的关系

运筹学与管理科学关系紧密，但是两者之间一直存在一些差异，尽管它们是有些模糊的 [1] 。这些差异是由两个学科的重点不同和专业视角不同所造成的。管理科学家更加“贴近于管理”，对事情的来龙去脉和深度特别地关注。他们更关心的是，面临的真正的问题是什么？哪些是重大问题？此外，管理专家一般是采用咨询专家的思维方式，更强调问题的关键性，并对可能发生的状况做出预判。运筹学家更加关心和擅长把一些适当的求解技术用于事先提好的问题，并不太关心研判问题的重要性。在运筹学发展的初期，这些差异并不存在。当时，军事运筹学之所以能发挥出巨大的威力，就在于运筹学家非常关注提出问题，并评价这些问题的重要性。随着运筹学的快速发展和学科体系的建立，管理科学与运筹学之间的差异逐渐显现；例如，美国运筹学会 (ORSA) 和管理科学学会 (TIMS) 分别于 1952 年和 1953 年成立。他们在意识到管理科学与运筹学之间这些差异的同时，也清楚地认识到两者之间的密切联系，更重要的是强化联系比强调差异能更好地促进这两个学科的共同发展，两个学会在各自成立 40 多年以后，于 1995 年合并为美国运筹学与管理科学学会 (INFORMS) 。

目前，在中国的学科体系下，运筹学与控制论是作为一级学科数学下的一个二级学科，管理科学与工程是管理学门类下的一个一级学科 (不分设二级学科) 。而在国家自然科学基金委员会的学部体制下，运筹学相关的项目主要是由数理学部受理，而管理科学相关的项目主要是由管理科学部受理，它是与数理学部平级的 (这与美国自然基金委员会的设置不同) 。由此可以看出，在某种程度上管理科学更具有相对独立性，也更受到重视；而运筹学涉及的范围更加广泛，是更具有交叉性的一个二级学科 (例如，在一级学科军队指挥学下设二级学科军事运筹学) 。如何看待和处理运筹学与管理科学之间的联系与区别，使得运筹学和管理科学都能更好地协调发展，这是中国运筹学界今后面临的一个挑战。

5.2.3 实践与推广

运筹学在二次世界大战时期逐渐形成，期间许多运筹学工作者的出色工作，使得运筹学产生了巨大的影响。二战结束以后，他们中的许多人转到高校，纷纷设立运筹或相

关的系 (例如工业工程系), 也有不少到民用领域服务的。这些运筹学前辈在各自的新岗位上继续从事着运筹学方面的教育、研究和实践推广。

一个典型的例子值得我们认真思考 [1] 。1952 年霍普金斯大学成立了运筹学办公室，其人员由美国陆军运筹学办公室成员组成，由学校管理 [1] 。当时，运筹学办公室意识到军事行动与医院业务之间有许多相似之处；例如，如何及时地配置稀缺资源来满足无法完全控制的紧急需要。一些教师和研究生对医院运行的某些方面做过一些零星的研究工作，但由于没有与医院建立起长期稳定的关系，所以也没能参与实施他们的建议和对这些工作的有效性进行评估。尤其是，医院的管理层和职工觉得这些工作很麻烦、费心，因而未产生持久的效果。1956 年霍普金斯大学医学研究所设立了运筹学分部，由卫生学和公共卫生学院的荣誉教授弗莱格勒负责，同时他还是工学院运筹和工业工程系 (后改为数学科学系) 的兼职教授。此后，运筹学分部在他的领导下，解决了医院管理中的许多医务管理问题。他们的成功经验就是，每一项研究都有一些负责管理工作的医师和护士参加，并与医院管理层建立紧密的关系，得到他们的认同。这些运筹学工作者最初介入医院管理工作时，医院的医师和护士没有觉得是对他们工作的威胁，他们相信，无论项目成功与否，他们最终仍要做他们所做的工作；但是渐渐地，运筹学工作者与医务人员，特别是医院的中层管理人员之间产生了隔阂，因为他们侵犯了自己的固有职责范围。弗莱格勒对他的经历回忆道：“我在美国公共卫生局从事上述与运筹相关的活动同时，主要工作仍在大学和医院中。早在 60 年代，我就清楚地知道我必须在工程学院和医学院及其相关机构之间进行抉择。前者是我的根基所在，我还在那里担任运筹学教授，而后者则凝聚着我多年的辛勤劳动。两个地方分部发生了一些事情，使我缓解了抉择的痛苦。在工程学院，运筹学教学变得越来越理论化，很快就被吸纳进新成立的数学系。”

最近十几年，中国运筹学实践和推广方面的工作开展得不多，大多数运筹学工作者的重心在理论研究方面。造成这种现象的原因包括：(1) 运筹学工作者对运筹学发展的认知问题，没有充分意识到实践和推广工作的重要性；(2) 实践和推广工作非常繁复，甚至艰苦，特别是与各行各业具有不同知识层次和结构的人沟通时的困难；(3) 国家和单位的学术及科研评价和奖励机制下实践和推广工作未得到应用的认可和承认。如何协调运筹学研究和教学与推广和实践的关系，广泛和深入地开展运筹学实践和推广工作，这是中国运筹学界今后面临的一个挑战。

5.2.4 成果发表和评价

运筹学是基于理论与实践相互促进而成长起来的，因而自它形成之日就一直被一个基本问题所困扰，运筹学的成果难以发表，即使在英美等运筹学发达的国家也是如此。随着《 Math of Operations Research 》和《 Operations Research 》等杂志的相继创刊，使得运筹学中的一些重要方向的数学理论能公开发表，一定程度上减轻了运筹学研究者在业绩上的压力。1984 年《 Operations Research 》又开辟了应用实践栏目，旨在刊登一些针对解决 1“现实世界 ” 问题的论文。目前，与运筹学相关的期刊杂志近百种，运筹学工作者发表研究成果已经不是太困难了。

然而，困扰运筹学发展的与此相关的、但是更核心的一个问题是，如何评价一项运筹学的成果。有着丰富运筹学理论研究和应用实践经验的舒必克在 50 年后的沉思中指出：“我们的旗舰杂志是那些学术性刊物，让大多数实际工作者们在这些杂志上发表他们的成果，对他们没有什么吸引力。检验实际应用成果的好坏，可能最好用来自顾客的重复使用率来度量，而不是用《 Operations Research 》上发表的文章来衡量。运筹学学术研究

的目标与实际应用的目标有着根本的差别，只有身处他们各自所服务的组织、奖励体系和生活方式中才能体会。”[1]

不容置疑，仅仅以否能在顶级杂志上发表论文及发表论文的篇数多少来衡量一项运筹学成果，特别是应用方面，他的意义的大小和研究者的水平的高低，不仅是十分不恰当的，而且是非常有害的，尤其在中国近年来过分强调 SCI 论文的学术环境下。如何尽最大可能地摆脱目前不科学的科研成果评价体系，是中国运筹学界所面临的一个挑战。

5.2.5 团队合作

20 世纪四五十年代是运筹学发展的初期，活跃在英美军队和民用企业的众多运筹学小组为运筹学的实践和推广做出了重要的贡献。一个很有代表性的团队是 1950 年成立的卡内基理工学院的 HMMS 小组，它的名字是 4 个运筹学家霍尔特、墨蒂格理亚尼、慕斯和西蒙的姓氏英文字首的缩写。这个小组是由海军研究办公室支持的，目的是为工商业研发定量的和计算机化的决策方法。值得强调的是，小组成员关于“工业运作”的基础和兴趣是不尽相同的。霍尔特对企业管理者如何处理库存这一易引起整个国家经济不稳定的问题非常感兴趣；墨蒂格理亚尼研究过生产的流畅性，且对所有的问题都感兴趣；慕斯对如何把经济学和工业工程结合起来感兴趣；而西蒙则专注于管理者在现实中是如何做出决策的，如何对他们的行为进行模型化。研究小组为了找出生产管理者最常遇到的问题，以便作为研究工作的出发点，他们访问调查了 15 个公司。在此基础上，他们确定了这些公司面临着的具有共性的计划和控制问题。为了深入研究这些问题，他们又找了一家公司，它有具普遍性的系统问题但结构相对简单。最终很好地解决了相关问题。小组的成员后来分散到各个重要研究领域，分别进行有关劳动力市场、通货膨胀、财经、企业规划模型和认知心理学等研究领域。其中的两个成员，墨蒂格理亚尼和西蒙获得了诺贝尔经济奖。此外，卢卡斯应在小组另一个成员慕斯的理性期望模型的基础上做的研究得到了诺贝尔经济奖。

运筹学经过几十年的发展，现在分支越来越多，方向越分越细，理论越来越艰深，运筹学工作者之间的合作变得越来越难。对某一个问题，不同的运筹学工作者建立了不同的模型，使用了不同的方法。这就更需要合作，从不同的角度处理同一个问题，才能给出完整的解答。

5.2.6 作用与影响

20 世纪 50 年代到 70 年代是运筹学全面蓬勃发展的黄金时期，而在 70 年代到 90 年代出现了某种危机 [1] 。英美运筹学工作者没有能够继续利用运筹学在二战时期所起到的“战略性”作用，在其他领域发挥出同样巨大的威力。他们在和平时期面临的问题多是“战术性”的，从而使得运筹学界与国家和政府管理层之间的关系逐渐淡化了。而在中国的 20 世纪六、七十年代，华罗庚教授作为世界著名的数学家，以他特有的战略眼光、顽强的意志和爱国奉献精神，带领科研人员，在中国的工厂、煤矿、油田、医院、农村和军队推广优选法和统筹法，得到了毛泽东主席的高度评价，取得了很好的社会效益和经济效益。但随着华罗庚教授的突然离世，运筹学的影响不仅在党和国家领导层及一般民众阶层渐渐弱化，即使在数学界也失去其特有的地位。

运筹学工作者只有研究和应用中敢于创新和实践，勇于交叉与合作，才能充分发挥出运筹学不可替代的作用，让相关学科和领域的科技人员切实地感受到运筹学的威力，也才能扩大运筹学的影响。如何实现这个目标，是中国运筹学界面临的一个挑战。

6 结束语

本研究报告概要性地介绍了运筹学的发展历程、现状和态势，归纳了运筹学发展的一些规律，总结了运筹学研究和实践中的很多宝贵经验。它不太可能对运筹学发展的各个时期、各个相关研究方向都有所涉及。我们只是希望能引起从事运筹学及相关领域研究、实践和教学的科研人员和教师对运筹学的发展有进一步的思考，为运筹学的发展做出自己的贡献；同时让对运筹学及相关学科感兴趣的师生对这个学科有比较全面的了解，引导他们学习、发现和研究运筹学的问题。

本研究报告是在初稿 [12] 的基础上，第二节增加了数学的发展概述，第三节增加了管理科学，博弈论和智能计算，第五节增加了运筹学与管理科学的交叉研究和服务科学与行为运筹学，第六节增加了运筹学发展的挑战。此外，我们对初稿的内容做了多处订正和完善。另外，第三节的主要内容在 [13] 中有概述。

最后，衷心感谢中国运筹学界的十几位学者参与了研究报告的编写或者提出了宝贵的建议。

参 考 文 献

[1] 章祥荪，刘德刚，章景，等. “Operations Research”50 周年纪念特刊中文译本 [J]. *运筹与管理(增刊)*, 2004.
[2] 越民义. 关于数学发展之我见 [J]. *中国数学会通讯*, 2011, 119: 16-25.
[3] 中国运筹学会. 纪念中国运筹学学会成立二十五周年文集 [M]. 北京， 2005.
[4] 王元，文兰，陈木法. 数学大辞典 [M]. 北京：科学出版社， 2010.
[5] Ben-Tal A, El Ghaoui L, Nemirovski A. Robust Optimization [M]. Princeton: Princeton University Press, 2011.
[6] 10000 个科学难题数学编委会. 10000 个科学难题 (数学卷)[M]. 北京：科学出版社， 2009.
[7] Lovasz L. Graph theory over 45 years, An Invitation to Mathematics - From Competitions to Research [M]. Schleicher D. and Lackmann M (eds), Berlin: Springer, 2011, 85-95.
[8] Hendricks V F, Hansen P G. Game Theory: 5 Questions [M]. Johnnesburg: Automatic Press, 2007.
[9] John L Casti. Five Golden Rules: Great Theories of 20th Century Mathematics and Why They Matter [M]. Manhattan: John Wiley & Sons, Inc, 1996. (叶其孝，刘宝光. 二十世纪数学的五大指导理论：它们为什么至关重要 [M]. 上海：上海教育出版社， 2000.)
[10] Hopp W J. Ten most influential papers of management science’s first fifty years [J]. *Management Science,* 2004, 50 (12 supplement), 1763.
[11] 梁启超. 清代学术概论 [M]. 北京：中国人民大学出版社， 2004, 271-273.
[12] 胡晓东，袁亚湘，章祥荪. 运筹学发展的回顾与展望 [J]. *中国科学院院刊*, 2012, **27**(2): 145-160.
[13] 国家自然科学基金委员会和中国科学院. 未来 10 年中国学科发展战略：数学 [M]. 北京：科学出版社， 2012.
[14] Smale S. Mathematical problems for the next century [J]. *The Mathematical Intelligencer*, 1998, **20**(2): 7-15.

附录 A

运筹学中若干未解难题

A1 凸多面体的 d- 步猜想

凸多面体的 d- 步猜想是关于凸多面体结构最基本的公开问题之一，它在 Hiriart-Urruty[1] 提出的非线性分析和优化 14 个公开问题中名列第一.

设 P 是 R^d 中的一个凸多面体， $\delta_P(x, y)$ 表示 P 中两个顶点 x 和 y 之间的距离，即连接 x 和 y 的所有路径中边数的最小值. 凸多面体 P 的直径就是所有顶点之间的距离 $\delta_P(x, y)$ 的最大值. 对于 $n > d \geqslant 2$, 记 $\Delta(d, n)$ 为 R^d 中所有正好有 n 个面 ($d-1$ 维的边界) 的凸多面体 P 的直径的最大值.

凸多面体的 d- 步猜想是：对任意 $d \geqslant 2$, 有 $\Delta(d, 2d) = d$.

该猜想在 $d \leqslant 5$ 已被证明是成立的 [2], 但对于 $d > 5$ 依然是悬而未决. 比 d- 步猜想更强的一些猜想已被反例证明是不成立的 [3]. d- 步猜想还和高斯消去法有着密切的联系 [4], 它还是 Hirsch 猜想的一个特例.

Hirsch 猜想是：对任何 $n > d \geqslant 2$, 有 $\Delta(d, n) \leqslant n - d$.

考虑 R^d 中单位超立方体 $[0,1]^d$, 我们显然有 $\Delta(d, 2d) \geqslant d$. 从而 Hirsch 猜想成立就必定有 d- 步猜想成立.

Hirsch 猜想是 1957 年 Hirsch 在给 Dantzig 的一封信中提出来的. 该猜想的提出是为了对线性规划中单纯法的计算复杂性有更好的理解 [1]. 关于 Hirsch 猜想和 d- 步猜想的详细介绍可见 [5].

参考文献

[1] Hiriart-Urruty J B. Potpourri of conjectures and open questions in nonlinear analysis and optimization [J]. *SIAM Review*, 2007, **49**: 255-273.

[2] Klee V, Walkup D W. The d-step conjecture for polytopes of dimension $d < 6$ [J]. *Acta Mathematica*, 1967, **133**: 53-78.

[3] Holt F, Klee V. Counterexamples to the strong d-step conjecture [J]. *Discrete Comput Geom*, 1998, **19**: 34-46.

[4] Lagrias J C, Prabhu N, Reeds J A. The d-step conjecture and Gaussian elimination [J]. *Discrete Comput Geom*, 1997, **18**: 53-82.

[5] Ziegler G M. Lectures on polytopes [M]. New York: Springer-Verlag, 1995.

A2 有限多个二次函数最大值的极小化问题

给定两个 $n \times n$ 对称矩阵 A 和 B, 可以证明 [1] 以下两点是等价的：

1) $\max\{\langle Ax, x\rangle, \langle Bx, x\rangle\} > 0$ 对 R^n 中所有的 $x \neq 0$ 都成立.
   (或 $\geqslant$ 对 R^n 中所有 x 都成立);

2) 存在 $\mu_1 \geqslant 0,\ \mu_2 \geqslant 0,\ \mu_1 + \mu_2 = 1$, 使得 $\mu_1 A + \mu_2 B$ 正定 (或半正定).

该结果被称袁 — 引理 [2−3], 等价于著名的 S- 引理. 后者由于在半定规划中的广泛应用，近年来受到了极大的重视 [4]. Hiriart-Urruty[2] 提出的非线性分析和优化的 14 个公开问题中的最后一个就是考虑如何推广袁 – 引理：

设 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 是 m 个 $n \times n$ 对称矩阵. 如何将如下条件:

(Cm) $\max\{\langle A_1x, x\rangle, \langle A_2x, x\rangle, \cdots, \langle A_mx, x\rangle\} > 0$ 对 R^n 中所有的 $x \neq 0$ 都成立 (或 $\geqslant$ 对 R^n 中所有 x 都成立).

等价地用 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 表示出来?

上述问题在 $m = 2$ 就是袁 — 引理. 对于 $m > 2, A_1, A_2, \cdots, A_m$ 的凸组合正定显然是充分条件, 但不必要 [3].

定义函数 $q(x) = \max\{\langle A_1x, x\rangle, A_2x, x\rangle, \cdots, \langle A_mx, x\rangle$, 则条件 (Cm) 就是要求 $q(x)$ 在 $x = 0$ 处达到最小. 于是问题的本质就是如何将 $q(x)$ 的二阶最优性条件等价地用 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 表示出来. 这个问题的更一般形式就是考虑形如 $f = \max\{f_1(x), f_2(x), \cdots, f_m(x)\}$ 的非光滑函数的二阶近似模型和广义海森算子. 而极大极小问题的二次近似模型以及算法是近年来非光滑优化十分关注的问题 [5−6].

参考文献

[1] Yuan Y. On a subproblem of trust region algorithm for constrained optimization [J]. *Math Programming*, 1990, **47**: 53-63.

[2] Hiriart-Urruty J B. Potpourri of conjectures and open questions in nonlinear analysis and optimization [J]. *SIAM Review*, 2007, **49**: 255-273.

[3] Martinez-Legaz J E, Seeger A. Yuan's alternative theorem and the maximization of the minimum eigenvalue function [J]. *Optimization Theory and Applications,* 1994, **82**: 159-167.

[4] Polik I, Terlaky T. A survey of the S-Lemma [J]. *SIAM Review*, 2007, **49**: 371-418.

[5] Rockafellar R T, Wets R J B. Variational Analysis [M]. Berlin: Springer, 1998.

[6] Hiriart-Urruty J B, Lemarechal C. Convex Analysis and Minimization Algorithms II [M]. Berlin: Springer , 1996.

A3 推广的 Lax 猜想

在 2006 年国际数学家大会上, Arkadi Nemirovski[1] 作了题为 "Advances in Convex Optimization: Conic Programming" 的 1 小时报告. 在这个报告中, 他指出锥优化作为一类最具代表性的凸规划问题, 通过转化为半定规划 (被称为 "21 世纪的线性规划") 并应用强大的内点法求解将是一种重要的途径.

双曲锥是目前已知凸锥中最具有良好特征的一类锥. 它的定义为: 如果齐次多项式 $p(x): R^n \to R$ 沿给定方向 h 是双曲的 (即满足 $p(h) > 0$ 且对任 x 关于 t 的多项式 $p(x + th)$ 只有实根, 此时的多项式 $p(x)$ 也称为双曲多项式), 那么集合 $K_{p,h} := \{x \in R^n : p(x + th) \neq 0, \forall t \in R_+\}$ 称为双曲锥 [2−3], 并把关于 λ 的多项式 $p(\lambda h - x)$ 称为 x 的特征多项式, 对应的根称为特征根. 此时双曲锥 $K_{p,h}$ 又可表示为 $\{x \in R^n : \lambda_{\min}(x) > 0\}$, 其闭包 cl $(K_{p,h}) = \{x : \lambda_{\min}(x) \geqslant 0\}$, 其中 $\lambda_{\min}(x)$ 表示 x 最小的特征根 [4].

双曲锥存在包含关系 "对称锥 $\subset$ 齐次锥 $\subset$ 双曲锥"("$\subset$" 为严格包含). 我们熟知的非负锥 R^n_+ 、二阶锥 (Lorentz 锥) 、半正定矩阵锥 $S^{n\times n}_+$ 分别对应的双曲多项式 $p(x)$ 和特定方向 h(h 可能不唯一) 为:

1) $x_1x_2\cdots x_n, \quad (1, \cdots, 1, 1)^{\mathrm{T}} \in R^n$;

2) $x_n^2 - (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2), \quad (0, \cdots, 0, 1)^T \in R^n$;

3) $\det(x)$, 单位矩阵 $I \in S^{n\times n}$.

Chua[5] 于 2003 年证明了齐次锥与半定锥的截面同构，从而在理论上保证了齐次锥优化问题可以转化为半定规划求解. 那么，双曲锥能否用半定锥表示呢？即是否存在 $S^{m\times m}$ 的子空间 N, 使得 $S_{++}^{m\times m}\cap N$ 与 $K_{p,h}$ 同构？

Peter Lax[6] 于 1958 年首先提出 $n=3$ 时对该问题的猜想，即 “Lax 猜想”，直到 2003 年才由 Lewis[7] 等证实. 所以，此问题又称为 “推广的 Lax 猜想”.

参考文献

[1] Nemirovski A. Advances in Convex Optimization: Conic Programming [C]// Sanz-Sol M, Soria J, Varona J L, Verdera J, Eds., *Proceedings of International Congress of Mathematicians, Madrid, August* 22-30, 2006, Volume 1. Zurich: EMS-European Mathematical Society Publishing House, 2007, 413-444.

[2] Güler O. Hyperbolic polynomials and interior point methods for convex programming [J]. *Math Oper Res*, 1997, **22**(2): 350-377.

[3] Tunçel L. Polyhedral and Semidefinite Programming Methods in Combinatorial Optimization [M]. [S.l.]: Fields Institute Monograph Series, AMS, 2008.

[4] Renegar J. Hyperbolic programs and their derivative relaxation [J]. *Found Compt Math*, 2005, **6**(1): 59-79.

[5] Chua C B. Relating homogeneous cones and positive definite cones via T-algebras [J]. *SIAM Journal on Optimization*, 2003, **14**: 500-506.

[6] Lax P D. Differential equations, difference equations and matrix theory [J]. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 1958, **6**: 175-194.

[7] Lewis A S, Parrilo P A, Ramana M V. The Lax conjecture is true [J]. *Proc Amer Math Soc*, 2005, **133**(9): 2495-2499.

A4 DFP 拟牛顿法的收敛性

DFP 方法是由 Davidon[1] 在 1959 年提出，后由 Fletcher 和 Powell[2] 于 1963 年整理和修正的求解优化问题的第一个拟牛顿法. 由于 DFP 方法不需计算函数的海色矩阵，同时具有快速 (超线性) 的收敛性质，它的提出给非线性优化领域带来了革命性的进步，并使得拟牛顿法成为非线性优化方法中数学理论最为丰富的一类方法，也是最被广泛应用的优化方法之一. L.Trefethen 认为拟牛顿法的提出是上世纪数值分析领域 13 个经典工作之一.

目前公认最好的拟牛顿法是 BFGS 方法， Powell[3] 在 1976 年开创性地证明了采取 Wolfe 搜索的 BFGS 方法对凸光滑函数的收敛性， Byrd, Nocedal 和 Yuan[4] 在 1987 年将此结果推广到了以 DFP 方法和 BFGS 方法为端点的整个 Broyden 凸族 (DFP 方法除外). 迄今为止， “对强凸光滑函数，采取 Wolfe- 搜索的 DFP 方法是否收敛” 的问题至今悬而未决. Nocedal[5] 与 Fletcher[6] 在 20 世纪 90 年代初都将该问题列为无约束优化中的第一个公开问题.

DFP 方法的基本思想是计算搜索方向 $d_k=-H_k\nabla f(x_k)$, 其中 H_k 称为拟牛顿矩阵，在沿方向 d_k 作某种搜索得到合适的步长 α_k 后，计算新的迭代点 $x_{k+1}=x_k+\alpha_k d_k$. 如果 H_k 是目标函数 $f(x)$ 海色矩阵的逆，这就是传统的牛顿方法. DFP 方法不计算函数的海森矩阵，而要求 H_k 满足拟牛顿条件 (又称割线关系式) $H_k y_{k-1}=s_{k-1}$, 其中 $s_{k-1}=x_k-x_{k-1}$, $y_{k-1}=\nabla f(x_k)-\nabla f(x_{k-1})$. 具体地， DFP 方法由如下迭代公式产生

H_k:

$$H_k = H_{k-1} - \frac{H_{k-1}y_{k-1}y_{k-1}^{\mathrm{T}}H_{k-1}}{y_{k-1}^{\mathrm{T}}H_{k-1}y_{k-1}} + \frac{s_{k-1}s_{k-1}^{\mathrm{T}}}{s_{k-1}^{\mathrm{T}}y_{k-1}}.$$

DFP 方法收敛性公开问题：考虑 DFP 方法，其中步长 α_k 由 Wolfe 搜索得到，即满足如下两个条件：

$$f(x_k + \alpha d_k) \leqslant f(x_k) + c_1\alpha d_k^{\mathrm{T}}\nabla f(x_k),$$
$$d_k^T\nabla f(x_k + \alpha d_k) \geqslant c_2 d_k^{\mathrm{T}}\nabla f(x_k),$$

其中 $c_1 \leqslant c_2$ 是 (0, 1) 中的两个常数. 假设目标函数 $f(x)$ 为强凸光滑函数 (此时 $f(x)$ 具有唯一极小点 x^*). 对任意的初始点 x_1 以及任意的对称正定矩阵 H_1, 由 DFP 方法的点列是否收敛到 x^*?

这个问题的难度之一在于 Powell 处理 BFGS 方法的技巧在这里很难利用. 对一些特殊情形这个问题已有进展 [7], 但现在看来，离问题的彻底解决还十分遥远.

参考文献

[1] Davidon W C. Variable metric methods for minimization [R]. *Argonne National Lab Report* (Argonne, IL), 1959.

[2] Fletcher R, Powell M J D. A rapidly convergent descent method for minimization [J]. *Comput J*, 1963, **6**: 163-168.

[3] Powell M J D. Some global convergence properties of a variable metric algorithm for minimization without exact line searches [C]// *Nonlinear Programming, SIAM-AMS Proceedings*. Philadephia: SIAM, 1976: 53-72.

[4] Byrd R H, Nocedal J, Yuan Y. Global convergence of a class of quasi-Newton Methods [J]. *SIAM J Numer Anal*, 1987, **24**: 1171-1190.

[5] Nocedal J. Theory of algorithms for unconstrained optimization [J]. *Acta Numerica*, 1992, **1**: 199-242.

[6] Fletcher R. An overview of unconstrained optimization [R]// *Algorithms for Continuous Optimization, the state of the art*, [S.l.]: Kluwer Academic Publisher, 1993, 109-143.

[7] Yuan Y. Convergence of DFP algorithm [J]. *Science in China, Ser A*, 1995, **38**: 1281-1294.

A5 最小阻力凸体问题

牛顿最早于 1686 年提出了最小阻力凸体问题，并在要求几何体径向对称时解决了该问题. 然而，近年来有研究指出 [1] ，存在非径向的凸体比牛顿的径向情形产生更小的阻力. 一般形状的最小阻力凸体问题的理论性质以及它们的有效逼近至今仍是一个富有挑战性的公开问题，它在 Hiriart-Urruty 提出的非线性分析和优化 14 个公开问题中名列第九 [2].

等底限高的空间几何体具备什么形状时能使其在某流体中以恒速运动时受到最小的阻力？早在 1686 年，牛顿就提出了这样一个问题：等底限高 (底为半径 $R > 0$ 的圆盘; 高的上限 $L > 0$ 给定) 的空间几何体具备什么形状时能使其在某流体中 (流体物理特性给定) 以恒速运动时受到最小的阻力？

牛顿当时仅考虑了回转体 (即函数 $r| \to u(r)$ 的图像绕水平轴旋转而成的几何体), 并假设了该问题的物理背景. 最终问题归结为如下一维变分问题:

$$
(\mathrm{P}) \qquad \begin{array}{ll} \min & J(u) := \displaystyle\int_0^R r(1+|\overset{\circ}{u}(r)|^2)^{-1}\mathrm{d}r \\ & u(0)=L, u(R)=0; \\ & \overset{\circ}{u}(r) \leqslant 0, r \in [0,R]. \end{array}
$$

牛顿给出的最优几何体出人意料地在尾部有一个扁平底. 如今, 解决问题 (P) 的一个标准途径是借助最优控制的方法 [3].

大多数数学家认为牛顿的最小阻力几何体问题已经解决了. 如果假设几何体具有径向对称性质时, 确实如此. 然而, 最近有研究指出 [3], 存在非径向的凸体比牛顿的径向情形产生更小的阻力. 这一发现推进了该论题新的研究 [4−7]. 读者可以在网站 http://www.lama.univ-savoie.fr/ 上找到许多合适的参考文献。从数学角度, 一般的变分问题具有如下形式:

$$
(\mathrm{P}') \qquad \min J(u) := \int_{B(0,R)} (1+|\nabla u(x)|^2)^{-1}\mathrm{d}x, \quad u \in C,
$$

其中 $C := \{u(x) \in W^{1,\infty}_{\mathrm{loc}} | 0 \leqslant u(x) \leqslant L, u(x)$ 是二维变量 x 的凹函数 $\}$.

$u(x)$ 的凹性条件足够强, 可以导出一个紧性假设, 该假设暗含了问题 (P′) 解的存在性. 牛顿考虑的情形对应于同一个变分问题, 但约束集却缩小为

$$
C_{\mathrm{rad}} := \{u(x) \in dC | u(x) \text{ 径向对称}\}.
$$

如前所述, 新的事实是:

$$
\inf_{u \in C} J(u) < \inf_{u \in C_{\mathrm{rad}}} J(u).
$$

如果总结一下有关该论题最新的研究工作以及尚未解决的问题, 那么我们就发现一种奇怪的数学情景:

- 变分问题 (P′) 确实存在解 (除了一些非常特殊的情形, 其最优解释未知的).

- 变分问题 (P′) 有无穷多解 (问题 (P′) 的解是非径向对称的, 故将其绕轴旋转会得到另一个解).

-(通常的) 数值方法不能解问题 (P′)(所需的几何体的凹性在数值上是一个很难处理的约束).

人们猜测, 问题 (P′) 的最优解是带有许多扁平面的钻石状的几何体. 事实上, 对于极小曲面, 不存在子集使得问题 (P′) 在其上的最优几何体是严格凸的; 特别地, 在高斯曲率有限的地方, 它是空集. 目前, 通过特殊方法得到的数值剖面要优于以往任何猜想的最优形状 [5]. 总之, 问题 (P′) 解的理论性质以及它们的有效逼近至今仍是一个没有解决的富有挑战性的问题.

参考文献

[1] Guasoni P. Problemi di ottimizzazione di forma su classi di insiemi convessi [J]. *Tesi di Laurea*, Pisa, 1996.

[2] Hiriart-Urruty J B. Potpourri of conjectures and open questions in nonlinear analysis and optimization [J]. *SIAM Review*, 2007, **49**: 255-273.

[3] Tikhomirov V M. Stories about Maxima and Minima [J]. *Math World 1*, AMS, Providence, RI, 1990.

[4] Buttazzo G, Kawohl B. On Newton's problem of minimal resistance [J]. *Math Intelligencer*, 1993, **15**: 7-12.

[5] Brock F, Ferone V, Kawohl B. A symmetry problem in the calculus of variations [J]. *Calc Var Partial Differential Equations*, 1996, **4**: 593-599.

[6] Lachand- Robert T. Minimisation sous contraintes de convexite ou globales. Applications au problem de resistance minimale de Newton [J]. *Memoire d'Habilitation a Diriger des Recherches*, Universite de Paris VI, 2000.

[7] Lachand-Robert T, Oudet E. Minimizing within convex bodies using a convex hull method [J]. *SIAM J Optim*, 2005, **16**: 368-379.

A6 是否存在求解性线性规划的强多项式时间算法？

线性规划的一般形式于第二次世界大战中提出，并被用于优化军事调度、后勤配备以及生产安排．之后线性规划被广泛应用于各个领域．标准的线性规划可以表述为：

$$\begin{aligned} \max \quad & c^{\mathrm{T}}x \\ \text{s.t.} \quad & Ax \leqslant b, x \geqslant 0. \end{aligned}$$

其对偶问题：

$$\begin{aligned} \min \quad & b^{\mathrm{T}}y \\ \text{s.t.} \quad & A^{\mathrm{T}}y \geqslant c, \quad y \geqslant 0. \end{aligned}$$

其中 c 和 x 是 m 维向量， A 为 $n \times m$ 维矩阵， b 和 y 为 n 维向量， x 和 y 是决策变量．问题的输入字长 L 定义为输入该问题所需的计算机字符串长度．一般情况下，只考虑 A, b 和 c 中的数据都为整数 (或有理数) 的情形，此时每个数据的长度是其二进制表示的长度 (为原数据的对数量级), 而 L 相当于所有数据长度的总和．我们称某一算法的时间复杂度为 $O(f(n,m,L))$ 是指存在常数 $C > 0$(与问题的数据无关), 使得此算法在任何情况下在 $O(f(n,m,L))$ 单位时间内总能得到该问题的最优解或者确认该问题无解．当 $f(n,m,L)$ 为多项式函数的时候，则此算法被称为多项式时间算法．当一个算法能在 $O(f(n,m))$ 步内求解线性规划，而其中每一步都为至多 $O(g(n,m,L))$ 长的数据的四则运算，而且 f 和 g 均为多项式函数，那么这个算法就被称为强多项式时间算法 [1−2].

1947 年， Dantzig[3−4] 提出了求解线性规划的单纯形法，并基于 von Neumann 建立的矩阵博弈理论确立了线性规划的对偶理论． 1979 年， Khachiyan[5] 第一次提出了求解线性规划的基于椭球算法 [6] 的多项式时间算法． 1984 年， Karmarkar[7] 提出了被称为内点法的新的多项式时间算法． Tardos[8] 于 1986 年首次提出一个求解组合线性规划的强多项式时间方法；而 Vavasis 和 Ye[9] 在 1996 年提出了步数与 b, c 的数据无关的多项式时间内点算法． Vavasis 和 Ye 的方法已经相当接近强多项式时间算法 [9], 其所需计算步

数只与矩阵 A 的某种条件数有关，而 A, b, c 本身甚至可以是任何实矩阵、向量 (其元素不必是有理数).

是否存在多项式时间的单纯形转轴规则，目前仍是悬而未决的问题. Khachiyan[5] 的椭球算法在最坏情形下需 $O(n^4L)$ 步 (每步为字长不超过 $O(L)$ 的数据的四则运算) 来求解线性规划问题，相应的时间复杂度为 $O(n^4L^2\ln L\ln\ln L)$. Karmarkar[7] 的内点法在最坏情形下亦需 $O(n^4L)$ 步 (每步为字长不超过 $O(L)$ 的数据的四则运算) 求解线性规划问题，但是其总体的时间复杂度为可改进为 $O(n^{3.5}L^2\ln L\ln\ln L)$, 并且其在通常情形中的表现远胜于其在最坏情形下的预测. Renegar[10] 提出的路径跟踪法只需 $\mathrm{O}(n^{3.5}L)$ 步就可求解线性规划问题，进而其总体时间复杂度为 $O(n^3L^2\ln L\ln\ln L)$. 类似地 (原有对偶) 路径跟踪法在实际应用中表现出色. 目前流行的内点法正是基于障碍函数所改进而得的路径跟踪算法. Spielman 及 Teng[10] 在 2004 年证明了两阶段影子顶点单纯形算法的平均时间复杂度为多项式.

Tardos[8] 于 1986 年首次提出关于组合线性规划的强多项式算法 (组合线性规划是指线性规划其系数矩阵 A 的元素的规模被关于 n, m 的某一给定多项式函数所界住). S.Vavasis 和 Y. Ye 于 1996 年提出基于分层最小二乘法的原有对偶内点法 [9], 算法所需的步数不超过 $O(n^{3.5}c(A))$, 其中 $c(A)$ 为关于系数矩阵 A 的某种条件函数.

以上算法的步数都与问题的数据输入字长有关. 至于是否存在运算步数与问题输入字长无关，而只与问题的维数 (如 m, n 等) 有关的多项式时间算法 (强多项式时间算法) 是目前线性规划研究领域的最基础与最重要的问题，也是能否解决超大规模线性规划问题的关键所在.

参考文献

[1] Schrijver A. *Theory of Linear and Integer Programming* [M]. Manhattan: John Wiley & Sons, 1998.

[2] Grötschel M, Lovász L, Schrijver A. *The Ellipsoid Method and Combinatorial Optimization* [M]. Berlin: Springer, 1988.

[3] Dantzig G B. Programming of interdependent activities II [J]. *Mathematical Model, Econometrica*, 1949, **17**: 200-211.

[4] Dantzig G B. *Linear Programming and Extensions* [M]. Princeton: Princeton University Press, 1963.

[5] Khachian L G. A polynomial algorithm in linear programming [J]. *Dokl Akad Nauk SSSR*, 1979, **244**: 1093-1096.

[6] Yudin D B, Nemirovsky A S. *Problem Complexity and Method Efficiency in Optimization* [M]. New York: Wiley, 1983.

[7] Karmarkar N. A new polynomial-time algorithm for linear programming [J]. *Combinatorica*, 1984, **4**: 373-395.

[8] Tardos E. A strongly polynomial algorithm to solve combinatorial linear programming [J]. *Operations Research*, 1986, **34**: 250-256.

[9] Vavasis S A, Ye Y. A primal-dual interior point method whose running time depends only on the constraint matrix [J]. *Mathematical Programming*, 1996, **74**, 79-120.

[10] Renegar J. A polynomial-time algorithm, based on Newton's method, for linear programming [J]. *Mathematical Programming,* 1988, **40**:, 59-93.

[11] Spielman D A, Teng S H. Smoothed analysis of algorithms: why the simplex algorithm usually takes polynomial time [J]. *Journal of ACM*, 2004, **51**(3): 385-463.

A7 组合优化反问题的计算复杂性

组合优化反问题是给定组合优化问题的一个可行解，修改该组合优化问题的描述参数，使得给定的可行解在新的参数下变成最优解，并且参数的修改尽可能地小．相对于反问题，组合优化的原问题被称为正问题．一般而言，新旧参数差的加权 1- 范数、加权 2- 范数、加权无穷范数、加权哈明距离作为度量参数修改值的目标函数．组合优化反问题在交通规划、地质勘探、医学图象重构、同位回归、关联分析等很多领域有着广泛的应用前景.

对于绝大多数经典的组合优化问题，例如最短路、最小割、最小支撑树、最大流、两个拟阵的交、子模流函数最大化等等，都分别被证明这些问题的反问题是多项式时间可解的．进一步 Yang 和 Zhang[1], Ahuja 和 Orlin[2] 分别独立地证明了，对于一个目标函数是线性和形式而且满足可分离条件的组合优化问题，如果其正问题是多项式时间可解的，那么反问题也是多项式时间可解的．一个自然的问题就是一般情况下，这个结论是不是成立？

对于这个问题的回答是否定的． Cai, Yang 和 Zhang[3] 证明了中心选址问题的反问题是强 NP 困难的，尽管其正问题有很快的组合强多项式时间算法.

Heuberger[4] 于是提出了一个新的公开问题：如果一个组合优化反问题是多项式时间可解的，那么是否有其正问题一定是多项式时间可解的？这一问题的解决，无疑可以帮助加深对组合优化反问题的计算复杂性的理解.

参考文献

[1] Yang C, Zhang J Z. Two general methods for inverse optimization problems [J]. *Appl Math Lett*, 1999, **12**: 69-72.

[2] Ahuja R K, Orlin J B. Inverse Optimization, Part I: Linear Programming and General Problem [J]. *Operations Research*, 2001, **35**: 771-783.

[3] Cai M C, Yang X G, Zhang J Z. The complexity analysis of the inverse center location problem [J]. *J. Global Optim*, 1999, **15**: 213-218.

[4] Heuberger C. Inverse optimization, a survey on problems, methods, and results [J]. *Journal of Combinatorial Optimization*, 2004, **8**(3): 329-361.

A8 求解旅行商问题的更好的近似算法

旅行商问题是一个经典的组合优化问题，它可以表述为：给定一个无向完全图 $G = (V, E)$, 即顶点集 V 中的每两个顶点 u 和 v 都有一条边 $e = (u, v) \in E$; 另给边集 E 中的每条边 e 赋一个正整数 $d(e)$, 用来表示 u 和 v 之间的距离．求 G 的一条最短哈密尔顿路，即经过 V 中每一个顶点恰好一次的一条简单闭路，且路上相邻两个顶点之间的距离之和最小．因为 Karp[1] 在 1972 年证明该问题是 NP- 完备的，所以有许多学者先后提出了求解该问题的各种各样的启发式算法和近似算法.

针对距离函数满足三角不等式的情形， Christofides[2] 在 1976 年给出了一个性能比为 1.5 的近似算法，即该算法可在多项式时间内求出一条哈密尔顿路，其路长不会超过

最短哈密尔顿路长的 1.5 倍. 然而，对于一般的情形 (距离函数不满足三角不等式), Sahni 和 Gonzalez[3] 在 1976 年证明除非 P=NP, 旅行商问题不存在具有常数性能比的近似算法 [3].

近三十年来，人们一直都在试图改进 Christofides 的结果 [2]. 对于欧式平面上的旅行商问题， Arora[4] 在 1996 年通过几何划分等技巧，给出了一个性能比可任意接近 1 的近似算法系列方案. 但是在距离函数仅仅满足三角不等式时，人们还不知道旅行商问题是否存在一个性能比小于 1.5 的近似算法. 它也成为组合优化领域中的一个著名的公开问题.

参考文献

[1] Karp R M. Reducibility among combinatorial problems [C]// *Complexity of Computer computations*, New York: Plenum Press, 1972, 85-103.

[2] Christofides N. Worst-case analysis of a new heuristic for the traveling salesman problem [R]. *Technical Report* 388, Graduate School of Industrial Administration, Carnegie-Mellon University, Pittsburgh: PA. 1976.

[3] Sahni S K, Gonzalez T F. P-complete approximation problems [J]. *Journal of ACM*, 1976, **23**: 555-565.

[4] Arora S. Polynomial time approximation scheme for Euclidean TSP and other geometric problems [C]// *Proc. 38th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, [S.l.]: IEEE Computer Society, 1996, 2-11.

A9 k-服务器猜想

k-服务器猜想源于人们对 k-服务器问题的研究. 该问题是 Manasse 等 [1] 于 1990 年首先提出的，它在网络设计优化中有着非常广泛的应用.

k-服务器问题可以描述为：给定一个有 n 个顶点的图 G, 每条边有一个非负的权值，每一个顶点处都有一个服务对象，它可以提出任意多次的服务请求；另有 $k(< n)$ 个相同的服务器, 它们开始时位于图 G 的 k 个顶点处, 随后在一些服务对象之间移动, 以满足服务对象提出的服务请求. 假设到达服务对象的任意一个服务器都可以满足它提出的服务请求. 问题是如何调度这 k 个服务器，使得它们能满足服务对象提出的所有服务请求，而且尽可能地减少它们在顶点之间移动的总费用.

这个问题有两个研究模型. 在线 (online) 模型假定，服务请求是一个一个先后产生的，在依次完成所提出的服务时，只知道在此之前提出过的服务请求及服务过程，而不知道哪一个服务对象会提出下一个服务请求. 而离线 (offline) 模型假定，在给任意一个服务请求分配服务器时，已经知道要考虑的所有服务请求产生的顶点位置和次序. 求解这两个模型的算法分别称为在线算法和离线算法.

因为离线问题通常要比在线问题容易处理，所以为了评判一个在线算法的好坏，目前一般是把它的性能与最优离线算法的性能进行比较. 考虑求解在线 k-服务器问题的一个在线算法 A, 和一个含有限多个服务请求的序列 R, 用 $C_A(R)$ 和 $C_{\mathrm{opt}}(R)$ 分别表示 A 和离线最优算法满足 R 中服务请求的费用. 若对于任意 R 都有，

$$C_A(R) \leqslant \alpha C_{\mathrm{opt}}(R) + \beta,$$

其中 α 和 β 都与 R 无关，则称 A 是一个 α- 竞争算法 [1]. 显然， α 越小，在线算法 A 的性能越接近离线最优算法的性能.

k- 服务器猜想是：存在求解在线 k- 服务器问题的 k- 竞争算法. 目前该猜想在以下两种情形下被证明是正确的 [1−2]:

(1) $k = 2$ 或 $k = n - 1$;

(2) 图 G 是一棵树.

另外，对于一般的图 G, 已经证明对任何 $a < k$, 不存在求解在线 k- 服务器问题的 a- 竞争算法 [1], 但是存在 $(2k - 1)$- 竞争算法 [3]. k- 服务器猜想现已成为组合优化在线问题与竞争策略研究领域中最基本的一个公开问题.

参考文献

[1] Manasse M S, McGeoch L A, Sleator D D. Competitive algorithms for server problems [J]. *Journal of Algorithms*, 1990, **11**: 208–230.

[2] Chrobak M, Larmore L L. An optimal on-line algorithm for k-servers on trees [J]. *SIAM Journal on Computing*, 1991, **20**(1): 144-148.

[3] Koutsoupias E, Papadimitriou, Christos H. On the k-server conjecture [J]. *Journal of the ACM*, 1995, **42**(5): 971-983.

A10 装箱问题是否存在绝对近似算法

装箱问题是组合最优化和近似算法领域中的一个基本问题. 该问题可以描述如下：给定一组在 $[0, 1]$ 之间的正数，将它们划分成若干子集，使得每个子集中的正数之和不超过 1 且子集的数目达到最小. 这里我们可以把每个子集都看成一个容量为 1 的箱子.

Johnson 等 [1] 人在他们奠基性的工作中对装箱问题的若干近似算法进行了深入的分析. 随后 de la Vega 和 Lueker[2], Karmarkar 和 Karp[3] 分别给出了装箱问题的渐进多项式近似方案和渐进完全多项式近似方案. 另外， Yao[4] 研究了在线装箱问题：需要进行划分的一组正数是一个一个给出的；在考虑将某一个正数放到哪一个子集的时候，仅仅知道已经给出的正数的大小 (及它们属于哪个子集), 而不知道下一个要给出的正数的大小. 关于装箱问题的介绍可参见 [1].

目前，装箱问题研究中一个最重要的未解难题是：是否存在求解装箱问题的绝对近似算法？即是否存在一个多项式时间算法 A 和一个常数 m, 使得对装箱问题的任意实例 I, 算法 A 所需要的箱子个数 $A(I)$ 与最优算法所需要 $\mathrm{OPT}(I)$ 之差不超过 m? 即 $A(I) - \mathrm{OPT}(I) \leqslant m$; 更进一步地，是否存在这样的多项式时间算法使得 $m = 1$?

参考文献

[1] Johnson D S, Demers A J, Ullman J D, et al. Worst-Case performance bounds for simple one-dimensional packing algorithms [J]. *SIAM J on Computing*, 1974, **3**: 299-325.

[2] Fernandez de la Vega W, Lueker G S. Bin packing can be solved within $1+\varepsilon$ in linear time [J]. *Combinatorica*, 1981, **1**: 349-355.

[3] Karmarkar N, Karp R M. An efficient approximation scheme for the one-dimensional bin-packing problem [J]. *Proc.* 23*rd Annual IEEE Symposium on Foundation of Computer Science* (FOCS), 1982, 312-320.

[4] Yao A C-C. New Algorithms for Bin Packing [J]. *J. of the ACM*, 1980, **27**: 207-227.

[5] Coffman E G, Garey M R, Johnson D S. Approximation algorithms for bin packing: A survey [M]. *Approximation Algorithms for NP-hard Problems*, [S.l.]: PWS, 1997.

A11 随机排队网络的遍历性

随机排队网络是计算机网络、生产、运输、库存等各项资源共享的随机服务系统的一个基本数学模型.

一个随机排队网络一般由多个节点组成，每一个节点代表一类服务设施．每一节点处均可有从网络外部到达的顾客来接受其服务，而顾客在每一个节点处接受服务之后以一定的概率立刻离开系统或立刻转移到网络其它节点处继续接受服务，当然也允许以一个正的概率立刻返回到该节点接受另一次服务．假设从网络外部到达的顾客是随机的，而顾客在每个节点处的服务时间也是随机的且依赖于该顾客是从网络外部到达还是从哪一个节点处转移而来，并且每个节点处服务完的顾客以什么样的概率立刻进行转移也依赖于该顾客是以什么途径来到该节点的．我们用 $\{X(t): t \geqslant 0\}$ 来表示包含队长过程在内的描述其排队网络指标的马氏过程，如果 $\{X(t): t \geqslant 0\}$ 这一过程是遍历的，那么称原排队网络为遍历的.

对一些特殊的排队网络，人们可用流体模型方法 [1−2] 或再生过程方法 [3] 得到其遍历性．对于如何来建立一般随机排队网络的遍历性是人们关注的一个至今未解决的问题.

参考文献

[1] Chen H, Zhang H. Stability of multiclass queueing networks under FIFO service discipline [J]. *Mathematics of Operations Research*, 1997, **22**: 691-725.

[2] Dai J. On positive Harris recurrence of multiclass queueing networks: a unified approach via fluid limit models [J]. *Annals of Applied Probability*, 1995, **5**: 49-77.

[3] Sigman K. The stability of open queueing networks [J]. *Stochastic Processes and Their Applications*, 1997, **35**: 11-25.

A12 PH-分布的最小表示

位相型分布理论是研究随机服务系统的一个主要数学工具. 位相型分布或 PH-分布是一个有限状态马氏过程吸收时间的分布. 具体地, 对于一个状态空间为 $\{1, 2, \cdots, m, m+1\}$ 连续时间马尔可夫链 $\{X(t), t \geqslant 0\}$, 状态 $m+1$ 为吸收态，而其他状态均为瞬态，无穷小生成元为

$$\begin{pmatrix} T & -Te \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

其中 e 是以 1 为元素的 m 维列向量，初始分布为 (α, α_{m+1}), 这里 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_m)$. 令 ξ 表示该马氏链状态 $m+1$ 的吸收时间，即

$$\xi = \inf\{t \geqslant 0 | X(t) = m+1\}.$$

则

$$\Pr(\xi \leqslant x) = 1 - \alpha \exp(Tx)e, \quad x \geqslant 0.$$

将 ξ 称为 PH- 分布，记 $[\alpha, T)$ 为 ξ 的一个 PH- 表示，称状态 $\{1, 2, \cdots, m, m+1\}$ 为该 PH 表示的位相．人们已经证明了在弱收敛拓扑下，由所有 PH- 分布组成的集合是定义在 $[0, \infty)$ 上全体概率分布组成的空间上的一个稠密子集 [1]．这说明对给定任何一个定义在 $[0, \infty)$ 上的概率分布函数，我们都可以构造一个 PH- 分布使之很好地近似这个给定的概率分布函数．而由 PH- 分布描述的随机模型如排队系统，库存系统，可靠性系统，其重要权重指标往往能精确的给出．这使分析和优化该模型成为可能 [2]．然而， PH- 分布的 PH- 表示是不唯一的，对 PH- 表示 (α, T), 其阶数 m 在分析相应模型时至关重要，阶数小的表示在人们分布系统以及数值计算时有许多方便之处．因此人们关注 PH- 分布的最小表示：即对给定 PH- 分布 (α, T) 怎样找到其具有最小阶数的 PH- 表示 (α^*, T^*), 使对任何 $x \geqslant 0$

$$1 - \alpha \exp(Tx)e = 1 - \alpha^* \exp(T^* x)e.$$

当 T 具有一些特殊结构时，如 T 为上三角或下三角，这类问题已经解决 [3−4]．但对一般 PH- 分布 (α, T), 如何找其最小表示是几十年来人们关注的一个公开问题．

参考文献

[1] Neuts M F. Matrix-Geometric solutions in stochastic models: An algorithm approach [M]. Baltimore: The Johns Hopskins University Press, 1981.

[2] Asmussen S. Applied Probability and Queues [M]. New York: Wiley, 1987.

[3] He Q M, Zhang H Q. An algorithm for computing minimal coxian representations [J]. *INFORMS Journal on Computing*, 2008, **20**: 179-190.

[4] Cinneide C O. Characterization of phase-type distributions [J]. *Stochastic Models*, 1990, **6**: 1-57.