



TITLE:

# A Graph Theory for $C^*$ -Algebras (Operator Algebras and Their Applications )

AUTHOR(S):

榎本, 雅俊; 藤井, 正俊; 綿谷, 安男

---

CITATION:

榎本, 雅俊 ...[et al]. A Graph Theory for  $C^*$ -Algebras (Operator Algebras and Their Applications ). 数理解析研究所講究録 1980, 398: 1-30

ISSUE DATE:

1980-10

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/105058>

RIGHT:

# A Graph Theory for $C^*$ -algebras

天王寺高校	榎本雅俊
大阪教育大学	藤井正俊
大阪教育大学	錦谷安男

1. はじめに。最近、A. Connes, P. Hahn, J. Renault 等が中心となり、operator algebra に対する groupoid に対する接近を行なってゐる。それは、すべての operator algebra は groupoid にようつて構成されるかという問題がある。二の種の研究は、operator algebra の general theory である。他方、simple  $C^*$ -algebra の構造を研究する為了に、具体的な simple  $C^*$ -algebra がくわしく調べられてゐる。その一例は AF-algebra である。また、Pimsner, Popa は、最近脚光を浴びてゐる irrational rotation algebra を二の中に埋め込んで、その構造を解析してゐる。もう一つの具体的な例として、ergodic theory からの要請により、Cuntz と Krieger が導入した  $C^*$ -algebra がある。それは、topological Markov chain に関連して考案されてゐる。二の AF-algebra と Cuntz-Krieger は  $\mathbb{F}_3$  algebra は groupoid に対する接近がある。二つ目は、combinatorial theory

2

$$\begin{array}{c} x \\ y \end{array} \mapsto \begin{array}{c} x=x \\ xy=y \end{array}$$

xy

1において、1つの中心をもつて113 graph theory を用ひ2, simple C\*-algebra を調べる。主な対象物は、後者の方であるが groupoid & graph による C\*-algebra への接近は、最終的には categorical な接近にまとめられることが思われる。

以下、内容を項目の順に述べる。

1. はじめに
2. graph の基礎的概念と Cuntz-Krieger algebra の代数的構造
3. "gauge" 作用を通して見た Cuntz-Krieger algebra.
4. sub-Fock representation 1=2 3 Cuntz-Krieger algebra の extension とその応用
5. digraph 上の free category から得た Cuntz-Krieger algebra の extension & adjoint graph.
6. Weak extension group
7. 3x3 行3列 1=2 3 simple Cuntz-Krieger algebra の分類
8. 補遺

内容を紹介する。2と1は、graph の基礎的概念と Cuntz-Krieger algebra との代数的構造とかどうに結びつかを説明する。

3と1は、"gauge" 作用とのかかわり合ひを示す。2と3で述べ3=2を表にまとめると次のようになります。

graph 理論	$C^*$ -algebra 理論
連結成分	直和成分
凝聚半群 graph の直和 ideal	* ideal
強連結(行列の既約)	simple algebra
初等有向閉路 $C_k$ の存在	周期が $k$ である gauge 変換は outer
非周期性	gauge 変換群 $\Gamma$ は outer aut. gr.
( $k-1$ ) 有向道グラフ	周期 $k$ の gauge 変換 or fixed point alg
初等有向閉路 $C_k$ はカルトント積 $G \times C_k$	周期 $k$ の gauge 変換 = crossed product
$G \times C_k$ の回転変換	(crossed product $\pm$ of dual action)
covering map	expectation

4つ目は, [Evans [17], Katayama] による結果を拡張ある。

彼らは [Cuntz algebra の extension & Full-Fock space 上に表現する] が成功した。我々は, これを Cuntz-Krieger algebra の extension の場合にまで一般化する。この =  $\gamma$  の作用として, Cuntz-Krieger algebra の generators の間のある種の map が、その algebra 上の automorphism は拡張出来る為の条件を決定する。

5つ目は、前節とは違った観点から、Cuntz-Krieger algebra の extension の表現を考える。digraph 上の free category 上の  $C^*$ -algebra と  $\gamma$  と  $\gamma^{-1}$  の 2 ある。この時、adjoint graph の考え

が有効に働く。

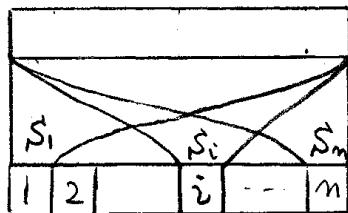
6. では、任意の finitely generated abelian group  $H$  に対して  $L^2$ -separable simple, unital  $C^*$ -algebra  $A$  が存在して、  $\text{Ext}^w(A)$  が  $H$  に 同型 に なすことを示す。

7. では、 Cuntz-Krieger algebra の分類問題を考察する。  $K_0$ -群の精密化としての marker という概念を用いて、我々は、  $3 \times 3$  行列の場合につけては、完全な結果を得ている。

8. では、関連した話題を扱う。

## 2 graph の基礎的な概念と Cuntz-Krieger algebra の代数的構造

J. Cuntz [4] は、1977年に CMP に出た論文の中で、次のよう な  $C^*$ -algebra を調べた。  
 m 個の isometries  $S_1, \dots, S_m$  で、  $\sum_{i=1}^m S_i S_i^* = 1$   
 を満たすものを取り、これらはより生成された  $C^*$ -algebra の  
 class を考える。この時、これらの  $C^*$ -algebras は、generators の  
 取り方によらず、一意に決まり、単純であることがわかる。  
 彼は、この  $C^*$ -algebra の同型類を  $\Omega_m$  という記号で表した。  $\Omega_n$  を



図で考えてみると、これは空間を  $n$  個に 分けて、全体から  $S_1$  の range 空間は  $S_1$ 、  
 ---、全体から  $S_m$  の range 空間は  $S_m$  と  
 いう状況になつていい。これは既に既に、Cuntz & Krieger [10] は、  
 1980 年、topological Markov chain に対応する新しい  $C^*$ -algebra  
 a class を導入した。それは次のようなものであつた。

# Cuntz-Krieger $\mathcal{O}_A$

5

$\Sigma$  を有限集合とする。行列  $A = (A(i,j))_{i,j \in \Sigma}$  を取る。  
 $A(i,j) \in \{0,1\}$  であり、 $A$  のどの行もどの列も 0 ではないものとする。 $=$  の行列  $A$  に対して、次の条件  $[A]$  を満たす partial isometries  $S_i \neq 0 (i \in \Sigma)$  を取る。 $Q_i = S_i^* S_i$ ,  $P_i = S_i S_i^*$  とした時。

条件  $[A]$   $P_i P_j = 0 (i \neq j)$ ,  $Q_i = \sum_{j \in \Sigma} A(i,j) P_j (i, j \in \Sigma)$ .

条件  $[A]$  を満たす  $\{S_i\}$  達により生成される  $C^*$ -algebra を  $\mathcal{O}_A$  と呼ぶ。

$=$  a algebra は、行列  $A$  がある条件を満たせば  $[A]$  の条件だけ

で、Cuntz algebra のようには一意的に決まる。 $=$  一意的には決ま

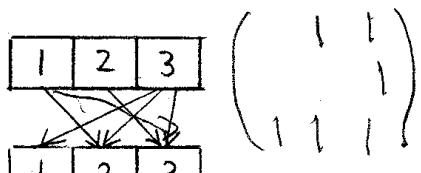
る algebra で、以下、Cuntz-Krieger algebra  $\mathcal{O}_A$  と呼ぶ。

上の条件を、以下で調べてみる。

例 1.  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  を取る。条件  $[A]$  は、行列でかくと、  
 $\begin{pmatrix} S_1^* S_1 \\ S_2^* S_2 \\ S_3^* S_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix}$  と見てある。 $\Rightarrow \begin{cases} S_1^* S_1 = S_3^* S_3 \\ S_2^* S_2 = S_1^* S_1 + S_3^* S_3 \\ S_3^* S_3 = S_1^* S_1 + S_2^* S_2 + S_3^* S_3 \end{cases}$   
 $\Rightarrow S_1, S_2, S_3$  が  $P_1, P_2, P_3$  の range

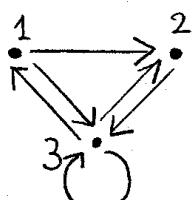
spaces を  $1, 2, 3$  で表わしておこう。

partial isometries  $S_1, S_2, S_3$  は右の図の矢印



で表わされる。range spaces と partial isometries の上の図から、

次の graph を得る。



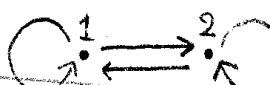
$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

134.2 Cuntz-algebra  $\mathcal{O}_2$  を上と関連させよ。  $S_1^* S_1 = Q_1 = 1$ ,

$$S_2^* S_2 = Q_2 = 1, S_1 S_1^* = P_1, S_2 S_2^* = P_2, S_1 S_1^* + S_2 S_2^* = 1 = P_1 + P_2$$

と書かれて、 $\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}$  である。  $\mathbb{X}$ , range spaces of  $P_1$  の  
左辺の図を書かれて、

1	2
1	2

graph と書かれて、 と書かれてる。

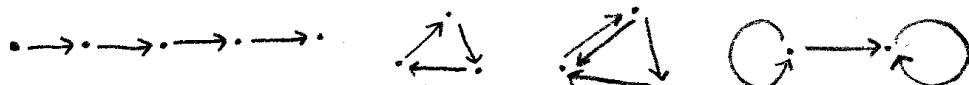
134.3 Cuntz algebra  $\mathcal{O}_2$  は、行削り  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  で表示される Cuntz-Krieger algebra とある。

== と、Cuntz-Krieger algebra  $\mathcal{O}_A$  は graph 理論の観点から  
取上げてある。この為に、graph 理論の用語を準備する。

①  $G$  が directed graph (有向グラフ) とは、 $G$  が次の3つをもつ  $(V(G), E(G), \sigma)$  である時をいう。 $(V=V(G))$  は vertices (頂点) の集合  $E=$

$E(G)$  は edges (辺) の集合 接続写像  $\delta: E \xrightarrow{\cup} V \times V$   
 $x \quad (d_1(x), d_2(x))$   
Range domain  
(つまり、 $2 \xleftarrow{x} 1$  とき、 $d_1(x)=2$  --- edge  $x$  の終点は 2,  $d_2(x)=1$  --- edge  $x$   
の始点は 1) である。

134.3 directed graph の 134.1 は次のようなもんである。

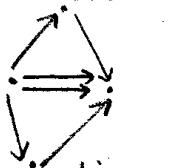
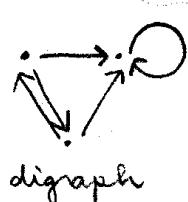


②  $G$  が digraph とは、 $G$  が directed graph で、2つの vertices  $i, j$  に  $i \leftarrow j$  となる edges が 1つ

$$V \times V \xrightarrow{\psi} \mathbb{Z}_2 \quad \psi(i, j) = \begin{cases} 0 & (i, j) \\ 1 & (i \neq j) \end{cases}$$

と主をいい。(=の高々 1 つの辺で,  $(i, j)$  と同一視する。)

1314



digraph

digraph ではない。

③ digraph  $G$  の adjacency matrix (隣接行列)  $A = (A(i, j))$  とは,

$$A(i, j) = \begin{cases} 1 & (i \leftarrow j \text{ がある}) \\ 0 & (i \leftarrow j \text{ ない}) \end{cases}$$

$$A = (\psi(i, j))_{i, j}$$

= お対応で (digraph  $G$  × 0-1 matrix を適当に同一視する)。

1315

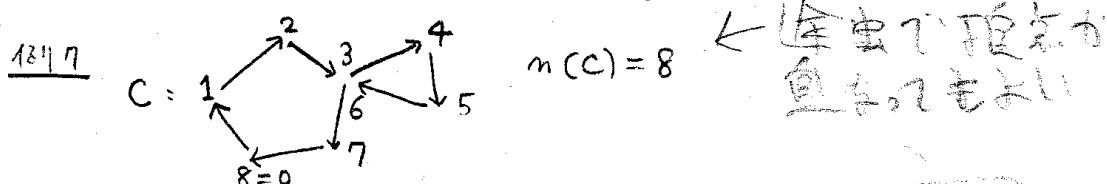
$$G: \begin{matrix} 1 \\ \bullet \rightleftharpoons \bullet^2 \end{matrix} \iff A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

④ 長さが  $g > 0$  の directed path (有向道)  $P$  とは,  $g$  個の edges の組で, 向き順につながってない点もあればとある。

1316 長さ 5 の directed path  $0 \leftarrow 1 \leftarrow 2 \leftarrow 3 \leftarrow 4 \leftarrow 5$

$$P = ((0, 1), (1, 2), \dots, (4, 5)), [P \text{ の長さ} = n(p) = 5] \text{ edges の数}$$

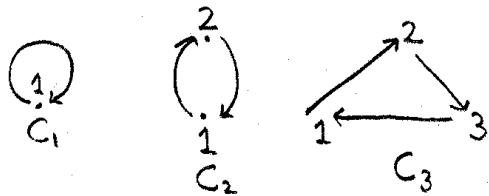
⑤ directed cycle (有向閉路)  $C$  とは,  $C$  は directed path で, 起点と終点が一致するものがとある。



⑥ elementary directed cycle  $C_k$  ( $k$ -cycle) とは  $(n(C_k) = k)$  である directed cycle で, 全てでは頂点が重ならないものがとある。

Elementary directed cycles

例 8



以上の準備のもとで、[A]条件をみたす  $C^*$ -algebra が一意に存在する条件を graph の言葉で述べる。

$\Sigma = \nabla(G)$  として、 $\nabla_0 \subset \Sigma$  を次で定義する。vertex  $i \in \nabla_0$  とは、

$i$  を通る異なる 3 つ elementary directed cycle が 2 つ以上ある場合である。 $= 0$  の時、 $G$  が (I) 条件をみたすとは、

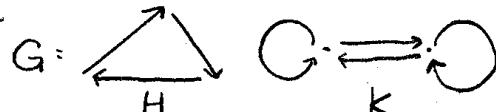
任意の vertex  $j (= i)$  と directed path  $j \leftarrow j_1 \leftarrow \dots \leftarrow j_k \leftarrow i$  が始点  $i \in \nabla_0$  となるものが存在する時にいう。

0-1 matrix  $A$  と digraph  $G$  を同一視する =  $i = l$ ,  $G$  が (I) 条件をみたすと主、Cuntz-Krieger [10] は [A] 条件をみたす  $C^*$ -algebra が一意に存在するとは証明した。以下、これを  $\mathcal{O}_A = \mathcal{O}_G$  と表わしていきたい。

注意 以下では、 $G$  は常に、(I) 条件をみたすものとする。

⑦ vertices  $i$  と  $j$  が連結していき  $i \sim j$  とは、 $i$  と  $j$  が un-directed path で結ばれて  $i$  と  $j$  となりうる。graph  $G$  を二つの同値関係  $\sim$  で分けた同値類を connected component という。

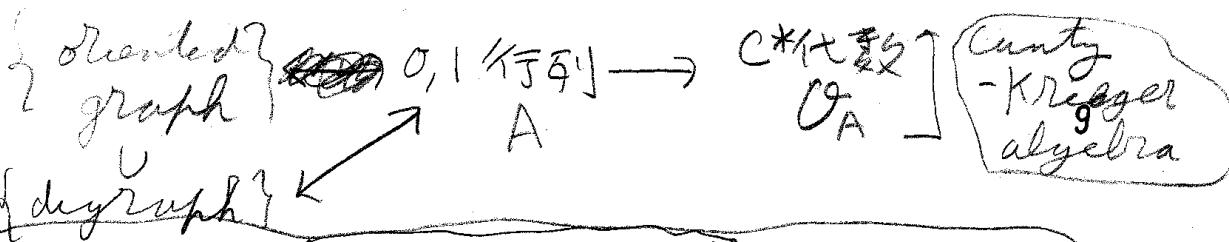
例 9



$G$  a connected component 1#.

$H$  と  $K$  があり、 $G = H \cup K$

$K$  の和である。二つの graph の和に対応するのが  $C^*$ -algebra の直和である。つまり、 $\mathcal{O}_G = \mathcal{O}_{H \cup K} = \mathcal{O}_H \oplus \mathcal{O}_K$ .



⑧ vertices  $i$  と  $j$  が, 強連結してない ( $i \approx j$ ) とは,  $i$  から  $j$ へ  
 $x$ ,  $j$  から  $i$ へ directed path が両方あることをいい。  
 $G$  の vertices  $V(G)$  を  $\approx$  で分けた同値類を strongly  
 connected component といい。 $G$  の vertices  $a$  と  $b$  2 つが  
 strongly connected の時は,  $G$  は strongly connected といい。  
 (=  $a = b$  は connected の時も同様である)

$G$  が strongly connected でない場合 (= 1つ,  $\mathcal{O}_G$  1つ, \*ideal\*)  
 存在するが, そのあり方は, おおよそ, graph  $G$  の condensation  
 graph (凝聚グラフ)  $C(G)$  の order ideal  $I = \#$  で記述される。  
 digraph  $G$  の condensation graph  $C(G)$  とし,  $C(G)$  の vertices は  $V(G)$  の  
 strongly connected component  $C_1, C_2, \dots, C_k$  で,  $C(G)$  の edges  
 $C_e \leftarrow C_m$  とは, ある  $i \in C_e$ , ある  $j \in C_m$  が  $i \leftarrow j$ ,  $i \leftarrow j$   
 in  $G$  の時をい。二の対応関係  $I = \# \geq 1$ ,  $\text{Cuntz}[5] I =$   
 < かしこ述べられていく。

### 3 "gauge" 作用を通して見た Cuntz-Krieger algebra.

我々は, [13]  $I = \# \geq 1$ ,  $U(n) \subset \text{Out } \mathcal{O}_n$  ( $= \#$ ,  $U(n)$  は  $n \times n$   
 unitary matrices の 1 つ  $\#$  が) を,  $d_u(\beta_j) = \sum_{i=1}^m u_{ij} \beta_i$  で表現したが、Cuntz-  
 Krieger algebra  $\mathcal{O}_A$  の時  $I = 1$  は,  $U(n)$  の元 1 つ = の意味で  $I = 1$   
 作用し得ない。 $2 \times 2$  行列の時,  $G \rightleftharpoons$  と  $G \rightleftharpoons \odot$  の  $\#$  が,  
 (I) 条件をみたす。automorphisms 1 つ, 二の表現では, 前者 1 つ,

$\mathbb{T} \oplus \mathbb{T}$ , 後者は,  $U(2)$  となる。 $\varepsilon = z$ , Cuntz-Krieger algebra の場合には, "gauge" 作用を調べる問題になる。

$\mathcal{O}_G = C^*(S_1, \dots, S_m) \pm 1$ , "gauge" 変換  $d: \mathbb{T} \rightarrow \text{Aut } \mathcal{O}_G$  と  $d_t(S_i) = t_i S_i$  で定義する。 $\varepsilon$  の時,  $d_\varepsilon$  の outerness が "digraph G の形から, 次のよう間に表わされる"。

定理 (I) 条件を満たす digraph G が, elementary directed cycle  $C_k$  ( $k$ -cycle) をもつならば,  $t^m \neq 1$  ( $t \in \mathbb{T}$ ) は  $\mathcal{O}_G$  上の outer automorphism  $\varepsilon$  である。

証明は, Archbold [1] の modification 1 = ± 3。

= の = との結果と同じ。

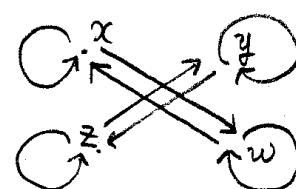
系 オペレータ Cuntz-Krieger algebra  $\mathcal{O}_G = \mathcal{O}_A$  は outer automorphism  $\varepsilon$  である。

以下 "gauge" 作用が Cuntz-Krieger algebra  $\varepsilon$  の  $\varepsilon$  に影響を及ぼすかを fixed point algebra の場合に見てみる。まず, 次の graph の概念を導入する。 $G$  の  $k$ -path graph ( $k$ -有向道グラフ)  $W_k(G)$  とは,  $G$  の長さ  $k$  の directed paths が "vertices  $v$ ",  $v$  と  $w$  が長さ 1 の directed path を介して結ばれる時,  $W_k(G)$  の点として結ばれるとする。

### 13/10 1-path graph

$$G: \begin{array}{c} 1 \xrightarrow{x} 2 \xleftarrow{z} 3 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \end{array}$$

$$W_1(G):$$



$\Rightarrow$  a  $k$ -path graph を使うと、次の定理を得る。

定理  $\alpha \in$  period 2 の "gauge" 変換  $\alpha(s_i) = -\beta_i$  ( $\alpha \in \text{Aut } \mathcal{O}_G$ )

とする。この時、fixed point algebra  $\mathcal{O}_G^\alpha$  は、 $\mathcal{O}_{\mathcal{W}_1(G)}$  に同型である。

この定理によれば、13/12 の  $G$  は 2,  $\mathcal{O}_G^{\alpha^{-1}} = \mathcal{O}_2 \oplus \mathcal{O}_2$  である。 $\mathcal{O}_G$  の場合に  $\alpha$  は、"gauge" automorphism は、Cuntz algebra の時とは違った振舞をする。 $G$  の形状によっては、"gauge" automorphism の outerness が証明されてしまうのである。

次に、 $\alpha_{-1}$  の innerness における判定条件を述べる。

定理  $G$  を strongly connected,  $\alpha \in \text{Aut } \mathcal{O}_G$  で、 $\alpha(s_i) = -\beta_i$  とする時、次は同値である。

①  $\alpha_{-1}$  は inner である。②  $G$  の directed cycle も長さが偶数である。③ 1-path graph  $\mathcal{W}_1(G)$  は connected である。

④  $\mathcal{O}_G^\alpha$  は simple である。

④  $\Rightarrow$  ① の証明は、 $\mathcal{O}_G$  が simple,  $\mathcal{O}_G^{\alpha^{-1}}$  が not simple であると、Pedersen [23, Th. 8.10.12] より、 $\alpha_{-1}$  が innerness が示す。

次に、period  $k$  の "gauge" 変換から crossed product を作る時、graph の形はどうな変化が起きるかを調べる。その前に、graph の  $\mathbb{T}$  カルト積を定義する。graph  $G$  と elementary directed cycle  $C_k$  の  $\mathbb{T}$  カルト積を  $\nabla(G \times C_k) = \nabla(G) \times \nabla(C_k)$  とする。

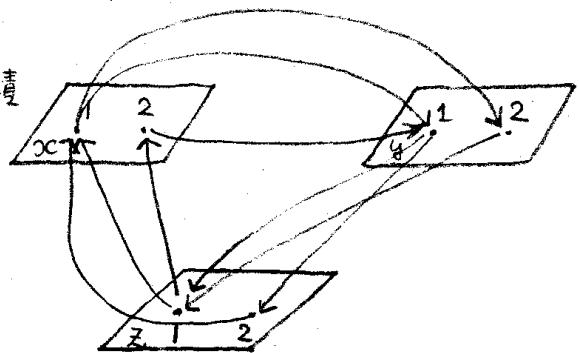
edges は両方の vertices がつなげた時につなぐ" = とて決める。

13/11

$$G: \begin{array}{c} 1 \\ \text{---} \\ 2 \end{array}$$

$$C_3: \begin{array}{ccc} x & \longrightarrow & y \\ & \nwarrow & \downarrow \\ & z & \end{array}$$

カルト積  
 $G \times C_3$



の時, period  $k$  の "gauge"  $\sigma$  は  $\mathbb{Z}_k$  crossed product である。

次の結果を得る。これは, Cuntz-Evans の結果の一つの一般化である。

定理  $\alpha(s_i) = e^{\frac{2\pi i}{k}} s_i$  は period  $k$  の automorphism  $\alpha \in \text{Aut } \mathcal{O}_G$  は  $\mathbb{Z}_k$  crossed product  $\mathcal{O}_G \rtimes \mathbb{Z}_k$  は,  $\mathcal{O}_{G \times C_k}$  は同型である, dual action  $\hat{\alpha}$  は,  $G \times C_k$  のまわり回転である。

の定理の系として, 次を得る。

系  $G$  を strongly connected,  $\alpha \in \text{Aut } \mathcal{O}_G$  を  $\alpha(s_i) = e^{\frac{2\pi i}{k}} s_i$  とする時,  $\mathcal{O}_G \rtimes \mathbb{Z}_k$  が simple である =  $\alpha$  は  $\mathcal{O}_G$  の  $k$  倍の period である =  $\alpha$  が同値である。 $(\Rightarrow \alpha \text{ は } G \text{ の period } k \text{ の倍})$ 。

4 sub-Fock representation は  $\mathbb{Z}_k$  Cuntz-Krieger algebra の extension とその应用。

Evans [17], Katayama は, Cuntz algebra の extension  $E \geq \mathbb{Z}_k$  の

$\mathbb{F} \ni 1 = \text{Full Fock space}$  上に表現  $L$  で  $H^n$  と表す。  
 $H$  は  $n$ -dimensional

Hilbert space,  $\Omega$  は Fock vacuum unit vector と定める。  
 $F(H) \equiv \sum_{m=0}^{\infty} \bigoplus H_m$  ( $= \mathbb{C}^{\infty}$ ,  $H_m = \bigotimes^m H$ ,  $H_0$  は Fock vacuum unit vector と定める)  
 $\Omega$  が generate  $\mathbb{F} \ni 1 = \mathbb{C}$  1-dimensional Hilbert space とおく。= a 時。

任意の  $f \in H$  ( $= \mathbb{C}^{\infty}$ ) で  $a(f)(f_1 \otimes \dots \otimes f_n) \equiv f \otimes f_1 \otimes \dots \otimes f_n$

$$a(f)\Omega = f. \quad \text{とおく} +,$$

$$a(f)^*(f_1 \otimes \dots \otimes f_n) = (f_1 | f) f_2 \otimes \dots \otimes f_n$$

$$a(f)^*\Omega = 0.$$

$F(H)$  上の  $= m \leq n$  bounded operators  $\{a(f) \mid f \in H\} \subset \mathbb{F}$  が generate  
 $\mathbb{F} \ni 1 = C^*-algebra$  で, Watatani [25] で  $\mathbb{F}$  Clifford  $C^*$ -algebra  $P_m$   
 $\cong$  同型である, Cuntz algebra  $O_m$  の  $C(F(H))$  ( $F(H)$  上の compact  
operators 全体の  $C^*$ -algebra) で  $\mathbb{F}$  extension である。つまり,  
 $\mathbb{F}$  は a short sequence of "exact" で  $\mathbb{F} \ni 1 = P_m$  である。

$$0 \longrightarrow C(F(H)) \longrightarrow P_m \longrightarrow O_m \longrightarrow 0.$$

ここで  $O_A$  の場合を一般化する。  
 $A = (A(i,j))$  を  $n \times n$  の  
 $0-1$  行列として, この行とこの列も 0 ではないとする。X,  
 $A$  に対応する graph で, (I) 条件を満たすとする。

subspace  $L \subset F(H)$  を  $\mathbb{F} \ni 1 = 2$ ,

$$0 \longrightarrow C(L) \longrightarrow P_A \longrightarrow O_A \longrightarrow 0 \quad (\text{exact})$$

$\mathbb{F} \ni 1 = 2$  が  $L$  の subspace  $L \subset F(H)$  上の  $O_A$  の extension algebra  
 $P_A$  を  $\mathbb{F} \ni 1 = 2$  を目標にする。

$\{e_1, \dots, e_n\}$  は  $n$ -dimensional Hilbert space  $H$  の orthonormal base とする。  $L_m \in \{e_{i(1)} \otimes \dots \otimes e_{i(m)} : A(i(k), i(k+1)) = 1 \text{ for } 1 \leq k \leq m-1\}$  ( $= \mathbb{F}$ ) が generate する  $H_m$  の subspace とする。  $L \equiv \sum_{m=0}^{\infty} \oplus L_m$  ( $= \mathbb{Z}$ ),  $L_0 = H_0$ ,  $L_1 = H_1 = H$  とする。また,  $M_m \in \{e_{i(1)} \otimes \dots \otimes e_{i(m)} : \prod_{k=1}^{m-1} A(i(k), i(k+1)) = 0\}$  ( $= \mathbb{F}$ ) が generate する  $H_m$  の subspace とする。  $M \equiv \sum_{m=0}^{\infty} \oplus M_m$  ( $= \mathbb{Z}$ ,  $M_0 = M_1 = 0$ ) とする。  $F(H) = L \oplus M$  とする。  $L$  と  $A$  は対応する sub-Fock space とする。  $\Omega = e_1 = 1$  とする。

$S_i \equiv P_L a(e_i)|_L$  ( $P_L$  は  $L$  上の projection) とする。  $P_A \in \mathbb{C}$ ,  $\{S_i : 1 \leq i \leq n\}$  ( $= \mathbb{F}$ ) が generate する  $C^*$ -algebra を表す。この時, 次の定理が成り立つ。

定理  $P_A$  は  $L$  上で irreducible であり,  $L$  上の compact operators の生成する algebra  $C(L)$  を含む。更に, 2次の short sequence は exact である。

$$0 \longrightarrow C(L) \longrightarrow P_A \longrightarrow \mathcal{O}_A \longrightarrow 0$$

証明には, 2次の補題1, 2が必要とする。

補題1  $S_k = P_L a(e_k)|_L$  は, 2次の性質を持つ partial isometries である。

$$S_k^* S_k \Omega = \Omega, S_k S_k^* \Omega = 0. \quad \text{すべての } e_{i(1)} \otimes \dots \otimes e_{i(m)} \in L \text{ は } \Rightarrow 0,$$

$$S_k^* S_k (e_{i(1)} \otimes \dots \otimes e_{i(m)}) = A(k, i(1)) e_{i(1)} \otimes \dots \otimes e_{i(m)}$$

$$S_k S_k^* (e_{i(1)} \otimes \dots \otimes e_{i(m)}) = \delta_{k, i(1)} e_{i(1)} \otimes \dots \otimes e_{i(m)}.$$

[補題2]  $E$  を  $L_0 = H_0$  上の projection とするとき、

$$S_k^* S_k = \sum_{j=1}^n A(k,j) S_j S_j^* + E.$$

残りの  $P_A$  が  $L_1 = \text{imodually } 1 = \text{act}$  するには、次の方法はありますか？

non-zero  $x \in L_1$  は  $L_2$ , その直和因子  $x_m = \sum x_m(i(1), \dots, i(m)) x$

$e_{i(1)} \otimes \dots \otimes e_{i(m)}$  で non-zero なものとし、 $x_m(i(1), \dots, i(m)) \neq 0$  を  
更に取る。  $x_m(i(1), \dots, i(m))^{-1} S_{j(1)} \cdots S_{j(n)} E S_{i(m)}^* \cdots S_{i(1)}^* x = e_{j(1)} \otimes \dots \otimes e_{j(n)}$   
これが定理が示せたことになります。

以下では、上の定理の応用について論じる。我々は、Archbold [1] の結果を拡張して、 $\Theta_n$  上の outer automorphism group  
 $\Gamma(n)$  について論じた。  $n = 3$  が、 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  の場合に、 $\alpha_u$  が  $\Theta_A$  の  
automorphism に拡張出来る為には、 $u = \begin{pmatrix} \# & 0 \\ 0 & w \end{pmatrix}$  が必要十分である。  
それでは、 $\alpha_u$  一般の  $\Theta_A$  上の automorphism に拡張出来  
る為の unitary matrices  $u$  の満たす条件は何だろうか？

$u \in \Gamma(n)$  とし、 $H_0$  上で  $U_0 = 1$ ,  $H_m$  上で  $U_m = \otimes^m u$  ( $m \geq 1$ ) と  
する。  $F(H)$  上で  $F(u) = \sum_{m=0}^{\infty} U_m$  とする。  $=$  の時、 $F(u)$  は、 $F(H)$   
上の unitary operator である。 Evans [17] と Katayama は、  
 $F(u)$  が  $\mathcal{P}_n = C^*(\alpha(e_i); 1 \leq i \leq n)$  上の automorphism  $\beta_u$  ( $= = 2$ ,  
 $\beta_u(\alpha(e_i)) = F(u)\alpha(e_i)F(u)^* = \sum_k u_{ki}\alpha(e_k)$ ) を implement する =  
を示した。  $= = 2$ , 先に、sub-Fock space  $L$  が  $F(u)$  を  
reduce する  $u \in \Gamma(n)$  の条件を考える。

[補題]  $A = (A(i,j)) \in A(i,j) \in \{0,1\}$  の  $m \times m$  matrix,  $U = (U_{ij})$  は unitary matrix で,  $A(i,j) = 0, A(k,m) = 1$  ならば  $U_{ki} U_{mj} = 0$  ( $1 \leq i, j, k, m \leq n$ ) を満たすものとする。=の時,  $A$  は対称で sub-Fock space  $L$  は  $F(u)$  を核張りする。

=の補題を用ひて,  $du$  が  $\mathcal{O}_A$  上の automorphism は拡張出来ることを示す。

[定理]  $\mathcal{O}_A = C^*(T_1, \dots, T_n)$  とする。=の時,  $u \in U(n)$  は  $\mathcal{O}_A$  上の条件は同値である。

(1)  $\alpha_u(T_i) = \sum_k U_{ki} T_k$  ならば,  $\mathcal{O}_A$  上の automorphism は拡張出来る。

(2)  $(1 - A(i,j)) A(k,m) U_{ki} U_{mj} = 0$  ( $1 \leq i, j, k, m \leq n$ )

(3)  $A(i,j) = 0, A(k,m) = 1$  ならば  $U_{ki} U_{mj} = 0$  ( $1 \leq i, j, k, m \leq n$ )

=の定理の系として, 次を得る。

[系]  $\mathcal{O}_A = C^*(T_i; 1 \leq i \leq n)$  とする。=の時,  $\mathcal{O}_A = \mathcal{O}_m$  であることは, すべての  $u \in U(n)$  に対して,  $du$  が  $\mathcal{O}_A$  上の automorphism は拡張出来る = と必要十分である。

digraph  $G$  が adjacency matrix  $A$  により表現されていけるとし,  $G$  の vertices  $i$  と  $j$  が equivalent であるといふ  $i = j$ , すべての  $k \in V(G)$  に対して,  $A(i,k) = A(j,k), A(k,i) = A(k,j)$  が成り立つ = と定義する。=の時, =の equivalent を使って, =の定理の  $i = j$  の系を得る。

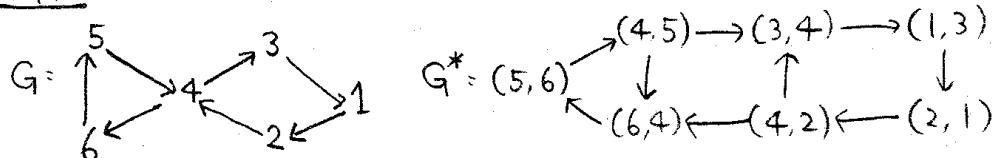
[系]  $V(G) = \{1, 2, \dots, n\}$  が digraph  $G$  で,  $1, 2, \dots, m$  が

equivalent すなはち取る。すなはち  $U = (U_{ij})$  が "unitary matrix" である。  
 $U_{ij} = \delta_{ij}$  すなはち  $i, j \leq m$  ならば  $|U|$  の  $i$  行と  $j$  列の内積が 1 である。すなはち  $\mathcal{O}_G$   
 上の automorphism (= 伸縮出来)。更に、 $t \in G$  が strongly  
 connected すなはち  $d_{t,t} = 1$ ,  $U_{t,t} = 1$ , outer  $U$  ある。

5 digraph が free category すなはち  $\mathcal{C}$  が Cuntz-Krieger algebra  
の extension & adjoint graph

= a topological, Cuntz-Krieger algebra の extension すなはち  $\mathcal{C}$  が  $\mathcal{B}(H)$  で  
 ある。この  $\mathcal{C}$  は、 $\mathcal{C}$  の adjoint graph すなはち  $\mathcal{C}^*$  が  $\mathcal{B}(H)$  である。  
 digraph  $G$  の adjoint graph  $G^*$  すなはち  $G^*$  が  $\mathcal{C}$  の 1-paths  $U_1, U_2,$   
 $\dots, U_m$  の vertices とする。 $G$  は  $U_i$  の終点が  $U_j$  の始点と一致  
 するとき、 $i$  と  $j$  の辺を  $(i, j)$  とする。 $U_i$  から  $U_j$  への edge す  
 て  $(i, j)$  が digraph  $G^*$  の edge である。

例 12



digraph  $G$  が (I) 条件を満たすとき、adjoint graph  $G^*$  が (II)  
 条件を満たす。更に、次の二つが adjoint graph すなはち  $\mathcal{C}$  の上  
 ある。

定理  $\mathcal{C}_G$  が Cuntz-Krieger algebra であるとき、 $\mathcal{C}_G = \mathcal{C}_{G^*}$ .

Higgins [27] は後で、 $G$  が digraph であるとき、 $\ell^2(D(G))$  は  
 その morphisms が  $G$  のすべての paths からなり、またその  
 objects が  $V(G)$  からなる  $\ell^2$  category であるとき、 $D(G)$  が  
 $G$  の free category である。 $s(g) \in g \in D(G)$  が source,  $t(g)$  が  
 $g$  の target である。 $\ell^2(D(G))$  は orthonormal basis  $\{e_d ; d \in D(G)\}$   
 $(g \in D(G))$  に対して、 $e_d(g) = \delta_{d,g}$  をもつ  $D(G)$  上のすべての  
 square summable sequence からなる Hilbert space を表す。  
 また、各  $i \in V(G)$  に対して、 $H_i \in \{e_d ; d \in D(G), s(d)=i\} =$   
 より生成された  $\ell^2(D(G))$  の subspace である。 $\forall i \in V(G)$  は、 $\ell^2(D(G))$  が left regular representation  $u$  を定義する。各  $g \in D(G)$  は  
 に対して、 $\ell^2(D(G))$  上の partial isometry  $u_g$  を、  
 $u_g e_h = e_{gh}$  ( $s(g)=t(h)$  のとき),  $u_g e_h = 0$  ( $s(g) \neq t(h)$ )  
 で定義する。 $\{u_g ; g \in D(G)\}$  はより生成された  $C^*$ -algebra  $E$ ,  
 $C_r^*(G)$  を表す = とする。= の時  $i \in V(G)$  は、  
 $u_g^* e_h = e_k$  (もし  $gk = ih$  のとき,  $h = gk$  のとき)  
 $u_g^* e_h = 0$  ( $gk \neq ih$  のとき) などの  $E$ 。  
 すべての  $H_i$  は  $C_r^*(G)$  の  $i$  と  $i$  invariant な子空間。 $\chi = \chi_i$ ,  
 $a \in C_r^*(G)$ ,  $i \in V(G)$  に対して、 $\rho_i(a) = a|_{H_i}$  とおくと、 $\rho_i$  は,  
 $H_i$  上の  $C_r^*(G)$  の表現である、 $\bigoplus_{i \in V(G)} \rho_i$  は、 $\ell^2(D(G))$  上の  $C_r^*(G)$   
 の identity representation である。  
 この表現を使えばよい、次の定理を得る。

定理  $\gamma$  の表現  $p_i$  は、 $C_r^*(G)$  は必ずしも irreducible である。

$p_i(C_r^*(G))$  は compact  $C(H_i)$  を含む。更に、 $G$  が (I) 条件を満たせば、 $\mathbb{R}$  の short sequence

$$0 \longrightarrow C(H_i) \longrightarrow p_i(C_r^*(G)) \longrightarrow \mathcal{O}_G \longrightarrow 0$$

は exact である。

## 6 Weak extension group

$\gamma$  の算群  $H$  は、 $H$  が finitely generated abelian group で、 separable, simple, unital  $C^*$ -algebra  $A$  で、  $\text{Ext}^W(A)$  が  $H$  と同型  $\Leftrightarrow$   $\exists \pi \in \text{Aut}(A)$  が存在する  $\Leftrightarrow A$  を半単純化する。実際には、 simple Cuntz-Krieger algebra  $\mathcal{O}_G$  が、  $A$  と  $L$  を取れる。

$\mathcal{Q}(H)$  は、 infinite dimensional separable Hilbert space  $H$  上の Calkin algebra を表す。 $\pi \in B(H)$  から  $\mathcal{Q}(H)$  への quotient map と  $\mathcal{Q}(H)$  は separable  $C^*$ -algebra  $A$  の extension とは、  $A$  から  $\mathcal{Q}(H)$  への star monomorphism  $\sigma = \pi$  と  $\mathcal{Q}(H)$  へ  $\mathcal{Q}(H)$  へ partial isometry  $U \in \mathcal{Q}(H)$  が存在する  $\Leftrightarrow \pi \in \text{Ext}^W(A)$ 。 $\mathcal{Q}(H)$  は weak equivalence classes の set で、  $\text{Ext}^W(A)$  が表される。Cuntz-Krieger [10] は、  $\text{Ext}^W(\mathcal{O}_G)$  を次のようには決定した。

定理 (Cuntz-Krieger)  $\mathcal{O}_G$  の weak extension group は、  $\mathbb{Z}/(1-G)\mathbb{Z}^n$  は同型である。 $(\mathbb{Z}^n = \mathbb{Z}^{n+1}/(1-G)\mathbb{Z}^n, n \in \mathbb{N})$

$\Rightarrow$  a Cantor & Krieger's result to use, the next theorem is obtained.

[定理]  $H$  is finitely generated abelian group.  $\Rightarrow$  a simple Cantor-Krieger algebra  $\mathcal{O}_G$ ,  $\text{Ext}^W \mathcal{O}_G = H$  exists.

[存在する。]

証明は,  $H = \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{n(1)} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{n(m)}$  とかいて  $\Rightarrow$  を使つて, 以下のように, "帰納的に行なえればよい"。

[補題 1]

$$G(n) = \left( \begin{array}{c|cc} & \overset{n+1}{\overbrace{0 \cdots 0}} \\ \overset{m+1}{\overbrace{\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline 0 \end{array}}} & \end{array} \right)_{m+1}$$



$\Rightarrow$  すなはち,  $\Rightarrow$  の時,  $\text{Ext}^W \mathcal{O}_{G(n)} = \mathbb{Z}_n$  ( $n \geq 1$ )

[補題 2]

$$G(k|m) = \left( \begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & \\ \vdots & \\ 1 & \end{matrix} & \begin{matrix} 1 & 0 \\ \vdots & \\ 1 & 0 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 1 & \cdots & 1 \\ \hline 1 & \cdots & 1 \end{matrix} & G(m) \\ \begin{matrix} 1 & \cdots & 1 \\ \hline 0 & \cdots & 0 \end{matrix} & \end{array} \right)_k$$

$\Rightarrow$  の時,  $\text{Ext}^W \mathcal{O}_{G(k|m)} = \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_k \oplus \mathbb{Z}_m$

[補題 3]

$$G(m,n) = \left( \begin{array}{c|c} G(m) & \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 1 & \\ \vdots & \\ 1 & \\ 0 & \end{matrix} & G(n) \end{array} \right)$$

$\Rightarrow$  の時,  $\text{Ext}^W \mathcal{O}_{G(m,n)} = \mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$

$\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$  に対する matrix は、

$$\left( \begin{array}{c|cc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ & \vdots & \vdots & \vdots \\ & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & \dots & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ \hline & G(m) & & \\ & \vdots & & \\ & 1 & & \\ & \vdots & & \\ & 0 & & \end{array} \right) \quad \text{である。}$$

### 7 3×3 行列に対する simple Cuntz-Krieger algebra の分類

= 9 節では、Cuntz-Krieger algebras  $\mathcal{O}_G$  の分類理論を試す。

$K_0$ -group を用ひて、 $\mathcal{O}_G$  は粗く分類されるが、我々は  $K_0$ -group の精密化である marker の概念を使って、3×3 行列の場合には、 $\mathcal{O}_G$  が完全に分類出来ることを示す。最初に、 $K_0$ -group の定義を述べる。 $K$  は infinite-dimensional separable Hilbert space 上の compact operators の  $C^*$ -algebra と表わす。 $P, Q \in C^*$ -algebra  $A$  の projections とする。 $X \in A$  が存在して、 $X^*X = P$ ,  $XX^* = Q$  のとき、 $P \sim Q$  とかく。 $[P] \sim [Q]$  の同値関係による  $P$  の同値類を表す。= の時、 $S = \{[P]; P \text{ は } K \otimes A \text{ の projection}\}$  とかく。S は、加法  $[P] + [Q] = [P' + Q']$  ( $= \{P' + Q'; P' \in [P], Q' \in [Q]\}$  であり、 $P'Q' = 0$  な 3 projections の集合) と  $\sim$  は commutative semigroup である。 $K \otimes A$  の projections  $P, Q$  は  $\sim$  である。= は 9 个性質を持つ。

$p', q' \in A$  かつ  $p+q = 1$  とすと、常に可能である。よし  $\mathbb{Z}$ ,  $[p'+q']$  は、 $p', q'$  のとり方によらない。もし  $A$  が unit をもつとき、 $K_0(A)$  は  $\mathbb{Z}$  の semigroup が Grothendieck group として定義される。 $\gamma = 3\pi$ 、(unit が  $\rightarrow$  purely infinite (simple)  $C^*$ -algebra)

$A$  は  $\mathbb{Z}$  には、 $K_0(A) = \{[P] \mid P \text{ は } A \text{ の non-zero projection}\}$

$\equiv$  すなはち  $\gamma$  が “知らぬ” こと。

$A \oplus A$  は  
必要がある

$=$   $K_0(A)$  は関係して、新しい invariants を導入する。 $A$  が unital  $C^*$ -algebra、 $\text{Aut } K_0(A) \subseteq K_0(A)$  の automorphism group とする。 $g, h \in K_0(A)$  とするとき、ある  $\alpha \in \text{Aut } K_0(A)$  に対し  $g = \alpha(h)$  となるとき、 $g \sim h$  とかく  $\equiv$  とよい。 $K_0(A) \sim = K_0(A)/\sim$  とおき、 $g \in K_0(A)$  は  $\sim$  には、 $g^\sim$  は  $\sim$  の同値関係による  $g$  の同値類を表わすことをいよい。このとき、 $A$  の marker を、 $[1]^\sim$  で決める。 $\equiv$  は、 $[1]$  は、 $1 \in A$  の  $K_0(A)$  への imbedding である。記号  $\equiv$  は、 $\text{mark}(A) = [1]^\sim$  とかく。 $\equiv$  の量は  $\sim$  には、次が成り立つ。

**定理**  $A$  と  $B$  が unital  $C^*$ -algebra とする。もし  $A$  と  $B$  が同型ならば、このとき、 $K_0(A) = K_0(B)$  であり、 $\text{mark}(A) = \text{mark}(B)$  である。

更に、matrix algebra  $M_K$  の tensor product が marker と translations を調べる。 $x^\sim \in K_0(A) \sim$  は  $\sim$  には、 $k \in \text{integer}$  とするとき、 $k \cdot x^\sim \in (kx)^\sim$  定義する。 $\equiv$  は  $k \cdot x^\sim$  は、 $x^\sim$  の表

現に明らかにから、well-definedである。次が成り立つ。

定理 unital  $C^*$ -algebra  $A$  に対して、 $\text{mark}(A \otimes M_k) = k \cdot \text{mark}(A)$ 。  
この定理の系として、次を得る。

系1 もし  $K_0(A) = \mathbb{Z}_n$ ,  $\text{mark}(A) = l^\sim$  とするとき、  
 $\text{mark}(O_n \otimes M_k) = k^\sim$  ( $2 \leq n \leq \infty$ ) (= すなはち  $\mathbb{Z}_\infty = \mathbb{Z}$ )

系2 (Paschke-Salinas)  
もし  $(n-1)$  と  $k$  が互いに素でなければ、 $O_n \otimes M_k \cong O_n$

は同型にならない。

注意 以下、digraphはすべて strongly connected とする。

つまり、simple Cuntz-Krieger algebra の分類問題を考える。

その前に、道具を準備する。

定義  $G$  を digraph とするとき、 $E^-(i) = \{j \in V(G) : j \rightarrow i\}$   
とおく。ある  $k \neq m \in V(G)$  に対して、 $E^-(k) = E^-(m)$  と仮定す  
る。この時、 $k$  から  $m$ への transferred graph  $H = G(k \rightarrow m)$  を  
次で定義する。 $V(H) = V(G) \setminus \{k\}$ ,  $E(H) = (E(G) \setminus \{(m, i)\}  
 \in E(G); i \in V(G)\}) \cup \{(m, k)\}$  とする。 $H = G(k \rightarrow m)$  の  
adjacency matrix  $B$  は次のようになる。 $A \in G$  の adjacency  
matrix とする、 $A_i \in A$  の  $i$ -th row vector とする。すると  
と、 $E^-(k) = E^-(m)$  は、 $A_k = A_m$  となる。

$$B(i, j) = \begin{cases} A(i, j) & (i \neq m) \\ \delta_{k, j} & (i = m). \end{cases}$$

簡単の為、 $=$ の $=$ とを、 $A \xrightarrow{\quad} B$  でかく $=$ といす。

$\langle A_k \rightarrow A_m \rangle$

例1



$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \langle A_1 \rightarrow A_2 \rangle \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

[定理]  $k$ から $m$ への digraph  $G$  の transferred graph  $\in$   
 $H = G(k \rightarrow m)$  とする。 $=$ の時、 $\Theta_H$  は  $\Theta_G$  と同型である。

更に、transferred graph の定義を一般化ある。

[定義]  $A \in 0-1\text{ matrix}$  とする。 $E_i = (0, \dots, 0, \underset{i}{1}, 0, \dots, 0)$

とおく。相異なる  $k(1), k(2), \dots, k(r), m(1), \dots, m(s)$  で、 $p \notin \{m(1), \dots, m(s)\}$   
 $\{1, \dots, r\}$ ,  $A_p = E_{k(1)} + \dots + E_{k(r)} + A_{m(1)} + \dots + A_{m(s)}$   
> とする。 $=$ の時、 $n \times n$  matrix  $B$  を次で定義する。

$$B(i,j) = \begin{cases} A(i,j) & (i \neq p) \\ 1 & (i=p \text{ で, } j \in \{k(1), \dots, k(r), m(1), \dots, m(s)\}) \\ 0 & (\text{それなら}) \end{cases}$$

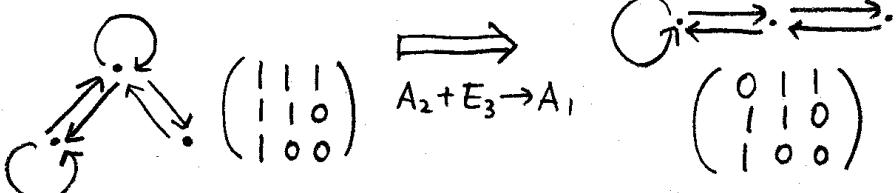
$=$ の  $B$  の $=$ とを、 $A$  の primitive (= transfer) と定めとす。

$\Rightarrow$   $=$ とを、 $A \xrightarrow{\text{prim}} B$  又は、 $A \xrightarrow{\quad} B$

$$E_{k(1)} + \dots + E_{k(r)} + A_{m(1)} + \dots + A_{m(s)} \rightarrow A_p$$

とかく。

例1



primitive transformation  $\xrightarrow{\text{prim}}$   $\equiv$  より生成される同値関係

$\approx$ , primitive equivalence  $\approx_{\text{prim}}$  とよぶ。 $\equiv \approx$ ,  $A \approx B$  とは,

$C_1, \dots, C_k$  が存在して,  $A \xrightleftharpoons[\text{prim}]{\text{prim}} C_1 \xrightleftharpoons[\text{prim}]{\text{prim}} C_2 \xrightleftharpoons[\text{prim}]{\text{prim}} \dots \xrightleftharpoons[\text{prim}]{\text{prim}} C_k \xrightleftharpoons[\text{prim}]{\text{prim}} B$

( $C \xrightleftharpoons[\text{prim}]{\text{prim}} D$  は,  $C \xrightleftharpoons[\text{prim}]{\text{prim}} D$  かつ  $D \xrightleftharpoons[\text{prim}]{\text{prim}} C$  の  $\equiv$  を意味する)

transferred graph の定理の拡張が成り立つ。

[定理  $A$  と  $B$  が primitive equivalent であれば,  $\mathcal{O}_A$  と  $\mathcal{O}_B$  は同型である。]

以上の準備のもとで,  $3 \times 3$  irreducible matrices  $A$  に対する Cuntz Krieger algebras  $\mathcal{O}_A$  を分類する二ことが出来た。

[定理  $A$  と  $B$  を  $3 \times 3$  irreducible matrices とする。 $\equiv$  の時、次は同値である。

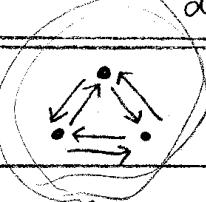
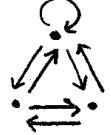
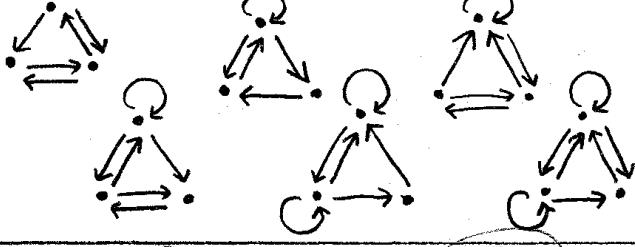
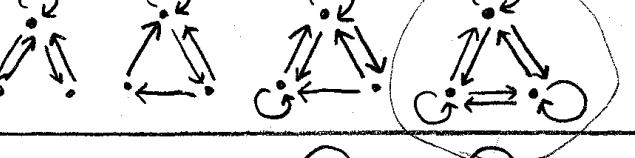
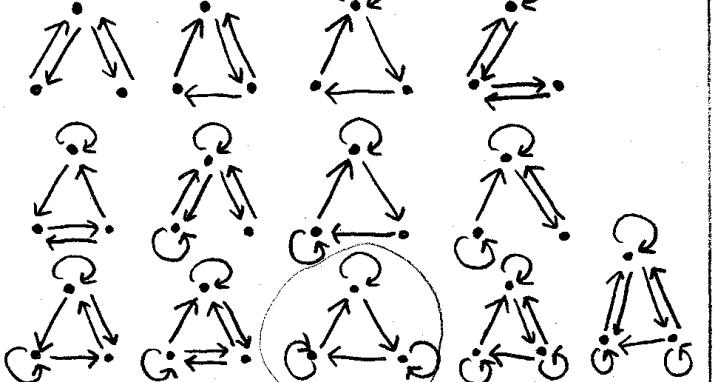
(1)  $A$  と  $B$  は primitive equivalent である。

(2)  $\mathcal{O}_A$  と  $\mathcal{O}_B$  は同型である。

(3)  $K_0(\mathcal{O}_A) = K_0(\mathcal{O}_B)$ ,  $\text{mark}(\mathcal{O}_A) = \text{mark}(\mathcal{O}_B)$

次に,  $\equiv$  の結果を分類表の形にまとめてみる。

分類表

$K_0$	marker	digraph	代表
$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$	$\bar{0}$		
$\mathbb{Z}$	$\bar{0}$		
$\mathbb{Z}_4$	$\bar{2}$		$O_5 \otimes M_2$
$\mathbb{Z}_3$	$\bar{1}$		$O_4$
$\mathbb{Z}_2$	$\bar{0}$		$O_3 \otimes M_2$
	$\bar{1}$		$O_3$
0	$\bar{0}$		$O_2$

Parry & Sullivan は、 $\det(I-A) \neq 0$ , transition matrix  $A$  をもつ topological Markov chains の flow equivalence の topological invariant であることを示した。Cuntz-Krieger [10] は、次のことを証明している。(1) 2つの transition matrices  $A$ ,  $B$  をもつ topological Markov chains  $T, S$  が flow-equivalent であるならば、その時、Cuntz-Krieger algebras  $\Theta_A$  と  $\Theta_B$  は、stable isomorphic である。(2) 2つの  $\Theta_A$  と  $\Theta_B$  が stable isomorphic であるならば、その時、 $|\det(I-A)| = |\det(I-B)|$  である。

私のな会話で、Cuntz は我々に次の興味ある問題を提出して貰った。Cuntz-Krieger algebra  $\Theta_A$  に対する  $\det(I-A)$  は、stable isomorphic invariant であるか？

この問題については我々は反例を見つけた。それは、 $3 \times 3$  matrix  $I$  に対する我々の分類定理による。結局、その定理から、次の系が出来る。

系  $\Theta_A$  と  $\Theta_B$  が同型ではあるが、 $\det(I-A) \neq \det(I-B)$  であるような matrices  $A, B$  が存在する。

証明は、 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  を取ればよい。

この時、 $K_0(\Theta_A) = K_0(\Theta_B) = 0$ . 定理から、 $\Theta_A$  と  $\Theta_B$  は同型である。よって  $\det(I-A) = 1 \neq -1 = \det(I-B)$ .

注意 上の系は, "real"  $C^*$ -algebra  $\mathcal{O}_A \rightarrow \mathbb{H}$  も成立す  
る。

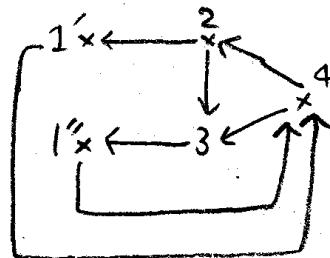
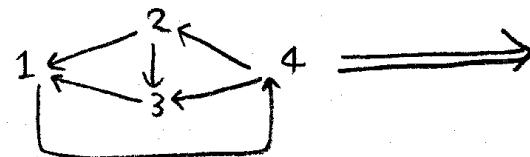
### ⑧ 補遺

digraph の adjoint の一般化と L2, explosion の定義  
が参考される。

定義  $G$  を digraph とする。 $I^-(i) = \{j \in V(G) : i \leftarrow j\}$  の個数  
が、ある  $i \in V(G)$  に対して、2より大きいとする。 $(i=1$  と  
する)。 $I^-(1) = V \cup W$  と分解する。 $= 0$  時、 $G$  の 1 つめの  
explosion  $H$  ( $V$  と  $W$  は閉である) とは、次のものである。

$V(H) = (V(G) \setminus \{1\}) \cup \{v_0, w_0\}$ ,  $E(H) = (E(G) \setminus \{(1, j), (k, 1);$   
 $j, k \in V(G)\}) \cup \{(v_0, v), (w_0, w); v \in V \setminus \{1\}, w \in W \setminus \{v_0\},$   
 $(m, w_0); v \in V, w \in W, m \in I^+(1)\}$  となるものである。ただし  
 $l, l' \in V$  ならば、 $E(H) \cap \{(v_0, v_0), (v_0, w_0)\}$  を一つ加え  
たものを、 $E(H)$  とする。

例



定理  $H$  を digraph  $G$  の explosion とするとき、 $= 0$  時、  
 $\Theta_H = \Theta_G$  である。

(ただし、 $= 0$  操作のくり返しも、explosion とする。)

## REFERENCES.

- [1] R.J.Archbold, On the 'flip-flop' automorphism of  $C^*(S_1, S_2)$ , Quart. J. Math., Oxford, (2), 30(1979), 129-132.
- [2] C.Berge, Graphs and Hypergraphs, North Holland, 1973.
- [3] O.Bratteli, Inductive limits of finite-dimensional  $C^*$ -algebras, Trans. Amer.Math. Soc., 17(1972), 195-234.
- [4] J.Cuntz, Simple  $C^*$ -algebras generated by isometries, Commun. Math. Phys., 57(1977), 173-185.
- [5] ———, A class of  $C^*$ -algebras and topological Markov chains II: Reducible Markov chains and the Ext-functor for  $C^*$ -algebras, Preprint.
- [6] ———, K-theory for certain  $C^*$ -algebras, to appear in Ann. Math.
- [7] ———, K-theory for certain  $C^*$ -algebras II, to appear in J. Operator Theory.
- [8] ———, Automorphisms of certain simple  $C^*$ -algebras, Preprint.
- [9] ——— and D.E.Evans, Some remarks on the  $C^*$ -algebras associated with certain topological Markov chains, Preprint.
- [10] ——— and W.Krieger, A class of  $C^*$ -algebras and topological Markov chains, Invent. Math., 56(1980), 251-268.
- [11] M.Enomoto, M.Fujii and R.Ichihara, The weak extension groups of Cuntz-Krieger algebras, to appear in Math. Japon.
- [12] ———, ———, H.Takehana and Y.Watatani, Automorphisms on Cuntz algebras II, Math. Japon., 24(1979), 463-468.
- [13] ———, H.Takehana and Y.Watatani, Automorphisms on Cuntz algebras, Math. Japon., 24(1979), 231-234.
- [14] ———, ——— and ———,  $C^*$ -algebras on free semigroups as extensions of Cuntz algebras, Math. Japon., 24(1980), 527-531.

- [15] M. Enomoto and Y. Watatani, A graph theory for  $C^*$ -algebras, *Math. Japon.*, 25(1980), in press.
- [16] —————, Young diagrams and  $C^*$ -algebras, to appear in *Math. Japon.*.
- [17] D.E. Evans, On  $O_n$ , Preprint.
- [18] M. Fujii, On extensions of the Cuntz algebra, *Math. Japon.*, 24(1980), 537-539.
- [19] ————— and Y. Watatani, Cuntz-Krieger algebras associated with adjoint graphs, *Math. Japon.*, 25(1980), in press.
- [20] D. Olesen and G.K. Pedersen, Some  $C^*$ -dynamical systems with a single KMS state, *Math. Scad.*, 42(1978), 111-118.
- [21] O. Ore, Theory of Graphs, Amer. Math Soc. Colloquium Publ. 38, 1962.
- [22] W. Paschke and N. Salinas, Matrix algebras over  $O_n$ , *Michigan Math. J.*, 26(1979), 3-12.
- [23] G.K. Pedersen,  $C^*$ -algebras and Their Automorphism Groups, London Math. Soc. Mono., 14, Academic Press, 1979.
- [24] M. Pimsner and S. Popa, The Ext-groups of some  $C^*$ -algebras considered by J. Cuntz, *Rev. Roum. Math. Pures Appl.*, 23(1978), 1076-1096.
- [25] Y. Watatani, Clifford  $C^*$ -algebras, *Math. Japon.*, 24(1980), 533-536.
- [26] M. Pimsner and D. Voiculescu, Imbedding the irrational rotation  $C^*$ -algebra into an AF-algebra, Preprint.
- [27] P.J. Higgins, Categories and Groupoids, Van Nostrand, 1971.