

약수 함수의 합성 곱 기반의 새로운 나무 모델링

김진모[†], 김대열^{**}

요 약

본 연구는 다수의 나무로 구성된 실외 지형에 적합하고 다양하고 자연스러운 나무를 모델링하기 위하여 새로운 성장 규칙(약수 함수의 합성 곱 기반)의 모델링 방법을 제안한다. 기본적으로 나무를 구성하는 가지와 잎의 효율적 관리와 자연스러운 가지 증식을 위하여 기존의 성장 볼륨기반 알고리즘을 활용한다. 이 논문의 주요 특징은 각 성장 단계에서 가지와 잎의 성장과 운명을 자연스럽게 표현하는 약수 함수 합성 곱 이론을 도입하는 것이다. 이를 기반으로 일반화된 생성 함수를 갖는 여러 약수 함수와 성장 규칙의 변형을 통해 사용자의 제어를 최소화하여 다양한 나무를 모델링하는 방법을 제안한다. 이 모델링 방법은 가지와 잎을 동시에 고려하는 특징이 있으며, 다수의 나무들로 구성된 실외 지형 구축에 보다 효과적이라는 이점이 있다. 제안한 방법을 통해 자연스럽게 다양한 나무 모델 생성과 이를 활용하여 넓은 자연 지형 구축 가능성과 다수의 나무를 구성하는 과정에서의 효율성을 실험을 통해 증명한다.

A New Tree Modeling based on Convolution Sums of Restricted Divisor Functions

Jinmo Kim[†], Daeyeoul Kim^{**}

ABSTRACT

In order to model a variety of natural trees that are appropriate to outdoor terrains consisting of multiple trees, this study proposes a modeling method of new growth rules(based on the convolution sums of divisor functions). Basically, this method uses an existing growth-volume based algorithm for efficient management of the branches and leaves that constitute a tree, as well as natural propagation of branches. The main features of this paper is to introduce the theory of convolution sums of divisor functions that is naturally expressed the growth or fate of branches and leaves at each growth step. Based on this, a method of modeling various tree is proposed to minimize user control through a number of divisor functions having generalized generation functions and modification of the growth rule. This modeling method is characterized by its consideration of both branches and leaves as well as its advantage of having a greater effect on the construction of an outdoor terrain composed of multiple trees. Natural and varied tree model creation through the proposed method was conducted, and using this, the possibility of constructing a wide nature terrain and the efficiency of the process for configuring multiple trees were evaluated experimentally.

Key words: Procedural Tree Modeling(절차적 나무 모델링), Convolution Sums of Divisor Functions(약수 함수의 합성 곱), Tree Growth Simulation(나무 성장 시뮬레이션), Outdoor Terrain(실외 지형)

※ 교신저자(Corresponding Author) : 김진모, 주소 : 서울시 중구 필동2가 82-1 동국대학교 충무로영상센터 207호 (100-272), 전화 : 010-9116-1939, E-mail : mythsjin@dongguk.edu

접수일 : 2012년 12월 19일, 수정일 : 2013년 2월 25일

완료일 : 2013년 3월 7일

[†] 정회원, 동국대학교 영상문화콘텐츠연구원

^{**} 정회원, 국가수리과학연구소

(E-mail : daeyeoul@nims.re.kr)

1. 서 론

자연스러운 배경 구축을 위하여 나무와 같은 식물 생성은 중요한 요소이다. 하지만 나무는 구조의 복잡함으로 자연스러운 나무를 생성하기 위해서는 이에 적합한 모델링 방법이 요구된다. 나무 모델링은 규칙 기반의 절차적 모델링 방법과 입력 영상 또는 3차원 스캔 정보로부터 나무 기하 정보를 재구성하는 방법이 있다. 재구성 방법은 입력으로 제공한 영상만으로 사용자의 제어를 최소로 하여 신뢰할만한 나무 모델을 생성할 수 있다. 이 경우 원하는 좋은 결과의 나무 모델을 얻기 위해서는 제한된 조건상에서 촬영된 높은 해상도의 영상이나 스캔 정보가 있어야 한다. 하지만 이런 조건을 항상 유지하는 것은 쉬운 일이 아니며, 이를 통해 만들어 낼 수 있는 숲과 같은 실외 지형은 극히 제한적이고 소수의 나무에 불과하다. 반면에 L-system과 같은 규칙기반은 이러한 제한을 다소 완화시켜 줄 수 있다[1,2].

규칙기반 모델링의 경우 가장 기본이 되는 몇 가지 형태의 기본 규칙을 토대로 하여 규칙을 일부 변형하거나 다수의 매개변수를 정의, 또는 성장 과정에서 사용자의 제어 과정을 추가하는 등 차별화된 새로운 접근 방법 보다는 기존 규칙의 응용 방법들이 주로 연구되고 있다. 이러한 연구들 대부분은 자연스러운 나무 모델을 생성하기 위한 것으로 규칙이 복잡하고 다양한 나무를 표현하기 위해 사용자가 제어해야 할 요소가 많다. 또한 대부분의 연구들은 하나의 나무에 대한 자연스러운 성장에 초점이 맞추어짐으로 인하여 나무를 구성하는 가지의 분포가 많고 복잡하다. 또한, 기존 규칙기반 모델링은 다수의 나무를 동시에 표현하는데 한계가 존재한다. 이러한 문제를 해결하기 위하여 본 논문에서는 기존 규칙기반 모델링과 차별화된 새로운 성장 패턴과 성장 단계가 증가할수록 기하급수적으로 늘어나는 가지 구조의 효율적 관리가 가능한 새로운 성장 규칙을 설계한다.

본 연구에서는 약수 함수의 합성 곱을 성장 규칙으로 하여 나무를 모델링하는 방법을 제안한다. 우선 가지 증식과 관련한 성장 규칙은 기존의 성장 볼륨 알고리즘을 활용한다[3,4]. 그리고 약수 함수의 합성 곱을 기반으로 성장 단계별 가지와 잎의 운명을 결정하는 새로운 성장 규칙을 설계한다. 여기에 다양한 나무 모델을 손쉽게 모델링 할 수 있도록 약수 함수

의 합성 곱을 응용하는 방법을 추가로 제안한다. 이는 나무 성장 과정에서 사용자의 제어나 매개변수 사용을 최소로 함으로써 다수의 나무로 확장되어 적용할 경우 더욱 효율적인 구조를 갖는다. 또한 기존 연구들은 가지와 잎을 동시에 고려하여 규칙을 정의하고 있지 않지만 본 연구에서는 이러한 설계가 가능하다. 마지막으로 성장 단계가 증가할수록 가지와 잎의 분포 및 패턴을 분석하여 다수의 나무로 구성된 실외 지형 구성에서의 효율성을 실험한다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 우선 나무 모델링과 관련한 기존 연구들의 분석을 시작으로 3장에서는 제안하는 약수 함수의 합성 곱을 통한 모델링 방법을 설명한다. 그리고 4장에서는 모델링 결과에 대한 성장 실험과 효율성에 대한 성능 분석을 통해 본 연구의 결과를 분석하며 마지막으로 5장은 결론을 제시한다.

2. 관련 연구

나무 모델링은 구조가 복잡하고 형태가 다양하여 일반적인 모델링 방법으로는 표현이 어렵다. 이러한 자연물을 표현하기 위한 대표적 방법으로 형식문법의 일종이며, 식물의 성장과정을 기초로 한 다양한 자연물의 구조를 기술하거나 표현이 가능하게 하는 알고리즘인 L-system이 제안되었고 이를 활용한 다양한 나무 모델링 방법이 연구되었다[5]. 이는 3차원 나무 성장을 결정하는 가지의 길이, 폭 등을 상징 문자로 지정하고, 치환 규칙에 의해 다른 문자열로 치환함으로써 가지의 성장 형태를 결정한다[6]. 이와 같이 단순한 개체를 계속적으로 바꾸어 나감으로써 결과적으로 복잡한 개체를 만들어 내는 식물 표현 방법인 L-system기반 식물 모델링 연구들이 진행되었다[7,8].

이러한 규칙기반 모델링과 관련하여 다양한 연구들이 진행되었다. Honda[9]는 가지의 재귀적 구조, 회전각 및 비율과 같은 성장 요소를 매개변수를 사용하여 나무를 구성하였다. Ulam[10]은 가지 생성을 결정하는 싹이 존재하는 공간 안에서 경쟁을 통해 가지 패턴을 구성하는 즉, 자기조직화 과정을 통해 나무를 표현하였다. Palubicki 등[11]은 이를 발전시켜 가지의 지역적인 제어와 공간 내에서 싹과 가지의 경쟁을 통한 규칙 정의와 자기조직화를 통해 모델링

하는 방법을 제시하였다.

Reffye 등[12]은 싹의 운명에 통계적 접근을 시도한 연구를 처음 제안하였고, 이후 Prusinkiewicz 등[13]은 싹의 운명 결정에서 통계적이고 호르몬에 대한 분석을 통한 나무 모델을 제안하였다. 또한 성장 과정에서의 빛의 영향이나 중력굴성의 영향 등 다양한 환경요소들을 고려하기도 하였다[14,15]. 이밖에도 문법기반의 절차적 모델을 통한 나무 모델링에서의 고수준의 제어를 적용하는 연구[16] 등 자연스러운 나무 생성 및 성장과 관련한 연구들이 활발히 진행되고 있다.

규칙기반 모델링과 달리 원하는 형태의 나무를 한 장 이상의 영상 또는 3차원 스캔 정보로 입력받아 재구성하는 영상기반 모델링 방법들도 최근 활발히 연구되고 있다. Tan[17]은 나무를 구성하기 위해 입력 영상과 사용자의 대화식 제어를 결합한 방법을 제안하였고, 3차원 스캐너 장비와 컴퓨터 비전 기술을 결합하여 계산된 3차원 정점(vertex) 집합들로부터 음함수 형태의 나무를 재구성하는 연구들도 진행되었다[18]. Livny[19]는 로브(lobe)기반의 나무 모델링으로 3차원 정점 집합을 로브 형태로 계산하여 모델링 과정을 단순화하였다.

하지만 대부분의 나무 모델링은 새로운 규칙 정의에 대한 접근보다는 기존 규칙의 변형과 응용 방법들을 보완하는 것에 초점이 맞추어져 있다. 따라서 본 연구에서는 기존의 규칙과는 다른 새로운 접근 방법의 성장 패턴과 규칙을 정의하고, 가지 증식에 대한 접근 방법을 기존 연구와 달리 가지와 잎의 성장 패턴을 동시에 고려할 수 있는 성장 규칙으로 설계한다. 또한 성장이 이루어지면서 늘어나는 가지와 잎의 분포가 일정한 패턴을 가짐으로써 다수의 나무로 구성된 실외 지형 구축에 적합하도록 한다.

3. 모델링 방법

본 연구에서는 복잡한 구조를 갖는 나무 모델에서 가지의 성장 및 주변 환경 인지와 같은 성장 결정 과정을 효과적으로 관리하기 위하여 성장 볼륨기반 알고리즘을 활용한다[3,4]. 그리고 약수 함수의 합성 곱을 통해 가지와 잎의 성장 패턴을 결정하는 새로운 성장 규칙 알고리즘을 제안하며, 다양한 나무 성장을 제어할 수 있는 방향을 제시한다.

3.1 나무 구조 및 가지 증식

기본적인 나무 구조는 계층적 관계를 가지며 현재 가지는 부모 가지의 성장 성분의 영향을 받는다. 그리고 잎은 현재 생성되는 가지와 그 부모들을 기준으로 임의의 위치에 생성된다. 가지 증식은 보다 자연스러운 성장을 위하여 자기조직화 기반의 성장 볼륨 알고리즘을 적용한다. 성장 볼륨을 구성하는 요소인 위, 아랫면의 길이(w_t, w_b), 높이(h)가 결정되면, 그림 1과 같은 실린더 형태의 성장 볼륨이 생성되고 내부 각($\theta_t, \theta_b, \theta_f$)이 계산된다. 그런 다음, 현재 싹의 위치(p_{bud})로부터 새로운 가지의 성장 방향(\vec{v}_{gr})을 결정하는 성장 공간 요소(r, l)와 회전각(θ_i, ϕ_i)을 성장 볼륨의 구성 요소들을 통해 자동으로 계산한다. 이러한 과정을 통해 원하는 나무의 형태를 쉽고 직관적으로 생성할 수 있다.

식 (1)은 성장 볼륨의 구성 요소를 통해 가지 성장 요소 중 회전각 θ_i 를 계산하는 한 예로, 나무 성장 모델과 관련한 여러 매개변수를 쉽게 계산 가능하도록 한다.

$$\begin{aligned} m &= (w_t - w_b) / (w_t + w_b), \\ \theta_s &= \theta_f - 0.5m * \theta_b - g, \\ \theta_i &= \theta_s + 0.1m * \lambda * g_s * \theta_t \end{aligned} \tag{1}$$

단, m 은 성장 볼륨의 위, 아랫면의 값의 차이에 따른 증가 또는 감소 조절 값으로 $-1, 0, 1$ 중 하나의 값을 가지며, 초기 회전각(θ_s)은 성장 볼륨의 내부 각(θ_f)과 중력굴성(g)을 통해 계산된다. 그리고 λ 는 성장 조절 요소이다.

3.2 약수 함수의 정의

약수 함수 $\sigma_a(n)$ 는 자연수 n 의 약수(d)들의 a 승의

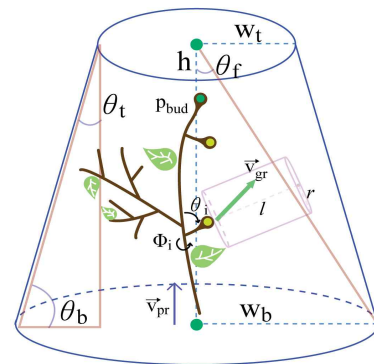


그림 1. 성장 볼륨을 통한 나무의 성장 요소 결정

합으로 정의된다. 이때 a 가 0인 경우는 n 의 약수들의 개수를 나타낸다.

$$\sigma_a(n) = \sum_{d|n} d^a \tag{2}$$

예를 들어, 3의 약수(d)로는 1과 3이 존재하므로, $\sigma_0(3) = 1^0 + 3^0 = 2$, $\sigma_1(3) = 1^1 + 3^1 = 4$, $\sigma_2(3) = 1^2 + 3^2 = 10$ 와 같다.

약수 함수 합성 곱의 처음 유래는 1862년 Besge가 Liouville에게 보낸 편지에 언급된 이후 약수 함수에 관한 생성 규칙을 찾는 연구가 진행되었고, 약수 함수의 합성 곱을 일반화하는 연구들이 현재까지 활발하게 진행되었다[20,21].

식 (3)은 약수 함수 합성 곱의 기본적인 예로 본 연구에서 제안하는 나무 성장의 기본 수식을 나타낸 것이다.

$$\sum_{k=1}^{N-1} \sigma_1(k)\sigma_1(N-k) = \frac{1}{12} \{5\sigma_3(N) + (1-6N)\sigma_1(N)\} \tag{3}$$

단, N 은 자연수이다.

약수 함수와 관련한 연구들은 주로 임의의 N 에 대한 이산 합과 같이 생성 함수 분야의 일반화된 문제를 해결하는 것으로 연구가 진행되었다. 일반적으로 약수 함수 합성 곱은 식 (4)와 같이 표현된다.

$$W_X(N) := \sum_{k < N/X} \sigma_1(k)\sigma_1(N - Xk) \tag{4}$$

단, X 는 합성 곱의 반복 횟수 성분으로 k 는 1부터 N/X 까지 반복하며 약수 함수의 합성 곱을 연산한다.

약수 함수 합성 곱을 활용하여 식물 성장을 정의할 경우, 일반적으로 식물 성장에 활용되는 L-system과 다른 구조의 성장 과정을 표현할 수 있다. 오히려 기존 규칙들보다 간단하면서 다양한 나무를 표현하는데 효과적이다. 그리고 성장에 따른 가지 수 분포를 단순화하여 다수의 나무로 구성된 실외 지형 표현에 적합할 수 있다. 본 연구는 약수 함수 합성 곱을 나무의 성장 즉, 가지와 잎의 운명을 결정하는 성장 패턴으로 활용하는 알고리즘을 설계한다.

3.3 나무의 성장 패턴 설계

본 연구는 식 (4)의 약수 함수 합성 곱을 활용하여 가지 및 잎의 성장 패턴을 정의한다. 기본적인 식은

앞서 설명한 $W(N)$ 의 형태를 사용하고 나무의 성장 구조를 단계별로 구분하기 위하여 식 (5)와 같이 수정한다.

$$\sum_{k=1}^{N-1} \sigma_1^i(k)\sigma_1^i(N-k) \tag{5}$$

단, i 는 현재 성장 단계(g_s)이다. 이때 $\sigma_1^i(k)$ 는 가지 수 성분, $\sigma_1^i(N-k)$ 는 잎의 수 성분으로 정의한다. 그리고 $N-1$ 은 i 번째 성장 단계의 최종 반복 횟수를 나타낸다.

약수 함수 합성 곱 기반의 성장 알고리즘은 크게 두 개의 단계로 나누어 진행된다. 식 (4)에서 k 의 값이 최종 성장 단계인 $N-1$ 과 같은 경우 현재 나무의 몸통으로부터 새로운 가지가 최대 $\sigma_1^i(k)+1$ 만큼 생성되고, 새로 성장한 각각의 가지에 $\sigma_1^i(N-k)$ 만큼의 잎이 생성된다. 그리고 합성 곱에서 k 의 값이 현재 성장 단계보다 작은 경우에는 이전 단계에 성장된 부모 가지와 잎의 정보를 토대로 자식 가지의 수를 얼마만큼 추가할 것인지 잎은 얼마나 추가로 생성하거나 떨어지는지에 대한 정보가 결정된다.

예를 들어, 성장 단계(g_s)가 1에서 2로 증가하는 경우 약수 함수의 합성 곱은 식 (6)과 같다.

$$g_s = 1: \sum_{k=1}^1 \sigma_1^1(k)\sigma_1^1(N-k) = \sigma_1^1(1)\sigma_1^1(1), \tag{6}$$

$$g_s = 2: \sum_{k=1}^2 \sigma_1^2(k)\sigma_1^2(N-k) = \sigma_1^2(1)\sigma_1^2(2) + \sigma_1^2(2)\sigma_1^2(1)$$

이때 $\sigma_1^1(1)\sigma_1^1(1)$, $\sigma_1^2(2)\sigma_1^2(1)$ 는 k 가 현재 성장 단계와 같은 값($k \equiv N-1$)으로 나무 몸통으로부터 각각 1에서 $\sigma_1^{g_s}(k)+1$ {예를 들면, $\sigma_1^1(1)+1$, $\sigma_1^2(2)+1$ } 사이의 임의의 값으로 가지를 생성하고, 각 가지로부터 $\sigma_1^{g_s}(N-k)$ {예를 들면, $\sigma_1^1(1)$, $\sigma_1^2(1)$ }개의 잎이 생성된다. 그리고 $\sigma_1^2(1)\sigma_1^2(2)$ 은 k 가 1일 때의 합성 곱으로 이전 성장 단계($g_s \equiv 1$)에서 생성되었던 부모 가지와 잎의 수를 바탕으로 추가되는 자식 가지와 추가 또는 떨어질 후보 잎의 수를 결정한다. 이때 추가되는 가지의 수는 0에서 $(\sigma_1^2(1) - \sigma_1^1(1)) + 1$ 사이의 값이 임의로 선택되고 추가 또는 떨어질 잎의 수는 $\sigma_1^2(2) - \sigma_1^1(1)$ 이 된다.

표 1은 앞서 설명한 가지 증식 방법과 약수 함수의 합성 곱을 통한 가지와 잎의 성장 패턴을 일반화한

표 1. 약수 함수 합성 곱 기반의 성장 규칙 알고리즘

Algorithm
Formula : $\sum_{k=1}^{N-1} \sigma_1^i(k) \sigma_1^i(N-k)$
<p>Productions :</p> <ol style="list-style-type: none"> $g_s \leftarrow$ 성장 단계 성장 볼륨 설정 (w_b, w_t, h) 성장 패턴 정의 n_{dv} : 가지 성분의 계산 값 n_{br}, n_{lf} : 가지와 잎의 수 <p>for $k=1$ to $N-1$ do if ($k \equiv N-1$) 새로 생성되는 가지의 계산 값 : $n_{dv} = \sigma_1^{g_s}(k)$ 새로 생성되는 잎의 수 : $n_{lf} = \sigma_1^{g_s}(N-k)$ else 추가 되는 가지의 계산 값 : $n_{dv} = \sigma_1^{g_s}(k) - \sigma_1^{g_s-1}(k)$ 추가 또는 떨어질 후보 잎의 수 : $n_{lf} = \sigma_1^{g_s}(N-k) - \sigma_1^{g_s-1}(N-k)$</p> <p>growth $n_{br} \in \begin{cases} \{0\} & \text{if } n_{dv} \equiv 0 \text{ and } k \equiv N-1 \\ \{x 0 \leq x \leq 1\} & \text{else if } n_{dv} \equiv 0 \text{ and } k \neq N-1, n_{br} : \text{자연수} \\ \{x 1 \leq x \leq n_{dv} + 1\} & \text{otherwise} \end{cases}$</p> <p>for $i=0$ to $n_{br}-1$ do 부모 가지(v_{pr})로부터 가지 증식 for $j=0$ to $n_{lf} -1$ do if ($n_{lf} \geq 0$) 현재 가지로부터 생성될 잎의 결정 else 현재 가지로부터 떨어질 후보 잎의 결정</p> <ol style="list-style-type: none"> $g_s = g_s + 1$

알고리즘이다.

그림 2는 위의 알고리즘을 바탕으로 나무의 성장 과정을 단계별로 모델링한 결과이다. 나뭇잎의 경우 정의한 알고리즘을 통해 성장 단계가 증가함에 따라 새롭게 생성된다. 그리고 이 과정에서 떨어지는 잎의 후보들이 결정된다. 빨간색으로 표시된 잎의 경우가 n_{lf} 의 값이 음수가 발생하여 현재 가지로부터 떨어질 후보 잎이 결정된 것이다. 예를 들어, 계산된 n_{lf} 값이 -2라면 최대 2개의 떨어질 수 있는 후보 잎이 결정된다. 그리고 현재 나무에 물리적 힘이 가해질 경우 잎이 낙화하는데 이때 후보 잎들이 선택적으로 떨어지는 것이다. 또한 그림 2의 아래와 같이 가지와 잎의 성장을 분리하여 표현할 수 있다. 이러한 과정들을 통해 성장 과정의 쉽고 편리한 관리가 가능하며, 불규칙성이 있어 자연스러운 연출이 가능하다.

약수 함수 합성 곱 기반의 나무 성장 패턴은 일반화된 규칙을 갖는 약수 함수의 성질에 딸 가지의 성장 분포를 효율적으로 관리할 수 있으며, 여러 종류의 다양한 형태의 나무 성장을 표현할 수 있다. 그리고 이러한 효율적인 가지 분포는 다수의 나무로 구성된 실외 지형 구축에 적합한 구조를 갖는다. 여기에 잎의 떨어지는 현상도 별도의 규칙 설계 없이 효과적으로 적용할 수 있는 장점을 갖는다.

3.4 약수 함수의 응용

합성 곱의 기본 수식 외에도 약수 함수와 관련한 다양한 수식이 존재한다[21,22]. 그리고 이들 합성 곱이 임의의 N 에 대한 항등 규칙을 찾는 연구들이 진행되고 있다.

이러한 여러 약수 함수를 나무 성장에 적용하여

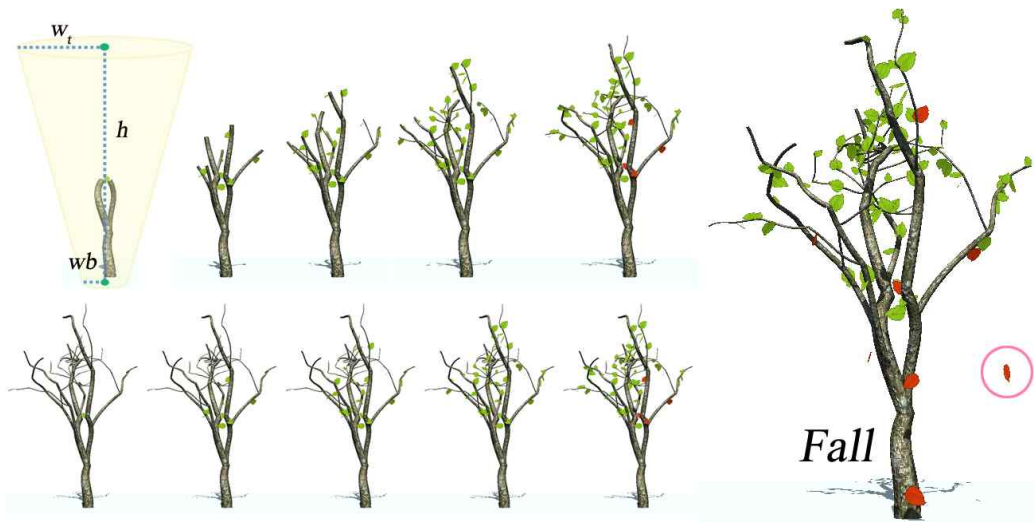


그림 2. 제한한 기본 약수 함수의 합성 곱 $(\sum_{k=1}^{N-1} \sigma_1^i(k) \sigma_1^i(N-k))$ 을 통한 단계별 성장 결과

다양한 나무 성장을 보다 쉽고 효율적으로 표현하는 방법을 제안한다. 이를 통해 일반화된 규칙과 사용자의 최소의 제어로 다양한 나무를 효과적으로 성장할 수 있도록 한다. 식 (7)은 약수 함수에서 정의되는 N 의 약수들 중 m 으로 나눈 나머지가 b 가 되는 약수만을 더하는 식이다.

$$\sigma_{a,b}(N; m) = \sum_{\substack{d|N \\ d \equiv b \pmod{m}}} d^a \quad (7)$$

특히, 짝수 또는 홀수의 일반적인 수에 대한 합성 곱 규칙이 연구되고 있으며, 본 연구에서도 짝수 또는 홀수에 대한 약수 함수의 합성 곱을 바탕으로 나무 성장을 변형한다.

짝수에 대한 약수 함수 합성 곱을 제안하는 나무

성장 알고리즘에 대입할 경우, 약수 함수의 성질로 인해 새로 생성되는 가지의 수(n_{dv})가 0이 되는 경우가 발생한다. 이는 나무 몸통으로부터 새로운 가지가 발생하지 않는 경우이다. 따라서 가지 증식에서 새로 생성되는 가지의 수가 0이 되는 경우, 굴광성 또는 중력굴성을 제어하여 모든 가지가 빛을 향해 길고 곧게 뻗어가거나 아래로 처지며 성장하도록 변형한다. 이러한 변형을 통해 사용자의 제어를 최소화 하며 다양한 성장 패턴을 갖는 알고리즘 설계가 가능해진다.

그림 3은 짝수와 홀수로 구성된 약수 함수의 합성 곱에 대한 성장 패턴을 나타낸 것이다. 우선, 좌측 하단의 나무에 그려진 선들은 성장 볼륨의 위, 아랫

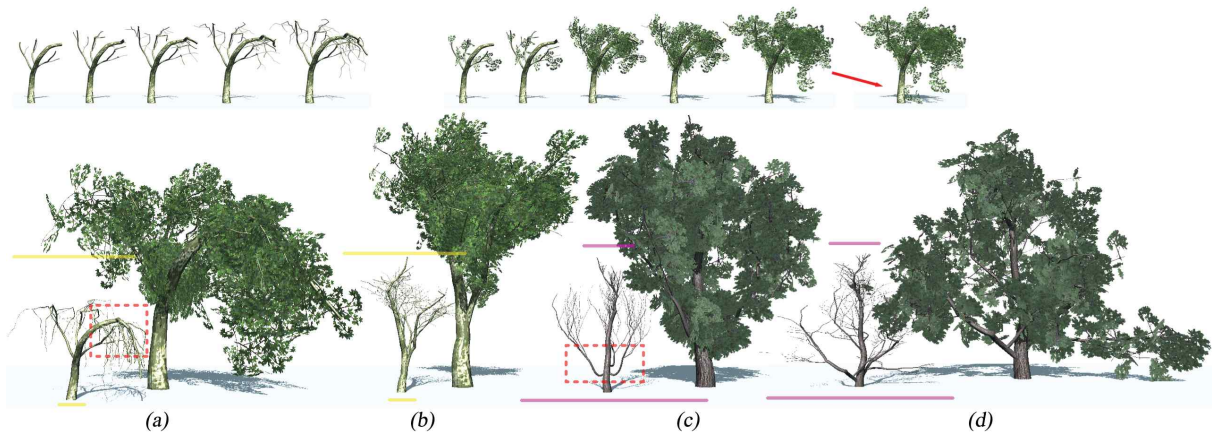


그림 3. 짝/홀수의 약수 함수 합성 곱 $(\sum_{k=1}^{N-1} \sigma_{1,x}^i(k;2) \sigma_{1,y}^i(N-k;2))$ 을 통한 나무 성장 결과: $(x,y) \rightarrow$ (a) (0,0); (b) (1,0); (b) (0,1); (b) (1,1)

면을 나타낸 것으로 사용자가 설정한 성장 볼륨 정보를 토대로 나무의 성장 정보를 자동으로 계산한다. 이때 그림 3의 (a)와(b), (c)와(d)가 각각 같은 성장 볼륨을 갖는다. 하지만 가지 성분이 짝수에 대한 약수 함수를 갖는 그림 3의 (a)와 (c)는 다른 성장 형태를 갖는다. n_{dv} 의 값이 0이 계산될 때(예를 들면, $\sigma_{1,0}^3(3;2)=0$) 마다 (a)는 중력굴성의 변화로 가지가 아래로 향하며, (c)는 굴광성의 변화로 위로 뻗어나가는 것을 알 수 있다.

그림 3처럼 약수 함수의 성질을 나무 성장에 적용함으로써 새로운 성장 규칙 정의가 가능해진다. 또한 이를 다수의 나무로 구성된 실외 지형에 적용하여 원하는 지역에 지정된 약수 함수 합성 곱을 부여함으로써 효율적으로 다양한 나무들을 자연스럽게 성장시킬 수 있다.

4. 실험 및 분석

본 연구에서는 Visual Studio 2008과 DirectX SDK 9.0을 이용하여 모델링 프로그램을 개발하였고 성능 실험에 사용된 PC는 CPU Intel core i5-650, RAM 4GB, GPU Geforce GT 320을 탑재하고 있다. 또한 실외 지형 구축은 Unity 3D엔진을 활용하였다. 본 연구는 약수 함수 합성 곱을 통한 효율적인 가지 증식 패턴과 약수 함수의 성질을 이용한 성장 변형을 제안하기 위한 것이다. 따라서 가지 증식과 관련한 가지의 길이, 방향 등의 성장 정보 결정과 나무의 볼륨을 구성하는 표면 구성 방법은 기존의 성장 볼륨 알고리즘의 모델링 방법을 활용하였다[3,4].

실험은 크게 두 단계로 나누어 진행한다. 우선 제안한 성장 알고리즘을 통한 나무 성장 과정과 이를 통해 자연스러운 실외 지형 구축 가능성을 확인하였다. 그림 4는 임의의 성장 볼륨 설정을 통해 약수 함수 합성 곱($\sum_{k=1}^{N-1} \sigma_1^i(k)\sigma_1^i(N-k)$)기반의 알고리즘을 활용하여 다양한 나무 모델을 성장 시킨 결과로 성장 단계는 7~8이다. 자기조직화기반의 성장 볼륨 알고리즘 방법은 성장 단계가 7~8일 경우 나무 모델의 정점 수가 16,832에서 35,904 정도로 대략 30,000개 정도 내외인 것과 비교하여, 약수 함수 합성 곱 기반의 성장 패턴은 유사한 나무 모델을 생성함에도 평균 12,000개 정도의 정점 수를 갖는 것을 알 수 있다. 이는 성장 단계가 증가할수록 기하급수적으로 늘어

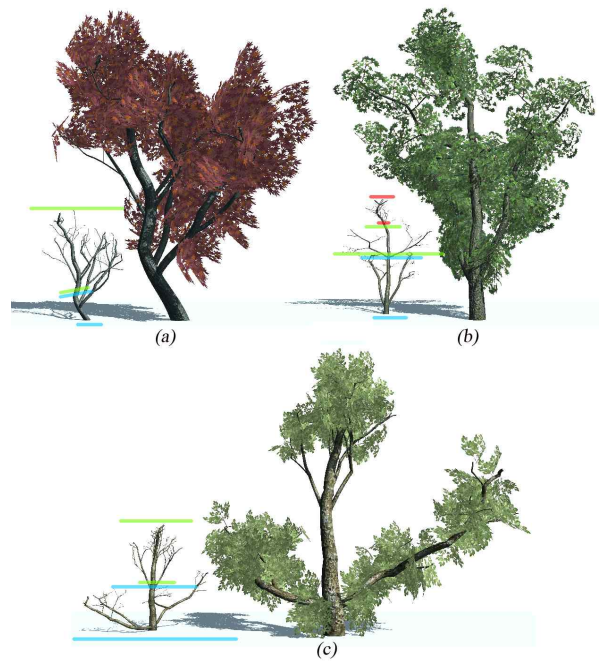


그림 4. 약수 함수 $\sum_{k=1}^{N-1} \sigma_1^i(k)\sigma_1^i(N-k)$ 에서 성장 볼륨 변형에 따른 다양한 나무 성장 결과: 정점 수 → (a) 10,622; (b) 17,134; (c) 9,753

나는 가지의 수를 약수 함수 합성 곱기반 가지 성장 패턴을 설계함으로써 효율적으로 제어하기 때문이다.

제안한 방법의 나무 모델은 기존의 규칙기반 모델링과 비교하여 같은 성장 단계에서 적은 수의 가지를 갖기 때문에 넓은 지형으로 구성된 실외 지형을 구성하는데 효율적이다. 그림 5는 약수 함수를 기반으로 성장한 나무 모델을 활용하여 가상 환경을 구성한 결과로 자연스러운 배경 표현이 가능함을 알 수 있다.

다음은 성장 단계의 증가에 따라 생성되는 가지 수를 분석하고 다수의 나무로 구성된 실외 지형 구축에서의 효율성을 확인하는 과정이다. 표 2와 그림 6은 이를 나타낸 것으로 본 논문에서 사용한 약수 함수 합성 곱들을 통해 생성되는 평균가지 수를 확인하였다. 성장 단계가 증가할수록 생성되는 가지 수의 패턴이 기하급수적으로 늘어나지 않고 비교적 일정한 패턴을 갖는 것을 알 수 있다. 가령, 기존 규칙기반 모델링의 경우 성장이 반복 될 때 마다 이전 가지에서 2~3개씩 가지가 새로 생성된다. 이럴 경우 별도의 처리가 없으면 8단계만 되어도 $2^8 \sim 3^8$ 사이의 가지가 생성된다. 하지만 표 2에서 확인할 수 있듯이 약수 함수 구조는 가지 증식 패턴이 상대적으로 일정



그림 5. 제안한 성장 규칙을 통해 생성된 나무 모델들로 구성된 실외 지형 결과(성장 단계: 6~9, 평균가지 노드 수: 171)

표 2. 성장 단계에 따라 증가되는 가지 수 비교 실험

성장 단계(g_s)		2	5	8	11
평균 가지 수	$\sum_{k=1}^{N-1} \sigma_1^i(k) \sigma_1^i(3^N(N-k))$	6	38	186	1272
	$\sum_{k=1}^{N-1} \sigma_{1,0}^i(k;2) \sigma_{1,y}^i(3(N-k);2)$	3	13	70	483
	$\sum_{k=1}^{N-1} \sigma_{1,1}^i(k;2) \sigma_{1,y}^i(3(N-k);2)$	5	26	141	921

하여 그림 5와 같은 실외 지형을 효율적으로 구축하는데 유리하다.

그림 6은 자기조직화기반 성장 볼륨 알고리즘[4]을 통해 나무를 성장시킬 경우, 하나의 나무에서 성장 단계별로 늘어나는 평균가지의 수와 여러 약수 함수 합성 곱 기반의 성장 패턴을 적용하여 성장한 경우를 비교한 그래프로 성장 단계가 증가할수록 제안한 방법의 가지 증식 패턴이 효율적임을 확인할 수 있다. 하나의 나무가 갖는 평균가지 수가 기존 연

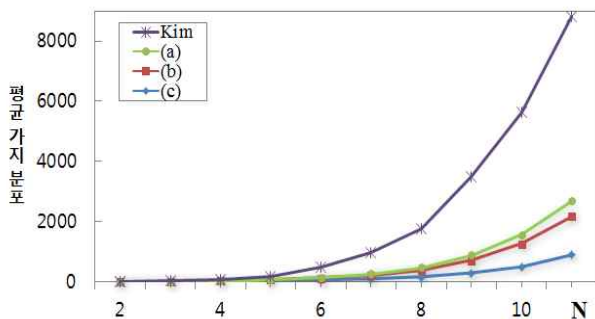


그림 6. 성장 볼륨기반 알고리즘의 가지 패턴과 약수 함수 합성 곱의 성장 패턴 비교: 약수 함수의 가지 성분 → (a) $\sigma_1^i(k)$; (b) $\sigma_{1,1}^i(k;2)$; (c) $\sigma_{1,0}^i(k;2)$

구와 비교하여 효율적인 구조를 나타냄으로써, 그림 5와 같은 다수의 나무로 구성된 가상 실외 지형을 구성할 때 렌더링 과정의 정점 처리(vertex processing)연산에서 더욱 효과적인 장점을 갖는다.

그림 5의 나무는 평균 500~1000그루의 나무로 구성된 실외 지형으로 성장 볼륨 기반 알고리즘에서의 세분화 단계 방법을 적용하여 실험하였을 때 초당 프레임 수가 35~50 fps 정도로 자기조직화와 성장 볼륨만을 활용하는 기존 방법[4]보다 최대 15fps 이상 차이가 나는 것을 알 수 있다. 이는 앞선 실험들을 토대로 나무 모델의 가지 분포가 제안한 약수 함수 합성 기반의 성장 패턴을 통해 효율적인 구조를 가지므로써, 이러한 성능 향상을 보인 것이다.

5. 결 론

본 연구에서는 가상의 실외 지형을 구성하는 식물들 중 나무 모델링에 대한 방법으로 자연스럽게 다양한 나무를 보다 쉽고 효율적으로 생성하는 약수 함수의 합성 곱 기반의 새로운 성장 규칙을 설계하였다. 일반화된 규칙을 가지는 약수 함수의 합성 곱을 통한 성장 패턴은 기존에 연구되던 나무 모델링을 위한 성장 규칙과 차별화된 새로운 접근 방법으로 가지와 잎의 성장 및 운명을 동시에 고려하여 자연스러움은 물론 성장 단계마다 가지와 잎의 분포가 기하급수적으로 늘어나지 않는 효율적인 구조를 갖는다. 이러한 약수 함수의 합성 곱의 특징을 활용하여 복잡한 실외 지형을 구성하는 나무를 표현하는데 유용하다. 또한 약수 함수 기반의 성장 규칙을 기본으로 다양한 나무

를 자연스럽게 효율적으로 모델링 할 수 있도록 일반화된 규칙을 갖는 여러 약수 함수를 응용하는 방법을 제안하였다. 이러한 성장 규칙을 토대로 자연스럽게 다양한 나무의 성장이 가능하고 다수의 나무로 구성된 실외 지형에서의 효율성을 실험을 통해 확인하였다.

제안하는 알고리즘은 두 개의 약수 함수에 대한 일반화된 규칙을 갖는 합성 곱의 형태로 제시되고 있다. 따라서 향후 스칼라 곱을 포함한 약수 함수의 합성 곱이나 다수의 약수 함수의 조합으로 이루어진 합성 곱들을 나무 성장 모델에 활용할 수 있도록 하며 약수 함수의 성장 패턴과 식물학적 이론을 접목할 수 있는 방향을 연구함으로써 보다 더 다양하고 사실적인 나무 모델링 방법을 제안할 수 있을 것이다. 이 밖에 나무 구조에 적합한 조명 기술을 통한 사실적 렌더링 및 애니메이션 기술 연구를 연구 되어진 약수 함수 모델링의 원리와 결합하여 표현함으로써 더욱 자연스러운 나무 모델 생성이 가능하도록 할 것이다.

참 고 문 헌

[1] R. Sun, J. Jia, and M. Jaeger, "Intelligent Tree Modeling Based on L-system," *Proc. Computer-Aided Industrial Design Conceptual Design*, pp. 1096-1100, 2009.

[2] F. Anastacio, P. Prusinkiewicz, and M.C. Sousa, "Sketch-based Parameterization of L-systems using Illustration-inspired Construction Lines and Depth Modulation," *Computers & Graphics*, Vol. 33, Issue. 4, pp. 440-451, 2009.

[3] 김진모, 조형제, "성장 환경을 활용한 다수의 나무에 대한 사실적인 실시간 모델링 기법," 멀티미디어학회논문지, 제15권, 제3호, pp. 398-407, 2012.

[4] J. Kim and H. Cho, "Efficient Modeling of Numerous Trees by Introducing Growth Volume for Real-time Virtual Ecosystems," *Computer Animation and Virtual Worlds*, Vol. 23, Issue. 3-4, pp. 155-165, 2012.

[5] A. Lindenmayer, "Mathematical Models for Cellular Interaction in Development, Part I and

II," *Journal of Theoretical Biology*, Vol. 18, Issue. 3, pp. 280-315, 1968.

[6] P. Prusinkiewicz, M. Hammel, J. Hanan, and R. Měch, "L-system: from The Theory to Visual Models of Plants," *Proc. the 2nd CSIRO Symposium on Computational Challenges in Life Sciences*, pp. 1-27, 1996.

[7] J. Power, A.J. Bernheim-brush, P. Prusinkiewicz, and D. Salesin, "Interactive Arrangement of Botanical L-system Models," *Proc. the 1999 ACM Symposium on Interactive 3D Graphics*, pp. 175-182, 1999.

[8] F. Boudon, C. Pradal, T. Cokelaer, P. Prusinkiewicz, and C. Godin, "L-Py: an L-System Simulation Framework for Modeling Plant Development Based on a Dynamic Language," *Frontiers in Plant Science*, Vol. 3, No. 76, pp. 1-20, 2012.

[9] H. Honda, "Description of The Form of Trees by The Parameters of The Tree-like Body: Effects of The Branching Angle and The Branch Length on The Shape of The Tree-like Body," *Journal of Theoretical Biology*, Vol. 31, No. 2, pp. 331-338, 1971.

[10] S. Ulam, "On Some Mathematical Properties Connected with Patterns of Growth of Figures," *Proceedings of Symposia on Applied Mathematics 14*, pp. 215-224, 1962.

[11] W. Palubicki, K. Horel, S. Longay, A. Runions, B. Lane, R. Měch, and P. Prusinkiewicz, "Self-organizing Tree Models for Image Synthesis," *ACM Transactions on Graphics*, Vol. 28, Issue. 3, pp. 58:1-10, 2009.

[12] P. Reffye, C. Edelin, J. Françon, M. Jaeger, and C. Puech, "Plant Models Faithful to Botanical Structure and Development," *Computer Graphics*, Vol. 22, Issue. 4, pp. 151-158, 1988.

[13] P. Prusinkiewicz, M. James, and R. Měch, "Synthetic Topiary," *Proc. of the 21st Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques*, pp. 351-358, 1994.

[14] A. Takenaka, "A Simulation Model of Tree

Architecture Development Based on Growth Response to Local Light Environment,” *Journal of Plant Research*, Vol. 107, Issue. 3, pp. 321-330, 1994.

[15] C. Jirasek, P. Prusinkiewicz, and B. Moulia, “Integrating Biomechanics into Developmental Plant Models Expressed using L-systems,” *Proc. of the 3rd Plant Biomechanics Conference*, pp. 615-624, 2000.

[16] J. Talton, Y. Lou, S. Lesser, J. Duke, R. Měch, and V. Koltun, “Metropolis Procedural Modeling,” *ACM Transactions on Graphics*, Vol. 30, Issue. 2, pp. 11:1-14, 2011.

[17] P. Tan, T. Fang, J. Xiao, P. Zhao, and L. Quan, “Single Image Tree Modeling,” *ACM Transactions on Graphics*, Vol. 27, Issue. 5, pp. 108:1-7, 2008.

[18] Y. Livny, F. Yan, M. Olson, B. Chen, H. Zhang, and J. El-sana, “Automatic Reconstruction of Tree Skeletal Structures from Point Clouds,” *ACM Transactions on Graphics*, Vol. 29, Issue. 6, pp. 151:1-8, 2010.

[19] Y. Livny, S. Pirk, Z. Cheng, F. Yan, O. Deussen, D. Cohen-Or, and B. Chen, “Texture-Lobes for Tree Modeling,” *ACM Transactions on Graphics*, Vol. 30, Issue. 4, pp. 53:1-53:10, 2011.

[20] H. Hahn, “Convolution Sums of Some Functions on Divisors,” *Rocky Mountain J. Math*, Vol. 37, No. 5, pp. 1593-1622, 2006.

[21] B. Cho, D. Kim, and J.-K. Koo, “Modular Forms Arising from Divisor Functions,” *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 356, Issue. 2, pp. 537-547, 2009.

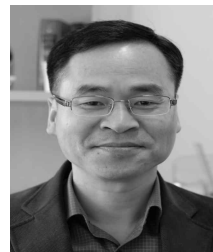
[22] J.G. Huard, Z.M. Ou, B.K. Spearman and K.S. Williams, “Elementary Evaluation of Certain Convolution Sums Involving Divisor Functions,” *Number theory for the [millennium] II*, Vol. 2, pp. 229-274, 2002.



김진모

2006년 2월 동국대학교 멀티미디어공학과 졸업(공학사)
 2008년 2월 동국대학교 멀티미디어학과 졸업(예술공학석사)
 2012년 8월 동국대학교 멀티미디어학과 졸업(공학박사)

2012년~현재 동국대학교 영상문화콘텐츠연구원 전임 연구원
 관심분야: 컴퓨터 그래픽스, 게임공학, 절차적 모델링, 실시간 렌더링, 영상처리



김대열

1991년 2월 전북대학교 수학과 졸업(이학사)
 1993년 2월 전북대학교 수학과 졸업(이학석사)
 1998년 2월 전북대학교 수학과 졸업(이학박사)

2007년 11월 국가수리과학연구소 선임연구원
 관심분야: 정수론, 절차적 모델링, 특수함수론