

УДК 519.8:539.3

СИНГУЛЯРНЫЙ ЭЛЕМЕНТ ГРАФОВОЙ МОДЕЛИ УПРУГОЙ СРЕДЫ В ДЕКАРТОВОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

А.А. Тырымов

Волгоградский государственный технический университет, Волгоград, Россия

Рассматривается метод численного анализа механических полей в деформируемом теле, который использует модель упругой среды в виде ориентированного графа. Предлагается новый тип элементарной ячейки для описания особенности, которая возникает вблизи вершины трещины в изотропном упругом материале.

Ключевые слова: математическое моделирование, теория упругости, ориентированный граф, деформация, коэффициент интенсивности напряжений

A SINGULAR ELEMENT OF THE GRAPH MODEL OF AN ELASTIC MEDIUM IN A CARTESIAN COORDINATE SYSTEM

А.А. Tyrymov

Volgograd State Technical University, Volgograd, Russia

A numerical method for analyzing mechanical fields in a deformable body is presented. The graph model of an elastic medium in the form of a directed graph is employed in the proposed method. To describe a singularity that appears near a crack tip of an isotropic elastic material, a new type of a unit cell is introduced.

Key words: mathematical simulation, elasticity, directed graph, strain, stress intensity factor

1. Введение

Анализ напряженно-деформированного состояния около дефектов типа трещин в деформируемом твердом теле составляет одну из основных проблем механики разрушения. При этом, как правило, распределение напряжений и деформаций в окрестности вершины трещины обладает особенностью типа $r^{-\alpha}$, где r — расстояние от исследуемой точки до кончика трещины.

Асимптотика $r^{-0,5}$ присуща чисто упругим решениям [1, 2], а случай $0,5 < \alpha < 1$ возникает при решении нелинейных или упругопластических задач [3–5], а также в тех задачах, где трещина выходит на границу раздела двух сред с различными упругими свойствами [5, 6].

Следует отметить высокую чувствительность численных методов к особенностям моделирования напряженного состояния вблизи особых точек. В связи с этим предложен ряд альтернативных подходов к построению сингулярных конечных элементов, и в настоящее время парк этих элементов достаточно широк [7, 8]. Анализ результатов многочисленных исследований позволяет сделать вывод о том, что точность решения задач механики разрушения существенно повышается при адекватном моделировании асимптотики параметров напряженно-деформированного состояния у вершины трещины. Более того, в традиционных численных методах качество аппроксимации подчас важнее, чем количество используемых элементов и расположение узлов.

При численном решении разнообразных задач механики сплошной среды (и механики разрушения в частности) основными достаточно эффективными и широко

распространенными являются метод конечных элементов и метод граничных элементов. Общей закономерностью этих методов является то, что на этапе моделирования подвергается дискретизации не сама среда, а её континуальная модель. В то же время представляется целесообразным применение дискретных подходов на более ранних этапах моделирования. Такие возможности открывает метод анализа полей деформаций и напряжений, использующий в качестве дискретных моделей сплошного тела ориентированные графы [9–11]. Анализ системы на основе графового подхода сводится к тому, что: 1) среда делится на части, имеющие известное математическое описание (в рассматриваемом ниже случае — закон Гука); 2) для каждой части строится подграф (элементарная ячейка), являющийся её моделью; 3) элементарные ячейки объединяются в граф — модель анализируемого тела, после чего с помощью матриц, характеризующих структуру графа, и уравнений, описывающих элементарные ячейки, получаются уравнения для системы в целом.

В основе вывода определяющей системы уравнений лежат вершинный и контурный законы Кирхгофа. Известно, что граф является моделью физической или технической системы только в том случае, если выбранные при его конструировании переменные удовлетворяют вершинному и контурному законам. Эти законы были установлены Кирхгофом для электрических цепей применительно к токам и напряжениям. Впоследствии оказалось, что они носят фундаментальный характер и применимы ко всем переменным вне зависимости от их физической природы [12]. Согласно вершинному закону алгебраическая сумма последовательных переменных, представленных дугами графа, равна нулю, а в соответствии с контурным законом алгебраическая сумма параллельных переменных равна нулю на любом замкнутом контуре.

Важно отметить, что континуальную модель сплошной среды удастся полностью восстановить из её дискретной модели в виде ориентированного графа. Можно показать [9–11], что при уменьшении размеров сетки вершинный и контурный законы приводят к выполнению уравнений равновесия и совместности деформаций теории упругости, что влечет сходимость приближенного решения к точному.

Данная работа посвящена построению на основе графовой модели сингулярного элемента, предназначенного для расчета напряженно-деформированного состояния в окрестности особых точек разреза, вблизи остроконечных включений и других сингулярных точек и линий двумерной упругой среды.

2. Конструирование элементарной ячейки

Основой для построения моделей в виде графов служит объективный характер операций измерения выбранных независимых переменных. Как известно, целью любого измерения является установление зависимости между значением переменной и показаниями прибора. В то же время измерение связано как с точками системы, между которыми оно осуществляется, так и ориентацией измерителя. Эти свойства операции измерения можно представить направленным отрезком, то есть дугой графа.

С точки зрения операции измерения все переменные вне зависимости от их физической природы могут быть подразделены на два типа — параллельные и последовательные [12]. Параллельные переменные характерны тем, что измеритель подключается к двум точкам системы параллельно потоку энергии. Для измерения последовательных переменных прибор должен быть установлен в разрыв энергетического потока. К параллельным переменным относятся линейные и угловые разности перемещений, относительные скорости и ускорения, деформации, разности давлений, температур, электрических потенциалов и так далее. К последовательным переменным относятся силы, моменты сил, электрический ток, тепловой поток, поток жидкости или газа и другие. Выбор связной пары переменных определяется тем, что произведение последовательной и параллельной переменных должно давать скаляр

с размерностью мощности или работы. При построении графа исследуемого тела за исходные удобно взять те переменные, которые измеряются установкой прибора непосредственно на исследуемый объект, то есть параллельные переменные.

Способ конструирования графа тела связан с процессом измерения полного и независимого комплекта переменных, которые однозначно характеризуют деформированное состояние элементов, полученных в результате декомпозиции. Элементарной ячейкой (графовым элементом) будем называть подграф, соответствующий одному элементу, полученному при разбиении исходной области на мелкие части.

При определении конфигурации элементарной ячейки в декартовой системе координат область, занятую двумерной сплошной средой, покрываем сеткой

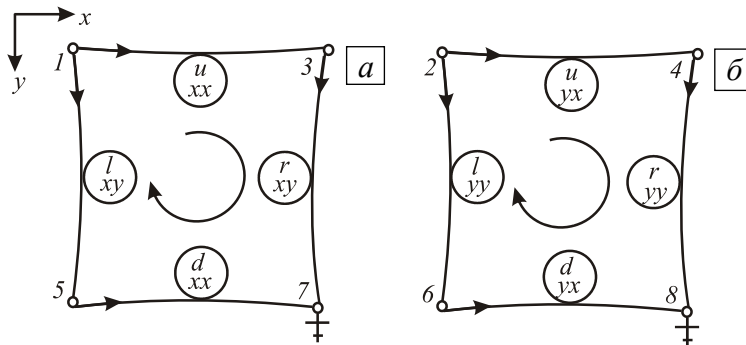


Рис. 1. Граф прямоугольного элемента сетки (в кружках – верхний и нижний индексы переменных, представленных дугами ячейки); *u*-компонента (а), *v*-компонента (б); стрелкой показано направление обхода контура; точки 7 и 8 – корни подграфов

координатных линий $x = \text{const}$, $y = \text{const}$, между узлами которой устанавливаем гипотетические измерители, определяющие абсолютные нормальные деформации δ_{xx} , δ_{yy} и деформации δ_{yx} , δ_{xy} , обусловленные сдвигом. При этом δ_{xx} измеряется между двумя точками оси x , δ_{xy} — между двумя точками оси y , а δ_{yx} — между двумя точками оси x и так далее.

Измерители принимаем в качестве дуг графа и изображаем их направленными отрезками линий, причем ориентация дуг совпадает с ориентацией осей координат. Точки, между которыми проводим измерения, считаем вершинами графа. Здесь подразумевается, что используются идеализированные приборы, то есть такие, что ножки нескольких из них могут быть одновременно установлены в одну и ту же точку тела. Поскольку одни и те же точки среды участвуют в разных группах измерений относительно осей x и y , то при построении графа они представляются разными вершинами. В результате получаем элементарную ячейку прямоугольного элемента, имеющую 8 дуг и 8 вершин и состоящую из двух компонент (Рис. 1).

Каждая из дуг графа отображает одну из следующих пар параллельных и последовательных переменных: (δ_{xx}, f_{xx}) , (δ_{yy}, f_{yy}) , (δ_{yx}, f_{yx}) , (δ_{xy}, f_{xy}) , где f_{xx} , f_{yy} и f_{yx} , f_{xy} — нормальные и тангенциальные внутренние силы (обобщенные напряжения). Таким образом, дугам элементарной ячейки соответствует следующая пара векторов:

$$\{\mathbf{f}\}_c^T = \{f_d^{xx}, f_l^{yy}, f_u^{xx}, f_r^{yy}, f_d^{yx}, f_l^{xy}, f_u^{yx}, f_r^{xy}\}, \quad \{\mathbf{\delta}\}_c^T = \{\delta_{xx}^d, \delta_{yy}^l, \delta_{xx}^u, \delta_{yy}^r, \delta_{yx}^d, \delta_{xy}^l, \delta_{yx}^u, \delta_{xy}^r\}, \quad (1)$$

где индексы *u*, *d*, *l*, *r* обозначают, соответственно, верхние, нижние, левые и правые дуги элементарной ячейки, символ «Т» — операцию транспонирования, а индекс «с» указывает на принадлежность переменных отдельному графовому элементу.

Если измеряются положения точек тела относительно фиксированной системы координат, то в качестве параллельных переменных выступают перемещения $\{\mathbf{U}\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$.

Для них парными последовательными переменными оказываются внешние силы, действующие на тело. При измерении перемещений ножки прибора устанавливаются между точкой тела и точкой пересечения нормали из нее с соответствующей осью

координат. Этот тип дуги назовём внешним. В результате на каждой из осей декартовой системы координат появляется ряд точек, положение которых не зависит от деформирования тела. Это значит, что дуги, связывающие основания нормалей, нулевые, то есть их начальные и конечные вершины совпадают. Таким образом, все дуги, отображающие перемещения точек тела относительно фиксированных осей координат, имеют одну общую вершину в группе измерений по оси Ox и одну — в группе измерений по оси Oy . Поскольку некоторая определенным образом выделенная вершина в графе называется корнем [13], то указанные вершины и есть корни графового элемента.

3. Построение матрицы жесткости сингулярного элемента

Связь элементарных векторов $\{\mathbf{f}\}_c$ и $\{\delta\}_c$, а также зависимость их от напряжений $\{\sigma\}$ и деформаций $\{\epsilon\}$ упругого тела устанавливаем, принимая в качестве инварианта при переходе к дискретной модели энергию деформации произвольного элемента среды объемом V :

$$\{\mathbf{f}\}_c^T \{\delta\}_c = \int_V \{\sigma\}^T \{\epsilon\} dv, \quad (2)$$

где $\{\delta\}_c$ и $\{\mathbf{f}\}_c$ определяются по формулам (1). В результате энергию элемента в виде графа можем представить, с одной стороны, в виде

$$\{\mathbf{f}\}_c^T \{\delta\}_c = f_d^{xx} \delta_{xx}^d + f_l^{yy} \delta_{yy}^l + f_u^{xx} \delta_{xx}^u + f_r^{yy} \delta_{yy}^r + f_d^{yx} \delta_{yx}^d + f_l^{xy} \delta_{xy}^l + f_u^{yx} \delta_{yx}^u + f_r^{xy} \delta_{xy}^r,$$

с другой стороны, энергия деформации элемента сплошной среды есть

$$\int_V \{\sigma\}^T \{\epsilon\} dv = \int_V (\sigma^{xx} \epsilon_{xx} + \sigma^{yy} \epsilon_{yy} + \tau^{xy} \gamma_{xy}) dv. \quad (3)$$

Здесь напряжения $\{\sigma\}$ и деформации $\{\epsilon\}$ связываются законом Гука, который в двумерном случае записывается как:

$$\{\sigma\} = [\mathbf{C}] \{\epsilon\}, \quad (4)$$

или в развернутом виде $\begin{Bmatrix} \sigma^{xx} \\ \sigma^{yy} \\ \tau^{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$, где λ , μ — упругие постоянные

Ламе, причем $\lambda = E\nu[(1+\nu)(1-2\nu)]^{-1}$ для случая плоской деформации и $\lambda = E\nu(1-\nu^2)^{-1}$ для плоского напряженного состояния; $\mu = 0,5 E(1+\nu)^{-1}$, ν — коэффициент Пуассона, E — модуль упругости.

При определении энергии деформации (3) требуется интегрирование выражения $(\sigma^{xx} \epsilon_{xx} + \sigma^{yy} \epsilon_{yy} + \tau^{xy} \gamma_{xy})$, содержащего неизвестные деформации и напряжения. Для этого, учитывая дифференциальные зависимости Коши и сингулярный характер распределения напряжений и деформаций у вершины трещины, аппроксимируем неизвестные деформации в пределах элемента следующими выражениями:

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 r^{-\alpha}, & \epsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} = b_0 + b_1 x + b_2 y + b_3 r^{-\alpha}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= c_0 + c_1 x + c_2 y + c_3 r^{-\alpha}, & \frac{\partial v}{\partial x} &= d_0 + d_1 x + d_2 y + d_3 r^{-\alpha}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = c_0 + d_0 + (c_1 + d_1)x + (c_2 + d_2)y + (c_3 + d_3)r^{-\alpha}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ — расстояние от произвольной точки элемента до вершины трещины, α — показатель сингулярности напряженно-деформированного состояния в окрестности особых точек разреза; a_i, b_i, c_i, d_i ($i = 0, 1, 2, 3$) — подлежащие определению коэффициенты. Предполагаем, что начало локальной декартовой прямоугольной системы координат располагается в вершине трещины, а направление трещины совпадает с направлением оси Ox .

Пусть произвольный элемент среды описывается неравенствами $x_1 \leq x \leq x_2$, $y_1 \leq y \leq y_2$. Выразим в (5) искомые коэффициенты через деформации сторон этого

элемента. Поскольку $\delta_{xx} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial u}{\partial x} dx$, $\delta_{yy} = \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial v}{\partial y} dy$, $\delta_{xy} = \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial u}{\partial y} dy$, $\delta_{yx} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial v}{\partial x} dx$, то,

подставляя соответствующие выражения из (5) и интегрируя вдоль той или иной грани элемента, получаем

$$\delta_{xx}^u = a_0 \Delta x + 0,5(x_2^2 - x_1^2)a_1 + a_2 y_1 \Delta x + a_3 A_1, \quad (6)$$

$$\delta_{xx}^d = a_0 \Delta x + 0,5(x_2^2 - x_1^2)a_1 + a_2 y_2 \Delta x + a_3 A_2, \quad (7)$$

$$\delta_{yy}^\ell = b_0 \Delta y + b_1 x_1 \Delta y + 0,5b_2(y_2^2 - y_1^2) + b_3 B_1, \quad (8)$$

$$\delta_{yy}^r = b_0 \Delta y + b_1 x_2 \Delta y + 0,5b_2(y_2^2 - y_1^2) + b_3 B_2, \quad (9)$$

$$\delta_{xy}^\ell = c_0 \Delta y + c_1 x_1 \Delta y + 0,5c_2(y_2^2 - y_1^2) + c_3 B_1, \quad (10)$$

$$\delta_{xy}^r = c_0 \Delta y + c_1 x_2 \Delta y + 0,5c_2(y_2^2 - y_1^2) + c_3 B_2, \quad (11)$$

$$\delta_{yx}^u = d_0 \Delta x + 0,5d_1(x_2^2 - x_1^2) + d_2 y_1 \Delta x + d_3 A_1, \quad (12)$$

$$\delta_{yx}^d = d_0 \Delta x + 0,5d_1(x_2^2 - x_1^2) + d_2 y_2 \Delta x + d_3 A_2, \quad (13)$$

где $\Delta x = x_2 - x_1$; $\Delta y = y_2 - y_1$; $A_i = \int_{x_1}^{x_2} (x^2 + y_i^2)^{-\alpha/2} dx$; $B_i = \int_{y_1}^{y_2} (x_i^2 + y^2)^{-\alpha/2} dy$ ($i = 1, 2$).

Значения A_i, B_i находим с помощью известных численных процедур.

Из равенств (6), (7) и (10), (11) следует, что

$$\delta_{xx}^d - \delta_{xx}^u = a_2 \Delta x \Delta y + a_3 (A_2 - A_1), \quad (14)$$

$$a_0 = \frac{0,5(\delta_{xx}^u + \delta_{xx}^d)}{\Delta x} - a_1 x_c - a_2 y_c - \frac{0,5a_3(A_1 + A_2)}{\Delta x}, \quad (15)$$

$$\delta_{xy}^r - \delta_{xy}^\ell = c_1 \Delta x \Delta y + c_3 (B_2 - B_1), \quad (16)$$

$$c_0 = \frac{0,5(\delta_{xy}^\ell + \delta_{xy}^r)}{\Delta y} - c_1 x_c - c_2 y_c - \frac{0,5c_3(B_1 + B_2)}{\Delta y}, \quad (17)$$

где $x_c = 0,5(x_1 + x_2)$, $y_c = 0,5(y_1 + y_2)$. Используя (14), (16) и контурный закон для u -компоненты ячейки (Рис. 1, а)

$$\delta_{xx}^u - \delta_{xx}^d + \delta_{xy}^r - \delta_{xy}^\ell = 0, \quad (18)$$

получаем

$$(a_2 - c_1) \Delta x \Delta y + a_3 (A_2 - A_1) - c_3 (B_2 - B_1) = 0. \quad (19)$$

При отсутствии в (5) сингулярных членов как контурный закон, так и соотношение смешанных производных $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ дают совпадение коэффициентов: $a_2 = c_1$. Будем считать, что это равенство справедливо и в рассматриваемом случае. В результате контурный закон (18) будет выполняться при условиях

$$a_2 = c_1, \quad c_3 = m a_3, \quad (20)$$

где $m = (A_2 - A_1) \cdot (B_2 - B_1)^{-1}$.

Поступая аналогично с выражениями (8), (9) и (12), (13), будем иметь

$$\delta_{yy}^r - \delta_{yy}^\ell = b_1 \Delta x \Delta y + b_3 (B_2 - B_1), \quad (21)$$

$$b_0 = \frac{0,5(\delta_{yy}^r + \delta_{yy}^\ell)}{\Delta y} - b_1 x_c - b_2 y_c - \frac{0,5 b_3 (B_2 + B_1)}{\Delta y}, \quad (22)$$

$$\delta_{yx}^d - \delta_{yx}^u = d_2 \Delta x \Delta y + d_3 (A_2 - A_1), \quad (23)$$

$$d_0 = \frac{0,5(\delta_{yx}^u + \delta_{yx}^d)}{\Delta x} - d_1 x_c - d_2 y_c - \frac{0,5 d_3 (A_2 + A_1)}{\Delta x}. \quad (24)$$

Тогда контурный закон для v -компоненты элементарной ячейки (Рис. 1, б)

$$\delta_{yx}^u - \delta_{yx}^d + \delta_{yy}^r - \delta_{yy}^\ell = 0 \quad (25)$$

дает $(b_1 - d_2) \Delta x \Delta y + b_3 (B_2 - B_1) - d_3 (A_2 - A_1) = 0$. Отсюда в силу предположений, аналогичных приведенным выше, получаем условия выполнения контурного закона (25):

$$b_1 = d_2, \quad d_3 = b_3 m^{-1}. \quad (26)$$

Оставшиеся связи между неизвестными коэффициентами находим из уравнений равновесия элемента

$$\frac{\partial \sigma^{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau^{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau^{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma^{yy}}{\partial y} = 0.$$

Используя (4) и (5), имеем

$$(\lambda + 2\mu)(a_1 + a_3 D_1) + \lambda(b_1 + b_3 D_1) + \mu[c_2 + d_2 + (c_3 + d_3) D_2] = 0, \quad (27)$$

$$(\lambda + 2\mu)(b_2 + b_3 D_2) + \lambda(a_2 + a_3 D_2) + \mu[c_1 + d_1 + (c_3 + d_3) D_1] = 0, \quad (28)$$

где D_1 и D_2 — значения частных производных функции $r^{-\alpha}(x, y)$ по x и y соответственно, вычисленные в центре тяжести элемента.

Далее записываем уравнение (27) дважды с учетом равенств (20), (26):

$$(\lambda + 2\mu)a_1 + \lambda b_1 + \mu(c_2 + b_1) + (\lambda + 2\mu)a_3 D_1 + \lambda b_3 D_1 + \mu(m a_3 + b_3 m^{-1}) D_2 = 0,$$

$$(\lambda + 2\mu)a_1 + \lambda d_2 + \mu(c_2 + d_2) + (\lambda + 2\mu)D_1 c_3 m^{-1} + \lambda d_3 m D_1 + \mu(c_3 + d_3) D_2 = 0.$$

Равенство нулю в этих уравнениях будет соблюдаться, если потребуем выполнения условий

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu)a_1 + \lambda b_1 &= 0, & \mu c_2 + ((\lambda + 2\mu)D_1 + \mu m D_2)a_3 &= 0, \\ \mu b_1 + (\lambda D_1 + \mu D_2 m^{-1})b_3 &= 0, & \mu c_2 + \lambda d_2 &= 0, \\ \mu d_2 + (\lambda m D_1 + \mu D_2)d_3 &= 0, & (\lambda + 2\mu)a_1 + ((\lambda + 2\mu)D_1 m^{-1} + \mu D_2)c_3 &= 0. \end{aligned} \quad (29)$$

Зависимости (29) получены путем приравнивания к нулю групп коэффициентов, связанных с нормальными и тангенциальными составляющими напряжений, а также с

частными производными функции $u(x, y)$, входящей в контурный закон (18). Из (29) следует:

$$a_1 = k_1 b_1, \quad b_3 = k_2 b_1, \quad a_3 = k_3 c_2, \quad c_2 = k_4 d_2, \quad d_3 = k_5 d_2, \quad c_3 = k_6 a_1, \quad (30)$$

где $k_1 = -\lambda/(\lambda + 2\mu)$, $k_2 = -\mu/(\lambda D_1 + \mu D_2 m^{-1})$, $k_3 = -\mu/((\lambda + 2\mu)D_1 + \mu D_2 m)$, $k_4 = -\lambda/\mu$, $k_5 = -\mu/(\lambda D_1 m + \mu D_2)$, $k_6 = -(\lambda + 2\mu)/(\mu D_2 + (\lambda + 2\mu)D_1 m^{-1})$.

Уравнение (28) также записываем дважды. Для этого используем равенства коэффициентов (20), (26), реализующих контурные законы (18), (25). В результате находим

$$\lambda a_2 + (\lambda + 2\mu) b_2 + \mu(a_2 + d_1) + \lambda D_2 a_3 + (\lambda + 2\mu) D_2 b_3 + \mu(m a_3 + b_3 m^{-1}) D_1 = 0,$$

$$\lambda c_1 + (\lambda + 2\mu) b_2 + \mu(c_1 + d_1) + \lambda D_2 c_3 m^{-1} + (\lambda + 2\mu) D_2 d_3 m + \mu(c_3 + d_3) D_1 = 0.$$

Как и в предыдущем случае, группировкой коэффициентов и последующим приравниванием к нулю каждой группы, связанной с нормальными и тангенциальными составляющими напряжений, а также с коэффициентами в аппроксимации частных производных функции $v(x, y)$, входящими через посредство (5) в контурный закон для v -компоненты (25), получаем: $(\lambda + 2\mu) b_2 + \lambda a_2 = 0$, $\mu a_2 + (\lambda D_2 + \mu m D_1) a_3 = 0$, $\mu d_1 + ((\lambda + 2\mu) D_2 + \mu D_1 c_3 m^{-1}) b_3 = 0$, $\mu d_1 + \lambda c_1 = 0$, $\mu c_1 + (\mu D_1 + \lambda D_2 m^{-1}) c_3 = 0$, $(\lambda + 2\mu) b_2 + ((\lambda + 2\mu) D_2 m + \mu D_1) d_3 = 0$.

Отсюда следует, что

$$b_2 = k_1 a_2, \quad a_3 = k_7 a_2, \quad b_3 = k_8 d_1, \quad d_1 = k_4 c_1, \quad c_3 = k_9 c_1, \quad d_3 = k_{10} b_2, \quad (31)$$

где $k_7 = -\mu/(\mu D_1 m + \lambda D_2)$, $k_8 = -\mu/((\lambda + 2\mu) D_2 + \mu D_1 m^{-1})$, $k_9 = -\mu/(\mu D_1 + \lambda D_2 m^{-1})$, $k_{10} = -(\lambda + 2\mu)/(\mu D_1 + (\lambda + 2\mu) D_2 m)$.

Используя (14), (16), (21), (23) и выражая a_3 , b_3 , c_3 , d_3 в силу (30), (31) через a_2 , b_1 , c_1 , d_2 , соответственно, имеем: $\delta_{xx}^d - \delta_{xx}^u = a_2 \Delta x \Delta y + a_2 k_7 (A_2 - A_1)$, $\delta_{yy}^r - \delta_{yy}^\ell = b_1 \Delta x \Delta y + b_1 k_2 (B_2 - B_1)$, $\delta_{xy}^r - \delta_{xy}^\ell = c_1 \Delta x \Delta y + c_1 k_9 (B_2 - B_1)$, $\delta_{yx}^d - \delta_{yx}^u = d_2 \Delta x \Delta y + d_2 k_5 (A_2 - A_1)$. Отсюда следует:

$$a_2 = \frac{\delta_{xx}^d - \delta_{xx}^u}{k_{11}}, \quad b_1 = \frac{\delta_{yy}^r - \delta_{yy}^\ell}{k_{12}}, \quad c_1 = \frac{\delta_{xy}^r - \delta_{xy}^\ell}{k_{13}}, \quad d_2 = \frac{\delta_{yx}^d - \delta_{yx}^u}{k_{14}}, \quad (32)$$

где $k_{11} = \Delta x \Delta y + k_7 (A_2 - A_1)$, $k_{12} = \Delta x \Delta y + k_2 (B_2 - B_1)$, $k_{13} = \Delta x \Delta y + k_9 (B_2 - B_1)$, $k_{14} = \Delta x \Delta y + k_5 (A_2 - A_1)$. Из соотношений (15), (17), (22), (24) после некоторых

преобразований получаем: $a_0 = \frac{\delta_{xx}^u + \delta_{xx}^d}{2\Delta x} - b_1 k_1 x_c - a_2 y_c - \frac{k_7 a_2 (A_2 + A_1)}{2\Delta x}$, $c_0 = \frac{\delta_{xy}^\ell + \delta_{xy}^r}{2\Delta y} - c_1 x_c - d_2 k_4 y_c - \frac{k_9 c_1 (B_2 + B_1)}{2\Delta y}$, $b_0 = \frac{\delta_{yy}^\ell + \delta_{yy}^r}{2\Delta y} - b_1 x_c - a_2 k_1 y_c - \frac{k_2 b_1 (B_2 + B_1)}{2\Delta y}$, $d_0 = \frac{\delta_{yx}^u + \delta_{yx}^d}{2\Delta x} - c_1 k_4 x_c - d_2 y_c - \frac{k_5 d_2 (A_2 + A_1)}{2\Delta x}$. Все другие коэффициенты в (30), (31) также выражаем через

коэффициенты (32): $a_1 = k_1 b_1$, $a_3 = k_7 a_2$, $b_2 = k_1 a_2$, $b_3 = k_2 b_1$, $c_2 = k_4 d_2$, $c_3 = k_9 c_1$, $d_1 = k_4 c_1$, $d_3 = k_5 d_2$.

Найденные значения коэффициентов позволяют представить относительные деформации внутри прямоугольного элемента через абсолютные деформации его сторон:

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = [\mathbf{L}]\{\boldsymbol{\delta}\}_c, \tag{33}$$

где $[\mathbf{L}] = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} & l_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} & l_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & l_{35} & l_{36} & l_{37} & l_{38} \end{bmatrix}$; элементы матрицы $[\mathbf{L}]$ имеют вид:

$$l_{11} = 1/(2\Delta x) + [y - y_c - k_7(A_2 + A_1)/(2\Delta x) + k_7 r^{-\alpha}]/k_{11}, \quad l_{12} = -(x - x_c)k_1/k_{12}, \quad l_{13} = 1/\Delta x - l_{11},$$

$$l_{14} = -l_{12}, \quad l_{21} = (y - y_c)k_1/k_{11}, \quad l_{22} = 1/(2\Delta y) - [x - x_c - k_2(B_2 + B_1)/(2\Delta y) + k_2 r^{-\alpha}]/k_{12}, \quad l_{23} = -l_{21},$$

$$l_{24} = 1/\Delta y - l_{22}, \quad l_{35} = 1/(2\Delta x) + [(1 + k_4)(y - y_c) - k_5(A_2 + A_1)/(2\Delta x) + k_5 r^{-\alpha}]/k_{14}, \quad l_{36} = 1/(2\Delta y) +$$

$$+ [(1 + k_4)(x - x_c) - k_9(B_2 + B_1)/(2\Delta y) + k_9 r^{-\alpha}]/k_{13}, \quad l_{37} = 1/\Delta x - l_{35}, \quad l_{38} = 1/\Delta y - l_{36}.$$

Подставляя $\{\boldsymbol{\varepsilon}\}$ из (33) в (2), получаем: $\{\mathbf{f}\}_c^T \{\boldsymbol{\delta}\}_c = \int_V \{\boldsymbol{\sigma}\}^T [\mathbf{L}]\{\boldsymbol{\delta}\}_c dv = \left(\int_V \{\boldsymbol{\sigma}\}^T [\mathbf{L}] dv \right) \{\boldsymbol{\delta}\}_c.$

Сокращая последнее равенство на $\{\boldsymbol{\delta}\}_c$ и осуществляя операцию транспонирования, имеем $\{\mathbf{f}\}_c = \int_V [\mathbf{L}]^T \{\boldsymbol{\sigma}\} dv$, а учитывая (4), получаем $\{\mathbf{f}\}_c = \int_V [\mathbf{L}]^T [\mathbf{C}][\mathbf{L}]\{\boldsymbol{\delta}\}_c dv.$

В результате уравнение состояния элементарной ячейки приобретает вид:

$$\{\mathbf{f}\}_c = [\mathbf{K}]_c \{\boldsymbol{\delta}\}_c, \tag{34}$$

где

$$[\mathbf{K}]_c = \int_V [\mathbf{L}]^T [\mathbf{C}][\mathbf{L}] dv. \tag{35}$$

Элементы матрицы $[\mathbf{K}]_c$ находятся в результате матричного умножения и последующего численного интегрирования с помощью квадратурных формул Гаусса с использованием известных табличных значений координат пробных точек и весовых коэффициентов [14].

4. Уравнения графовой модели тела

Граф всего тела строится по тому же принципу, что и графовый элемент, и является результатом операции объединения элементарных ячеек. На рисунке 2 представлен граф тела, состоящего из четырех элементов.

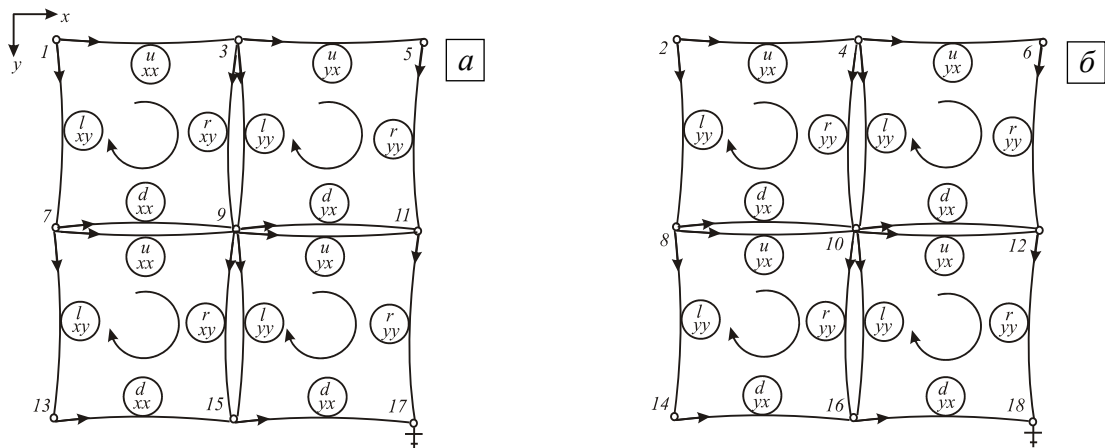


Рис. 2. Граф тела из четырех элементов: *u*-компонента (а); *v*-компонента (б); точки 17 и 18 – корни подграфов

Тело, представленное в виде отдельных элементов, и соответствующая ему совокупность элементарных ячеек описывается уравнением

$$\{\mathbf{f}\} = [\mathbf{K}]\{\boldsymbol{\delta}\}. \quad (36)$$

Здесь $\{\mathbf{f}\}$ и $\{\boldsymbol{\delta}\}$ — векторы внутренних сил и деформаций $\{\mathbf{f}\}^T = \{\mathbf{f}_{1c}^T, \mathbf{f}_{2c}^T, \dots, \mathbf{f}_{nc}^T\}$, $\{\boldsymbol{\delta}\}^T = \{\boldsymbol{\delta}_{1c}^T, \boldsymbol{\delta}_{2c}^T, \dots, \boldsymbol{\delta}_{nc}^T\}$, причем $\{\mathbf{f}\}_{ic}^T$, $\{\boldsymbol{\delta}\}_{ic}^T$ определяются по формулам (1); $[\mathbf{K}]$ — глобальная несвязная матрица жесткости тела, представленного в дискретном виде: $[\mathbf{K}] = \text{diag}[\mathbf{K}_{1c}, \mathbf{K}_{2c}, \dots, \mathbf{K}_{nc}]$, где $[\mathbf{K}]_{ic}$ имеют вид (35), а n — число ячеек, образующих граф.

В общем случае с помощью уравнения (36) определить деформированное состояние нельзя, поскольку заданными, как правило, бывают внешние силы и перемещения. Уравнения связного тела находим путем преобразования обобщенных координат, описывающих разрезанное на элементы и связное тело [10]. Для этого вводим преобразования переменных с помощью квадратных матриц дополнений $[\mathbf{A}_B]$ и маршрутов $[\mathbf{P}_C]$, получаемых сочленением матриц инцидентий $[\mathbf{A}]$ и хорд $[\mathbf{B}]$, а также матриц путей $[\mathbf{P}]$ и контуров $[\mathbf{C}]$ [15]:

$$\{\mathbf{F}\} = [\mathbf{A}_B]\{\mathbf{f}\} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} \{\mathbf{f}\} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}\mathbf{f} \\ \mathbf{B}\mathbf{f} \end{pmatrix}, \quad (37)$$

$$\{\boldsymbol{\Delta}\} = [\mathbf{P}_C]\{\boldsymbol{\delta}\} = \begin{bmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} \{\boldsymbol{\delta}\} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}\boldsymbol{\delta} \\ \mathbf{C}\boldsymbol{\delta} \end{pmatrix}. \quad (38)$$

Поскольку матрицы дополнений и маршрутов несингулярны, то с учетом равенств $[\mathbf{P}_C]^T = [\mathbf{A}_B]^{-1}$ и $[\mathbf{A}_B]^T = [\mathbf{P}_C]^{-1}$ возможны обратные преобразования без выполнения процедур численного обращения:

$$\begin{aligned} \{\mathbf{f}\} &= [\mathbf{A}_B]^{-1}\{\mathbf{F}\} = [\mathbf{P}_C]^T\{\mathbf{F}\}, \\ \{\boldsymbol{\delta}\} &= [\mathbf{P}_C]^{-1}\{\boldsymbol{\Delta}\} = [\mathbf{A}_B]^T\{\boldsymbol{\Delta}\}. \end{aligned} \quad (39)$$

Подставляя в правую часть (36) найденные значения $\{\boldsymbol{\delta}\}$ и умножая его слева на $[\mathbf{A}_B]$, получаем уравнение, описывающее состояние связного тела:

$$\{\mathbf{F}\} = [\mathbf{A}_B][\mathbf{K}][\mathbf{A}_B]^{-1}\{\boldsymbol{\Delta}\}, \quad (40)$$

где $[\mathbf{A}_B][\mathbf{K}][\mathbf{A}_B]^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} [\mathbf{K}] \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T & \mathbf{B}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{AKA}^T & \mathbf{AKB}^T \\ \mathbf{BKA}^T & \mathbf{BKB}^T \end{bmatrix}$.

Рассмотрим вектор (37). Его член $[\mathbf{A}]\{\mathbf{f}\}$, согласно вершинному закону, представляет собой вектор вершинных переменных $\{\mathbf{F}\}_e$, которые идентифицируются как заданные внешние силы. Член $[\mathbf{B}]\{\mathbf{f}\}$ отвечает дугам графа $\{\mathbf{f}\}_b$, являющимся хордами, которые отождествляются с неизвестными внутренними силами.

Вектор общесистемных перемещений $\{\boldsymbol{\Delta}\}$ (38) включает в себя блок $[\mathbf{P}]\{\boldsymbol{\delta}\}$, который является перемещениями $\{\mathbf{U}\}$ узловых точек в глобальной (заданной для всего исследуемого тела) системе координат. Действительно, если используем контур, в который входит путь от данной вершины к корню и внешняя дуга, связывающая ту же вершину с корнем, то получаем: $[\mathbf{P}]\{\boldsymbol{\delta}\} = \{\mathbf{U}\}$. Из контурного закона также следует, что член $[\mathbf{C}]\{\boldsymbol{\delta}\}$ равен нулю. В результате уравнение (40) принимает такой вид:

$\begin{pmatrix} \mathbf{F}_e \\ \mathbf{f}_b \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{AKA}^T & \mathbf{AKB}^T \\ \mathbf{BKA}^T & \mathbf{BKB}^T \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$, откуда следует $\{\mathbf{F}\}_e = [\mathbf{A}][\mathbf{K}][\mathbf{A}]^{-1}\{\mathbf{U}\} = [\mathbf{K}_s]\{\mathbf{U}\}$. Решение последнего уравнения получаем в виде $\{\mathbf{U}\} = [\mathbf{K}_s]^{-1}\{\mathbf{F}\}_e$, где $[\mathbf{K}_s]^{-1}$ — матрица, определяющая связь между вектором внешних сил и вектором перемещений. Используя

найденные узловые перемещения, далее с помощью соотношений (33) и (38), (39) определяем поле деформаций и затем по формулам (4) вычисляем поле напряжений в каждом элементе.

5. Численные результаты

Рассматривается прямоугольная пластина с центральной трещиной, перпендикулярной оси y , при равномерном растяжении (Рис. 3, *a*). Характеристики пластины: модуль упругости $E = 10000$ МПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$, ширина $W = 240$ мм, высота H (в диапазоне от $0,4W$ до $2W$). Трещина имеет длину a . Граничные условия задачи формулируются следующим образом: полагается $u = 0$ при $x = 0$; $v = 0$ при $y = 0$ вне разреза; остальной контур и стороны, параллельные Oy , свободны от напряжений. Изучается плоское напряженное состояние пластины. Ввиду симметрии рассматривается четверть расчетной области (на рисунке 3, *a* заштрихована).

Исследуемая область разбивается на 336 прямоугольных элементов. В окрестности вершины трещины используются 2 сингулярных (графовых) элемента размером (мм) $0,4 \times 0,2$. Во всех других элементах применяется линейная аппроксимация деформаций. В расчетах при моделировании сингулярности напряжений особенность описывается как $r^{-0,5}$. Вид пластины после деформирования показан на рисунке 3, *б*.

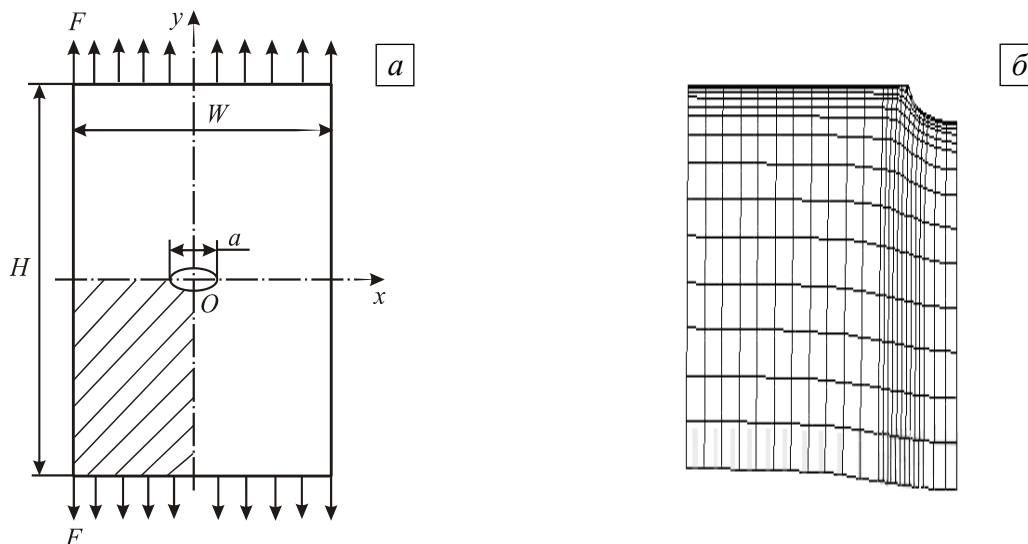


Рис. 3. Расчетная схема (*a*) и деформированная сетка (*б*)

Исида [16] получил приближенное решение этой задачи, используя представление комплексных потенциалов Колосова–Мухелишвили в виде рядов Лорана. Далее (см. таблицу) приводятся результаты расчетов коэффициента интенсивности напряжений (КИН), полученные автором данной статьи и Исидой. КИН вычислены в зависимости от отношения высоты пластины к ее ширине (H/W). Каждому отношению длины трещины к ширине пластины (a/W) ставится в соответствие три строки таблицы. Верхние строки содержат данные Исиды, средние — значения, полученные графовым методом с использованием сингулярной ячейки, нижние — отношения авторских результатов к данным Исиды (δ , в процентах).

Кривые относительной погрешности вычисления КИН в зависимости от H/W при различных a/W , найденные с использованием указанных методов, представлены на рисунке 4. Для определения КИН применялся энергетический инвариантный интеграл Черепанова–Райса. Как видно из таблицы, результаты расчетов (особенно при $H/W > 1$) хорошо согласуются с данными Исиды [16].

Таблица. Сравнение коэффициентов интенсивности напряжений

a/W	H/W										
	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,2	1,5	1,8	2,0
	Значения коэффициентов										
0,2	1,256	1,175	1,130	1,103	1,083	1,067	1,055	1,039	1,029	1,025	1,025
	1,287	1,174	1,127	1,097	1,081	1,064	1,045	1,030	1,021	1,019	1,014
	102,4	99,9	99,7	99,5	99,8	99,7	99,1	99,0	99,2	99,4	98,9
0,3	1,520	1,371	1,285	1,228	1,184	1,150	1,123	1,088	1,066	1,060	1,058
	1,622	1,396	1,286	1,230	1,200	1,163	1,128	1,100	1,075	1,069	1,065
	106,7	101,8	100,1	100,2	101,3	101,1	100,4	101,1	100,8	100,8	100,6
0,4	1,843	1,629	1,497	1,400	1,323	1,262	1,216	1,158	1,122	1,112	1,109
	2,020	1,682	1,515	1,426	1,353	1,288	1,232	1,181	1,137	1,129	1,122
	109,6	103,2	101,2	101,9	102,2	102,1	101,3	101,9	101,3	101,5	101,1
0,5	2,247	1,967	1,773	1,619	1,496	1,403	1,334	1,251	1,203	1,190	1,187
	2,498	2,052	1,811	1,659	1,541	1,439	1,357	1,280	1,225	1,213	1,206
	111,2	104,3	102,1	102,5	103,0	102,5	101,7	102,3	101,8	101,9	101,7
0,6	2,806	2,424	2,123	1,883	1,702	1,572	1,481	1,380	1,320	1,310	1,303
	3,148	2,560	2,195	1,955	1,763	1,624	1,516	1,417	1,348	1,335	1,327
	112,2	104,3	103,4	103,8	103,9	103,3	102,3	102,7	102,1	101,9	101,8
0,7	3,670	3,040	2,550	2,190	1,940	1,780	1,680	-	-	-	1,488
	4,177	3,249	2,659	2,293	2,034	1,852	1,724	1,613	1,540	1,527	1,518
	113,8	106,8	104,3	104,7	104,8	104,0	102,6	-	-	-	102,0

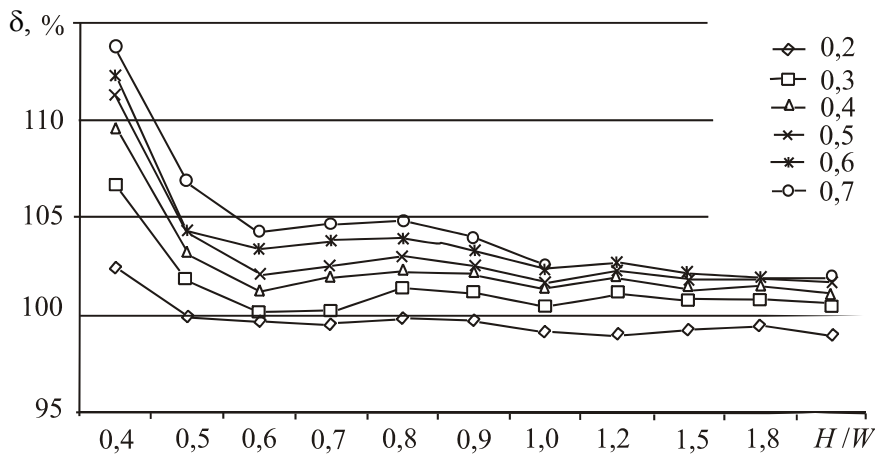


Рис. 4. Сравнительная погрешность графового метода и результатов Иисиды [16]

6. Заключение

Рассмотрена дискретная модель упругого тела в виде ориентированного графа и предложен элемент для описания особенности в напряжениях, которая возникает вблизи вершины трещины. Вывод определяющей системы уравнений основан на использовании фундаментальных законов Кирхгофа для графов и применении специальным образом сконструированных несингулярных взаимно обратных матриц. Графовый метод позволяет построить линейную или сингулярную аппроксимации деформаций (соответствует квадратичной функции перемещений) на четырехузловом прямоугольном элементе с 8 степенями свободы. В традиционном подходе на основе метода конечных элементов для такой аппроксимации требуется элемент, имеющий 8 узлов (16 степеней свободы). В результате определяющая система уравнений графового метода содержит уравнений примерно в 3 раза меньше по сравнению с системой, выведенной традиционным способом МКЭ.

Литература

1. *Морозов Н.Ф.* Математические вопросы теории трещин. – М.: Наука, 1984. – 256 с.
2. *Райс Дж. Р.* Математические методы в механике разрушения // Разрушение. / Под ред. Г. Либовица. – М.: Мир. – Т. 2. Математические основы теории разрушения. – 1975. – С. 205-335.
3. Вычислительные методы в механике разрушения. / Под ред. С. Атлури. – М.: Мир, 1990. – 392 с.
4. Механика разрушения и прочность материалов: Справ. пособие: В 4 т. / Под общей ред. В.В. Панасюка. – Киев: Наукова думка. – Т. 1. Основы механики разрушения. – 1988. – 488 с.
5. *Шемякин Е.И.* Напряженно-деформированное состояние в вершине разреза при антиплоской деформации упругопластического тела // ПМТФ. – 1974. – № 2. – С. 110-116.
6. *Ашбаух.* Напряжения в слоистых композитах, содержащих разорванный слой // Тр. амер. об-ва инж.-мех. Серия Е. – 1973. – Т. 40, № 2. – С. 221-228.
7. *Луцик О.Н.* Сингулярные конечные элементы: обзор и классификация // Изв. РАН. МТТ. – 2000. – № 2. – С. 103-114.
8. *Борзенков С.М., Матвеев В.П.* Полуаналитические сингулярные элементы для плоских и пространственных задач теории упругости // Изв. РАН. МТТ. – 1995. – № 6. – С. 48-61.
9. *Kuzovkov E.G.* Axisymmetric graph model of an elastic solid // Strength of Materials. – 1996. – V. 28, N. 6. – P. 470-485.
10. *Кузовков Е.Г.* Графовая модель упругой среды в декартовой системе координат // Пробл. прочности. – 1993. – № 12. – С. 60-70.
11. *Тырымов А.А.* Графовая модель упругой среды в полярной системе координат // Изв вузов. Машиностроение. – 1999. – № 1. – С. 3-15.
12. *Trent H.* Isomorphism between oriented linear graphs and lumped physical systems // JASA. – 1955. – V. 27, N. 3. – P. 500-527.
13. *Евстигнеев В.А., Касьянов В.Н.* Толковый словарь по теории графов в информатике и программировании. – Новосибирск: Наука, 1999. – 291 с.; <http://pco.iis.nsk.su/grapp> (дата обращения: 01.12.2011)
14. *Крылов В.И.* Приближенное вычисление интегралов. – М.: Наука, 1967. – 500 с.
15. *Свами М., Тхуласираман К.* Графы, сети и алгоритмы. – М.: Мир, 1984. – 454 с.
16. *Isida M.* Effect of width and length on stress intensity factors of internally cracked plates under various boundary conditions // Int. J. Fract. Mech. – 1971. – V. 7, N. 3. – P. 301-316.

Поступила в редакцию 19.01.11