BULLETIN DE LA S. M. F.

O. DEBARRE

Addendum : « Inégalités numériques pour les surfaces de type général »

Bulletin de la S. M. F., tome 111 (1983), p. 301-302
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1983__111__301_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Bull. Soc. Math. France,
111, 1983, p. 301-302.

ADDENDUM

INÉGALITÉS NUMÉRIQUES POUR LES SURFACES DE TYPE GÉNÉRAL (*)

PAR

O. DEBARRE

La démonstration du théorème 6.1 de [De], qui énonce que toute surface minimale irrégulière de type général vérifie l'inégalité $K^2 \leqq 2p_g$, utilise un lemme de Bombieri (lemme 13, p. 210 de [Bo]) dans le cas où le système canonique est composé d'un pinceau. La démonstration de Bombieri est en fait incomplète (il ne considère que le cas où le système canonique est composé d'un pinceau de courbes de genre 2) et nous donnons ci-dessous une démonstration de ce lemme due à Xiao Gang.

PROPOSITION. — *Toute surface minimale irrégulière de type général dont le système canonique est composé d'un pinceau vérifie l'inégalité* $K^2 \geqq 2p_g$.

Démonstration. — On suppose $K_X^2 < 2p_g$ et on reprend les notations du paragraphe 2. Par (1) et (3) (Theorem 1.1, p. 211 de [Ho] et Remarque 5.4, p. 136 de [Be]), on a $p_g \leqq 2$ et $|K|$ composé d'un pinceau rationnel.

Si $K^2 < 3\chi(\mathcal{O}_X)$, par 1.7, il existe une application rationnelle de degré 2 sur une surface réglée de même irrégularité que X, ce qui contredit 4.1.

On a donc :

$$4 \geqq 2p_g > K^2 \geqq 3\chi(\mathcal{O}_X) \geqq 3 \quad \text{soit } K^2 = 3, \qquad p_g = q = 2.$$

Si $\{s_0, s_1\}$ est une base de $H^0(X, K_X)$, on peut compléter $\{s_0^0, s_0 s_1, s_1^2\}$ en une base de $H^0(X, 2K_X)$, espace vectoriel de dimension 4. Comme $|2K|$ est sans point base ([Fr]), l'application bicanonique φ est un morphisme de degré 6 sur un cône quadratique Σ dans $\mathbf{P}^3$, de sommet O.

(*) Addendum à l'article de O. DEBARRE paru dans le fascicule III, tome 110, 1982, p. 319-346.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE — 0037-9484/1983/301/$ 5.00
© Gauthier-Villars

Pour tout élément η non nul d'ordre 2 de $\mathrm{Pic}(X)$, le théorème de Riemann Roch donne $h^0(X, K+\eta) \geqq 1$. On choisit un diviseur D_η dans $|K+\eta|$. Si $2D_\eta$ correspondait à une section hyperplane de Σ passant par O, on aurait :

$$2D_\eta = D_1 + D_2 \qquad \text{avec} \quad D_i = F_i + Z \in |K|,$$

où Z est la partie fixe de $|K|$. Comme $D_1 \neq D_2$, F_1 et F_2 n'ont pas de composante commune donc n'ont que des composantes de multiplicité paire. En particulier KF_i est pair. Mais un élément de $H^0(X, 2K)$ qui n'est pas dans le sous-espace vectoriel engendré par $\{s_0^2, s_0 s_1, s_1^2\}$ ne peut s'annuler sur Z puisque $|2K|$ est sans point base. Donc $KZ=0$ et $KF_i=3$. Contradiction.

On a montré que $2D_\eta$ correspond à une section hyperplane lisse H_η de Σ.

Comme la partie mobile $|F|$ de $|K|$ n'a pas de point base multiple ($F^2 \leqq K^2 = 3$), un élément générique F de $|F|$ est lisse irréductible et la droite l sur Σ correspondant à l'élément $2F+2Z$ de $|2K|$ coupe les 15 coniques lisses H_η en 15 points distincts. Chaque point $l \cap H_\eta$ a pour antécédents les 3 points de $D_\eta \cap F$ (peut-être confondus), comptés avec multiplicité 2.

Ceci montre que le lieu de ramification R du morphisme de degré 6 $\varphi|_F : F \to l$ possède au moins 3 points (comptés avec multiplicité) au-dessus de chaque $l \cap H_\eta$ donc est de degré au moins 45. La formule de Riemann-Hurwitz fournit alors une contradiction :

$$6 \geqq KF + F^2 = 2g(F) - 2 = 12(g(l) - 1) + \deg R \geqq 33.$$

BIBLIOGRAPHIE

[Be] Beauville (A.). — L'application canonique pour les surfaces de type général, *Invent. Math.*, vol. 55, 1979, p. 121-140.

[Bo] Bombieri (E.). — Canonical models of surfaces of general type, *Publ. Math. I.H.E.S.*, vol. 42, 1973, p. 171-219.

[De] Debarre (O.). — Inégalités numériques pour les surfaces de type général, *Bull. Soc. Math. France*, vol. 110, 1982, p. 319-346.

[Fr] Francia (P.). — A paraître.

[Ho] Horikawa (E.). — Algebraic surfaces of general type with small c_1^2, III, *Invent. Math.*, vol. 47, 1978, p. 209-248.