Commun. math. Phys. 7, 173—180 (1968)

Algebraisch spezielle Einstein-Räume mit einer Bewegungsgruppe

D. KRAMER und G. NEUGEBAUER
Theoretisch-Physikalisches Institut
der Friedrich-Schiller-Universität Jena

Eingegangen am 15. September 1967

Abstract. In algebraically special Einstein spaces ($R_{\mu\nu} = 0$) with a hypersurface-orthogonal spacelike Killing vector field ξ_ν, the trajectories of the multiple eigen null directions k_μ lie — except one case — in the subspaces V_3 orthogonal to ξ_ν ($k_\mu \xi^\mu = 0$) and are hypersurface-orthogonal. The solutions with vanishing expansion ($k_{,\mu}{}^{;\mu} = 0$, Kundt's class) can be determined explicitly.

In algebraisch speziellen Einsteinräumen ($R_{\mu\nu} = 0$) mit einem hyperflächennormalen raumartigen Killingvektorfeld ξ_ν liegen — mit Ausnahme eines Falles — die Trajektorien der mehrfachen Null-Eigenrichtung k_μ in den zu ξ_ν senkrechten Raumschnitten ($k_\mu \xi^\mu = 0$) und sind hyperflächennormal. Die Lösungen mit verschwindender Divergenz ($k_{,\mu}{}^{;\mu} = 0$, Kundtsche Klasse) können explizit bestimmt werden.

1. Einleitung

Das Ziel der Arbeit besteht in der möglichst expliziten Ermittlung aller entarteten Vakuumlösungen ($R_{\mu\nu} = 0$) mit einem hyperflächennormalen, raumartigen Killingvektor ξ_ν.

Das Linienelement kann auf die Form[1]

$$ds^2 = V^2 (dx^3)^2 + g_{ij}(x^k)\, dx^i\, dx^j, \quad V = V(x^i), \quad \xi^\mu = \delta^\mu_3 \tag{1}$$

gebracht werden; es gelten dann die Reduktionsformeln

$$\begin{gathered} \underset{(4)}{R}_{3ijk} = 0, \quad \underset{(4)}{R}{}^3{}_{i3j} = -R_{ij} = \frac{V_{,i;j}}{V}, \quad R^i_i = 0, \\ \underset{(4)}{R}_{ijkl} = R_{ijkl} = -\varepsilon_{ijr} R^{rs} \varepsilon_{skl}. \end{gathered} \tag{2}$$

Durch den Killingvektor ξ_ν sind Unterräume V_3 mit der Signatur $(- + +)$ ausgezeichnet.

[1] Lateinische Indizes: $0 \ldots 2$; Griechische Indizes: $0 \ldots 3$.

Der reelle Nullvektor k^ν soll eine Eigenrichtung von $R_{\mu\nu\varrho\sigma}$ darstellen:

$$k_{[\tau} R_{\nu]\varrho\sigma[\mu} k_{\lambda]} k^\varrho k^\sigma = 0 \,. \tag{3}$$

Das Kriterium für Entartung besagt:

$$R_{\nu\varrho\sigma[\mu} k_{\lambda]} k^\varrho k^\sigma = 0 \,. \tag{4}$$

Wir werden im weiteren zwei Fälle unterscheiden: k^ν hat entweder eine Komponente $k^3 \neq 0$ ($k_\nu \xi^\nu \neq 0$) oder liegt ganz in V_3 ($k_\nu \xi^\nu = 0$).

2. Räume mit $k_\nu \xi^\nu \neq 0$

Mit (2) folgt aus den Kriterien (3), (4) unter der Voraussetzung $k_\nu \xi^\nu \neq 0$

Satz I. *Liegt die isotrope Eigenrichtung k_ν nicht in dem zum Killingvektor senkrechten Unterraum V_3 ($k_\nu \xi^\nu \neq 0$), so sind die zugehörigen Räume vom Petrow-Typ I oder D. Typ I-Räume haben 0,2 oder 4 (einfache), Typ D-Räume 0 oder 2 (zweifache) isotrope Eigenrichtungen mit $k_\nu \xi^\nu \neq 0$.*

Mehrfache Eigenrichtungen k^ν mit $k_\nu \xi^\nu \neq 0$ existieren genau dann, wenn R_{ij} die Entwicklung

$$R_{ij} = -\frac{V_{,i;j}}{V} = \alpha(g_{ij} + 3u_i u_j), \quad u_i u^i = -1 \,, \tag{5}$$

gestattet. Es gibt dann die beiden zweifachen Eigenrichtungen

$$k_\nu \sim u_\nu \pm \frac{\xi_\nu}{\sqrt{\xi_\mu \xi^\mu}} \,, \quad u_\nu = (u_i, 0). \tag{6}$$

Aus Geodäsie und Scherungsfreiheit von k_ν und unter Verwendung von (5) kann die Existenz eines hyperflächennormalen, zeitartigen Killingvektors $\eta_\nu \sim u_\nu$, gefolgert werden. Mit dieser Kenntnis lassen sich die Einsteinschen Feldgleichungen integrieren. Wir formulieren das Ergebnis in

Satz II. *Die einzige entartete Lösung mit $k_\nu \xi^\nu \neq 0$ gehört zur Weylschen Klasse:*

$$ds^2 = x^1 (dx^3)^2 + |(x^1)^{-1/2}| \{(dx^1)^2 + (dx^2)^2\} - x^1 (dx^0)^2, \quad x^1 > 0 \,. \tag{7}$$

Diese Lösung ist in [1] invariant gekennzeichnet.

3. Räume mit $k_\nu \xi^\nu = 0$

3.1. Allgemeine Aussagen

Das Kriterium (3) sowie die Bedingungen für mehrfache Entartung lassen sich auf kovariante Beziehungen in V_3 zurückführen:

$$\text{Typ I:} \qquad R_{ij} k^i k^j = 0 \tag{8.1}$$

$$\text{Typ II:} \qquad k^i R_{i[j} k_{m]} = 0 \tag{8.2}$$

$$\text{Typ III:} \qquad R_{ij} k^j = 0 \tag{8.3}$$

$$\text{Typ N:} \qquad R_{i[j} k_{m]} = 0\,. \tag{8.4}$$

Diese Klassifizierung steht in engem Zusammenhang mit den Eigenwerten und -vektoren von R_{ij}. Man erkennt aus (8.2), daß in allen entarteten Fällen eine Eigenwertgleichung

$$R_{ij} k^j = \lambda k_i\,, \quad k_i k^i = 0 \tag{9}$$

mit nullartigem Eigenvektor besteht, so daß sich Entartung in zusammenfallenden Eigenwerten von R_{ij} äußert (vgl. z. B. [7]). V_4 ist also genau dann vom Typ I, wenn R_{ij} 3 verschiedene Eigenwerte λ_0, λ_1, λ_2 hat.

Um zu entscheiden, ob ein Typ I-Raum 4, 2 oder 0 Eigenrichtungen mit $k_\nu \xi^\nu = 0$ (Satz I) hat, entwickeln wir k_i nach dem Eigenvektorsystem von R_{ij} und ermitteln die Zahl n der verschiedenen reellen Lösungen k_i von (8.1) in Abhängigkeit von den Eigenwerten:

$$\text{3 Eigenwerte reell,} \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_0}\right) \gtrless 9 \qquad \begin{matrix} n = 4\,^{2} \\ n = 0 \end{matrix}$$

$$\text{2 Eigenwerte konjugiert-komplex} \quad n = 2\,.$$

Bei sämtlichen Lösungen der Weylschen Klasse liegen entweder alle oder keine Eigenrichtungen k_ν vollständig in V_3.

Wir behandeln im folgenden die entarteten Lösungen mit $k_\nu \xi^\nu = 0$. Mit Hilfe der Ricci-Identitäten und der Feldgleichungen folgt aus (9):

$$k^j k_{i;j} \sim k_i \Leftrightarrow k_i \sim k_{,i} \tag{10}$$

$$\left(\frac{k^{;i}}{V}\right)_{;i} = 0\,. \tag{11}$$

Diese Relationen drücken die Geodäsie und Scherungsfreiheit des Vektorfeldes $k_\nu = (k_i, 0)$ aus und sind auch aus den entsprechenden Aussagen in V_4 herleitbar. Wichtig ist in diesem Zusammenhang

Satz III. *In V_3 ist für jeden Nullvektor k_i Geodäsie gleichbedeutend mit Hyperflächennormalität.*

[2] λ_0 gehört zum zeitartigen Eigenvektor.

Diese Aussage ergibt sich unmittelbar aus der Entwicklung von $k_{i;j}$ nach einem Dreibein in V_3. Die Eigenschaft der Hyperflächennormalität überträgt sich natürlich auf den Vektor $k_\nu = (k_i, 0)$ in V_4. Daher gilt

Satz IV. *Entartete Vakuumlösungen mit* $k_\nu \xi^\nu = 0$ *gehören zu den von* KUNDT [3] $(k^{\cdot\mu}{}_{;\mu} = 0)$ *bzw.* ROBINSON-TRAUTMAN [4] $(k^{\cdot\mu}{}_{;\mu} \neq 0)$ *behandelten Lösungsklassen.*

Die Voraussetzung einer Bewegungsgruppe gestattet in beiden Fällen explizitere Angaben über die Metrik.

3.2. Kundtsche Klasse $(k^{\cdot\mu}{}_{;\mu} = 0)$

Außer (11) gilt jetzt

$$V k^{\cdot\mu}{}_{;\mu} = (V k^{\cdot i})_{;i} = 0$$

und damit

$$V_{,i} k^{\cdot i} = 0 : \tag{12}$$

Entweder ist $V_{,i}$ Nullvektor oder ein zu $k_{,i}$ orthogonaler raumartiger Vektor. Die Feldgleichungen haben nach einer Konformtransformation

$$g_{ij} = \frac{1}{V^2} \bar{g}_{ij} \tag{13}$$

die Gestalt

$$\bar{R}_{ij} = -2 U_{,i} U_{,j}, \quad U = \log V . \tag{14}$$

Im betrachteten Fall läßt sich unter teilweiser Verwendung der Feldgleichungen in einem für die Integration zweckmäßig gewählten Koordinatensystem $(k_{,i} = \delta_i^0, \bar{k}^{\cdot i} = \delta_1^i)$ die Form des Linienelementes

$$\begin{aligned} d\bar{s}^2_{(3)} \equiv \bar{g}_{ij}\, dx^i\, dx^j = \bar{g}_{00} (dx^0)^2 + 2\, dx^0\, dx^1 + \\ + (dx^2)^2 + 2\, G(x^0, x^2)\, x^1\, dx^2\, dx^0 , \end{aligned} \tag{15}$$

$$\bar{g}_{00} = \frac{1}{2} (G^2 - G_{,2}) (x^1)^2 + E(x^0, x^2)\, x^1 + F(x^0, x^2)$$

erreichen. Die restlichen Feldgleichungen sind dem folgenden System von Differentialgleichungen äquivalent:

$$G_{,2,2} - 3 G_{,2} G + G^3 = 0 , \tag{16}$$

$$(U_{,2})^2 = \frac{1}{2} \left(G_{,2} - \frac{1}{2} G^2 \right) , \tag{17}$$

$$E_{,2} = G_{,0} + 4 U_{,0} U_{,2} , \tag{18}$$

$$(F_{,2} + GF)_{,2} = -4 (U_{,0})^2 . \tag{19}$$

Zu jeder Lösung der Differentialgleichung (16) kann man die Funktionen $U = U(x^0, x^2)$ und $E = E(x^0, x^2)$ aus (17) und (18) durch einfache

Quadratur bestimmen; $F = F(x^0, x^2)$ ergibt sich aus der linearen Differentialgleichung (19). Die Feldgleichungen reduzieren sich also praktisch auf die Differentialgleichung (16), deren allgemeine Lösung angebbar ist:

$$G = \frac{2(A - x^2)}{-B^2 + (A - x^2)^2}, \quad A = A(x^0), \quad B = B(x^0). \tag{20}$$

Aus (17) erhält man nach einer noch ausführbaren Koordinatentransformation $\left(x^0 = f(x^{0\prime}),\ x^1 = x^{1\prime} \cdot (\dot{f}(x^{0\prime}))^{-1},\ x^2 = x^{2\prime}\right)$

$$U = \varepsilon x^0 + \frac{1}{2}\log\left|\frac{x^2 - A - B}{x^2 - A + B}\right|, \quad \varepsilon = 0, \pm 1.$$

Lösungen mit $B = 0$ ($U_{,i}U^{,i} = 0$) sind vom Petrow-Typ III, N oder O. Die Differentialgleichung (16) hat die partikulären Lösungen

$$G = \frac{1}{A - x^2}, \tag{21}$$

$$G = 0 \quad (\text{Typ}\, N, O). \tag{22}$$

Ergebnis dieses Abschnittes ist

Satz V. *Alle Lösungen der Kundtschen Klasse* ($k^{,\mu}{}_{;\mu} = 0$) *mit (mindestens) einem hyperflächennormalen Killingvektor* ξ_μ *sind durch* (15)—(22) *explizit bestimmt.*

3.3. Robinson-Trautmansche Klasse ($k^{,\mu}{}_{;\mu} \neq 0$)

In diesem Fall lösen wir die Killinggleichung

$$\xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu} = 0 \tag{23}$$

in der von Robinson-Trautman [4] angegebenen Normalform der Metrik:

$$ds^2 = \frac{\varrho^2}{p^2}(d\xi^2 + d\eta^2) - 2d\varrho\, dx^0 - L(dx^0)^2, \quad \frac{\partial p}{\partial \varrho} = 0. \tag{24}$$

Dabei ist:

$$\begin{aligned} L &= -\frac{2m}{\varrho} + K - 2H\varrho, \quad m = m(x^0), \\ H &= \frac{\partial \log p}{\partial x^0}, \quad K = p^2\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\right)\log p. \end{aligned} \tag{25}$$

Mit (24), (25) sowie mit $k_\nu \xi^\nu = 0$ erhalten wir aus (23) die Aussagen:

$$\xi^\mu = (\xi^1, \xi^2, 0, 0) \tag{26}$$

$$\xi^1 + i\xi^2 = f(z), \quad z = x^1 + ix^2 \quad (x^1 \equiv \xi,\ x^2 \equiv \eta) \quad f(z) \text{ analytisch}, \tag{27}$$

$$\left(\frac{\xi^A}{p^2}\right)_{,A} = 0, \quad A = 1, 2. \tag{28}$$

Der Killingvektor erweist sich wegen (26) automatisch als hyperflächennormal. Durch eine Transformation $f(z) \to z$, bei der die Form des Linienelementes (24) stets erhalten bleibt, erreicht man wegen (27) $\xi^1 = x^1$, $\xi^2 = x^2$; und die allgemeine Lösung von (28) lautet dann in diesen Koordinaten[3]

$$p = x^1 \cdot Q\left(\frac{x^1}{x^2}, x^0\right). \tag{29}$$

Den anschließenden Übergang zu einem Kugelflächenelement im Zweier-Unterraum vermittelt die Transformation

$$\begin{aligned} x^1 &= e^{\varphi} \cdot \sin\left(\log \operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}\right) \\ x^2 &= e^{\varphi} \cdot \cos\left(\log \operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}\right). \end{aligned} \tag{30}$$

Die Metrik erhält in Übereinstimmung mit (1) ($x^3 \equiv \varphi$) die Form

$$\begin{gathered} ds^2 = q^2(\vartheta, x^0)\, \varrho^2(\sin^2\vartheta\, d\varphi^2 + d\vartheta^2) - 2d\varrho\, dx^0 - L(dx^0)^2 \\ L = \frac{-2m}{\varrho} + K - 2H\varrho, \quad H = -\frac{\partial \log q}{\partial x^0}, \quad m = m(x^0). \end{gathered} \tag{31}$$

Die Feldgleichungen fordern schließlich[4]

$$\begin{gathered} K = \frac{-1}{q^2 \sin\vartheta}\left(\frac{(q \sin\vartheta)'}{q}\right)' \\ \frac{1}{12}\,\frac{(K' \sin\vartheta)'}{q^2 \sin\vartheta} = m\,\frac{\partial \log q}{\partial x^0}, \quad m = \text{const}. \end{gathered} \tag{32}$$

Es gilt somit

Satz VI. *Alle Lösungen der Robinson-Trautmanschen Lösungsklasse* ($k^{\cdot\mu}{}_{;\mu} \neq 0$) *mit axialer Symmetrie sind aus* (32) *bestimmbar.*

Es ist uns nicht gelungen, die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems (32) zu finden. Für $m = 0$ ergibt sich

$$K = A(x^0) \cdot \log \operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2} + B(x^0). \tag{33}$$

Hier liegt eine Singularität längs der Achse $\vartheta = 0, \pi$ vor. Aus der Form des Linienelementes (31) erkennt man: Lösungen, die für $\varrho \to \infty$ pseudoeuklidische Form annehmen, sind durch $q^2 = 1$ gekennzeichnet; denn q ist ϱ-unabhängig. Die einzige Lösung, die dieser Bedingung genügt, ist die Schwarzschild-Lösung ($q^2 = K = 1$).

3.4. Geodätische Eigenrichtungen

Eine Verschärfung unserer letzten Feststellung bildet

Satz VII. *Außer der Schwarzschildlösung gibt es keine axialsymmetrische Lösung der Einsteinschen Feldgleichungen, die das Feld einer*

---

[3] *Q:* beliebige Funktion der angegebenen Argumente.

[4] Strich bedeutet Ableitung nach ϑ.

isolierten Quellverteilung beschreibt und gleichzeitig eine geodätische Eigenrichtung von $R_{\mu\nu\varrho\sigma}$ mit $k_\nu \xi^\nu = 0$ besitzt.

Den Beweis führen wir in einem Bondischen Koordinatensystem, in dem sich alle realistischen Gravitationsfelder in größerer Entfernung von der isolierten Quellverteilung beschreiben lassen. Wir verwenden die geodätische Eigenkongruenz k^μ zum Aufbau der Bondi-Metrik [5]:

$$k^\mu = (0, k^1, 0, 0), \quad \xi^\mu = (0, 0, 0, \xi^3)$$

$$ds^2 = \varrho^2 (e^{-2\gamma} \sin^2\vartheta \, d\varphi^2 + e^{2\gamma} \, d\vartheta^2) - 2 U \varrho^2 e^{2\gamma} \, dx^0 \, d\vartheta - \tag{34}$$

$$- 2 e^{2\beta} \, dx^0 \, d\varrho + g_{00} (dx^0)^2 . \quad (x^1 \equiv \varrho, x^2 \equiv \vartheta, x^3 \equiv \varphi) .$$

Die Bedingung, daß k^μ Eigenrichtung des Riemanntensors ist, lautet nach (8.1)

$$V_{,1;1} = 0, \quad V = \varrho e^{-\gamma} \sin\vartheta . \tag{35}$$

Im Zusammenhang mit der Feldgleichung [5]

$$\beta_{,1} = \frac{1}{2} \varrho (\gamma_{,1})^2 \tag{36}$$

erhält man die Lösung

$$\gamma = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin} \frac{c}{\varrho}, \quad \beta = -\frac{1}{4} \log\left(1 + \frac{c^2}{\varrho^2}\right), \quad c = c(x^0, \vartheta), \tag{37}$$

wobei eine Integrationsfunktion bereits so gewählt wurde, daß β und γ für $\varrho \to \infty$ das richtige asymptotische Verhalten haben. Die Funktion γ hat die allgemeine Entwicklung

$$\gamma = c \varrho^{-1} + \left[C - \frac{1}{6} c^3\right] \varrho^{-3} + D \varrho^{-4} + \cdots . \tag{38}$$

Bei dem gefundenen Ausdruck (37) für γ ist also $C = D = 0$. Damit ergeben sich aus den Feldgleichungen unter anderem die zusätzlichen Forderungen (vgl. auch [6])

$$(cN)_{,2} + 3 c N \cot\vartheta = 0 \tag{39}$$

$$2 c^2 c_{,0} + 2 c M + N \cot\vartheta - N_{,2} = 0 . \tag{40}$$

Aus (39) folgt

$$cN = \frac{h(x^0)}{\sin^3\vartheta} . \tag{41}$$

Für $h(x^0) \neq 0$ ist dies nicht mit den Regularitätsbedingungen auf der Achse $\vartheta = 0, \pi$ vereinbar, die zumindest in großem Abstand von der isolierten Quelle erfüllt sein müssen. Für $h(x^0) = 0$ ergibt sich als einzige reguläre Metrik die Schwarzschildlösung ($c = 0$).

Herrn Prof. Dr. E. Schmutzer und den Mitgliedern der Arbeitsgruppe Relativitätstheorie danken wir für wertvolle Diskussionen.

Literatur

1. JORDAN, P., J. EHLERS u. W. KUNDT: Strenge Lösungen der Feldgleichungen der Allg. Relativitätstheorie; Abh. Mainz. Akad. math.-naturw. Kl. 1960, Nr. 2, S. 74.
2. ebenda, S. 83.
3. KUNDT, W., Z. Physik, **163**, 77 (1961).
4. ROBINSON, I., and A. TRAUTMAN, Proc. Roy. Soc. A, **265**, 463 (1962).
5. BONDI, H., M. G. J. VAN DER BURG, and A. W. K. METZNER, Proc. Roy. Soc. A, **269**, 21 (1962).
6. VAN DER BURG, M. G. J., Proc. Roy. Soc. A **294**, 112 (1966).
7. LANDAU-LIFSCHITZ — Lehrbuch der Theoret. Physik, Band II, S. 385. Berlin: Akad. Verlag 1963.