

# Algèbre de Schwartz d'un groupe de Lie nilpotent

Jean Ludwig et Carine Molitor-Braun\*

## 1 Groupes et algèbres de Lie nilpotents

1.1. Définition : Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie. On définit

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_1 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0], \mathfrak{g}_2 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_1], \dots, \mathfrak{g}_k = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_{k-1}], \dots$$

L'algèbre  $\mathfrak{g}$  est dite *nilpotente* si et seulement s'il existe  $k$  tel que  $\mathfrak{g}_k = 0$ .

1.2. Lemme : Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie nilpotente. Il existe une suite finie d'idéaux  $(\mathfrak{h}_i)_{i=0}^{n+1}$  telle que

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_0 \triangleright \mathfrak{h}_1 \triangleright \dots \triangleright \mathfrak{h}_n \triangleright \mathfrak{h}_{n+1} = 0$$

avec

$$\dim(\mathfrak{h}_i/\mathfrak{h}_{i+1}) = 1$$

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_i] \subset \mathfrak{h}_{i+1}$$

pour tout  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ .

Démonstration : Voir ([5], 1.7.).

1.3. Définition : Choisissons

$$X_0 \in \mathfrak{h}_0 \setminus \mathfrak{h}_1, X_1 \in \mathfrak{h}_1 \setminus \mathfrak{h}_2, \dots, X_i \in \mathfrak{h}_i \setminus \mathfrak{h}_{i+1}, \dots$$

Alors  $\{X_0, X_1, \dots, X_n\}$  est une base de  $\mathfrak{g}$  appelée *base de Jordan-Hölder* de  $\mathfrak{g}$ . Remarquons que  $[\mathfrak{g}, X_i] \subset \mathfrak{h}_{i+1}$  pour tout  $i$ . Toute base considérée dans la suite sera une base de Jordan-Hölder.

---

\*Etude effectuée dans le cadre du projet de recherche MEN|CUL|95|05

1.4. **Définition** : Un groupe de Lie  $G$  est dit *nilpotent* si son algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  est nilpotente. Dans la suite tout groupe de Lie  $G$  sera supposé être nilpotent *connexe, simplement connexe*.

1.5. **Théorème** : Pour tout groupe de Lie nilpotent, connexe, simplement connexe l'application

$$\exp : \mathfrak{g} \longrightarrow G$$

est un difféomorphisme entre  $\mathfrak{g}$  et  $G$ .

Démonstration : Voir ([8], IV.1.4.).

1.6. La formule de Campbell-Baker-Hausdorff

$$\exp X \cdot \exp Y = \exp \left( X + Y + \frac{1}{2}[X, Y] + \frac{1}{12}[X, [X, Y]] + \frac{1}{12}[Y, [Y, X]] + \dots \right)$$

se simplifie dans le cas d'un groupe nilpotent. Dans ce cas la série du membre de droite se réduit à une somme finie. La convergence a lieu quels que soient  $X, Y \in \mathfrak{g}$ . La formule est donc de la forme

$$\exp X \cdot \exp Y = \exp P(X, Y)$$

et est valable dans  $\mathfrak{g}$  tout entier. Ici  $P(X, Y)$  désigne une fonction polynomiale en  $X, Y$ , c'est-à-dire en les coordonnées de  $X, Y$  dans une base quelconque.

1.7. La base de Jordan-Hölder  $\{X_0, X_1, \dots, X_n\}$  étant fixée, l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{n+1} &\longrightarrow G \\ (t_0, t_1, \dots, t_n) &\longmapsto \exp t_0 X_0 \cdot \exp t_1 X_1 \dots \exp t_n X_n \end{aligned}$$

est un difféomorphisme entre  $\mathbb{R}^{n+1}$  et  $G$ , par ([5], 2.4). D'autre part, l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{n+1} &\longrightarrow G \\ (\tilde{t}_0, \tilde{t}_1, \dots, \tilde{t}_n) &\longmapsto \exp(\tilde{t}_0 X_0 + \tilde{t}_1 X_1 + \dots + \tilde{t}_n X_n) \end{aligned}$$

est également un difféomorphisme. Vu la formule de Campbell-Baker-Hausdorff et vu les propriétés des bases de Jordan-Hölder, les "changements de type de coordonnées" sont de la forme

$$\begin{aligned} t_i &= \tilde{t}_i + P_i(\tilde{t}_0, \dots, \tilde{t}_{i-1}) \\ \tilde{t}_i &= t_i + Q_i(t_0, \dots, t_{i-1}) \end{aligned}$$

$P_i$  et  $Q_i$  désignant des fonctions polynômes.

1.8. Le groupe  $G$  est unimodulaire. La mesure de Haar sur  $G$  est donnée par

$$\begin{aligned}\int_G f(g)dg &= \int_{\mathbb{R}^{n+1}} f(\exp t_0 X_0 \cdot \exp t_1 X_1 \dots \exp t_n X_n) dt_0 dt_1 \dots dt_n \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n+1}} f(\exp(\tilde{t}_0 X_0 + \tilde{t}_1 X_1 + \dots + \tilde{t}_n X_n)) d\tilde{t}_0 d\tilde{t}_1 \dots d\tilde{t}_n.\end{aligned}$$

Voir ([5], 2.5.).

## 2 Définition de l'algèbre de Schwartz

2.1. Une fonction  $F$  définie sur  $G$  peut être considérée de deux manières différentes comme fonction sur  $\mathbb{R}^{n+1}$ , à savoir

$$\begin{aligned}f(t_0, t_1, \dots, t_n) &= F(\exp t_0 X_0 \exp t_1 X_1 \dots \exp t_n X_n) \\ \tilde{f}(\tilde{t}_0, \tilde{t}_1, \dots, \tilde{t}_n) &= F(\exp(\tilde{t}_0 X_0 + \tilde{t}_1 X_1 + \dots + \tilde{t}_n X_n)).\end{aligned}$$

D'où également la notion de fonction  $C^\infty$  sur  $G$ . Vu les changements de variables donnés en 1.7., tout opérateur différentiel de la forme

$$\sum_{\substack{|\alpha| \leq N \\ \beta}} C_{\alpha, \beta} t^\beta \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^\alpha$$

se transforme en un opérateur différentiel du même type

$$\sum_{\substack{|\tilde{\alpha}| \leq N \\ \tilde{\beta}}} \tilde{C}_{\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}} \tilde{t}^{\tilde{\beta}} \left( \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \right)^{\tilde{\alpha}}$$

et réciproquement, les notations utilisées étant les suivantes :

$$\begin{aligned}\alpha &= (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^{n+1}, \quad |\alpha| = \sum_{i=0}^n \alpha_i \\ \beta &= (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{N}^{n+1} \\ t^\beta &= t_0^{\beta_0} t_1^{\beta_1} \dots t_n^{\beta_n} \\ \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^\alpha &= \left( \frac{\partial}{\partial t_0} \right)^{\alpha_0} \left( \frac{\partial}{\partial t_1} \right)^{\alpha_1} \dots \left( \frac{\partial}{\partial t_n} \right)^{\alpha_n}.\end{aligned}$$

De même pour  $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ . D'où la définition suivante.

**2.2. Définition :** Une fonction  $F$  de  $G$  dans  $\mathbb{C}$  est une *fonction de Schwartz* si et seulement si

$$\begin{aligned} \|F\|_{\alpha,\beta} &= \int |t^\beta \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^\alpha F(\exp t_0 X_0 \cdot \exp t_1 X_1 \dots \exp t_n X_n)| dt_0 dt_1 \dots dt_n \\ &= \int |t^\beta \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^\alpha f(t_0, t_1, \dots, t_n)| dt_0 dt_1 \dots dt_n \\ &< +\infty \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^{n+1}. \end{aligned}$$

D'après 2.1. il est équivalent de dire que

$$\begin{aligned} \|F\|_{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}} &= \int |\tilde{t}^{\tilde{\beta}} \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{t}}\right)^{\tilde{\alpha}} F(\exp(\tilde{t}_0 X_0 + \tilde{t}_1 X_1 + \dots + \tilde{t}_n X_n))| d\tilde{t}_0 d\tilde{t}_1 \dots d\tilde{t}_n \\ &< +\infty \quad \forall \tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in \mathbb{N}^{n+1} \end{aligned}$$

resp.

$$\begin{aligned} \|F\|_{P,D} &= \int |P(t)D(t)F(\exp t_0 X_0 \cdot \exp t_1 X_1 \dots \exp t_n X_n)| dt_0 dt_1 \dots dt_n \\ &< +\infty \quad \forall P, D \end{aligned}$$

resp.

$$\begin{aligned} \|F\|_{\tilde{P},\tilde{D}} &= \int |\tilde{P}(\tilde{t})\tilde{D}(\tilde{t})F(\exp(\tilde{t}_0 X_0 + \tilde{t}_1 X_1 + \dots + \tilde{t}_n X_n))| d\tilde{t}_0 d\tilde{t}_1 \dots d\tilde{t}_n \\ &< +\infty \quad \forall \tilde{P}, \tilde{D}. \end{aligned}$$

Ici  $P, \tilde{P}$  désignent des fonctions polynômes et  $D, \tilde{D}$  désignent des opérateurs différentiels à coefficients polynomiaux. Notons par  $\mathcal{S}(G)$  l'ensemble des fonctions de Schwartz sur  $G$ .

**2.3. Convention :** Dans la suite nous ne ferons plus de différence entre  $F, f, \tilde{f}$  et nous noterons indifféremment

$$\begin{aligned} f(t_0, t_1, \dots, t_n), f(\tilde{t}_0, \tilde{t}_1, \dots, \tilde{t}_n), f(\exp t_0 X_0 \cdot \exp t_1 X_1 \dots \exp t_n X_n), \\ f(\exp(\tilde{t}_0 X_0 + \tilde{t}_1 X_1 + \dots + \tilde{t}_n X_n)) \end{aligned}$$

pour tout  $f \in \mathcal{S}(G)$ .

**2.4. Proposition :**  $\mathcal{S}(G)$  est une algèbre pour le produit de convolution, c'est-à-dire

$$\mathcal{S}(G) * \mathcal{S}(G) \subset \mathcal{S}(G).$$

Démonstration : Voir ([5], 7.).

### 3 Topologie sur l'algèbre $\mathcal{S}(G)$

**3.1. Définition :** Munissons  $\mathcal{S}(G)$  de la topologie définie par la famille de semi-normes  $\|f\|_{\alpha,\beta}$ . On dit que  $f_\nu \rightarrow f$  dans  $\mathcal{S}(G)$  si et seulement si

$$\|f_\nu - f\|_{\alpha,\beta} \rightarrow 0 \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^{n+1}.$$

Un système fondamental de voisinages de 0 dans  $\mathcal{S}(G)$  est obtenu par

$$V(\alpha, \beta, \varepsilon) = \{f \in \mathcal{S}(G) \mid \|f\|_{\alpha,\beta} < \varepsilon\}.$$

**3.2.** La même topologie est obtenue en prenant les semi-normes  $\|f\|_{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}}$  et les voisinages correspondants. D'ailleurs les familles de semi-normes  $\|f\|_{P,D}$ , resp.  $\|f\|_{\tilde{P},\tilde{D}}$  engendrent également la même topologie sur  $\mathcal{S}(G)$ .

**3.3.** Puisque, pour tout polynôme  $P$  de degré  $r$ ,

$$\begin{aligned} |P(t)| &\leq C \cdot (1 + t_0^2 + t_1^2 + \dots + t_n^2)^{r/2} \\ &\leq C \cdot (1 + t_0^2 + t_1^2 + \dots + t_n^2)^r \end{aligned}$$

la topologie de  $\mathcal{S}(G)$  est également engendrée par la famille de semi-normes

$$\|f\|_N = \sum_{|\alpha| \leq N} \int \left| (1 + t_0^2 + t_1^2 + \dots + t_n^2)^N \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^\alpha f(\exp t_0 X_0 \cdot \exp t_1 X_1 \dots \exp t_n X_n) \right| dt_0 dt_1 \dots dt_n$$

resp. par la famille

$$\|f\|_{\tilde{N}} = \sum_{|\tilde{\alpha}| \leq N} \int \left| (1 + \tilde{t}_0^2 + \tilde{t}_1^2 + \dots + \tilde{t}_n^2)^N \left( \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \right)^{\tilde{\alpha}} f(\exp(\tilde{t}_0 X_0 + \tilde{t}_1 X_1 + \dots + \tilde{t}_n X_n)) \right| d\tilde{t}_0 d\tilde{t}_1 \dots d\tilde{t}_n.$$

De plus, vu les résultats correspondants sur  $\mathbb{R}^{n+1}$ , la topologie de  $\mathcal{S}(G)$  est encore engendrée par l'une quelconque des familles de semi-normes suivantes :

$$\|f\|_{\infty,\alpha,\beta} = \sup_{t \in \mathbb{R}^{n+1}} \left| t^\beta \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^\alpha f(\exp t_0 X_0 \cdot \exp t_1 X_1 \dots \exp t_n X_n) \right|$$

resp.

$$\|f\|_{\infty, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}}^{\sim} = \sup_{\tilde{t} \in \mathbb{R}^{n+1}} \left| \tilde{t}^{\tilde{\beta}} \left( \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \right)^{\tilde{\alpha}} f(\exp \tilde{t}_0 X_0 + \tilde{t}_1 X_1 + \dots + \tilde{t}_n X_n) \right|$$

resp.

$$\|f\|_{\infty, N} = \sup_{t \in \mathbb{R}^{n+1}} \sum_{|\alpha| \leq N} \left| (1 + t_0^2 + t_1^2 + \dots + t_n^2)^N \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\alpha} f(\exp t_0 X_0 \cdot \exp t_1 X_1 \dots \exp t_n X_n) \right|$$

resp.

$$\|f\|_{\infty, N}^{\sim} = \sup_{\tilde{t} \in \mathbb{R}^{n+1}} \sum_{|\tilde{\alpha}| \leq N} \left| (1 + \tilde{t}_0^2 + \tilde{t}_1^2 + \dots + \tilde{t}_n^2)^N \left( \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \right)^{\tilde{\alpha}} f(\exp(\tilde{t}_0 X_0 + \tilde{t}_1 X_1 + \dots + \tilde{t}_n X_n)) \right|.$$

### 3.4. Rappelons les définitions

$$(D_X * f)(y) = \left. \frac{d}{ds} f(\exp(-sX)y) \right|_{s=0}$$

$$(f * D_X)(y) = \left. \frac{d}{ds} f(y \exp(-sX)) \right|_{s=0}$$

pour  $X \in \mathfrak{g}$ . Ainsi on définit de proche en proche  $D^\alpha * f$  et  $f * D^\alpha$  où  $D^\alpha = D_{X_0}^{\alpha_0} * D_{X_1}^{\alpha_1} * \dots * D_{X_n}^{\alpha_n}$  si  $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$  et où  $D_X^N = D_X * D_X * \dots * D_X$ , le nombre d'opérateurs  $D_X$  étant  $N$ . Plus généralement on considérera des opérateurs de ce type où les  $D_{X_i}$  sont pris dans un ordre quelconque. Remarquons que

$$\begin{aligned} & (D_{X_i} * f)(\exp t_0 X_0 \cdot \exp t_1 X_1 \dots \exp t_n X_n) \\ &= \left. \frac{d}{ds} f(\exp(-sX_i) \exp t_0 X_0 \cdot \exp t_1 X_1 \dots \exp t_n X_n) \right|_{s=0} \\ &= \left. \frac{d}{ds} f(\exp t_0 X_0 \dots \exp t_i X_i \cdot [\exp(-t_i X_i) \dots \exp(-t_0 X_0) \exp(-sX_i) \exp t_0 X_0 \dots \exp t_i X_i] \exp t_{i+1} X_{i+1} \dots \exp t_n X_n) \right|_{s=0} \\ &= \left. \frac{d}{ds} f(\exp t_0 X_0 \dots \exp t_{i-1} X_{i-1} \exp(t_i - s) X_i \exp(t_{i+1} + f_{i+1}(s, t_0, \dots, t_i)) X_{i+1} \dots \exp t_n X_n) \right|_{s=0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \dots \exp(t_n + f_n(s, t_0, \dots, t_{n-1}))X_n \Big|_{s=0} \\
= & -\frac{\partial}{\partial t_i} f(\exp t_0 X_0 \dots \exp t_i X_i \dots \exp t_n X_n) \\
& + \sum_{j=i+1}^n P_j(t_0, \dots, t_{j-1}) \frac{\partial}{\partial t_j} f(\exp t_0 X_0 \dots \exp t_j X_j \dots \exp t_n X_n).
\end{aligned}$$

Dans ces expressions  $f_j(s, t_0, \dots, t_{j-1})$  désigne un polynôme en  $s, t_0, \dots, t_{j-1}$  tel que  $f_j(0, t_0, \dots, t_{j-1}) = 0$  et  $P_j(t_0, \dots, t_{j-1})$  désigne un polynôme en  $t_0, \dots, t_{j-1}$ . De proche en proche on montre que

$$\begin{aligned}
& D^\alpha * f(\exp t_0 X_0 \cdot \exp t_1 X_1 \dots \exp t_n X_n) \\
= & \sum_{\gamma} P'_\gamma(t) D^\gamma f(\exp t_0 X_0 \cdot \exp t_1 X_1 \dots \exp t_n X_n).
\end{aligned}$$

Réciproquement,

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t_i} f(\exp t_0 X_0 \dots \exp t_i X_i \dots \exp t_n X_n) \\
= & -\frac{d}{ds} f(\exp t_0 X_0 \dots \exp(t_i - s)X_i \dots \exp t_n X_n) \Big|_{s=0} \\
= & -\frac{d}{ds} f(\exp(-sX_i) \exp sX_i [\exp t_0 X_0 \dots \exp t_i X_i] \exp(-sX_i) \exp t_{i+1} X_{i+1} \\
& \dots \exp t_n X_n) \Big|_{s=0} \\
= & -\frac{d}{ds} f(\exp(-sX_i) \exp t_0 X_0 \dots \exp t_i X_i \exp P_{i+1}(s, t_0, \dots, t_{i+1})X_{i+1} \dots \\
& \exp P_n(s, t_0, \dots, t_n)X_n) \Big|_{s=0} \\
& \text{avec } P_j(s, t_0, \dots, t_j) \text{ polynôme tel que} \\
& P_j(0, t_0, \dots, t_j) = t_j \\
= & -D_{X_i} * f(\exp t_0 X_0 \dots \exp t_n X_n) - \sum_{k=i+1}^n \frac{\partial}{\partial s} P_k(s, t_0, \dots, t_k) \Big|_{s=0} \\
& \frac{\partial}{\partial t_k} f(\exp t_0 X_0 \dots \exp t_k X_k \dots \exp t_n X_n) \\
= & -D_{X_i} * f(\exp t_0 X_0 \dots \exp t_n X_n) - \sum_{k=i+1}^n Q_k(t_0, \dots, t_k) \frac{\partial}{\partial t_k} f(\exp t_0 X_0 \dots \\
& \exp t_k X_k \dots \exp t_n X_n).
\end{aligned}$$

En répétant le même raisonnement on trouve des expressions de la forme

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t_i} f(\exp t_0 X_0 \dots \exp t_i X_i \dots \exp t_n X_n) \\ &= -D_{X_i} * f(\exp t_0 X_0 \dots \exp t_n X_n) - \sum_{k=i+1}^n R_k(t_0, \dots, t_k) D_{X_k} * f(\exp t_0 X_0 \\ & \quad \dots \exp t_n X_n) \end{aligned}$$

les  $R_k$  désignant des fonctions polynômes. Finalement,  $(\frac{\partial}{\partial t})^\alpha f$  est de la forme  $\sum_{\beta} P_\beta D^\beta * f$ .

En majorant les polynômes par des  $C \cdot (1 + t_0^2 + \dots + t_n^2)^N$  on voit donc que la topologie de  $\mathcal{S}(G)$  peut également être engendrée par la famille de semi-normes

$$\sum_{|\alpha| \leq N} \int |(1 + t_0^2 + \dots + t_n^2)^N D^\alpha * f(\exp t_0 X_0 \dots \exp t_n X_n)| dt_0 \dots dt_n.$$

On montre de même que la famille de semi-normes

$$\sum_{|\alpha| \leq N} \int |(1 + t_0^2 + \dots + t_n^2)^N f * D^\alpha(\exp t_0 X_0 \dots \exp t_n X_n)| dt_0 \dots dt_n$$

engendre la topologie de  $\mathcal{S}(G)$ .

**3.5. Poids polynomial :** a) Pour  $x = \exp(\tilde{t}_0 X_0 + \dots + \tilde{t}_n X_n)$  définissons

$$\|x\| = \sup_{i=0, \dots, n} |\tilde{t}_i|.$$

Soit  $U$  le voisinage compact de l'unité 1 de  $G$  défini par

$$U = \{x \in G \mid \|x\| \leq 1\}.$$

Dans ([1], Lemme 2) Dixmier montre qu'il existe  $C > 1$  et  $N \in \mathbb{N}$  tel que

$$\sup_{x \in U^m} \|x\| \leq C \cdot m^N \quad \text{pour tout } m \in \mathbb{N}^*.$$

La démonstration se fait par récurrence et utilise le caractère polynomial de la formule de Campbell-Baker-Hausdorff.

b) Pour tout  $x \in G$ , définissons

$$\begin{aligned} \tau(x) &= \min\{n \in \mathbb{N}^* \mid x \in U^n\} \\ \omega(x) &= 1 + \tau(x). \end{aligned}$$



Par construction la fonction  $\omega(x)$  est mesurable, localement bornée et vérifie  $\omega(x) \geq 1$ . De plus

$$\begin{aligned} x \in U^m, y \in U^n &\Rightarrow x \cdot y \in U^{m+n} \\ &\Rightarrow \tau(x \cdot y) \leq m + n. \end{aligned}$$

En passant au minimum sur  $m$  et  $n$  on a donc

$$\tau(x \cdot y) \leq \tau(x) + \tau(y)$$

et

$$\begin{aligned} \omega(x) \cdot \omega(y) &= (1 + \tau(x)) \cdot (1 + \tau(y)) \\ &= 1 + \tau(x) + \tau(y) + \tau(x) \cdot \tau(y) \\ &\geq 1 + \tau(x) + \tau(y) \\ &\geq 1 + \tau(x \cdot y) \\ &= \omega(x \cdot y) \quad \text{quels que soient } x, y \in G. \end{aligned}$$

c) Le raisonnement suivant, tiré de ([3], 1.5.) montre que la fonction  $\omega$  peut être comparée à des fonctions polynômes. En effet, pour tout  $X \in \mathfrak{g}$ ,  $\exp mX = (\exp X)^m$ . Donc si  $m-1 \leq \|\exp Y\| \leq m$ ,  $1 - \frac{1}{m} \leq \|\exp(\frac{Y}{m})\| \leq 1$ , c'est-à-dire  $\exp \frac{Y}{m} \in U$  et  $\exp Y \in U^m$ . Ainsi  $\omega(\exp Y) \leq m \leq 1 + \|\exp Y\|$  et, si  $Y = \tilde{y}_0 X_0 + \tilde{y}_1 X_1 + \dots + \tilde{y}_n X_n$ ,

$$\begin{aligned} \|\exp Y\| &= \sup |\tilde{y}_i| \\ &\leq \sup(1 + \tilde{y}_i^2) \\ &\leq 1 + \tilde{y}_0^2 + \tilde{y}_1^2 + \dots + \tilde{y}_n^2. \end{aligned}$$

Donc

$$\omega(\exp Y) \leq 2 + \tilde{y}_0^2 + \tilde{y}_1^2 + \dots + \tilde{y}_n^2.$$

D'autre part, on sait que

$$\sup_{x \in U^m} \|x\| \leq C \cdot m^N$$

Supposons à présent qu'il existe  $m$  tel que

$$C \cdot m^N < \|\exp Y\| \leq C \cdot (m+1)^N.$$

Alors  $\exp Y \notin U^m$  et  $\omega(\exp Y) \geq m + 1$ . Ainsi

$$|\tilde{y}_i| \leq \|\exp Y\| \leq C \cdot \omega(\exp Y)^N \quad \text{pour tout } i.$$

On en déduit que pour tout polynôme  $\tilde{P}$  il existe  $C > 0$ ,  $M > 0$  tels que

$$\tilde{P}(\tilde{t}_0, \dots, \tilde{t}_n) \leq C \cdot \omega(\exp(\tilde{t}_0 X_0 + \dots + \tilde{t}_n X_n))^M.$$

Finalement, puisque le passage entre les deux systèmes de coordonnées  $(t_0, t_1, \dots, t_n)$  et  $(\tilde{t}_0, \tilde{t}_1, \dots, \tilde{t}_n)$  se fait à l'aide de fonctions polynomiales, on a une majoration analogue pour tout polynôme  $P$  en  $t_0, t_1, \dots, t_n$

$$P(t_0, \dots, t_n) \leq C_1 \cdot \omega(\exp t_0 X_0 \cdot \exp t_1 X_1 \dots \exp t_n X_n)^{M_1}.$$

De plus

$$\omega(\exp t_0 X_0 \cdot \exp t_1 X_1 \dots \exp t_n X_n) \leq Q(t_0, t_1, \dots, t_n)$$

$Q$  étant également une fonction polynôme. Dans la suite nous noterons simplement  $\omega(x)$ ,  $P(x)$ ,  $Q(x)$  pour  $x \in G$  quel que soit le système de coordonnées utilisé.

d) La fonction  $\omega$  est appelée poids polynomial.

**3.6.** Les majorations précédentes montrent que la topologie de  $\mathcal{S}(G)$  peut également être engendrée par la famille de semi-normes

$$q_N(f) = \sum_{|\alpha| \leq N} \int \omega(x)^N |D^\alpha * \tilde{f}(x)| dx$$

ou par la famille de semi-normes

$$q_N(f) = \sum_{|\alpha| \leq N} \int \omega(x)^N |f * D^\alpha(x)| dx.$$

Ici  $x$  peut être exprimé dans l'un quelconque des deux systèmes de coordonnées.

**3.7.** Notons encore que  $D^\alpha * f$ ,  $f * D^\alpha \in \mathcal{S}(G)$  pour  $f \in \mathcal{S}(G)$  et que les notations  $D^\alpha * f$  et  $f * D^\alpha$  sont bien choisies. En effet,

$$D^\alpha * (f * g) = (D^\alpha * f) * g$$

et

$$(f * g) * D^\alpha = f * (g * D^\alpha).$$

3.8. Définissons encore les semi-normes

$$p_N(f) = \int \omega(x)^N |f(x)| dx.$$

On a alors

$$\begin{aligned} {}_Nq(f * g) &= \sum_{|\alpha| \leq N} \int \omega^N(x) |(D^\alpha * f) * g(x)| dx \\ &= \sum_{|\alpha| \leq N} \int \omega^N(x) \left| \int (D^\alpha * f)(y) g(y^{-1}x) dy \right| dx \\ &\leq \sum_{|\alpha| \leq N} \int \int \omega^N(y \cdot y^{-1}x) |(D^\alpha * f)(y) g(y^{-1}x)| dy dx \\ &\leq \sum_{|\alpha| \leq N} \int \omega^N(y) |D^\alpha * f(y)| \left[ \int \omega^N(y^{-1}x) |g(y^{-1}x)| dx \right] dy \\ &= {}_Nq(f) \cdot p_N(g). \end{aligned}$$

On montre de même que

$$q_N(f * g) \leq p_N(f) q_N(g)$$

quels que soient  $f, g \in \mathcal{S}(G)$ .

3.9. **Remarques :** a) Selon le problème à étudier, on travaillera dans la suite avec l'une ou l'autre famille de semi-normes définissant la topologie de  $\mathcal{S}(G)$ . De plus, les éléments  $x \in G$  seront soit considérés sous la forme  $x = \exp t_0 X_0 \cdot \exp t_1 X_1 \dots \exp t_n X_n$ , soit sous la forme  $x = \exp(\tilde{t}_0 X_0 + \tilde{t}_1 X_1 + \dots + \tilde{t}_n X_n)$ .

b) Si  $N \leq N_1$ , alors  $q_N(f) \leq q_{N_1}(f)$  et  ${}_Nq(f) \leq {}_{N_1}q(f)$  pour tout  $f \in \mathcal{S}(G)$ . En effet,  $\omega(x) \geq 1$  entraîne  $\omega^N(x) \leq \omega^{N_1}(x)$ .

c) On pourrait encore utiliser la famille de semi-normes

$${}_Nq'(f) = \sup_{x \in G} \sum_{|\alpha| \leq N} |\omega^N(x) (D^\alpha * f)(x)|$$

resp. la famille de semi-normes

$$q'_N(f) = \sup_{x \in G} \sum_{|\alpha| \leq N} |\omega^N(x) (f * D^\alpha)(x)|$$

pour définir la topologie de  $\mathcal{S}(G)$ .

d) Finalement, la topologie de  $\mathcal{S}(G)$  peut être engendrée par la distance

$$d(f, g) = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{2^N} \frac{q_N(f - g)}{1 + q_N(f - g)}.$$

Ainsi  $\mathcal{S}(G)$  devient un espace de Fréchet.

## 4 Translations dans $\mathcal{S}(G)$

4.1. **Définition** : Pour tout  $f \in \mathcal{S}(G)$  et tout  $a \in G$ , définissons  ${}_a f$  et  $f_a$  par

$$({}_a f)(x) = f(a^{-1}x) \quad \text{et} \quad (f_a)(x) = f(xa).$$

4.2. **Lemme** : Quels que soient  $f, g \in \mathcal{S}(G)$ ,  $a \in G$ , on a

$${}_a(f * g) = ({}_a f) * g \quad \text{et} \quad (f * g)_a = f * (g_a).$$

Démonstration : Evident.

4.3. **Lemme** : Quels que soient  $f \in \mathcal{S}(G)$ ,  $a \in G$ ,  $\alpha$ , on a

$$({}_a f) * D^\alpha = {}_a(f * D^\alpha) \quad \text{et} \quad D^\alpha * (f_a) = (D^\alpha * f)_a.$$

Démonstration : Evident.

4.4. Soit  $f \in \mathcal{S}(G)$  fixé. Pour tout  $M \in \mathbb{N}$ , il existe  $C_M > 0$  tel que

$$|f * D^\alpha(x)| \leq \frac{C_M}{\omega(x)^M}$$

par 3.9.c). On en déduit que

$$\begin{aligned} |({}_a f) * D^\alpha(x)| &= |f * D^\alpha(a^{-1}x)| \\ &\leq \frac{C_M}{\omega(a^{-1}x)^M}. \end{aligned}$$

Or

$$\omega(a^{-1}x) = \frac{\omega(a)\omega(a^{-1}x)}{\omega(a)} \geq \frac{\omega(x)}{\omega(a)}$$

et

$$|(af) * D^\alpha(x)| \leq \frac{C_M \cdot \omega(a)^M}{\omega(x)^M}.$$

**4.5. Proposition :** Pour tout  $f \in \mathcal{S}(G)$

$$\lim_{a \rightarrow e} (af) = f$$

dans la topologie de  $\mathcal{S}(G)$ , donc en particulier dans la topologie définie par une ou plusieurs semi-normes de Schwartz particulières,  $e$  désignant l'unité du groupe.

Démonstration : Il suffit de montrer que

$$\int \omega^N(x) |(af) * D^\alpha(x) - f * D^\alpha(x)| dx \longrightarrow 0$$

c'est-à-dire que

$$\int \omega^N(x) |(f * D^\alpha)(a^{-1}x) - f * D^\alpha(x)| dx \longrightarrow 0.$$

Par continuité on a

$$\lim_{a \rightarrow e} \int \omega^N(x) |(f * D^\alpha)(a^{-1}x) - f * D^\alpha(x)| = 0.$$

De plus

$$\begin{aligned} & \omega^N(x) |(f * D^\alpha)(a^{-1}x) - f * D^\alpha(x)| \\ & \leq \omega^N(x) |f * D^\alpha(a^{-1}x)| + \omega^N(x) |f * D^\alpha(x)| \\ & \leq C_M \cdot \omega(a)^M \cdot \left(\frac{1}{\omega(x)}\right)^{M-N} + \omega^N(x) |f * D^\alpha(x)| \end{aligned}$$

avec

$$\left(\frac{1}{\omega(x)}\right)^{M-N} \in L^1(G)$$

pour  $M$  suffisamment élevé. De plus, puisque  $a \rightarrow e$ , on peut supposer que  $a$  parcourt un compact et que  $\omega(a)^M$  est borné par  $C$ , étant donné que la fonction  $\omega$  est localement bornée. D'où

$$\begin{aligned} & \omega^N(x) |(f * D^\alpha)(a^{-1}x) - f * D^\alpha(x)| \\ & \leq C_M \cdot C \cdot \left(\frac{1}{\omega(x)}\right)^{M-N} + \omega^N(x) |f * D^\alpha(x)| \in L^1(G). \end{aligned}$$

Le théorème de Lebesgue permet de conclure.

4.6. Corollaire : Pour tout  $f \in \mathcal{S}(G)$ , tout  $a_0 \in G$

$$\lim_{a \rightarrow a_0} ({}_a f) = {}_{a_0} f$$

dans la topologie de  $\mathcal{S}(G)$ , donc en particulier dans la topologie définie par une ou plusieurs semi-normes de Schwartz particulières.

Démonstration : On écrit

$${}_a f = ({}_{aa_0^{-1}})({}_{a_0} f)$$

avec  $\lim(aa_0^{-1}) = e$ .

4.7. On démontre de même

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow e} (f_a) &= f \\ \lim_{a \rightarrow a_0} (f_a) &= f_{a_0} \end{aligned}$$

dans la topologie de  $\mathcal{S}(G)$ , donc en particulier dans la topologie définie par une ou plusieurs semi-normes de Schwartz particulières.

4.8. Calculons

$$\begin{aligned} q_N({}_a f) &= \sum_{|\alpha| \leq N} \int \omega^N(x) |({}_a f) * D^\alpha(x)| dx \\ &= \sum_{|\alpha| \leq N} \int \omega^N(x) |(f * D^\alpha)(a^{-1}x)| dx \\ &= \sum_{|\alpha| \leq N} \int \omega^N(ax) |(f * D^\alpha)(x)| dx \\ &\leq \omega^N(a) \sum_{|\alpha| \leq N} \int \omega^N(x) |(f * D^\alpha)(x)| dx \\ &= \omega^N(a) q_N(f). \end{aligned}$$

On montre de même

$${}_N q(f_a) \leq \omega^N(a^{-1}) {}_N q(f).$$

4.9. Définition : Pour tout  $f \in \mathcal{S}(G)$ ,  $a \in G$  définissons  ${}^a f$  par

$$({}^a f)(x) = f(a^{-1}xa) = ({}_a f_a)(x).$$

4.10. **Corollaire** : Pour tout  $f \in \mathcal{S}(G)$ , tout  $a_0 \in G$

$$\lim_{a \rightarrow a_0} ({}^a f) = {}^{a_0} f$$

dans la topologie de  $\mathcal{S}(G)$ , donc en particulier dans la topologie définie par une ou plusieurs semi-normes de Schwartz particulières.

Démonstration :

$$\begin{aligned} q_N({}^a f - {}^{a_0} f) &= q_N({}_a f_a - {}_{a_0} f_{a_0}) \\ &\leq q_N({}_a f_a - {}_a f_{a_0}) + q_N({}_a f_{a_0} - {}_{a_0} f_{a_0}) \\ &\leq \omega^N(a) q_N(f_a - f_{a_0}) + q_N({}_a (f_{a_0}) - {}_{a_0} (f_{a_0})). \end{aligned}$$

Par 4.6. et 4.7., le membre de droite tend vers 0.

4.11. **Corollaire** : Si  $\lim_{\nu} q_N(f_{\nu} - f) = 0$ , alors  $\lim_{\nu} q_N({}_a (f_{\nu}) - {}_a f) = 0$  pour tout  $a \in G$ . Si  $\lim_{\nu} {}_N q(f_{\nu} - f) = 0$ , alors  $\lim_{\nu} {}_N q((f_{\nu})_a - f_a) = 0$  pour tout  $a \in G$ . En particulier, si  $\lim_{\nu} f_{\nu} = f$  dans la topologie de  $\mathcal{S}(G)$ , alors  $\lim_{\nu} {}_a (f_{\nu}) = {}_a f$  et  $\lim_{\nu} (f_{\nu})_a = f_a$  dans la même topologie.

## 5 Unités approchées dans $\mathcal{S}(G)$

5.1. **Proposition** : Soit  $(\varphi_{\varepsilon})$  une famille de fonctions de  $\mathcal{S}(G)$  telle que

$$\varphi_{\varepsilon} \geq 0, \quad \int \varphi_{\varepsilon}(x) dx = 1, \quad \text{supp } \varphi_{\varepsilon} = K_{\varepsilon} \subset V_{\varepsilon}$$

les  $K_{\varepsilon}$  étant des compacts et les  $V_{\varepsilon}$  formant une base de voisinages emboîtés de 1. Alors

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi_{\varepsilon} * f = f = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f * \varphi_{\varepsilon} \quad \text{pour tout } f \in \mathcal{S}(G)$$

dans la topologie de  $\mathcal{S}(G)$ , donc en particulier dans la topologie définie par une ou plusieurs semi-normes de Schwartz particulières.

Démonstration :

$$\sum_{|\alpha| \leq N} \int \omega^N(x) |(\varphi_{\varepsilon} * f) * D^{\alpha}(x) - f * D^{\alpha}(x)| dx$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{|\alpha| \leq N} \int \omega^N(x) |\varphi_\varepsilon * (f * D^\alpha(x)) - f * D^\alpha(x)| dx \\
&= \sum_{|\alpha| \leq N} \int \omega^N(x) \left| \int \varphi_\varepsilon(y) (f * D^\alpha)(y^{-1}x) dy - \int \varphi_\varepsilon(y) dy \cdot f * D^\alpha(x) \right| dx \\
&\leq \sum_{|\alpha| \leq N} \int \varphi_\varepsilon(y) \int \omega^N(x) |(yf) * D^\alpha(x) - f * D^\alpha(x)| dx dy \\
&= \int \varphi_\varepsilon(y) \cdot q_N(yf - f) dy.
\end{aligned}$$

Par 4.6., il existe pour tout  $\zeta > 0$ , un voisinage  $V_\zeta$  de 1 tel que

$$y \in V_\zeta \Rightarrow q_N(yf - f) < \zeta.$$

D'où, pour  $\varepsilon \leq \zeta$ ,  $\text{supp } \varphi_\varepsilon \subset V_\varepsilon \subset V_\zeta$  et

$$\sum_{|\alpha| \leq N} \int \omega^N(x) |(\varphi_\varepsilon * f) * D^\alpha(x) - f * D^\alpha(x)| dx \leq \zeta \cdot \int \varphi_\varepsilon(y) dy = \zeta.$$

Ceci prouve la première limite, la deuxième se démontrant de même.

**5.2.** Pour construire la famille  $(\varphi_\varepsilon)$  il suffit de choisir une fonction positive  $\varphi \in \mathcal{S}(G)$  telle que  $\int \varphi(x) dx = 1$ ,  $\text{supp } \varphi$  étant un voisinage compact de 1. Il suffit alors de définir  $\varphi_\varepsilon$  par

$$\begin{aligned}
&\varphi_\varepsilon(\exp(\tilde{t}_0 X_0 + \tilde{t}_1 X_1 + \dots + \tilde{t}_n X_n)) \\
&= \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{n+1} \varphi\left(\exp\left(\frac{\tilde{t}_0}{\varepsilon} X_0 + \frac{\tilde{t}_1}{\varepsilon} X_1 + \dots + \frac{\tilde{t}_n}{\varepsilon} X_n\right)\right).
\end{aligned}$$

Donc  $\mathcal{S}(G)$  possède des unités approchées.

## 6 Idéaux fermés de $\mathcal{S}(G)$

**6.1. Proposition :** Soit  $I$  un idéal de  $\mathcal{S}(G)$  fermé pour la topologie de  $\mathcal{S}(G)$ , respectivement pour la topologie définie par une ou plusieurs semi-normes de Schwartz. Alors

$$f \in I \Rightarrow {}_a f \in I \quad \text{et} \quad f_a \in I \quad \text{pour tout } a \in G.$$



Démonstration : Soit  $||| \cdot |||$  une semi-norme de Schwartz quelconque. Il existe alors  $N$  tel que

$$|||f||| \leq q_N(f) \quad \text{pour tout } f \in \mathcal{S}(G)$$

étant donné que les  $q_N$  sont des semi-normes croissantes avec  $N$  qui engendrent la topologie de Schwartz. Soit  $(\varphi_\varepsilon)$  une unité approchée et soit  $f \in I$ . Puisque  $I$  est un idéal

$${}_a(\varphi_\varepsilon * f) = ({}_a(\varphi_\varepsilon)) * f \in I$$

et

$$\begin{aligned} {}_a f &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} {}_a(\varphi_\varepsilon * f) \quad \text{dans } q_N, \text{ donc dans } ||| \cdot ||| \text{ par 4.11.} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} ({}_a(\varphi_\varepsilon)) * f \\ &\in I \end{aligned}$$

l'idéal  $I$  étant fermé pour la ou les semi-normes en question. De même  $f_a \in I$ .

**6.2. Proposition** : Soit  $I$  un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{S}(G)$ , fermé pour la topologie de  $\mathcal{S}(G)$ , resp. fermé pour la topologie définie par une ou plusieurs semi-normes de Schwartz. Alors  $I$  est un idéal si et seulement si  $I$  est stable par translations à droite et à gauche.

Démonstration : Une des implications a été démontrée en 6.1. Supposons à présent  $I$  stable par translations à droite et à gauche. Soit  $f \in \mathcal{S}(G)$  et soit  $g \in I$ . Montrons que  $f * g$  peut être approché arbitrairement dans  $\mathcal{S}(G)$  (donc aussi dans la topologie définie par une ou plusieurs semi-normes de Schwartz) par des sommes finies de la forme  $\sum_i f(y_i)({}_{y_i}g)(\cdot)$  mes  $K_i$ , les  $K_i$  étant des ensembles de Borel tels que  $y_i \in K_i$ . Puisque  ${}_{y_i}g \in I$  par hypothèse, on en déduira que  $f * g \in I$ , l'espace  $I$  étant fermé. Soit  $V$  un voisinage arbitraire de 0 dans  $\mathcal{S}(G)$  et soit  $W$  un voisinage de 0 dans  $\mathcal{S}(G)$  tel que  $W + W \subset V$ . Puisque les  $q_N$  sont des semi-normes croissantes engendrant la topologie de  $\mathcal{S}(G)$  on peut par exemple supposer que

$$W = \{f \in \mathcal{S}(G) \mid q_N(f) < \varepsilon\}.$$

Remarquons d'abord qu'il existe un compact  $C$  de  $G$  tel que l'application

$$\left(x \mapsto \int_{G \setminus C} f(y)({}_y g)(x) dy\right) \in W.$$

En effet, puisque

$$\begin{aligned} & \int_G \left[ \int_G \sum_{|\alpha| \leq N} \omega^N(x) |f(y)({}_y g) * D^\alpha(x)| dx \right] dy \\ &= \sum_{|\alpha| \leq N} \int_G \omega^N(x) |f * |g * D^\alpha|(x) dx < +\infty \end{aligned}$$

il existe un compact  $C$  de  $G$  suffisamment grand tel que

$$\begin{aligned} & \int_{G \setminus C} \left[ \int_G \sum_{|\alpha| \leq N} \omega^N(x) |f(y)({}_y g) * D^\alpha(x)| dx \right] dy < \varepsilon \\ \Leftrightarrow & \sum_{|\alpha| \leq N} \int \omega^N(x) \left[ \int_{G \setminus C} |f(y)({}_y g) * D^\alpha(x)| dy \right] dx < \varepsilon \\ \Rightarrow & \sum_{|\alpha| \leq N} \int \omega^N(x) \left| \int_{G \setminus C} f(y)({}_y g) * D^\alpha(x) dy \right| dx < \varepsilon \\ \Leftrightarrow & \sum_{|\alpha| \leq N} \int \omega^N(x) \left| \left[ \int_{G \setminus C} f(y)({}_y g)(\cdot) dy \right] * D^\alpha(x) \right| dx < \varepsilon \\ \Leftrightarrow & q_N \left( \int_{G \setminus C} f(y)({}_y g)(\cdot) dy \right) < \varepsilon \\ \Leftrightarrow & \int_{G \setminus C} f(y)({}_y g)(\cdot) dy \in W. \end{aligned}$$

Puisque l'application

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow \mathcal{S}(G) \\ y &\longmapsto f(y)({}_y g) \end{aligned}$$

est continue, par continuité des translations, il suffit d'appliquer ([6], ex. 23 p. 85) pour conclure à l'existence d'une somme finie  $\sum_i f(y_i)({}_{y_i} g)(\cdot) \text{mes } K_i$  telle que

$$\int_C f(y)({}_y g)(\cdot) dy - \sum_i f(y_i)({}_{y_i} g)(\cdot) \text{mes } K_i \in W.$$

D'où

$$\begin{aligned} & f * g - \sum_i f(y_i)({}_{y_i} g) \text{mes } K_i \\ &= \int_{G \setminus C} f(y)({}_y g)(\cdot) dy + \int_C f(y)({}_y g)(\cdot) dy - \sum_i f(y_i)({}_{y_i} g)(\cdot) \text{mes } K_i \\ &\in W + W \\ &\subset V \end{aligned}$$

ce qui prouve notre affirmation. Ainsi  $f * g \in I$ . On montre de même que  $g * f \in I$  et donc que  $I$  est un idéal.

**6.3. Proposition :** Soit  $I$  un idéal de  $\mathcal{S}(G)$  fermé pour la topologie de  $\mathcal{S}(G)$ , resp. fermé pour la topologie définie par une ou plusieurs semi-normes de Schwartz. Alors  $I$  est fermé pour l'action de l'algèbre enveloppante, c'est-à-dire

$$f \in I, \quad D^\alpha \in U(\mathfrak{g}) \Rightarrow f * D^\alpha \in I \quad \text{et} \quad D^\alpha * f \in I.$$

Démonstration : Soit  $(\varphi_\varepsilon)$  une unité approchée. On sait que  $f * \varphi_\varepsilon$  tend vers  $f$  dans toute semi-norme de Schwartz. Montrons que  $(f * \varphi_\varepsilon) * D^\alpha = f * (\varphi_\varepsilon * D^\alpha)$  tend vers  $f * D^\alpha$  dans toute semi-norme  $q_N$ , donc aussi dans toute autre semi-norme de Schwartz. Puisque de plus  $f * (\varphi_\varepsilon * D^\alpha) \in I$  on en déduira que  $f * D^\alpha \in I$ . Or

$$\begin{aligned} & q_N((f * \varphi_\varepsilon) * D^\alpha - f * D^\alpha) \\ &= \sum_{|\beta| \leq N} \int \omega^\beta(x) |(f * \varphi_\varepsilon - f) * D^\alpha * D^\beta(x)| dx \\ &= q_1(f * \varphi_\varepsilon - f) \end{aligned}$$

où  $q_1$  est une nouvelle semi-norme de Schwartz définie par la ligne précédente. Par conséquent  $q_1(f * \varphi_\varepsilon - f)$  tend vers 0, ce qui prouve que  $f * D^\alpha \in I$ . On montre de même que  $D^\alpha * f \in I$ .

## 7 Semi-groupe d'opérateurs engendré par le laplacien

**7.1. Définition :** Soit  $(X_0, X_1, \dots, X_n)$  une base de Jordan-Hölder. Définissons les opérateurs  $X_i = D_{X_i}$  et  $\Delta$  sur  $\mathcal{S}(G)$  par

$$X_i(f) = f * X_i = f * D_{X_i}$$

$$\Delta = - \sum_{i=0}^n X_i^2, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \Delta(f) = f * \Delta = - \sum_{i=0}^n f * D_{X_i}^2.$$

L'opérateur  $\Delta$  est appelé *laplacien*.

**7.2. Propriétés :** Dans la suite  $\mathcal{S}(G)$  sera considéré comme sous-espace dense de  $L^2(G)$ . Le produit scalaire et la norme seront ceux de  $L^2(G)$ . On a les propriétés suivantes pour  $f, g \in \mathcal{S}(G)$  :

- a)  $(f * X_i, g) = -(f, g * X_i)$   
 b)  $(f * \Delta, g) = (f, g * \Delta)$ , c'est-à-dire l'opérateur  $\Delta$  est formellement auto-adjoint  
 c)  $(f * \Delta, f) = \sum_{i=0}^n \|f * X_i\|_2^2 \geq 0$ , c'est-à-dire l'opérateur  $\Delta$  est positif.

Démonstration : a)

$$\begin{aligned} (f * X_i, g) &= \int f * X_i(x) \overline{g(x)} dx \\ &= \int \frac{d}{ds} f(x \exp(-sX_i)) \Big|_{s=0} \overline{g(x)} dx \\ &= \frac{d}{ds} \left[ \int f(x \exp(-sX_i)) \overline{g(x)} dx \right]_{s=0} \\ &= \frac{d}{ds} \left[ \int f(x) \overline{g(x \exp(sX_i))} dx \right]_{s=0} \\ &= -(f, g * X_i). \end{aligned}$$

Les propriétés b) et c) sont alors évidentes.

**7.3.** On définit une distribution  $T$  sur  $\mathcal{D} = C_c^\infty(G)$ , ensemble des fonctions  $C^\infty$  à support compact, par

$$\langle T, f \rangle = f * (-\Delta)(e)$$

$e$  désignant le neutre du groupe. La distribution  $T$  est un *laplacien généralisé*, c'est-à-dire vérifie

$$f \in \mathcal{D}, f \text{ réelle}, f(e) = \sup_{x \in G} f(x) > 0 \Rightarrow \langle T, f \rangle \leq 0.$$

Remarquons encore que l'opérateur  $T(f)$  défini par  $T(f) = f * T$  au sens des distributions, est donné par  $T(f) = f * (-\Delta)$ .

**7.4. Proposition :** L'opérateur  $T = -\Delta$  engendre un semi-groupe d'opérateurs  $H_t$  sur  $C_\infty(G)$ , ensemble des fonctions continues tendant vers 0 à l'infini. Ce semi-groupe d'opérateurs est borné par 1, d'opérateur infinitésimal  $-\Delta$ . Il est défini par un semi-groupe de mesures positives  $\mu_t$ , bornées par 1, telles que

$$\begin{aligned} H_t(f) &= f * \mu_t && \text{pour } f \in C_\infty(G) \\ H_t H_s(f) &= H_{t+s}(f), && \text{c'est-à-dire } \mu_s * \mu_t = \mu_{s+t} \\ \mu_t &\geq 0, \mu_t(G) \leq 1. \end{aligned}$$

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} (H_t(f) - f) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} (f * \mu_t - f) = f * (-\Delta) \text{ dans } C_c^\infty(G).$$

Démonstration : La démonstration de ([4], 4.2.) reste valable. Il suffit de remplacer les actions à gauche par des actions à droite. Les mesures  $\mu_t$  sont définies sur  $C_c^\infty(G)$  par  $\mu_t(f) = H_t(\tilde{f})(e)$  avec  $\tilde{f}(x) = f(x^{-1})$ . Elles sont ensuite étendues à  $C_c(G)$ , ensemble des fonctions continues à support compact, tout entier.

**7.5. Proposition :** Les mesures  $\mu_t$  sont en fait des fonctions positives  $h_t$ ,  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}_+^* \times G$ , vérifiant

$$\begin{aligned} \int_G h_t(x) dx &\leq 1 \\ h_t * h_s &= h_{t+s} \\ \left( \frac{\partial}{\partial t} + \Delta \right) h_t &= 0 \end{aligned}$$

c'est-à-dire les fonctions  $h_t$  sont solutions de l'équation de diffusion de la chaleur.

Suggestion : Comme en ([2], p. 56) on définit la distribution  $h$  par

$$\langle h, u \otimes v \rangle = \int_0^\infty \int_G u(x)v(t) d\mu_t(x) dt.$$

On montre qu'au sens des distributions on a

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \Delta \right) h = 0.$$

Puisque l'opérateur différentiel  $\frac{\partial}{\partial t} + \Delta$  est hypoelliptique,  $h$  est une fonction  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}_+^* \times G$ . On note  $h_t(x) = h(t, x)$ . On a  $h_t \geq 0$  et  $d\mu_t(x) = h_t(x) dx$ .

7.6. Puisque  $(-\Delta)$  est l'opérateur infinitésimal associé à  $H_t$  on a

$$\begin{aligned} H_t(f * (-\Delta)) &= (H_t(f)) * (-\Delta) \\ \iff f * (-\Delta) * h_t &= f * h_t * (-\Delta) \quad \forall f \in C_c^\infty(G). \end{aligned}$$

Par continuité, la dernière ligne reste valable pour tout  $f \in \mathcal{S}(G)$ .

7.7. D'après ([8], IV.4.2. et IV.5.8.), les fonctions  $h_t$  admettent les majorations suivantes :

$$\left| \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^m [h_t * D^\alpha(x)] \right| \leq C \cdot t^{-m - \frac{1}{2}|\alpha| - \frac{1}{2}d} \cdot e^{-\|x\|^2/4(1+a)t}$$

pour tout  $x \in G$  et tout  $t > 0$ . Le nombre  $d$  est une constante dépendant de la dimension de l'espace. En particulier,

$$\begin{aligned} |h_t * D^\alpha(x)| &\leq C \cdot t^{-\frac{1}{2}|\alpha| - \frac{1}{2}d} e^{-\|x\|^2/4(1+a)t} \\ |h_t(x)| &\leq C \cdot t^{-\frac{1}{2}d} \cdot e^{-\|x\|^2/4(1+a)t}. \end{aligned}$$

Remarques : a) Si  $x = \exp(\tilde{t}_0 X_0 + \dots + \tilde{t}_n X_n)$ , alors  $\|x\|^2 = \sum_{i=0}^n (\tilde{t}_i)^2$ . Dans ([8], IV.4.2.),  $\|x\|$  est remplacé par  $\zeta(x)$  où  $\zeta(x)$  désigne la distance de Carnot-Carathéodory. Etant donné que nous sommes partis d'une base de Jordan-Hölder, nous pouvons utiliser  $\|\cdot\|$ . De plus,  $a > 0$  est un nombre fixé arbitrairement et  $C$  est une constante qui dépend de  $a$ .

b) Dans ([8], IV.4.2.) intervient l'expression  $V(\sqrt{t})$ , désignant le volume de la boule de rayon  $\sqrt{t}$ . Dans ([8], IV.5.8.) on montre que  $V(t) \approx t^d$  si  $0 \leq t \leq 1$  et  $V(t) \approx t^D$  si  $t \geq 1$ . Puisque nous sommes partis d'une base de Jordan-Hölder,  $d = D$ .

7.8. **Extension à  $L^2(G)$**  : a) Par continuité les opérateurs  $H_t$  peuvent être étendus à  $L^2(G)$  tout entier. Il suffit de poser

$$\begin{aligned} H_t : L^2(G) &\longrightarrow L^2(G) \\ f &\longmapsto f * h_t. \end{aligned}$$

On obtient un semi-groupe d'opérateurs sur  $L^2(G)$ .

b) Pour tout  $f \in L^2(G)$  et tout  $t > 0$ ,

$$\|f * h_t\|_2 \leq C^{1/2} \cdot t^{-\frac{1}{4}d} \cdot \|f\|_2$$

c'est-à-dire

$$\|H_t\|_{op} \leq C^{1/2} \cdot t^{-\frac{1}{4}d}.$$

c) Pour tout  $f \in L^2(G)$  et tout  $t > 0$ ,

$$\|f * h_t\|_2 \leq \|f\|_2$$

c'est-à-dire

$$\|H_t\|_{op} \leq 1.$$

d) Pour tout  $f \in \mathcal{S}(G)$  et tout  $t > 0$ ,

$$f * (-\Delta) * h_t = f * h_t * (-\Delta)$$

et

$$f * (1 + \Delta)^N * h_t = f * h_t * (1 + \Delta)^N \quad \text{pour tout } N \in \mathbb{N}.$$

e) Pour tout  $f \in \mathcal{S}(G)$

$$\lim_{t \downarrow 0} \|f * h_t - f\|_\infty = 0$$

et

$$\lim_{t \downarrow 0} \|f * h_t - f\|_2 = 0.$$

Démonstration : b)

$$\|H_t\|_{op}^2 \leq \|h_t\|_2^2 \leq \|h_t\|_1 \cdot \|h_t\|_\infty \leq \|h_t\|_\infty \leq C \cdot t^{-\frac{1}{2}d}.$$

c) découle du fait que  $\|h_t\|_1 \leq 1$  pour tout  $t$ .

d) découle du fait que  $(-\Delta)$  est l'opérateur infinitésimal de  $H_t$ , voir ([9], p. 239).

e) Il suffit d'évaluer

$$\|f * h_t - f\|_\infty \leq t \cdot \left\| \frac{f * h_t - f}{t} - f * (-\Delta) \right\|_\infty + t \cdot \|f * (-\Delta)\|_\infty.$$

Le membre de droite tend vers 0 pour tout  $f \in C_c^\infty(G)$  par 7.4. Donc, par continuité,

$$\lim_{t \downarrow 0} \|f * h_t - f\|_\infty = 0 \quad \forall f \in \mathcal{S}(G).$$

De plus

$$\begin{aligned} \|f * h_t - f\|_2^2 &\leq \|f * h_t - f\|_1 \cdot \|f * h_t - f\|_\infty \\ &\leq 2\|f\|_1 \|f * h_t - f\|_\infty \end{aligned}$$

puisque  $\|h_t\|_1 \leq 1$ . D'où la deuxième limite.

## 8 Solutions $E_N$ de l'équation

$$(1 + \Delta)^N * E_N = E_N * (1 + \Delta)^N = \delta$$

8.1. Définition : Posons

$$E_N(x) = \frac{1}{(N-1)!} \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{N-1} h_t(x) dt.$$

8.2. On a :

$$x^\beta E_N * D^\alpha(x) = \frac{1}{(N-1)!} \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{N-1} x^\beta (h_t * D^\alpha)(x) dx$$

avec

$$\begin{aligned} & |e^{-t} t^{N-1} x^\beta (h_t * D^\alpha)(x)| \\ & \leq C \cdot e^{-t} t^{N-1-\frac{1}{2}|\alpha|-\frac{1}{2}d} e^{-\|x\|^2/4(1+a)t} |x^\beta|. \end{aligned}$$

Pour  $N$  tel que  $N-1-\frac{1}{2}|\alpha|-\frac{1}{2}d \geq 0$ , la fonction est intégrable au voisinage de 0. Lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$  l'existence de l'intégrale est due à la présence de  $e^{-t}$ . Calculons

$$\begin{aligned} \int_G |x^\beta E_N * D^\alpha(x)| dx & \leq \frac{1}{(N-1)!} \int_G \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{N-1} |x^\beta (h_t * D^\alpha)(x)| dt dx \\ & \leq \frac{1}{(N-1)!} \int_G \int_0^1 C \cdot e^{-t} \cdot t^{N-1-\frac{1}{2}|\alpha|-\frac{1}{2}d} |x^\beta| \cdot e^{-\|x\|^2/4(1+a)t} dt dx \\ & \quad + \frac{1}{(N-1)!} \int_G \int_1^{+\infty} C \cdot e^{-t} t^{N-1-\frac{1}{2}|\alpha|-\frac{1}{2}d} \cdot |x^\beta| \cdot e^{-\|x\|^2/4(1+a)t} dt dx. \end{aligned}$$

En effet,  $t \leq 1$  entraîne

$$\begin{aligned} 4(1+a)t & \leq 4(1+a) \\ \frac{1}{4(1+a)t} & \geq \frac{1}{4(1+a)} \\ e^{-\|x\|^2/4(1+a)t} & \leq e^{-\|x\|^2/4(1+a)}. \end{aligned}$$

La première intégrale s'écrit

$$\frac{1}{(N-1)!} \int_G |x^\beta| e^{-\|x\|^2/4(1+a)} dx \cdot \int_0^1 C \cdot e^{-t} t^{N-1-\frac{1}{2}|\alpha|-\frac{1}{2}d} dt$$



et converge pour  $N$  suffisamment élevé, c'est-à-dire pour

$$|\alpha| \leq 2N - 2 - d.$$

Dans la deuxième intégrale, effectuons le changement de variables suivant : Si  $x = \exp(\tilde{t}_0 X_0 + \dots + \tilde{t}_n X_n)$ , posons  $\tilde{t}_i = t \tilde{s}_i$  pour tout  $i$ . Remarquons que

$$\begin{aligned} dx &= d\tilde{t}_0 d\tilde{t}_1 \dots d\tilde{t}_n = t^{n+1} d\tilde{s}_0 d\tilde{s}_1 \dots d\tilde{s}_n \\ x^\beta &= \tilde{t}_0^{\beta_0} \tilde{t}_1^{\beta_1} \dots \tilde{t}_n^{\beta_n} = t^{|\beta|} \tilde{s}_0^{\beta_0} \tilde{s}_1^{\beta_1} \dots \tilde{s}_n^{\beta_n} \\ \|x\|^2 &= \tilde{t}_0^2 + \tilde{t}_1^2 + \dots + \tilde{t}_n^2 = t^2 (\tilde{s}_0^2 + \tilde{s}_1^2 + \dots + \tilde{s}_n^2). \end{aligned}$$

Donc la deuxième intégrale s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{1}{(N-1)!} \int \int_1^{+\infty} C \cdot e^{-t t^{N-1-\frac{1}{2}|\alpha|-\frac{1}{2}d}} \cdot t^{|\beta|} \tilde{s}_0^{\beta_0} \tilde{s}_1^{\beta_1} \dots \tilde{s}_n^{\beta_n} \cdot \\ e^{-t(\tilde{s}_0^2 + \tilde{s}_1^2 + \dots + \tilde{s}_n^2)/4(1+a)} t^{n+1} dt d\tilde{s}_0 d\tilde{s}_1 \dots d\tilde{s}_n. \end{aligned}$$

Puisque  $t \geq 1$ ,

$$e^{-t(\tilde{s}_0^2 + \tilde{s}_1^2 + \dots + \tilde{s}_n^2)/4(1+a)} \leq e^{-(\tilde{s}_0^2 + \tilde{s}_1^2 + \dots + \tilde{s}_n^2)/4(1+a)}$$

et la deuxième intégrale est majorée par

$$\begin{aligned} \frac{1}{(N-1)!} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \tilde{s}_0^{\beta_0} \tilde{s}_1^{\beta_1} \dots \tilde{s}_n^{\beta_n} \cdot e^{-(\tilde{s}_0^2 + \tilde{s}_1^2 + \dots + \tilde{s}_n^2)/4(1+a)} d\tilde{s}_0 d\tilde{s}_1 \dots d\tilde{s}_n \cdot \\ \int_1^{+\infty} C \cdot e^{-t t^{N-1-\frac{1}{2}|\alpha|-\frac{1}{2}d+|\beta|+n+1}} dt < +\infty. \end{aligned}$$

Ceci prouve donc la convergence de

$$\int_G |x^\beta E_N * D^\alpha(x)| dx$$

pour  $|\alpha| \leq 2N - 2 - d$ , c'est-à-dire pour  $N$  suffisamment élevé, pour  $\beta$  quelconque.

**8.3.** Pour  $N$  suffisamment élevé,  $E_N$  est donc dérivable un certain nombre de fois. Les dérivées admettent la même décroissance à l'infini que les fonctions de Schwartz. En particulier, pour tout  $f \in \mathcal{S}(G)$ ,  $E_N * f \in \mathcal{S}(G)$  et  $f * E_N \in \mathcal{S}(G)$ . En effet, les dérivations peuvent être toutes mises sur la fonction  $f$ . De plus  $E_N$  et  $(\frac{\partial}{\partial x})^\alpha f$  admettent la bonne décroissance à l'infini. D'ailleurs, pour toute fonction  $g$  à décroissance rapide et tout  $f \in \mathcal{S}(G)$  on a  $g * f \in \mathcal{S}(G)$  et  $f * g \in \mathcal{S}(G)$  par le même raisonnement.

8.4. Proposition : Pour tout  $f \in \mathcal{S}(G)$

$$f * (1 + \Delta)^N * E_N = f * E_N * (1 + \Delta)^N = f \quad \text{pour } N \text{ suffisamment élevé.}$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} & f * E_N * (1 + \Delta)^N(x) \\ &= \frac{1}{(N-1)!} \int_{\varepsilon}^{+\infty} e^{-t} t^{N-1} f * h_t * (1 + \Delta)^N(x) dt \\ & \quad + \frac{1}{(N-1)!} \int_0^{\varepsilon} e^{-t} t^{N-1} f * h_t * (1 + \Delta)^N(x) dt. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} & \left\| \int_0^{\varepsilon} e^{-t} t^{N-1} f * h_t * (1 + \Delta)^N(x) dt \right\|_2^2 \\ &= \left\| \int_0^{\varepsilon} e^{-t} t^{N-1} [f * (1 + \Delta)^N] * h_t(x) dt \right\|_2^2 \quad \text{par 7.8.} \\ &= \int_G \left| \int_0^{\varepsilon} e^{-t} t^{N-1} [f * (1 + \Delta)^N] * h_t(x) dt \right|^2 dx \\ &= \int_G \left| \int_0^{\varepsilon} [e^{-t} t^{\frac{1}{2}(N-1)}] [t^{\frac{1}{2}(N-1)} f * (1 + \Delta)^N] * h_t(x) dt \right|^2 dx \\ &\leq \int_G \left[ \int_0^{\varepsilon} e^{-2t} t^{N-1} dt \right] \cdot \left[ \int_0^{\varepsilon} t^{N-1} |f * (1 + \Delta)^N * h_t(x)|^2 dt \right] dx \\ &\leq \varepsilon^N \cdot \int_G \int_0^{\varepsilon} t^{N-1} |f * (1 + \Delta)^N * h_t(\bar{x})|^2 dt dx \\ &= \varepsilon^N \cdot \int_0^{\varepsilon} t^{N-1} \|f * (1 + \Delta)^N * h_t\|_2^2 dt \\ &\leq \varepsilon^N \int_0^{\varepsilon} t^{N-1} \|f * (1 + \Delta)^N\|_2^2 dt \\ &\leq \varepsilon^{2N} \cdot \|f * (1 + \Delta)^N\|_2^2. \end{aligned}$$

D'où

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{(N-1)!} \int_0^{\varepsilon} e^{-t} t^{N-1} f * h_t * (1 + \Delta)^N(x) dt = 0$$

dans  $L^2(G)$ . Il reste à évaluer

$$\frac{1}{(N-1)!} \int_{\varepsilon}^{+\infty} e^{-t} t^{N-1} f * h_t * (1 + \Delta)^N(x) dt$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(N-1)!} \int_{\varepsilon}^{+\infty} e^{-t} t^{N-1} f * h_t * (1 + \Delta)^{N-1}(x) dt \\
&\quad + \frac{1}{(N-1)!} \int_{\varepsilon}^{+\infty} e^{-t} t^{N-1} f * [h_t * \Delta] * (1 + \Delta)^{N-1}(x) dt \\
&= \frac{1}{(N-1)!} \int_{\varepsilon}^{+\infty} e^{-t} t^{N-1} f * h_t * (1 + \Delta)^{N-1}(x) dt \\
&\quad - \frac{1}{(N-1)!} \int_{\varepsilon}^{+\infty} e^{-t} t^{N-1} f * \frac{\partial h_t}{\partial t} * (1 + \Delta)^{N-1}(x) dt \\
&= \frac{1}{(N-1)!} \int_{\varepsilon}^{+\infty} e^{-t} t^{N-1} f * h_t * (1 + \Delta)^{N-1}(x) dt \\
&\quad - \frac{1}{(N-1)!} \int_{\varepsilon}^{+\infty} e^{-t} t^{N-1} \frac{\partial}{\partial t} [f * h_t * (1 + \Delta)^{N-1}](x) dt \\
&= \frac{1}{(N-1)!} \int_{\varepsilon}^{+\infty} e^{-t} t^{N-1} f * h_t * (1 + \Delta)^{N-1}(x) dt \\
&\quad - \frac{1}{(N-1)!} [e^{-t} t^{N-1} f * h_t * (1 + \Delta)^{N-1}(x)]_{\varepsilon}^{+\infty} \\
&\quad + \frac{1}{(N-1)!} \int_{\varepsilon}^{+\infty} [-e^{-t} t^{N-1} + (N-1)e^{-t} t^{N-2}] [f * h_t * (1 + \Delta)^{N-1}(x)] dt \\
&= \frac{1}{(N-2)!} \int_{\varepsilon}^{+\infty} e^{-t} t^{N-2} f * h_t * (1 + \Delta)^{N-1}(x) dt \\
&\quad + \frac{1}{(N-1)!} e^{-\varepsilon} \varepsilon^{N-1} f * h_{\varepsilon} * (1 + \Delta)^{N-1}(x) \\
&= \frac{1}{(N-2)!} \int_{\varepsilon}^{+\infty} e^{-t} t^{N-2} f * h_t * (1 + \Delta)^{N-1}(x) dt + F_{N-1}(x, \varepsilon)
\end{aligned}$$

en posant  $F_{N-1}(x, \varepsilon) = \frac{1}{(N-1)!} e^{-\varepsilon} \varepsilon^{N-1} f * h_{\varepsilon} * (1 + \Delta)^{N-1}(x)$ .

En effet

$$\begin{aligned}
&|e^{-t} t^{N-1} f * h_t * (1 + \Delta)^{N-1}(x)| \\
&\leq e^{-t} t^{N-1} \int |f(xy^{-1})| \cdot |h_t * (1 + \Delta)^{N-1}(y)| dy \\
&\leq C_1 \cdot e^{-t} \cdot t^{N-1} \cdot t^{-\frac{1}{2}d} \int |f(xy^{-1})| \cdot e^{-\|y\|^2/4(1+a)t} dy \quad \text{pour } t \geq 1 \\
&\hspace{15em} \text{par 7.7.} \\
&\leq C_1 \cdot e^{-t} \cdot t^{N-1-\frac{1}{2}d} \int |f(xy^{-1})| dy \quad \text{pour } t \geq 1 \\
&\leq C_1 \cdot e^{-t} \cdot t^{N-1-\frac{1}{2}d} \|f\|_1 \quad \text{pour } t \geq 1
\end{aligned}$$

avec une nouvelle constante  $C_1$ . Donc

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t} t^{N-1} f * h_t * (1 + \Delta)^{N-1}(x) = 0$$

pour tout  $x \in G$ . Montrons encore que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_{N-1}(x, \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{(N-1)!} e^{-\varepsilon} \varepsilon^{N-1} f * h_\varepsilon * (1 + \Delta)^{N-1}(x) = 0$$

dans  $L^2(G)$ . En effet

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{1}{(N-1)!} \cdot e^{-\varepsilon} \cdot \varepsilon^{N-1} f * h_\varepsilon * (1 + \Delta)^{N-1} \right\|_2 \\ &= \frac{1}{(N-1)!} \cdot e^{-\varepsilon} \cdot \varepsilon^{N-1} \|f * (1 + \Delta)^{N-1} * h_\varepsilon\|_2 \quad \text{par 7.8.} \\ &\leq \frac{1}{(N-1)!} \cdot e^{-\varepsilon} \cdot \varepsilon^{N-1} \|f * (1 + \Delta)^{N-1}\|_2 \quad \text{par 7.8.} \end{aligned}$$

Cette dernière expression tend bien vers 0 avec  $\varepsilon$  pour  $N-1 \geq 1$ . Nos calculs montrent que

$$\begin{aligned} & f * E_N * (1 + \Delta)^N(x) \\ &= \frac{1}{(N-2)!} \int_\varepsilon^{+\infty} e^{-t} t^{N-2} f * h_t * (1 + \Delta)^{N-1}(x) dt + F_{N-1}(x, \varepsilon) \\ & \quad + \frac{1}{(N-1)!} \int_0^\varepsilon e^{-t} t^{N-1} f * h_t * (1 + \Delta)^N(x) dt \\ &= \frac{1}{(N-3)!} \int_\varepsilon^{+\infty} e^{-t} t^{N-3} f * h_t * (1 + \Delta)^{N-2}(x) dt + F_{N-2}(x, \varepsilon) \\ & \quad + F_{N-1}(x, \varepsilon) + \frac{1}{(N-1)!} \int_0^\varepsilon e^{-t} t^{N-1} f * h_t * (1 + \Delta)^N(x) dt \\ &= \int_\varepsilon^{+\infty} e^{-t} f * h_t * (1 + \Delta)(x) dt + F_1(x, \varepsilon) + F_2(x, \varepsilon) + \dots + F_{N-2}(x, \varepsilon) \\ & \quad + F_{N-1}(x, \varepsilon) + \frac{1}{(N-1)!} \int_0^\varepsilon e^{-t} t^{N-1} f * h_t * (1 + \Delta)^N(x) dt. \end{aligned}$$

Tous les termes à l'exception du premier tendent vers 0 dans  $L^2(G)$ . Montrons finalement que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\varepsilon^{+\infty} e^{-t} f * h_t * (1 + \Delta)(x) dt = f(x)$$

dans  $L^2(G)$ . En effet

$$\begin{aligned}
& \int_{\varepsilon}^{+\infty} e^{-t} f * h_t * (1 + \Delta)(x) dt \\
&= \int_{\varepsilon}^{+\infty} e^{-t} f * h_t(x) dt - \int_{\varepsilon}^{+\infty} e^{-t} f * \frac{\partial h_t}{\partial t}(x) dt \\
&= \int_{\varepsilon}^{+\infty} e^{-t} f * h_t(x) dt - \int_{\varepsilon}^{+\infty} e^{-t} \frac{\partial}{\partial t} [f * h_t(x)] dt \\
&= \int_{\varepsilon}^{+\infty} e^{-t} f * h_t(x) dt - [e^{-t} f * h_t(x)]_{\varepsilon}^{+\infty} + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \left(\frac{\partial}{\partial t} e^{-t}\right) f * h_t(x) dt \\
&= e^{-\varepsilon} f * h_{\varepsilon}(x)
\end{aligned}$$

étant donné que

$$\begin{aligned}
|e^{-t} f * h_t(x)| &= |e^{-t} \int f(xy^{-1}) h_t(y) dy| \\
&\leq e^{-t} \cdot C \cdot t^{-\frac{1}{2}d} \int |f(xy^{-1})| \cdot e^{-\|y\|^2/4(1+a)t} dy \\
&\leq C \cdot e^{-t} \cdot t^{-\frac{1}{2}d} \int |f(xy^{-1})| dy \\
&= C \cdot e^{-t} \cdot t^{-\frac{1}{2}d} \|f\|_1.
\end{aligned}$$

Cette dernière expression tend vers 0 si  $t$  tend vers  $+\infty$ . Finalement

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|f * h_{\varepsilon} - f\|_2 = 0 \quad \text{par 7.8.}$$

et

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} e^{-\varepsilon} f * h_{\varepsilon} = f \quad \text{dans } L^2(G).$$

Ceci prouve que

$$f * E_N * (1 + \Delta)^N = f$$

dans  $L^2(G)$ , donc dans  $\mathcal{S}(G)$  étant donné que les deux membres appartiennent à  $\mathcal{S}(G)$ . Pour terminer, remarquons que

$$\begin{aligned}
& f * (1 + \Delta)^N * E_N(x) \\
&= \frac{1}{(N-1)!} \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{N-1} f * (1 + \Delta)^N * h_t(x) dt \\
&= \frac{1}{(N-1)!} \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{N-1} f * h_t * (1 + \Delta)^N(x) dt \quad \text{par 7.8.} \\
&= f * E_N * (1 + \Delta)^N(x) \\
&= f(x).
\end{aligned}$$

**8.5. Corollaire :** Pour tout  $f \in \mathcal{S}(G)$

$$E_N * (1 + \Delta)^N * f = (1 + \Delta)^N * E_N * f = f \quad \text{pour } N \text{ suffisamment élevé.}$$

Démonstration : Soit  $(\varphi_\varepsilon)$  une unité approchée dans  $\mathcal{S}(G)$ . Par 8.4.

$$\varphi_\varepsilon * [E_N * (1 + \Delta)^N * f] = [\varphi_\varepsilon * E_N * (1 + \Delta)^N] * f = \varphi_\varepsilon * f.$$

D'où, en passant à la limite dans  $\mathcal{S}(G)$ ,

$$E_N * (1 + \Delta)^N * f = f.$$

On montre de même que

$$(1 + \Delta)^N * E_N * f = f.$$

**8.6. Proposition :** Soit  $I$  un idéal de  $\mathcal{S}(G)$  fermé pour la topologie de  $\mathcal{S}(G)$ , respectivement pour la topologie définie par une ou plusieurs semi-normes de Schwartz particulières. Pour toute fonction  $g$  à décroissance rapide,

$$f \in I \Rightarrow g * f \in I \quad \text{et} \quad f * g \in I.$$

En particulier,

$$f \in I \Rightarrow E_N * f \in I \quad \text{et} \quad f * E_N \in I \quad \text{pour } N \text{ suffisamment élevé.}$$

Démonstration : Par 8.3. on sait que  $g * f \in \mathcal{S}(G)$  et  $f * g \in \mathcal{S}(G)$ . Soit  $(\varphi_\varepsilon)$  une unité approchée. Alors

$$\varphi_\varepsilon * (g * f) = (\varphi_\varepsilon * g) * f \in I$$

puisque  $f \in I$  et  $\varphi_\varepsilon * g \in \mathcal{S}(G)$  par 8.3. Comme

$$\lim_{\varepsilon} [\varphi_\varepsilon * (g * f)] = g * f$$

on a  $g * f \in I$ . De même  $f * g$ .

## 9 Actions sur $\mathcal{S}(G)$

9.1. Définitions : a) Soit  $d$  une dérivation de  $\mathfrak{g}$ . Définissons  $D = \exp d$  sur  $\mathfrak{g}$  par

$$D(X) = \sum_0^{\infty} \frac{1}{k!} d^k(X).$$

b) Comme  $d$  est une application linéaire sur un espace de dimension finie on peut définir  $\|d\|$  par

$$\|d\| = \sup_{\|X\| \leq 1} \|d(X)\|$$

où  $\|X\|$  désigne la norme euclidienne sur  $\mathfrak{g}$  identifié à  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Alors

$$\|D\| \leq \sum_0^{\infty} \frac{1}{k!} \|d^k\| \leq e^{\|d\|}.$$

De même on considère  $\exp td$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$  et

$$\|\exp td\| \leq e^{\|td\|} = e^{|t|\|d\|}.$$

c) On fait agir  $D$  sur le groupe  $G$  par

$${}^D(\exp X) = \exp(D(X)) \quad \text{pour tout } X \in \mathfrak{g}.$$

Comme  $d$  est une dérivation,  $D$  définit un homomorphisme de groupe.

d) L'action de  $D$  sur  $L^1(G)$  est définie par

$$({}^D f)(x) = \Delta(D)f({}^D x)$$

où  $\Delta(D)$  définit une fonction modulaire telle que

$$\|{}^D f\|_1 = \|f\|_1.$$

En effet l'application

$$f \longmapsto \int f({}^D x) dx$$

définit une intégrale de Haar puisque

$$\begin{aligned} \int ({}_a f)({}^D x) dx &= \int f(a^{-1} {}^D x) dx = \int f({}^D ({}^{D^{-1}}(a^{-1})x)) dx \\ &= \int f({}^D x) dx \quad \text{par } x \mapsto {}^{D^{-1}} a \cdot x. \end{aligned}$$

Donc il existe une constante  $C$  telle que

$$\int f({}^D x) dx = C \cdot \int f(x) dx, \quad C > 0.$$

Posons  $\Delta(D) = \frac{1}{C}$ . D'où

$$\int {}^D f(x) dx = \Delta(D) \int f({}^D x) dx = \int f(x) dx.$$

En remplaçant  $f$  par  $|f|$  on a donc  $\|{}^D f\|_1 = \|f\|_1$ .

**9.2. Proposition :** Si  $f \in \mathcal{S}(G)$ , alors  ${}^D f \in \mathcal{S}(G)$ .

Démonstration :

$$\|{}^D f\|_{\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}} = \int |\tilde{t}^{\tilde{\beta}} \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{t}}\right)^{\tilde{\alpha}} f({}^D(\exp(\tilde{t}_0 X_0 + \dots + \tilde{t}_n X_n)))| \Delta(D) |d\tilde{t}_0 \dots d\tilde{t}_n|.$$

Or comme l'action de  $D$  sur  $\mathfrak{g}$  est linéaire, il existe une matrice  $A(D)$  telle que l'action de  $D$  sur  $\mathfrak{g}$  soit donnée par

$$\begin{pmatrix} \tilde{t}'_0 \\ \vdots \\ \tilde{t}'_n \end{pmatrix} = A(D) \begin{pmatrix} \tilde{t}_0 \\ \vdots \\ \tilde{t}_n \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\begin{aligned} |\tilde{t}'_j| &\leq \|\tilde{t}'_0 X_0 + \dots + \tilde{t}'_n X_n\| \\ &\leq \|A(D)\| \left(\sum_0^n \tilde{t}_i^2\right)^{1/2} \\ &\leq e^{\|d\|} \left(\sum_0^n \tilde{t}_i^2\right)^{1/2}. \end{aligned}$$

De plus,

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{t}'_j} = \sum_{i=0}^n \frac{\partial}{\partial \tilde{t}_i} \cdot A(D)_{ij}.$$

On continue de proche en proche pour déterminer  $\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{t}}\right)^{\tilde{\alpha}}$ .

De plus,  $D^{-1} = \exp(-d)$  existe et  $A(D^{-1}) = A(D)^{-1}$ . D'où

$$|\tilde{t}_j| \leq \|\tilde{t}_0 X_0 + \dots + \tilde{t}_n X_n\|$$



$$\begin{aligned} &\leq \|A(D^{-1})\| \left(\sum_0^n \tilde{t}'_i\right)^{1/2} \\ &\leq e^{\|d\|} \left(\sum_0^n \tilde{t}'_i\right)^{1/2} \leq e^{\|d\|} \left(1 + \sum_0^n \tilde{t}'_i\right) \end{aligned}$$

car  $\| -d \| = \|d\|$ . Remarquons encore que

$$|A(D)_{ij}| \leq \|A(D)\| \leq e^{\|d\|}$$

et que

$$d\tilde{t}'_0 \dots d\tilde{t}'_n = |\det A(D^{-1})| d\tilde{t}'_0 \dots d\tilde{t}'_n$$

avec

$$|\det A(D^{-1})| \leq C_1 \cdot e^{(n+1)\|d\|}$$

puisque  $|A(D^{-1})_{ij}| \leq e^{\|d\|}$  quels que soient  $i, j$ . Finalement on trouve une majoration de la forme

$$\begin{aligned} \|{}^D f\|_{\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}} &\leq C \cdot e^{M\|d\|} \sum_{|\tilde{\gamma}|=|\tilde{\alpha}|} \int \left(1 + \sum_0^n \tilde{t}'_i\right)^{|\tilde{\beta}|} \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{t}'_i}\right)^{\tilde{\gamma}} \\ &\quad f(\exp(\tilde{t}'_0 X_0 + \dots + \tilde{t}'_n X_n)) |d\tilde{t}'_0 \dots d\tilde{t}'_n| \\ &\leq C \cdot e^{M\|d\|} \|f\| \ll +\infty \end{aligned}$$

où  $\| \cdot \|$  désigne une nouvelle norme de Schwartz. Donc  ${}^D f \in \mathcal{S}(G)$ .

**9.3. Corollaire :** Si  $\lim f_\nu = f$  dans  $\mathcal{S}(G)$ , alors  $\lim {}^D f_\nu = {}^D f$  dans  $\mathcal{S}(G)$ .

**9.4. Proposition :** Pour tout  $f \in \mathcal{S}(G)$  et toute dérivation  $d$  fixée, notons

$${}^u f = \exp u d f.$$

On a alors

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow 0} {}^u f &= f \\ \lim_{u \rightarrow a} {}^u f &= {}^a f \end{aligned}$$

dans  $\mathcal{S}(G)$ , donc en particulier dans la topologie définie par une ou plusieurs semi-normes de Schwartz particulières.

Démonstration : Montrons que

$$\lim_{u \rightarrow 0} \|{}^u f - f\|_{\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}} = 0.$$

Or

$$\|{}^u f - f\|_{\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}} = \int \left| \tilde{t}^{\tilde{\beta}} \left( \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \right)^{\tilde{\alpha}} \left[ f \left( {}^u (\exp(\tilde{t}_0 X_0 + \dots + \tilde{t}_n X_n)) \right) \Delta(u) - f(\exp(\tilde{t}_0 X_0 + \dots + \tilde{t}_n X_n)) \right] \right| d\tilde{t}_0 \dots d\tilde{t}_n.$$

Par continuité

$$\lim_{u \rightarrow 0} \left| \tilde{t}^{\tilde{\beta}} \left( \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \right)^{\tilde{\alpha}} \left[ f \left( {}^u (\exp(\tilde{t}_0 X_0 + \dots + \tilde{t}_n X_n)) \right) \Delta(u) - f(\exp(\tilde{t}_0 X_0 + \dots + \tilde{t}_n X_n)) \right] \right| = 0 \quad \text{pour tout } \tilde{t}.$$

Notons par  $D_j$  la dérivée d'une fonction par rapport à la  $j^{\text{me}}$  coordonnée. Alors

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \tilde{t}_j} f \left[ {}^u (\exp(\tilde{t}_0 X_0 + \dots + \tilde{t}_n X_n)) \right] \\ &= \sum_{k=0}^n D_k f \left[ {}^u (\exp(\tilde{t}_0 X_0 + \dots + \tilde{t}_n X_n)) \right] \cdot A(u)_{kj} \end{aligned}$$

avec  $|A(u)_{kj}| \leq \|A(\exp ud)\| \leq e^{|u| \|d\|}$ . Donc

$$\begin{aligned} & \left| \left( \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \right)^{\tilde{\alpha}} \left[ f \left( {}^u (\exp(\tilde{t}_0 X_0 + \dots + \tilde{t}_n X_n)) \right) \right] \right| \\ & \leq C \cdot e^{|\tilde{\alpha}| |u| \|d\|} \sum_{|\tilde{\gamma}|=|\tilde{\alpha}|} \left| (D^{\tilde{\gamma}} f) \left( {}^u (\exp(\tilde{t}_0 X_0 + \dots + \tilde{t}_n X_n)) \right) \right| \end{aligned}$$

où  $D^{\tilde{\gamma}}$  désigne à nouveau les dérivées de  $f$  par rapport aux coordonnées correspondantes, dérivées qui sont ensuite évaluées en  ${}^u (\exp(\tilde{t}_0 X_0 + \dots + \tilde{t}_n X_n))$ . Puisque  $f$  est une fonction de Schwartz, il existe  $C_M, M$  tels que

$$\begin{aligned} |D^{\tilde{\gamma}} f(\exp(\tilde{t}_0 X_0 + \dots + \tilde{t}_n X_n))| & \leq C_M \cdot \left( \frac{1}{1 + \|(\tilde{t}_0 X_0 + \dots + \tilde{t}_n X_n)\|^2} \right)^M \\ & \text{pour tout } \tilde{\gamma} \text{ tel que } |\tilde{\gamma}| = |\tilde{\alpha}|. \end{aligned}$$

Donc

$$\left| D^{\tilde{\gamma}} f \left( \exp(\tilde{t}_0 X_0 + \dots + \tilde{t}_n X_n) \right) \right| \leq C_M \cdot \left( \frac{1}{1 + \|A(u)(\tilde{t}_0 X_0 + \dots + \tilde{t}_n X_n)\|^2} \right)^M.$$

Remarquons que  $A(u) = \text{Id} + B(u)$  avec  $\lim_{u \rightarrow 0} \|B(u)\| = 0$ , puisque  $A(u)$  est la matrice de  $\exp(ud) = \sum_0^\infty \frac{1}{k!} u^k d^k$  et

$$\|B(u)\| = \left\| \sum_1^\infty \frac{1}{k!} u^k d^k \right\| \leq \sum_1^\infty \frac{1}{k!} |u|^k \|d\|^k = e^{|u|\|d\|} - 1.$$

Pour  $\varepsilon > 0$ , il existe donc  $\zeta$  tel que

$$\begin{aligned} |u| < \zeta &\Rightarrow \|B(u)\| \leq \varepsilon \\ &\Rightarrow \|B(u)(\tilde{t}_0 X_0 + \dots + \tilde{t}_n X_n)\| \leq \varepsilon \|\tilde{t}_0 X_0 + \dots + \tilde{t}_n X_n\| \\ &\Rightarrow \|A(u)(\tilde{t}_0 X_0 + \dots + \tilde{t}_n X_n)\| \\ &\quad \geq \|\tilde{t}_0 X_0 + \dots + \tilde{t}_n X_n\| - \|B(u)(\tilde{t}_0 X_0 + \dots + \tilde{t}_n X_n)\| \\ &\quad \geq (1 - \varepsilon) \|\tilde{t}_0 X_0 + \dots + \tilde{t}_n X_n\|. \end{aligned}$$

De plus, par continuité de  $\Delta(u)$ ,

$$|u| < \zeta \Rightarrow |\Delta(u)| \leq C_1.$$

Soit en plus  $N$  le nombre de  $\tilde{\gamma}$  tels que  $|\tilde{\gamma}| = |\tilde{\alpha}|$ . Alors

$$\begin{aligned} &\left| \tilde{t}^\beta \left( \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \right)^{\tilde{\alpha}} [f(\exp(\tilde{t}_0 X_0 + \dots + \tilde{t}_n X_n)^u) \Delta(u) - f(\exp(\tilde{t}_0 X_0 + \dots + \tilde{t}_n X_n))] \right| \\ &\leq C \cdot C_1 \cdot C_M \cdot N \cdot e^{|\tilde{\alpha}|\zeta\|d\|} \left( \frac{1}{1 + (1 - \varepsilon)^2 \|\tilde{t}_0 X_0 + \dots + \tilde{t}_n X_n\|^2} \right)^M \cdot |\tilde{t}^\beta| \\ &\quad + \left| \tilde{t}^\beta \left( \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \right)^{\tilde{\alpha}} f(\exp(\tilde{t}_0 X_0 + \dots + \tilde{t}_n X_n)) \right| \end{aligned}$$

ce qui représente une fonction intégrable pour  $M$  suffisamment grand. Le théorème de Lebesgue permet alors de conclure que

$$\lim_{u \rightarrow 0} \|{}^u f - f\|_{\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}} = 0.$$

Puisque les normes  $\|\cdot\|_{\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}}$  engendrent la topologie de  $\mathcal{S}(G)$ , on a la même limite dans  $\mathcal{S}(G)$ .

La deuxième limite se calcule par

$$\lim_{u \rightarrow a} {}^u f = \lim_{u \rightarrow a} ({}^{u-a} f) = \lim_{v \rightarrow 0} {}^v f = {}^a f.$$

**9.5. Proposition :** Pour tout  $f \in \mathcal{S}(G)$  et toute dérivation  $d$

$$\lim_{(u,b) \rightarrow (t,a)} {}^u({}_b f) = {}^t({}_a f)$$

dans  $\mathcal{S}(G)$ , donc en particulier dans la topologie définie par une ou plusieurs semi-normes de Schwartz particulières. Ici  ${}^u({}_b f)$  signifie

$$\begin{aligned} {}^u({}_b f)(x) &= ({}_b f)({}^u x) \Delta(u) \\ &= f(b^{-1} {}^u x) \Delta(u) \end{aligned}$$

avec  $u \in \mathbb{R}$ ,  $b \in G$ .

Démonstration : Par 4.6. et 9.4.

**9.6.** De même

$$\lim_{(u,b) \rightarrow (t,a)} {}^u(f_b) = {}^t(f_a).$$

**9.7.** D'ailleurs, si  $d_1, d_2, \dots, d_k$  sont différentes dérivations,

$$\lim_{\substack{(u_1, \dots, u_k, b) \\ \rightarrow (t_1, \dots, t_k, a)}} \exp u_1 d_1 \dots \exp u_k d_k (f_b) = \exp t_1 d_1 \dots \exp t_k d_k (f_a)$$

dans  $\mathcal{S}(G)$ , donc en particulier dans la topologie définie par une ou plusieurs semi-normes de Schwartz particulières.

**9.8. Définition :** a) Soit  $H$  un sous-groupe de  $G$ . Considérons l'ensemble des fonctions

$$\alpha : \mathbb{R}^k \times H \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$(s_1, \dots, s_k; b) \longmapsto \alpha(s_1, \dots, s_k; b)$$

telles que quels que soient  $a_1, \dots, a_k$  dans  $\mathbb{R}$  la fonction

$$(s_1, \dots, s_k; b) \longmapsto e^{a_1 s_1 + \dots + a_k s_k} \alpha(s_1, \dots, s_k; b)$$

soit une fonction de Schwartz sur  $\mathbb{R}^k \times H$ . Notons l'ensemble de ces fonctions par  $ES(\mathbb{R}^k \times H)$ .

b) Soient  $d_1, \dots, d_k$  des dérivations de  $\mathfrak{g}$ . Pour tout  $f \in \mathcal{S}(G)$  définissons  $\alpha(f)$  par

$$\alpha(f)(x) = \int_H \int_{\mathbb{R}^k} \exp s_1 d_1 \dots \exp s_k d_k (f_b)(x) \alpha(s_1, \dots, s_k; b) ds_1 \dots ds_k db.$$

**9.9. Proposition :** Pour tout  $f \in \mathcal{S}(G)$ ,  $\alpha(f) \in \mathcal{S}(G)$ . Pour toute semi-norme de Schwartz  $|||\cdot|||$  sur  $\mathcal{S}(G)$ , il existe une semi-norme de Schwartz  $|||\cdot|||\sim$  sur  $\mathcal{S}(G)$  et une semi-norme  $|||\cdot|||\approx$  sur  $ES(\mathbb{R}^k \times H)$  telles que

$$|||\alpha(f)||| \leq |||\alpha|||\approx \cdot |||f|||\sim.$$

Démonstration : Nous pouvons supposer que  $|||\cdot|||$  est de la forme  $|||\cdot|||\sim_{\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}}$ , puisque toute semi-norme de Schwartz est majorée par une combinaison linéaire de telles semi-normes. Donc

$$\begin{aligned} |||\alpha(f)||| &= \int \left| \tilde{t}^{\tilde{\beta}} \left( \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \right)^{\tilde{\alpha}} \alpha(f) (\exp(\tilde{t}_0 X_0 + \dots + \tilde{t}_n X_n)) \right| d\tilde{t}_0 \dots d\tilde{t}_n \\ &\leq \int \int_H \int_{\mathbb{R}^k} \left| \alpha(s_1, \dots, s_k; b) \tilde{t}^{\tilde{\beta}} \left( \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \right)^{\tilde{\alpha}} \right. \\ &\quad \left. \exp s_1 d_1 \dots \exp s_k d_k (f_b) (\exp(\tilde{t}_0 X_0 + \dots + \tilde{t}_n X_n)) \right| ds_1 \dots ds_k db d\tilde{t}_0 \dots d\tilde{t}_n \\ &= \int \int_H \int_{\mathbb{R}^k} \left| \alpha(s_1, \dots, s_k; b) \tilde{t}^{\tilde{\beta}} \left( \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \right)^{\tilde{\alpha}} (f_b) \left[ \exp s_1 d_1 \dots \exp s_k d_k \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \exp(\tilde{t}_0 X_0 + \dots + \tilde{t}_n X_n) \right] \right| \Delta_1(s_1) \dots \Delta_k(s_k) ds_1 \dots ds_k db d\tilde{t}_0 \dots d\tilde{t}_n \end{aligned}$$

en notant  $\Delta_i(s_i) = \Delta(\exp s_i d_i)$ . Effectuons à présent la même évaluation de  $\left( \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \right)^{\tilde{\alpha}}$  qu'en 9.2. en considérant successivement les actions de  $\exp s_1 d_1, \dots, \exp s_k d_k$ . On trouve une majoration de la forme

$$\begin{aligned} &\left| \left( \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \right)^{\tilde{\alpha}} (f_b) \left[ \exp s_1 d_1 \dots \exp s_k d_k \exp(\tilde{t}_0 X_0 + \dots + \tilde{t}_n X_n) \right] \right| \\ &\leq C_1 \cdot e^{|\alpha| \|s_1\| \|d_1\| + \dots + |s_k| \|d_k\|} \\ &\quad \cdot \sum_{|\tilde{\gamma}|=|\tilde{\alpha}|} \left| D^{\tilde{\gamma}} (f_b) \left[ \exp s_1 d_1 \dots \exp s_k d_k \exp(\tilde{t}_0 X_0 + \dots + \tilde{t}_n X_n) \right] \right| \end{aligned}$$

où  $D^{\tilde{\gamma}}$  désigne simplement les dérivées par rapport aux coordonnées correspondantes de la fonction  $f_b$ . Introduisons cette expression dans la majoration de  $|||\alpha(f)|||$  et effectuons le changement de coordonnées

$$\exp(\tilde{t}_0 X_0 + \dots + \tilde{t}_n X_n) \longmapsto \exp(-s_k d_k) \dots \exp(-s_1 d_1) \exp(\tilde{t}_0 X_0 + \dots + \tilde{t}_n X_n),$$

Les majorations des nouvelles coordonnées calculées en 9.2. montrent que lors de ce changement de coordonnées l'ancienne expression  $|\tilde{t}^{\tilde{\beta}}|$  admet une majoration de la forme

$$e^{|\tilde{\beta}| \|s_1\| \|d_1\| + \dots + |s_k| \|d_k\|} \cdot (1 + \|\tilde{t}\|^2)^{|\tilde{\beta}|}.$$

Le jacobien du changement de coordonnées est lui aussi majoré par

$$C_2 \cdot e^{(n+1)(|s_1||d_1|+\dots+|s_k||d_k|)}.$$

Finalement, il existe des entiers positifs  $M_1, \dots, M_k$  tels que

$$\begin{aligned} |||\alpha(f)||| &\leq C \int_H \int_{\mathbb{R}^k} |\alpha(s_1, \dots, s_k; b) e^{M_1|s_1|+\dots+M_k|s_k|} \cdot \\ &\quad \left( \sum_{|\bar{\gamma}|=|\bar{\alpha}|} \int |(1 + \|\tilde{t}\|^2)^{|\bar{\beta}|} \cdot D^{\bar{\gamma}}(f_b)(\exp(\tilde{t}_0 X_0 + \dots + \tilde{t}_n X_n)| \right. \\ &\quad \left. d\tilde{t}_0 \dots d\tilde{t}_n \right) ds_1 \dots ds_k \cdot db \\ &= \int_H \int_{\mathbb{R}^k} |\alpha(s_1, \dots, s_k; b) e^{M_1|s_1|+\dots+M_k|s_k|} |||f_b|||_1 ds_1 \dots ds_k \cdot db \end{aligned}$$

où  $|||\cdot|||_1$  désigne une nouvelle semi-norme de Schwartz. Puisque toute semi-norme de Schwartz est majorée par une semi-norme  $Nq$ , il existe  $N$  tel que

$$\begin{aligned} |||f_b|||_1 &\leq Nq(f_b) \\ &\leq \omega^N(b^{-1}) Nq(f) \\ &= \omega^N(b) Nq(f). \end{aligned}$$

En effet, remarquons que le voisinage  $U$  utilisé dans la définition de  $\tau$  et  $\omega$  est symétrique. Donc  $\tau(b^{-1}) = \tau(b)$  et  $\omega(b^{-1}) = \omega(b)$ . D'où

$$\begin{aligned} |||\alpha(f)||| &\leq \left( \int_H \int_{\mathbb{R}^k} |\alpha(s_1, \dots, s_k; b) e^{M_1|s_1|+\dots+M_k|s_k|} \omega^N(b) \right. \\ &\quad \left. ds_1 \dots ds_k \cdot db \right) \cdot Nq(f) \\ &= |||\alpha|||^\approx \cdot Nq(f) \end{aligned}$$

par définition de  $|||\cdot|||^\approx$ . En effet remarquons que  $\omega^N(b)$  est majoré par un polynôme et que  $|||\alpha|||^\approx < +\infty$  vu les hypothèses sur  $\alpha$ . Ceci achève la démonstration au cas où  $|||\cdot||| = |||\cdot|||_{\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}}$ . Si  $|||\cdot|||$  est majoré par une combinaison linéaire de  $|||\cdot|||_{\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}}$ , on refait le même raisonnement pour chaque  $|||\cdot|||_{\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}}$  et on prend  $N$  suffisamment élevé de manière à majorer toutes les semi-normes  $|||\cdot|||_1$  obtenues. Cela permet alors de déterminer  $|||\cdot|||^\approx$ , en prenant pour  $M_1, \dots, M_k$  les plus grands coefficients obtenus.

9.10. Proposition : Pour tout  $f \in \mathcal{S}(G)$ ,  $\alpha \in ES(\mathbb{R}^k \times H)$

$$\alpha(f) \in \overline{\langle \exp s_1 d_1 \dots \exp s_k d_k (f_b) \mid (s_1, \dots, s_k; b) \in \mathbb{R}^k \times H \rangle}$$

sous-espace vectoriel fermé engendré par les  $\exp s_1 d_1 \dots \exp s_k d_k (f_b)$ , la topologie considérée étant soit la topologie de  $\mathcal{S}(G)$ , soit la topologie engendrée par une ou plusieurs semi-normes de Schwartz particulières.

Démonstration : Afin de simplifier les notations, supposons  $k = 1$ . La démonstration générale se fait exactement selon la même méthode. D'après les calculs effectués en 9.9., on sait que

$$\begin{aligned} |||\alpha(f)||| &\leq \int_H \int_{\mathbb{R}} |||s(f_b)||| \cdot |\alpha(s, b)| ds db \\ &\leq |||f||| \sim \cdot C \cdot \int_H \int_{\mathbb{R}} |\alpha(s, b)| e^{M|s|} \omega^N(b) ds db. \end{aligned}$$

Soit  $\varepsilon > 0$  donné. Il existe un compact  $K$  de  $\mathbb{R} \times H$  de la forme  $K_1 \times K_2$  avec  $K_1$  compact de  $\mathbb{R}$  et  $K_2$  compact de  $H$ , tel que

$$\int \int_{(s,b) \notin K} |\alpha(s, b)| e^{M|s|} \omega^N(b) ds db < \frac{\varepsilon}{2 |||f||| \sim \cdot C}.$$

Ensuite on peut recouvrir  $K$  par un nombre fini d'ensembles mesurables disjoints  $S_i \times B_j$  et choisir  $(s_i, b_j) \in S_i \times B_j$  tels que

$$\begin{aligned} &|||\alpha(f) - \sum_{i,j} \alpha(s_i, b_j) s_i(f_{b_j}) \text{mes}(S_i \times B_j)||| \\ &= ||| \int \int_{(s,b) \notin K} \alpha(s, b) s(f_b) ds db + \int \int_K \alpha(s, b) s(f_b) ds db \\ &\quad - \sum_{i,j} \int \int_{S_i \times B_j} \alpha(s_i, b_j) s_i(f_{b_j}) ds db ||| \\ &\leq ||| \int \int_{(s,b) \notin K} \alpha(s, b) s(f_b) ds db ||| \\ &\quad + \sum_{i,j} ||| \int \int_{S_i \times B_j} [\alpha(s, b) s(f_b) - \alpha(s_i, b_j) s_i(f_{b_j})] ds db ||| \\ &\leq \int \int_{(s,b) \notin K} |\alpha(s, b)| |||s(f_b)||| ds db \\ &\quad + \sum_{i,j} \int \int_{S_i \times B_j} |||\alpha(s, b) s(f_b) - \alpha(s_i, b_j) s_i(f_{b_j})||| ds db \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C \cdot \|f\| \cdot \int \int_{(s,b) \notin K} |\alpha(s,b)| e^{M|s|} \omega^N(b) ds db \\
&\quad + \sum_{i,j} \int \int_{S_i \times B_j} \| |\alpha(s,b)^s(f_b) - \alpha(s_i, b_j)^{s_i}(f_{b_j})| \| ds db \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

Ceci résulte de la continuité de l'application ([6], ex. 23 p. 85)

$$(s, b) \longmapsto \alpha(s, b)^s(f_b)$$

sur le compact  $K$ . Puisqu'une telle approximation est possible dans toute semi-norme de Schwartz et qu'un nombre fini de semi-normes peuvent toujours être majorées par une semi-norme unique, on a le résultat.

**9.11. Définition :** On dit qu'un idéal  $I$  est invariant pour l'action de  $d_1, \dots, d_k$  si et seulement si

$$f \in I, s_1, \dots, s_k \in \mathbb{R} \Rightarrow \exp s_1 d_1 \dots \exp s_k d_k f \in I.$$

D'ailleurs dans ce cas on a même  $\exp s_1 d_1 \dots \exp s_k d_k(f_b) \in I$  si  $I$  est fermé, étant donné que tout idéal fermé est invariant par translations.

**9.12. Proposition :** Soit  $I$  un idéal fermé (dans  $\mathcal{S}(G)$ , resp. dans la topologie définie par une ou plusieurs semi-normes particulières), invariant par l'action de  $d_1, \dots, d_k$ . Alors

$$f \in I, \alpha \in ES(\mathbb{R}^k \times H) \Rightarrow \alpha(f) \in I.$$

Démonstration : Par 9.9. puisque, par hypothèse,

$$\overline{\langle \exp s_1 d_1 \dots \exp s_k d_k(f_b) | (s_1, \dots, s_k; b) \in \mathbb{R}^k \times H \rangle} \subset I.$$

**9.13. Exemple :** a) Soit  $H$  un groupe de Lie connexe simplement connexe d'algèbre de Lie  $\mathfrak{h}$ . Soit  $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}$  le radical nilpotent de  $\mathfrak{h}$  et soit  $G = \exp \mathfrak{g}$ . Alors  $G$  est un groupe de Lie nilpotent, sous-groupe normal de  $H$ . Le groupe  $H$  agit sur  $G$  et sur  $\mathcal{S}(G)$  par : Pour  $E \in \mathfrak{h}$ ,  $X \in \mathfrak{g}$  on définit

$$\begin{aligned}
E(X) &= [E, X] \quad \text{crochet de Lie dans } \mathfrak{h} \\
(\exp E)(X) &= \sum_0^{\infty} \frac{1}{k!} (\text{ad}_{\mathfrak{g}} E)^k(X)
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
x = \exp X \in G &\Rightarrow (\exp E)x = \exp[(\exp E)(X)] \\
&= (\exp E) \cdot x \cdot (\exp E)^{-1} \\
&= (\exp E) \cdot x \cdot (\exp(-E)).
\end{aligned}$$

D'où l'action correspondante sur  $\mathcal{S}(G)$ .

b) L'étude d'actions sur un groupe nilpotent peut être utile dans le but suivant : Les propriétés des groupes nilpotents, de leurs algèbres  $L^1(G)$  et  $\mathcal{S}(G)$ , de leurs représentations irréductibles commencent à être bien connues. Avant de passer à l'étude de ces propriétés sur une classe de groupes plus grande, comme par exemple la classe des groupes exponentiels, on a parfois intérêt à passer par l'étape intermédiaire des groupes nilpotents soumis à l'action d'un groupe plus vaste.

**9.14. Application de la construction  $\alpha(f)$  :** a) Cette construction peut être utile dans certaines démonstrations par récurrence. A titre d'exemple, soit  $G$  un groupe nilpotent, soit  $z$  un élément central de  $\mathfrak{g}$ , soit  $d$  une dérivation telle que  $d(z) = z$ . Définissons

$$\begin{aligned}
{}^t f &= (\exp td) f \quad t \in \mathbb{R} \\
\tilde{f}^2(x, t) &= \int_{\mathbb{R}} {}^t f(x \exp rz) e^{ir} dr.
\end{aligned}$$

On montre facilement que  $\tilde{f}^2(x \exp az, t) = e^{-ia} \tilde{f}^2(x, t)$  et que  $\tilde{f}^2$  est une fonction de Schwartz en  $x \in G / \exp \mathbb{R}z = \tilde{G}$ .

b) La construction de  $\alpha(f)$  permet, dans certains cas, de séparer les variables dans  $\tilde{f}^2(x, t)$ . En effet on montre facilement que

$$\widetilde{\alpha(f)^2}(x, t) = \int \tilde{f}^2(x, s) \hat{\alpha}^2(s - t, -e^{-s}) ds.$$

Soient alors  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$  et  $\psi \in ES(\mathbb{R})$  et montrons qu'il existe  $\alpha \in ES(\mathbb{R}^2)$  tel que

$$\begin{aligned}
\hat{\alpha}^2(s - t, -e^{-s}) &= \psi(t)\varphi(s) \\
\iff \hat{\alpha}^2(u, -e^{-s}) &= \psi(s - u)\varphi(s).
\end{aligned}$$

Il suffit de prendre par exemple

$$\hat{\alpha}^2(u, v) = \begin{cases} 0 & \text{pour } v \geq 0 \\ \psi(-\ln(-v) - u)\varphi(-\ln(-v)) & \text{pour } v < 0. \end{cases}$$

Puisque  $\varphi$  est à support compact et que  $\psi \in ES(\mathbb{R})$ ,  $\hat{\alpha}^2 \in ES(\mathbb{R}^2)$ . On détermine alors  $\alpha$  par transformée de Fourier inverse, c'est-à-dire

$$\alpha(u, w) = \int_{-\infty}^0 \psi(-\ell n(-v) - u) \varphi(-\ell n(-v)) e^{-i w v} dv$$

et  $\alpha \in ES(\mathbb{R}^2)$ . Pour une telle fonction  $\alpha$ ,

$$\begin{aligned} \widetilde{\alpha(f)^2}(x, t) &= \psi(t) \int \tilde{f}^2(x, s) \varphi(s) ds \\ &= \psi(t) f_1(x) \end{aligned}$$

ce qui donne la séparation des variables en question.

c) Finalement

$$\begin{aligned} \widetilde{\alpha[\alpha(f)]^2}(x, t) &= \psi(t) \int \widetilde{\alpha(f)^2}(x, s) \varphi(s) ds \\ &= \psi(t) \int \psi(s) \int \tilde{f}^2(x, u) \varphi(u) du \varphi(s) ds \\ &= \psi(t) \left( \int \psi(s) \varphi(s) ds \right) \int \tilde{f}^2(x, u) \varphi(u) du \\ &= \psi(t) f_1(x) \\ &= \widetilde{\alpha(f)^2}(x, t) \end{aligned}$$

à condition de choisir  $\varphi$  et  $\psi$  tels que  $\int \psi(s) \varphi(s) ds = 1$ . Donc  $\widetilde{\alpha[\alpha(f)]^2} = \widetilde{\alpha(f)^2}$ , c'est-à-dire modulo la transformation  $f \mapsto \tilde{f}^2$ ,  $\alpha$  a les propriétés d'un projecteur.

d) On peut faire des constructions analogues dans d'autres cas.

## Bibliographie

- [1] J. Dixmier, Opérateurs de rang fini dans les représentations unitaires, Publ. Math. IHES (1960), 305-317.
- [2] G.B. Folland and E.M. Stein, Hardy Spaces on Homogeneous Groups, Mathematical Notes 28, Princeton University Press, Princeton (1982).

- [3] J. Ludwig, Minimal  $C^*$ -Dense Ideals and Algebraically Irreducible Representations of the Schwartz-Algebra of a Nilpotent Lie group, Harmonic Analysis, Springer-Verlag (1987), 209-217.
- [4] J. Ludwig, Les Semi-groupes de Mesures sur les Groupes de Lie, Travaux mathématiques II, Publications du Centre Universitaire de Luxembourg (1990), 1-20.
- [5] G. Rosenbaum und J. Samuel, Die Darstellungstheorie nilpotenter Lie'scher Gruppen, Diplomarbeit, Bielefeld (1982).
- [6] W. Rudin, Functional Analysis, Mc Graw-Hill Book Company (1973).
- [7] L. Schwartz, Théorie des distributions, Hermann, Paris (1973).
- [8] N.Th. Varopoulos, L. Saloff-Coste, T. Coulhon, Analysis and Geometry on Groups, Cambridge University Press (1992).
- [9] K. Yosida, Functional Analysis, Springer-Verlag (1971).

Séminaire de mathématique  
Centre Universitaire de Luxembourg  
162A, avenue de la Faïencerie  
L-1511 Luxembourg