Revista de Filosofía
Vol. 27 Núm. 1 (2002): 113-133 ISSN: 0034-8244

Algunas consideraciones sobre el argumento de indispensabilidad en matemáticas

Antonio CABA SÁNCHEZ
(Universidad de Málaga)

Resumen

La tesis de indispensabilidad se toma habitualmente como un argumento (posiblemente el mejor) para defender el realismo matemático. La propuesta se asocia con Quine y Putnam, y establece que, en tanto en cuanto las entidades matemáticas se muestran indispensables para nuestras mejores teorías físicas, comparten el estatus ontológico de las entidades científicas. Pese a que el argumento ha sufrido ataques desde prácticamente todas las direcciones, algunos autores continúan tratando de defenderlo. En este artículo se analizan de manera especial las críticas de Elliot Sober al argumento y se sugiere que debería ser abandonado o, al menos, reformulado.

Palabras clave: Indispensabilidad de las matemáticas, Colyvan, Sober

Abstract

The thesis of indispensability is usually taken to be an argument (probably the best one) for defending mathematical realism. The claim is associated with Quine and Putnam and asserts that, as far as the mathematical entities are indispensable to our best physical theories, they share the ontological status of scientific entities. Despite the fact that the thesis has suffered attacks from seemingly all directions, some authors keep trying to defend it. This paper tries mainly to analyse Elliot Sober's criticism against the argument and it is suggested that must be abandoned or, at least, re-formulated.

Keywords: Indispensability of mathematics, Colyvan, Sober.

I

El argumento de indispensabilidad es una de las razones que con mayor frecuencia esgrimen los defensores del realismo en matemáticas para justificar sus planteamientos y, aunque es traído a colación en muchas ocasiones, la caracterización que de él se da no es tan uniforme como cabría esperar. Pese a todo, si bien pueden encontrarse diversas formulaciones del argumento, no se puede negar que existe una casi total coincidencia en su origen histórico. Éste se suele situar en algunos puntos de vista de Quine y Putnam, llegándose incluso a repetir las citas utilizadas para su presentación.[1] Así, para plantear el punto de vista quineano se suele indicar la siguiente:

> "El discurso científico habitualmente interpretado está tan irremediablemente comprometido con objetos abstractos –naciones, especies, números, funciones, conjuntos– como con manzanas y otros cuerpos. Todas estas cosas figuran como valores de las variables en nuestro sistema global del mundo. Los números y las funciones contribuyen a la teoría física tan genuinamente como lo hacen las partículas hipotéticas" (Quine 1981, pp. 149-150).

Lo que parece estar defendiendo Quine es que las entidades matemáticas resultan tan indispensables para nuestras mejores teorías científicas como puedan serlo las entidades teóricas que los científicos suelen utilizar. Conviene observar, no obstante, que en esta cita aparece enmascarada una fuerte tesis ontológica, puesto que, si como Quine admite, tanto unas entidades como otras figuran como valores de las variables de la teoría científica en cuestión, esto nos obliga –si atendemos a su propio criterio ontológico– a considerarlas como realmente existentes. En cualquier caso, Quine –y también Putnam– rechaza el 'doble estándar' de quien se muestra realista respecto de las entidades teóricas y al mismo tiempo niega la existencia a las entidades matemáticas. El instrumentalismo (o ficcionalismo, según se mire) no puede ir tan lejos como para ignorar los constituyentes lógico-matemáticos de los que hace uso la teoría. Para apoyar este punto es frecuente encontrar esta otra cita:

> "Una teoría autocontenida que podamos contrastar con la experiencia incluye, en realidad, no sólo sus diversas hipótesis teóricas de la denominada ciencia natural, sino también aquellas porciones de lógica y matemática de las que hace uso" (Quine 1963, p. 367).

---

[1] Véanse, por ejemplo, Colyvan 2001, Maddy 1992 o Resnik 1997, por decir sólo algunos casos.

Aquí se esquematiza también otra clásica caracterización quineana, a saber, la ausencia de distinción tajante entre los contenidos lógico-matemáticos y los estrictamente factuales de una teoría, que acarreó en su momento un rechazo frontal a la distinción carnapiana entre verdad analítica y sintética. También se encuentra en germen el paso al holismo: dado que ambos tipos de enunciados son indiscernibles, no son contrastados individualmente; más bien "nuestros enunciados acerca del mundo externo se someten como cuerpo total al tribunal de la experiencia sensible, y no individualmente" (Quine 1953, p. 75). Es conocido que este principio es una adaptación quineana de otra no menos conocida tesis de Quine y sugiere que las teorías se confirman o disconfirman como un todo. Ciñéndonos a lo que nos interesa, esto quiere decir que cualesquiera matemáticas que se utilicen para desarrollar la teoría quedarán confirmadas o disconfirmadas con ella.

Por su parte, Putnam ha manifestado en diversas ocasiones que, en la hipótesis de que pudiera deslindarse lo matemático de lo empírico en determinadas teorías, a la hora de justificar la creencia en las componentes matemáticas de la teoría, nos veríamos obligados a apelar a la misma evidencia que empleamos para justificar la porción empírica de la teoría. A su juicio, la integración entre matemáticas y física es tal que "no es posible ser un realista respecto a la teoría física y ser nominalista respecto a la teoría matemática" (Putnam 1975, p. 74). Pero este autor se muestra aún más radical:

> "La cuantificación sobre entidades matemáticas es indispensable para la ciencia, tanto para la formal como para la física; por tanto deberíamos aceptar semejante cuantificación; pero esto nos compromete a aceptar la existencia de las entidades matemáticas en cuestión. Este tipo de argumento proviene, por supuesto, de Quine, quien ha enfatizado durante años tanto la indispensabilidad de la cuantificación sobre entidades matemáticas como la deshonestidad intelectual de negar la existencia de lo que se supone diariamente" (Putnam 1971 p. 347).

Pero también el naturalismo se encuentra presente en la formulación de la tesis. De acuerdo con este punto de vista la ciencia natural, por su propia naturaleza, es falible y corregible, pero no tiene que responder ante ningún tribunal supracientífico, y por ello "no necesita ninguna justificación que vaya más allá de la observación y del método hipotético-deductivo" (Quine 1981, p. 72). Los naturalistas mantienen que no hay filosofía primera y que las empresas filosófica y científica se encuentran en continuidad. La ciencia proporciona una historia completa del mundo, y la filosofía no posee un estatus privilegiado respecto a ella. Desde esta perspectiva se excluye, por tanto, cualquier método no científico para determinar lo que existe, o habría que decir, lo que deberíamos creer que existe. Si los dioses de Homero proporcionaran una mejor explicación del mundo habría que aceptarlos, pero mientras que no sea así, nos veremos obligados a seguir recurriendo a nuestras mejores teorías científicas y a comprometernos ontológicamente con las entidades que representan sus variables. Así entendido, el naturalismo nos da razones para creer en las entidades de tales teorías y no en otras.

II

El consenso que parece existir acerca de las citas que se presentan para introducir el argumento no se mantiene, ni a la hora de interpretarlo, ni cuando se extraen consecuencias a partir de él. En ocasiones se llega incluso a plantear la posibilidad de modificarlo con objeto de defender una determinada posición filosófica. En este apartado analizaremos brevemente dos autores en los que esto se pone particularmente de manifiesto, como son Penelope Maddy y Michael Resnik. Comentaremos asimismo el punto de vista de Colyvan, que pretende mantenerlo casi en los mismos términos originales.

En su *Realism in mathematics* de 1990, Penelope Maddy defendió el argumento de indispensabilidad como uno de los soportes fundamentales para su realismo conjuntista.[2] Más tarde, en su libro de 1997, *Naturalism in mathematics*, ha puesto de manifiesto que el argumento ya no la convence, aduciendo básicamente que no se compadece ni con la práctica matemática, ni con el papel que las matemáticas desempeñan en el ámbito de la ciencia. Así de lacónica se muestra Maddy al respecto: “Muchos filósofos contemporáneos (incluida yo misma) operan dentro de los parámetros de los argumentos de indispensabilidad; y provienen tanto del naturalismo como del realismo. Sin embargo, la atención a la práctica (científica y matemática) me ha conducido recientemente a dudar de su eficacia” (1992, p. 275). En otro trabajo (Caba 2000) he tenido ocasión de estudiar cómo todas estas razones pivotan sobre una manifiesta tensión entre los dos pilares del argumento: el naturalismo y el holismo. Como resultado de su análisis, Maddy aceptará el primero mientras que se ve obligada a rechazar el segundo al constatar que “las vicisitudes de las matemáticas aplicadas no parecen afectar la metodología matemática de la manera que lo harían si las aplicaciones fueran de hecho los árbitros de la ontología matemática” (1997 p. 159). Su atención se

[2] En Alemán 1995 hay una contundente crítica a este punto de vista de Maddy, pero la modificación de su planteamiento hace innecesario extenderse más en este punto.

ha centrado –y se sigue centrando, de hecho– en la problemática de los resultados de independencia en teoría de conjuntos, que los matemáticos tratan de resolver –según Maddy– sin tener en consideración la posible aplicabilidad de los resultados a la ciencia empírica. Si el argumento fuera correcto, o más precisamente, si el holismo fuera una condición inevitable del mismo, entonces, los teórico-conjuntistas tendrían que tener un ojo puesto en el desarrollo de la mecánica cuántica, por ejemplo, ya que, si como esta teoría sugiere, el espacio-tiempo es discreto, entonces todas las teorías matemáticas que se fundamentan en el continuo, el propio análisis, no tendrían aplicaciones en la ciencia empírica. Lo cual, evidentemente, no es el caso.

Para Maddy, la metodología que el matemático emplea en su trabajo diario no necesita justificación externa ni tampoco ajena a las propias matemáticas; su legitimidad no puede depender del papel que desempeñan en la ciencia empírica. Por ello, ha dejado de considerar al realismo como una opción viable y se ha visto forzada a buscar una filosofía de las matemáticas que cuadre mejor con la práctica matemática y que legitime a los teórico-conjuntistas en sus consideraciones sobre las cuestiones de independencia. Su nueva propuesta es un naturalismo que "se extienda a la práctica matemática en el mismo respecto que el naturalismo quineano se extiende a la práctica científica" (1997 p. 184). Desde esta nueva perspectiva el argumento de indispensabilidad, en especial el holismo confirmacional que presupone, ya no puede mantenerse en los mismos términos en los que ella misma lo defendió con anterioridad. De hecho, en trabajos anteriores se había planteado incluso la posibilidad de modificar el argumento con objeto de mantener, si no la letra, sí al menos el espíritu quineano que lo motivó. Partiendo de las aplicaciones exitosas de las matemática en la ciencia y suponiendo que hay cosas matemáticas, es preciso concretar una metodología que nos permita, con la mayor precisión posible, determinar qué objetos matemáticos existen y qué propiedades comparten. Para Maddy está claro: esos métodos han de ser los mismos que se utilizan en matemáticas y que emplean habitualmente los matemáticos; son precisamente tales métodos los que "han producido de manera efectiva todas las matemáticas, incluyendo la parte tan aplicada en la ciencia física" (Maddy 1992, p. 280).

Ante las críticas al argumento por parte de Maddy y de Sober (que detallaremos más adelante), Resnik ha pretendido recuperar la tesis introduciendo algunas modificaciones, que –como veremos– tampoco se encuentran libres de crítica. En última instancia, el 'argumento de indispensabilidad pragmático' que propone trata de obviar el holismo confirmacional que parece exigir el principio en su formulación primitiva. Además, según el propio

Resnik, su planteamiento es diferente al de Quine-Putnam, ya que no exige que nuestras mejores teorías científicas sean verdaderas y ni siquiera que estén confirmadas. Con todo ello trata de justificar un estructuralismo de corte netamente realista que viene defendiendo desde hace tiempo. Para lograr su objetivo tendría que mostrar que las entidades matemáticas a las que refieren las variables utilizadas por los matemáticos en sus teorías existen. Por otra parte, haciendo uso del criterio ontológico de Quine, esa existencia quedaría probada si se consiguiera poner de manifiesto que la matemática es verdadera. Esta consecuencia algo más 'modesta' es la que Resnik cree obtener por medio de su argumentación. En última instancia, lo que hace es debilitar el planteamiento de Quine-Putnam estableciendo que, en lugar de afirmar que la evidencia para la ciencia constituye también evidencia para la matemática, sea la justificación para hacer ciencia lo que justifique que aceptemos como verdaderas las matemáticas tal como son utilizadas en la ciencia (*Cf.* Resnik 1997, p. 48. Este mismo planteamiento se encuentra también en Resnik 1997, p. 171).

En una primera instancia, Resnik presentó un esquema de su argumento en ocho tesis lógicamente encadenadas, cuyo último paso presentaba problemas que él mismo no dudó en advertir (*Cf.* 1995, pp. 169 ss.). Se trataba de concluir que la matemática es verdadera a partir del hecho ya probado de que estamos justificados para creer que es así, es decir, "el agujero (*gap*) que tratamos de rellenar es el que hay entre estar justificados para creer algo y que este algo sea verdadero" (*o.c.* p. 172). Alemán ya puso de manifiesto que hay un claro *non sequitur* en este paso (1999, pp.53-54), pero con anterioridad a esta crítica, el propio Resnik había modificado su argumento suprimiendo el paso problemático. Así en *Mathematics as a science of patterns*, su razonamiento elimina el último eslabón de la cadena argumentativa concluyendo con la afirmación de que estamos justificados al tomar como verdaderas las matemáticas (*Cf.* 1997, p. 48). Pero aún hay otra afirmación problemática que Resnik sí mantiene explícitamente en las dos versiones de su argumento y que indica que "estamos justificados al extraer conclusiones desde la ciencia y dentro de ella sólo si estamos justificados al tomar como verdaderas las matemáticas utilizadas en la ciencia" (1997, p. 47. También 1995, p. 171). El problema se centra ahora en adoptar un criterio de verdad capaz de mantener semejante aseveración y que no sea el de verdad como correspondencia, tradicionalmente asociado con el realismo, pero que se encuentra plagado de dificultades. Para ello, Resnik propone una teoría de la verdad como desentrecomillado y que además sea inmanente. Pero según ha puesto de manifiesto igualmente Alemán, esta interpretación de la verdad no es válida para apoyar el realismo, puesto que también resulta compatible con el antirrealismo (*cf.* Alemán 1999 pp. 54-59).

En un reciente trabajo dedicado específicamente al tema que nos ocupa,[3] Mark Colyvan ha recogido las opiniones más destacadas acerca del papel que ha jugado en las últimas décadas el argumento de la indispensabilidad de las matemáticas en el dominio de la ciencia. No se desprende de su lectura que el autor pretenda poner el punto final a una discusión que ha dominado gran parte de la filosofía de las matemáticas de las últimas décadas. Parece más bien que busca una reorganización y clasificación de opiniones divergentes, con objeto de pertrechar su propia defensa del argumento en términos similares a los que Quine y Putnam utilizaron para expresarlo originalmente. Por este motivo se advierte un cierto sesgo en la exposición, hasta el punto de que en ocasiones se simplifican en exceso opiniones contrarias al argumento con objeto de someterlas después a una crítica más contundente. Por ello, creo que una gran parte de las respuestas que Colyvan ofrece en su libro a las objeciones que se han planteado al argumento no son todo lo consistentes que pretende y que (salvo si nos atenemos al ámbito de lo metafísico) la tesis resulta difícil de mantener y de conciliar con el talante actual que parece vivir la práctica matemática. Formulada así, esta opinión no deja de ser una afirmación gratuita que merece una justificación, pero no es éste el lugar para llevarla a cabo. Lo que pretendo ahora es resumir la presentación del argumento que hace Colyvan e indicar algunas de las razones que ofrece para continuar defendiéndolo.

A su juicio, el argumento puede expresarse en la forma de una argumentación lógica válida que consta de dos premisas y una conclusión. La primera premisa (P1) establece que: “Deberíamos tener compromiso ontológico con todas las entidades que son indispensables para nuestras mejores teorías científicas (y sólo con tales entidades)”. La segunda premisa (P2) afirma: “Las entidades matemáticas son indispensables para nuestras mejores teorías científicas”. Si se admiten ambas premisas es preciso aceptar igualmente la conclusión (C) “Deberíamos tener compromiso ontológico con las entidades matemáticas”. Para Colyvan la primera premisa es crucial y es ella la que se sigue de las dos importantes tesis quineanas ya citadas, el naturalismo y el holismo confirmacional. En concreto, el naturalismo nos daría el ‘sólo’ y el holismo nos proporcionaría el ‘todos’ de P1. Conviene observar que el enunciado (C) posee un carácter normativo y marcadamente metafísico; no en

[3] *The indispensability of mathematics*, Oxford University Press, Oxford, 2001. En este libro aparecen reflejadas algunas de las publicaciones anteriores de Colyvan sobre el asunto. Por ello no he creído oportuno incluirlas en las Referencias.

balde el propio Colyvan señala que sus intereses son metafísicos y no meramente semánticos (*Cf.* Colyvan 2001, p.3). Pero, como quiera que la argumentación anterior es correcta, las posibles críticas no pueden ir dirigidas a la conclusión, sino a las premisas. Esto significa que aquellos que cuestionan el argumento de indispensabilidad están obligados a rechazar y/o a modificar alguna de ellas. En concreto, la mayor parte de los que no admiten el argumento no aceptan P1, bien totalmente, bien alguna de las dos relaciones de implicación que se establecen. Pero también hay quienes aceptan P1, pero rechazan P2.

A juicio de Colyvan, entre los del primer grupo se encuentra Maddy, quien, como hemos indicado, se ha mostrado reticente a aceptar el holismo supuesto en la premisa P1. Por consiguiente, según el análisis de Colyvan, a lo que Maddy se opone es a una de las implicaciones de dicha premisa, precisamente la que –según él– no es determinante para la defensa del argumento en los términos en los que la va a desarrollar. En cambio, sí se requiere una forma específica de naturalismo que se manifiesta como crucial (*ibid.*, p. 18) para continuar manteniendo el argumento. Por todo esto, los desacuerdos con Maddy no son tan graves como para erradicar el argumento en su totalidad. Por su parte, Field (1980) sí acepta P1, con todo lo que eso trae consigo, pero, en cambio, no acepta que la matemática sea indispensable para el desarrollo de la ciencia. Bien conocido es que intentó una formulación nominalista de la mecánica newtoniana prescindiendo de toda referencia a entidades abstractas, en la que se exigía que la matemática utilizada fuera conservativa antes que verdadera. También es conocido que tal intento se vio sometido a gran cantidad de críticas, algunas de las cuales señalaban que tales entidades acababan introduciéndose subrepticiamente en el sistema. Y es en esta dirección en la que trata Colyvan de obviar el rechazo de Field al argumento de indispensabilidad: aun admitiendo que la nominalización auspiciada por Field pudiera extenderse a otros ámbitos de la física, difícilmente se podría mantener que las entidades abstractas se han mostrado dispensables en el desarrollo de la física (*ibid.*, p. 89).También discute Colyvan el rechazo de Sober al argumento, pero como pienso que las objeciones de este último tienen un mayor peso, dedicaré a ellas el próximo apartado.

III

Creo que Elliot Sober ha dado razones decisivas para rechazar el argumento de indispensabilidad, al menos por lo que respecta a las implicaciones metafísicas que algunos autores quieren obtener a partir de él. A mi juicio, sus consideraciones no se han tenido suficientemente en cuenta y se han citado sólo de modo colateral. Lo que pretendo en este apartado es poner de manifiesto que las razones que da Sober para prescindir de él siguen siendo válidas, pese a la manifiesta oposición de algunos defensores del argumento, especialmente Colyvan. Trataré de mostrar cómo gran parte de esas críticas se desvanece y, aunque tengo mis dudas sobre el principio probabilístico que Sober toma como punto de partida, creo que sus objeciones continúan siendo las más fuertes. Como quiera que el rechazo de Sober se basa principalmente en el punto de vista que él mismo ha denominado empirismo contrastivo (*contrastive empirism*), convendría comentar, aunque sea brevemente, este planteamiento.

Como ya hemos indicado, en ocasiones la tesis de indispensabilidad ha sido considerada por los realistas como el único argumento posible para defender su posición. Si este argumento resulta atractivo, indica Sober (1993, p. 36), es porque particulariza para el caso de las matemáticas una forma de proceder que parece central en la actividad de la ciencia como un todo. Si tenemos derecho a creer en la existencia de genes o de quarks, por ejemplo, es porque la suposición de tal existencia resulta indispensable para explicar lo que observamos. De hecho, no podemos explicar lo observado sin recurrir a teorías que afirmen la existencia de tales cosas. Según esto, el realismo matemático aprovecha las mismas fuentes que parecen nutrir al realismo respecto a la biología y a la física. Se justificaría, por tanto, que la matemática corriera, ontológicamente hablando, la misma suerte que la ciencia en cuya formulación aparece.

Como no podía ser de otra manera, los críticos al realismo científico se han opuesto, en general, a los argumentos de indispensabilidad, entre otras razones, por considerarlos circulares. En particular, Sober se detiene de manera especial en las razones que da Van Fraasen para justificar este rechazo (*Cf.* Van Fraasen 1980, pp. 34 ss.). Como es conocido,[4] este último niega tesis centrales del realismo, tales como que la verdad sea el criterio del éxito de una teoría o que aceptar una teoría sea como creer en su verdad. Para Van Fraasen, ni tener razones para aceptar una teoría exige tener razones para creer en su verdad, ni el fin de la ciencia es el de lograr teorías verdaderas. Lo que persigue la ciencia, más bien, son teorías empíricamente adecuadas, o sea, teorías en las que la verdad se limita exclusivamente a lo observable. Como apostilla Diéguez “la pregunta por la verdad o la falsedad de la teoría

[4] Resumo aquí la exposición sobre el pensamiento de Van Fraasen que Diéguez presenta en su 1998, pp.155 ss.

Revista de Filosofía
Vol. 27 Núm. 1 (2002): 113-133

debe plantearse sólo en el nivel observacional, no en el nivel de las entidades teóricas no observables, que no serían más que ficciones para facilitar la explicación de los fenómenos" (Diéguez 1998, p. 158). Según el empirismo constructivo ir más allá de este nivel y extraer conclusiones sobre la verdad en el ámbito inadecuado es aventurar opiniones que trascienden, tanto lo que la ciencia demanda, como lo que la evidencia puede proporcionar. Es posible que tanto los números, como los genes o los quarks sean supuestos indispensables, pero para un empirista constructivo este hecho no es una evidencia suficiente como para que tales cosas existan. Por consiguiente, Van Fraasen se ve obligado a suspender el juicio respecto a la verdad de enunciados cuyas variables hacen referencia a entidades inobservables. Para Sober esta actitud no es sino una forma de agnosticismo respecto a la existencia de entidades inobservables, puesto que, siguiendo con nuestro ejemplo, tanto la teoría de números, como la genética o la física, cuantifican sobre cosas que no podemos observar (*Cf.* Sober 1993, p. 36).

No obstante, tal como lo ve Sober, tanto el realismo, persuadido por los argumentos de indispensabilidad, como el empirismo constructivo con su carga de agnosticismo, mantienen un punto de acuerdo, a saber, que las entidades supuestas (*posits*) en cualquiera de los ámbitos valen o fracasan conjuntamente. Dicho de otra manera, en algún sentido ambos planteamientos mantienen una visión holista de la ciencia, la cual habría que aceptar si ésas fueran las únicas alternativas posibles. Pero, como defiende Sober, no es ése el caso. Si algo pone de manifiesto el empirismo contrastivo es que mezclar las matemáticas con la ciencia empírica resulta bastante problemático. No cabe duda de que los argumentos abductivos proporcionan un importante núcleo de verdad para los argumentos en genética y en física, pero no hay un trasunto semejante para el caso de las matemáticas (*Cf. o.c.*, p. 37).

Sober se cuestiona por qué algunas teorías, o ciertas partes de ellas, son consideradas como indispensables por los científicos. La conclusión a la que llegará es que, en última instancia, van a ser los datos los que discriminen entre hipótesis alternativas sobre la explicación de un mismo fenómeno u observación. En última instancia, si una determinada hipótesis dice que una observación es altamente probable, mientras que otra hipótesis confiere escasa probabilidad a esa misma observación, se tiende de modo natural a concluir que la primera hipótesis es indispensable, es decir, que es la única que no confiere un carácter milagroso a la observación. Por tanto, el carácter de indispensabilidad, según lo entiende Sober, es algo que surge tras la comparación probabilística de hipótesis alternativas que compiten y que pretenden explicar un mismo fenómeno o justificar una determinada observación.

Este principio comparativo admite un enunciado matemático en lo que Sober ha denominado *Likelihood Principle*,[5] entendido como un medio para elegir entre diversas teorías. El principio establece que: "La observación O favorece la hipótesis H_1 sobre la hipótesis H_2 si y sólo si $p(O/H_1)>p(O/H_2)$" (Sober 1993, p. 38). Es decir, una misma observación O favorece una determinada hipótesis H_1 sobre otra H_2 si la probabilidad condicionada de O habiéndose supuesto H_1 es mayor que la probabilidad condicionada de O cuando se ha supuesto H_2. Como puede observarse en esta definición, las hipótesis que se comparan ya han sido establecidas, con lo cual las probabilidades que aparecen son 'a posteriori'. Dicho de otro modo, al enunciar el principio, Sober está utilizando probabilidades bayesianas, sin que esto suponga incluir en su planteamiento ideas de más profundo calado en este campo.[6] En cualquier caso, yo encuentro ya en esta enunciación del principio un aspecto problemático, puesto que resulta difícil imaginar los medios por los que se pueden cuantificar las probabilidades (condicionadas por si fuera poco) que intervienen en la definición. Esta cuantificación, por otra parte, es necesaria si se quiere seguir el planteamiento de Sober, dado que las probabilidades que intervienen han de ser comparadas entre sí.

En cualquier caso, lo que sí pone de manifiesto la desigualdad que aparece en el enunciado del principio es que el apoyo que reciben las teorías tiene que entenderse de manera relativa. Es decir, que así establecido, el principio discrimina unas teorías sobre otras en base a una misma observación. Por decirlo de alguna manera, funciona como un discriminador de teorías. Sober lo indica claramente:

> "El principio de probabilidad implica que el grado de apoyo del que goza una teoría debería entenderse relativa y no absolutamente. Una teoría compite con otras teorías; las observaciones reducen nuestra incertidumbre sobre esa competición discriminando entre alternativas. La evidencia que tenemos sobre las teorías que aceptamos es una evidencia que favorece esas teorías sobre *otras*" (Sober 1993, p. 39).

[5] La traducción del término 'likelihood' resulta problemática. Aceptar 'probabilidad' o 'posibilidad' como sugieren los diccionarios al uso, desvirtuaría el sentido mismo del principio. Traducirlo por 'verosimilitud' originaría confusión con el término epistemológico homónimo. Por ello, siguiendo la sugerencia de Rivadulla (1991, p. 34), continuaré usando el término en inglés durante el resto del trabajo.

[6] Ver Sober 1990, p. 408, n.5. Por ejemplo, no toma en consideración en este contexto el hecho de que las hipótesis siempre tengan probabilidades a priori.

Dicho de otro modo, la evidencia de que disponemos para creer en unas teorías más que en otras es el resultado de una comparación probabilística del tipo de la que establece el principio. Pero esto acarrea la imposibilidad de que una hipótesis determinada posea una relevancia absoluta, puesto que siempre podría plantearse, favorecida por la misma observación, una nueva hipótesis cuya probabilidad fuera mayor. Así parece entenderlo Sober: "la evidencia que tenemos para las teorías en las que creemos no favorece esas teorías *sobre todas las posibles alternativas*" (*ibid.*).

Ya hemos indicado un aspecto en el que Sober se distancia de Van Fraasen. Pero hay otro desacuerdo entre ellos que considero más relevante, si cabe, para el tema que nos ocupa. Me estoy refiriendo a la determinación de las teorías, o de partes de las teorías, sobre las que es aplicable el *Likelihood Principle*. Conviene indicar que la actitud de Van Fraasen es un tanto ambigua, puesto que en una primera instancia acepta la formulación del principio en los términos que lo plantea Sober (*Cf.* Van Fraasen 1980, pp. 22 ss.) para, a renglón seguido construir una epistemología que restringe drásticamente su dominio de aplicabilidad. Sober cree superar esta deficiencia ampliando tal dominio, de manera que si para el empirismo constructivo la ciencia ha de limitarse a la tarea de asignar valores de verdad a las hipótesis que sean estrictamente sobre observables, para el empirismo contrastivo "es irrelevante sobre lo que tratan las hipótesis; lo que importa es que las hipótesis que compiten hagan diferentes afirmaciones acerca de lo que observamos" (1993, p. 41). El alcance de esta distinción no es meramente retórico, ya que –según Sober– repercute en el centro de atención fundamental en ambos empirismos. Para Van Fraasen la ciencia se limita a asignar valores de verdad a enunciados de un tipo determinado (acerca de observables), mientras que, según el empirismo que defiende Sober, la ciencia se centra en la resolución de problemas.

Esta ampliación de la aplicabilidad del principio a hipótesis cualesquiera posibilita a Sober cuestionar el argumento de indispensabilidad en matemáticas. En concreto, tratará de mostrar que si se acepta el *Likelihood Principle*, entonces el argumento resulta insostenible. En efecto, si como establece la tesis de indispensabilidad (quizá la componente holística) las teorías matemáticas van a ser confirmadas junto con nuestras mejores hipótesis científicas, debe haber teorías matemáticas competidoras. Dicho de otro modo, parece que si se acepta el principio, entonces el defensor del argumento de indispensabilidad está obligado a responder a cuestiones para las que en principio no puede dar razón. Por ejemplo, tendría que responder a la cuestión sobre si realmente disponemos de hipótesis alternativas para la aritmética y, caso de que así fuera, cómo podría decirse que tales alternativas confieren probabilidades a las observaciones que sean diferentes de las probabilidades implicadas por los propios enunciados de la aritmética.

Un defensor del argumento de indispensabilidad como Colyvan cree disponer de sendas respuestas a estas dos preguntas. Trataré de resumirlas brevemente e intentaré mostrar que no derrumban las objeciones de Sober. De entrada, y con objeto de llevar a cabo su crítica, Colyvan cree conveniente delimitar el alcance de las dos cuestiones planteadas. A su juicio, Sober no está diciendo que el argumento de indispensabilidad sea totalmente erróneo, ni tampoco se muestra contrario a la idea general de contraer algún tipo de compromiso ontológico con las entidades indispensables para nuestras mejores teorías científicas. Lo que sí niega, taxativamente además, es que "un enunciado herede el apoyo observacional que corresponde a las teorías científicas empiricamente exitosas en las que aparece" (Sober 1993, p. 53). Esta sola razón, observa Colyvan es más que suficiente para que un defensor de la indispensabilidad, como él mismo se considera, se sienta obligado a responder.

Con respecto a si disponemos realmente de hipótesis alternativas para la aritmética, Colyvan cree que sí; en particular, piensa que existen alternativas a la teoría de números. Y para justificar su aserción recurre a Frege, quien, según Colyvan "nos mostró cómo expresar la mayoría de los enunciados numéricos requeridos por la ciencia empírica sin recurrir a la cuantificación sobre números" (Colyvan 2001, p. 128). En nota a pie de página indica cómo puede expresarse en la nomenclatura fregeana, por ejemplo, el hecho de que haya dos individuos que verifiquen *F* por medios puramente lógicos, sin recurrir a elemento numérico alguno. La paráfrasis es conocida y no vale la pena siquiera simbolizarla: hay un *x* y un *y* distintos entre sí que verifican *F*, y tales que si un *z* verifica también *F*, entonces ese *z* es igual a *x* ó a *y*. Encuentro muy débil esta razón aportada por Colyvan y creo que es cuestionable si representa en realidad una alternativa a la aritmética en el sentido que parece exigir Sober. Lo único que parece escamotearse con la paráfrasis fregeana es la aparición del numeral (en este caso el que representa al dos), pero en modo alguno puede entenderse que este hecho suponga una alternativa, en definitiva, otra aritmética. Lo que sí parece haber, como mucho, es otra formulación de lo mismo. En su descargo diré que es posible que Colyvan tenga razón y existan tales alternativas, pero las razones que da para justificar su punto de vista no son convincentes.

La segunda cuestión que Sober planteaba al defensor del argumento de indispensabilidad era que, aun imaginando como posible una alternativa a la aritmética, ¿podría decirse que ésta confiere a las observaciones probabilidades diferentes de las probabilidades implicadas por los propios enunciados de la aritmética?. Desde un punto de vista más general, lo que parece plantear Sober es si el hecho de que en las hipótesis que explican la observación se utilice una matemática u otra introduce una alteración en el valor de la probabilidad condicionada de tal observación; dicho de otro modo, si se favorece una teoría sobre otra. Para Colyvan esta pregunta es más importante que la anterior y coincide con Sober en que la respuesta ha de ser negativa; dicho de otro modo, ambos coinciden en que las eventuales alternativas a la aritmética no conferirían a las observaciones una probabilidad mayor que la implicada por la propia aritmética. Pero si esto es así, contraargumenta Colyvan, la elección de las teorías no podrá llevarse a cabo a través de la comparación probabilística que exige el principio, lo cual se vuelve contra el propio empirismo contrastivo, ya que "la cuestión de qué teoría es mejor se decidirá sobre el terreno de la simplicidad, la elegancia y cosas así, que han sido explícitamente excluidos del empirismo contrastivo"[7]. El caso extremo de este planteamiento sería el de una teoría que no estuviese en absoluto matematizada. La nominalización que pretendió Field es un ejemplo de ello. En este caso, observa Colyvan, alguien podría replicar que si una teoría matematizada tal como la mecánica de Newton y su contrapartida nominalista de Field tienen las mismas consecuencias empíricas, no puede decirse que las matemáticas reciben apoyo empírico. Según este punto de vista, la preferencia por la versión matemática de la teoría debería basarse en consideraciones a priori de simplicidad, elegancia, etc, y no en nada de carácter empírico.

G. Hellman (1992) plantea otra seria objeción al empirismo contrastivo, a la que Sober trata de responder. Creo que en el desarrollo de esa respuesta, ofrece Sober una razón que hace inviable el argumento de indispensabilidad, al menos por lo que respecta a sus pretendidas consecuencias metafísicas. Ya hemos indicado cómo el *Likelihood Principle* constituye un criterio discriminador entre hipótesis, o entre teorías científicas, en general. Pero el principio parece resultar inaplicable cuando sólo hay una teoría que dé cuenta de una determinada observación. Por ejemplo, la relación existente entre masa y energía fue predicha correctamente por la física relativista. En la física anterior, la prerrelativista, semejante relación era inconcebible y ni siquiera podía

[7] Colyvan, 2001, p. 128. En este caso creo que hay que dar la razón a Colyvan y aceptar la existencia de ciertas 'virtudes epistémicas', como las llama Granger (1997), que juegan un relevante papel a la hora de preferir una teoría sobre sus rivales. La simplicidad, la conexión causal o la fecundidad en las predicciones, que se reseñan como algunas de esas virtudes en el ámbito de la ciencia, tienen su trasunto en matemáticas en la elegancia, la simplificación o la profundidad.

ser postulada. De este modo podría decirse que la física relativista fue contrastada sin competir con posibles alternativas. En este caso, apunta Hellman, la preferencia por una teoría no queda justificada porque haga unas predicciones que otras teorías alternativas no hacen, sino simplemente porque no hay tales alternativas. Dicho de otro modo, lo que establece la objeción es que a veces una teoría gana apoyo confirmativo sólo porque es capaz de predecir resultados que ninguna otra ha sido capaz de establecer con anterioridad. En resumen, el empirismo contrastivo no da cuenta de casos en los que se prefiere una teoría porque hace predicciones que ninguna otra teoría es capaz de hacer por una u otra razón.

Grosso modo éste es el planteamiento de Hellman, y si fuera correcto –admite el propio Sober– supondría una refutación del empirismo contrastivo. Pero, a su juicio, no lo es. En su respuesta, Sober matiza la crítica. Conviene observar, dice, que no se trata de que las teorías anteriores hicieran predicciones falsas ni de que asignaran probabilidades muy pequeñas a los hechos que la nueva teoría predice. Lo que ocurre, más bien, es que las teorías anteriores guardan silencio absoluto sobre aquellos aspectos que la nueva teoría vaticina con éxito. (*Cf.* 1993, p. 52). Para ver cómo afecta todo esto al asunto que nos atañe, es decir, el papel que desempeña la matemática en la ciencia empírica, quisiera volver al ejemplo ya citado de la relación entre la masa y la energía. Es conocido que el aparato matemático utilizado es mucho más potente en el caso del desarrollo de la física relativista. Todo esto podría sugerir, indica Sober, que lo que de verdad plantea la objeción es que "suposiciones matemáticas más fuertes faciliten predicciones empíricas que no pueden obtenerse a partir de matemáticas más débiles".[8] Pero no es éste el caso, puesto que no se trata de que una teoría equipada con matemáticas más débiles haga predicciones falsas. Lo que ocurre, más bien, es que la teoría que emplea matemáticas más débiles no hace en absoluto predicciones que la teoría con matemáticas más fuertes es capaz de realizar con éxito. Dicho de otro modo, implicar a la matemática empleada para desarrollar una u otra teoría es, según Sober, inapropiado. Pero no sólo la matemática empleada resulta indemne a la crítica de Hellman. Para Sober tampoco el empirismo contrastivo queda en entredicho. Y da dos razones para ello.

---

[8] Sober 1993, p.52. No estoy seguro de que la objeción de Hellman tenga el sentido que parece atribuirle Sober. En cualquier caso, pienso que es irrelevante la potencia de las matemáticas utilizadas en la teoría, aun suponiendo que tal concepto pudiera cuantificarse. De lo que se trata es de establecer una determinada relación entre dos conceptos físicos que hasta el momento se habían considerado aislados e independientes entre sí. Aunque no sea el caso habitual podría haber ocurrido que una matemática más elemental que la utilizada en la mecánica prerrelativista hubiese bastado para establecer semejante relación.

La primera de ellas es que una teoría no necesita alternativas para ser contrastada y caer en el dominio de aplicabilidad del principio. Para Sober, cuando una teoría no tiene competidores relevantes los científicos la están contrastando de hecho con su propia negación. Y para justificarlo propone el ejemplo de la mecánica newtoniana, que fue capaz de predecir el regreso del Halley en un momento en que ninguna otra teoría podía definirse sobre la cuestión, sencillamente porque no existía ninguna capaz de hacerlo. Pero esto no exime a la teoría de competidores, puesto que "las alternativas a la teoría newtoniana pueden construirse a partir de las propias leyes de Newton" (Sober 1993, p. 52). En concreto, la ley de gravitación, tal como la enuncia Newton, compite con alternativas en las que, por ejemplo, la potencia de la distancia entre masas no sea 2, sino 3 ó 4. Colyvan (2001, p. 130) sostiene que Sober desvirtúa la discusión, puesto que, si bien es cierto que –en principio– tales alternativas pueden contrastarse entre sí, no es éste el proceder habitual de los científicos. Para justificar su punto de vista, Sober tendría que presentar evidencia histórica de que los cientíticos (a falta de una oferta mejor) se sienten inclinados a constrastar una teoría con su propia negación. Pero, a juicio de Colyvan, parece poco probable que los científicos estuvieran interesados en discutir sobre el exponente de la distancia que aparece en la formulación de la ley gravitacional. Tampoco yo comparto este planteamiento de Sober, pero por razones diferentes a las de Colyvan. Tal como lo veo, en el fondo de la cuestión lo que hay es una confusión entre distintas matemáticas (como podrían ser alternativas a la axiomática de Peano, o las restricciones impuestas por los intuicionistas) y distintas formulaciones o especificaciones de una misma teoría. El hecho de que en el denominador de la ley de gravitación newtoniana la variable r tenga exponente 2 ó 3 no representa alternativa alguna a la matemática usada. En los experimentos que se realicen para determinar cuál es en realidad el caso, la matemática que se emplea está exenta de riesgo. En este caso se estaría hablando, más bien, de teorías científicas rivales, puesto que en una de ellas la fuerza de atracción resultaría ser inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, mientras que en la otra alternativa lo sería al cubo. El criterio para aceptar la primera y rechazar la segunda continúa sin depender de la matemática empleada y ha de ser la ciencia la que decida una u otra. Según esto, parece que la matemática utilizada no se juega nada.

Pero en su intento de obviar la crítica de Hellman, Sober aporta otra razón que, a mi modo de ver, resulta definitiva contra el argumento de indispensabilidad. Hasta ahora la discusión se ha centrado en torno al papel que juegan las matemáticas que intervienen en teorías científicas que han sido empíricamente confirmadas. No se ha considerado, en cambio, qué ocurre cuando las teorías científicas no se ven coronadas por el éxito, a pesar de que se han empleado para su formulación exactamente las mismas matemáticas que se utilizaron para las exitosas. Si es consecuente, el defensor del argumento de indispensabilidad tendría que aceptar que una misma estructura matemática queda, a la vez, confirmada y disconfirmada, según que haya sido utilizada en una teoría que explicó lo que pretendía y otra que no lo hizo (*Cf.* Alemán 1999, pp. 51 ss.). Como es obvio, esta circunstancia no obliga a dudar de la teoría matemática utilizada. Sober lo indica sin paliativos:

> "Es un hecho sorprendente que las matemáticas nos permitan construir teorías que hacen predicciones *verdaderas* y que no podamos construir tales teorías predictivamente *exitosas* sin matemáticas. Se advierte menos que las matemáticas nos permiten construir teorías que hacen *falsas* predicciones y que no podríamos construir tales teorías predictivamente *desacertadas* sin matemáticas" (Sober, 1993, p. 53).

Un holista como Quine respondería que lo que ocurre es que las matemáticas se encuentran mejor pertrechadas en el *corpus* científico que las ciencias empíricas, y que por tanto se hallan menos expuestas a la refutación. Por eso muy raras veces se culpa del fracaso predictivo a la matemática empleada en el desarrollo de la teoría científica. No obstante, Sober recomienda no perder de vista este punto:

> "El hecho de que no dudemos de las partes matemáticas de teorías empíricamente *no exitosas* es algo que no deberíamos olvidar. La contrastación empírica no nos permite ignorar las malas noticias y oir sólo las buenas" (*ibid.*)

IV

Como espero haber puesto de manifiesto en los parágrafos anteriores, el argumento de indispensabilidad ha sido cuestionado por diversos autores desde distintos frentes. Pasando por alto el hecho de que no hay unanimidad en la propia enunciación de la tesis, parece que en el momento actual, Mark Colyvan es de los pocos dispuestos a continuar en su defensa y –según hemos indicado– también se encuentra inmerso en serios problemas. Pero, en principio, resultan más atractivas las razones esgrimidas por los que se oponen al argumento (las de Sober, por ejemplo) que las aducidas por sus defensores. Todo esto quizá debería conducirnos a plantear la posibilidad de revisarlo con objeto de establecer el estatuto que verdaderamente habría que adscribirle, o al menos discutir su alcance.

De entrada, creo que si renunciamos a las tesis metafísicas que algunos pretenden obtener a partir de él, el principio es una obviedad. De hecho, un autor poco sospechoso de rechazarlo como es Resnik llega a decir que, después de todo, quizá sea "considerablemente impreciso o demasiado simple" (Resnik 1992, p.115). Tal como se plantea la física en la actualidad (en particular algunas de sus ramas), decir que las matemáticas son indispensables en el desarrollo de la ciencia es, cuando menos, pleonástico. Por lo tanto, quizá convendría cuestionarse el propio estatus del argumento y admitir la posibilidad de entenderlo como tesis metodológica más que como una tesis ontológica. De entrada, esta alternativa obviaría todos los problemas metafísicos derivados y nos acercaría a la práctica matemática y, por consiguiente, al quehacer diario del matemático. El comportamiento que observamos en los profesionales apunta en esta línea integradora y se constata un flujo conceptual y metodológico en ambas direcciones. Así, como señala N. D. Goodman (1990), se ha llegado a decir que dos tercios de un físico teórico lo son en realidad de un matemático. Para este autor la diferencia entre matemáticas y ciencia empírica no se basa tanto en la materia específica de cada una de ellas como en el nivel de generalidad en su tratamiento. En este sentido, si se rechaza la idea de que la matemática es simplemente verbal, convencional o conceptual, tendremos que reconocer que es una teoría científica como cualquier otra y por tanto podríamos admitir, por ejemplo, el mismo estatus ontológico para los electrones y para los números complejos. Como ya puso de manifiesto Putnam en una cita que hemos reproducido más arriba, resulta problemático diseccionar una teoría con objeto de determinar hasta dónde llega la parte meramente científica y cuál es su componente estrictamente matemática. Creo que podríamos aceptar como evidente esta afirmación si se renuncia a extraer las conclusiones metafísicas a las que llega el autor, a saber, que también había que compartir los compromisos ontológicos en ambos campos.

Se habla asimismo de que matemáticas y ciencia empírica poseen una gran afinidad metodológica y que una tarea para emprender una nueva filosofía de las matemáticas debería consistir en la determinación de los paralelismos metodológicos existentes entre ambas ciencias. Ésta es la opinión de Echeverría (1996), para quien se hace cada vez más necesario el uso de métodos empíricos en matemáticas con objeto de establecer tales paralelismos. De esta manera se comprendería mejor, dice, el pluralismo metodológico de las matemáticas. No obstante, si bien es cierto que este desplazamiento evita un problema, no lo es menos que se encuentra con otro, puesto que habría que justificar esa supuesta afinidad metodológica. Pero estimo que la imagen que ofrecen en la actualidad la práctica matemática y la filosofía consiguiente parecen ponerlo fácil al filósofo. Por ejemplo, una de las razones por las que se tiende a pensar en la existencia de un abismo entre las metodologías científica y matemática es que los textos y las publicaciones de esta última aparecen como un producto perfectamente pulido y elaborado, ofreciendo sólo los principales resultados y su justificación. La realidad es que, tras esa imagen de rigor y formalización se esconde todo un proceso que presenta rasgos diametralmente opuestos y que se asemeja a las rutinas empleadas por los científicos. En la trastienda se dan a la par tentativas de demostración no rigurosa y contrastación (en ocasiones de marcado carácter empírico) de posibles soluciones. Y últimamente hay quienes se interesan de manera particular por esa parte trasera que no aparece en las revistas o en los libros. Se ha llegado incluso a rotular esta actitud con el término de 'matemáticas experimentales', dirigidas especialmente a aquéllos más interesados por el andamiaje que por el propio edificio, con la esperanza de solucionar dificultades concretas mediante una metodología ya contrastada. Ni que decir tiene que en esta nueva visión del asunto ha jugado un relevante papel la intromisión del ordenador como algo más que un mero instrumento de cálculo y cuyo alcance heurístico está todavía muy lejos de ser completamente determinado.

Otra relevante consecuencia de esta, cada vez mayor, interacción entre ambas ciencias ha sido el progresivo abandono de la distinción entre matemática 'pura' y 'aplicada', que no hace mucho fue objeto de grandes discusiones. Se ha dicho que, conforme iba muriendo el siglo XX, la distinción se volvía cada vez más artificial, anticuada e inútil. La ciencia aplicada ha propiciado en ocasiones la aparición de matemáticas del más alto nivel y que podrían ser catalogadas como puras; recíprocamente, es proverbial la cantidad de teorías matemáticas que surgieron como mera especulación y que resultaron de gran utilidad en la ciencia. En este sentido hablar de indispensabilidad es sólo hablar de lo evidente. Parece que las quejas de Kline (1980) no han caído en saco roto y que la matemática vuelve a encararse con su origen, con los problemas empíricos.

En resumen, creo que gran parte de los problemas que hemos planteado aquí surgen al tratar de extraer consecuencias metafísicas del incuestionable hecho de la indispensabilidad de la matemática en la física actual. Se vuelve a tomar la matemática como excusa para abordar problemas de más amplio calado filosófico. Por todo ello, siguiendo a De Lorenzo (2000), quizá convendría incardinar todos estos planteamientos en el ámbito, no ya de una filosofía de la matemática que de veras analiza el *factum* matemática, sino en el de una filosofía sustantiva en la que se dirimen cuestiones metafísicas ajenas, en gran medida, a la matemática y a su práctica.

Referencias bibliográficas

ALEMÁN, A. (1995): "El realismo en matemáticas", *Mathesis*, 11, pp.37-53.

ALEMÁN, A. (1999): "El argumento de indispensabilidad en matemáticas", *Teorema*, 18, pp. 49-61.

CABA, A. (2000): "Aspectos metodológicos del naturalismo matemático. La aproximación conjuntista de Maddy", *Contrastes*, 5, pp. 5-23.

COLYVAN, M. (2001): *The indispensability of mathematics*, Oxford, Oxford University Press.

DE LORENZO, J. (2000): *Filosofía de la matemática. Fin de siglo XX*, Valladolid, Universidad de Valladolid.

DIÉGUEZ, A. (1998): *Realismo científico*, Málaga, Universidad de Málaga.

ECHEVERRÍA, J. (1996): "Empirical methods in mathematics. A case-study: Goldbach's conjecture", en G. Munévar (ed.) *Spanish studies in the philosophy of science*, Kluwer, Dordrecht, pp. 19-55.

FIELD, H. (1980): *Science without numbers*, Princenton, Princenton University Press.

GOODMAN, N. D. (1990): "Mathematics as natural science", *The Journal of Symbolic logic*, 55 (1), pp.182-193.

GRANGER, G. G. (1997): "What is a profund result in mathematics?", en E. Agazzi y G. Darvas, *Philosophy of mathematis today*, Kluwer, Dordrecht, pp.89-100.

HELLMAN, G. (1992): "The boxer and his fits: the constructivist in the arena of quantum physics", *Proceedings of the Aristotelian Society, Supplement*, LXVI, pp. 61-77.

KLINE, M. (1980): *Matemáticas. La pérdida de la certidumbre*, Madrid, Siglo XXI, 1985.

MADDY, P. (1990): *Realism in mathematics*, Oxford, Oxford University Press.

MADDY, P. (1992): "Indispensability and practice", *Journal of Philosophy*, 89(6), pp. 275-289.

MADDY, P. (1997): *Naturalism in mathematics*, Oxford, Oxford University Press.

PUTNAM, H. (1971) "Philosophy of logic", en *Mathematics, matter and met-*

hod. Philosophical papers, vol. I, Cambridge, Cambridge University Press, pp. 323-357.

PUTNAM, H. (1975): "What is mathematical truth?", en *Mathematics, matter and method. Philosophical papers, vol. I*, Cambridge University Press, pp. 60-78.

QUINE, W. V. (1953): *Desde un punto de vista lógico*, Barcelona, Orbis, 1984.

QUINE, W. V. (1963) "Carnap and logical truth", en P. Benacerraf and H. Putnam (eds.) (1983) *Philosophy of mathematics. Selected readings*, Cambridge University Press, pp. 355-376.

QUINE, W. V. (1981) *Theories and things*, Massachusetts, Harvard University Press.

RESNIK, M. D. (1992) "Applying mathematics and the indispensability argument", en Echeverría, J. *et al. The space of mathematics*, New York, Walter de Gruyter, Berlin, pp.115-131.

RESNIK, M. D. (1995) "Scientific vs. mathematical realism: the indispensability argument", *Philosophia mathematica*, 3, pp. 166-174.

RESNIK, M. D. (1997) *Mathematics as a science of patterns*, Oxford, Oxford University Press.

RIVADULLA, A. (1991) *Probabilidad e inferencia científica*, Barcelona, Anthropos.

SOBER, E. (1990) "Contrastive empirism", en C. Wade Savage (ed.) *Scientific theories*, Minnesota studies in Philosophy of sciences, pp. 392-410.

SOBER, E. (1993) "Mathematics and indispensability", *Philosophical review*, 102(1), pp. 35-57.

VAN FRAASEN, B. C. (1980) *The scientific image*, Oxford, Clarendon Press.