УДК 517.53

Об одном подходе к определению результанта двух целых функций

А.М. Кытманов, О.В.Ходос[1]

Аннотация

Получен результант для целых функций, позволяющий определить, имеют ли данные функции общие нули.

Ключевые слова: результант, целая функция конечного порядка роста

Введение

Классические рекуррентные формулы Ньютона устанавливают связь между степенными суммами корней алгебраического уравнения и его коэффициентами (см., например, [1, 2, 3]). Эти формулы можно получить с помощью интегральной формулы Коши. Данное обстоятельство позволяет расширить класс функций, для которых справедливы рекуррентные формулы. А именно, для класса целых функций конечного порядка роста можно получить формулы, связывающие между собой коэффициенты разложения Тейлора функции и степенные суммы нулей в отрицательной степени (см. [4, гл.1]).

В данной работе, применяя методы комплексного анализа, мы обобщаем классический результант Сильвестра на целые функции конечного порядка роста. Полезность данного обобщения следует из того, что, например, в уравнениях химической кинетики возникают функции и уравнения, являющиеся экспоненциальными полиномами (см. [5]).

Напомним, что для данных многочленов f и g, классический $R(f,g)$ может быть определен различными способами:

a) используя определитель Сильвестра (см., например, [1, 2, 3]);

b) используя формулу для произведения $R(f,g) = \prod\limits_{\{x:f(x)=0\}} g(x)$ (см., например, [1, 2, 3]);

c) используя способ Безу-Кэли (см., например, [6]).

В нашем подходе мы берем в качестве основного определения формулу произведения. Это мотивировано тем, что целые функции являются естественным обобщением многочленов в комплексном анализе.

В ряде статей [7] – [11] были предложены обобщения понятия результанта для аналитических функций в кольце, матричнозначных функций, мероморфных функций

[1]Авторы использовали финансовую поддержку РФФИ, грант 15-01-00277, и грант 14.Y26.31.0006 Правительства Российской Федерации для поддержки научных школ под руководством ведущего ученого в Сибирском федеральном университете.

на римановой поверхности, для систем алгебраических уравнений. Но во всех этих исследованиях предполагалось, что число нулей или полюсов конечно. Наш случай отличается существенно от других тем, что целые функции могут иметь бесконечное число нулей. Так что в итоговой формуле должны быть предельные переходы. Первым шагом в определении результантов двух целых функций явилась работа [12], в которой рассмотрен случай, когда одна из функций — целая, а вторая является многочленом (или целой функцией с конечным числом нулей).

1 Основной подход

Пусть $f(z)$ и $g(z)$ — целые функции на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ вида

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots\ , \quad a_0 = 1, \tag{1}$$

и

$$g(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots + b_n z^n + \ldots\ . \tag{2}$$

В дальнейшем будем рассматривать *трансцентные* функции $f(z)$ т $g(z)$, т.е целые функции, у которых бесконечно много коэффициентов a_j и b_j отличны от нуля. Нас будет интересовать вопрос, когда эти функции имеют хотя бы один общий ноль.

Если f и g — многочлены, то ответ на этот вопрос дает классический результант Сильвестра (см., например, [2]). Если $f(z)$ — многочлен, а $g(z)$ — трансцендентная функция, то он решен в статье [12]. Цель данной работы рассмотреть трансцендентные функции f и g.

Основным подоходом к решению данной задачи является формула логарифмического вычета (см., например).

Пусть $\gamma_R = \{z:\ |z| = R\}$ — окружность в центром в нуле и радиуса R. Пусть нули $f(z)$ не лежат на γ_R. Рассмотрим интеграл

$$I_R = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_R} g(\zeta)\frac{df(\zeta)}{f(\zeta)}. \tag{3}$$

По формуле логарифмического вычета он равен

$$I_R = \sum_{k=1}^{N_R} g(\alpha_k),$$

где N_R — число нулей функции $f(z)$ в круге $C_R = \{z:\ |z| < R\}$ (нули считаются вместе с их кратностями), а α_k — сами нули.

Если мы рассмотрим интегралы

$$I_R^m = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_R} g^m(\zeta)\frac{df(\zeta)}{f(\zeta)}, \quad m \in \mathbb{N},$$

то

$$I_R^m = \sum_{k=1}^{N_R} g^m(\alpha_k).$$

Применяя к последовательности I_R^m, $m = 1, \ldots, N_R$, классические рекуррентные формулы Ньютона (см., например, [2]), можно получить выражение

$$\prod_{s=1}^{N_R} g(\alpha_s). \tag{4}$$

Тем самым ответить на вопрос: имеют ли функции $f(z)$ и $g(z)$ общие нули в круге C_R. Если теперь неограниченно увеличивать R, то возможны два варианта: либо для какого-то R выражение (4) обратится в ноль, т.е. f и $g(z)$ имеют общий нуль в C_R; либо выражение (4) не обратится в ноль для любого R, т.е. f и $g(z)$ не имеют общих нулей в $\mathbb{C}$.

Тем самым для построения результанта функций $f(z)$ и $g(z)$ необходимо научить вычислять интегралы (3) и (4) для любого R, не находя самих нулей функции $g(z)$. Здесь мы рассмотрим один подход к решению этой задачи.

Обозначим через $P_n(z)$ — многочлен Тейлора функции $f(z)$ порядка n, т.е.

$$P_n(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n,$$

а через $Q_n(z)$ остаток $f(z) - P_n(z)$.

Предположим, что для данного n существует радиус $R > 0$ такой, что

$$|P_n(z)| > |Q_n(z)|, \quad \text{если} \quad |z| = R, \tag{5}$$

т.е. на окружности $\gamma_R = \{z : \ |z| = R\}$ выполнено неравенство (5), и кроме того все корни многочлена $P_n(z)$ лежат в круге C_R.

Покажем, что в этом случае интегралы вида (3) могут быть вычислены через коэффициенты Тейлора функций $f(z)$ и $g(z)$.

Так как для достаточно больших R справедливо неравенство (лемма о модуле старшего члена)

$$|P_{n-1}(z)| < |a_n| R^n, \tag{6}$$

если $a_n \neq 0$, то по теореме Руше многочлен $P_n(z)$ имеет в круге $C_R = \{z : \ |z| < R\}$ ровно n корней (считаемых вместе с их кратностями) и не имеет корней вне этого круга.

Поэтому будем предполагать в дальнейшем, что для данного R выполнены условия (5) и (6). Так что все корни многочлена $P_n(z)$ лежат в круге C_R.

Рассмотрим интеграл

$$J_s = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_R} \zeta^s \frac{d\zeta}{P_n(\zeta)}, \quad s \in \mathbb{N}. \tag{7}$$

Сделаем в интеграле (7) замену переменных $\zeta \to 1/w$, тогда

$$J_s = -\int\limits_{\gamma_{\frac{1}{R}}} \frac{1}{w^s} \cdot \frac{d\left(\frac{1}{w}\right)}{P_n\left(\frac{1}{w}\right)}.$$

Так как $P_n(\zeta) = a_0 + a_1\zeta + \ldots + a_n\zeta^n$, то

$$P_n(1/w) = a_0 + a_1/w + \ldots + a_n/w^n = \frac{1}{w^n}(a_0w^n + a_1w^{n-1} + \ldots + a_n) = \frac{1}{w^n}P_n^*(w), \quad (8)$$

где $P_n^*(w) = a_0w^n + a_1w^{n-1} + \ldots + a_n$. В силу условия (5) многочлен $P^*(w)$ не имеет корней в круге $C_{\frac{1}{R}}$. Имеем

$$J_s = \int\limits_{\gamma_{\frac{1}{R}}} \frac{1}{w^s} \cdot \frac{dw}{w^2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{w^n} \cdot P_n^*(w)} = \int\limits_{\gamma_{\frac{1}{R}}} w^{n-s-2} \cdot \frac{dw}{P_n^*(w)}.$$

Отсюда получаем утверждение.

Лемма 1. *Если $n - s - 2 \geqslant 0$, то $J_s = 0$; если $n - s - 2 < 0$, то*

$$J_s = \frac{2\pi i}{(s-n)!} \cdot \frac{\partial^{s+1-n}}{\partial w^{s+1-n}} \frac{1}{P_n^*(w)}\bigg|_{w=0}.$$

Так что при условии (5) интеграл J_s можно вычислить в конечном виде. Эта лемма является одной из основных при нахождении результанта двух целых функций.

2 Исследование условий (5) и (6)

Здесь мы исследуем вопрос, когда и для каких функций выполняются условия (5) и (6).

Приведем оценку на R, для которого неравенство (6) выполняется. Очевидно, что неравенство (6) выполняется, если выполнено неравенство

$$\sum_{k=0}^{n-1} |a_k|R^k < |a_n|R^n.$$

Считая $R > 1$, получим, что неравенство (6) выполнено, если выполнено неравенство

$$\sum_{k=0}^{n-1} |a_k| < |a_n|R.$$

таким образом справедливо утверждение.

Лемма 2. *Пусть $a_n \neq 0$ и для числа $R > 1$ выполнено неравенство*

$$R > \frac{\sum\limits_{k=0}^{n-1} |a_k|}{|a_n|}, \tag{9}$$

то все корни многочлена $P_n(z)$ лежат в круге C_R.

Так как

$$\sum_{k=0}^{n-1} |a_k| \leqslant \sum_{k=0} |a_k| = K,$$

то справедливо следствие.

Следствие 1. *Пусть $a_n \neq 0$. Если для числа R выполнено неравенство*

$$R > \frac{K}{|a_n|},$$

то все корни $P_n(z)$ лежат в круге C_R.

Найдем теперь при каких условиях на R выполнено неравенство $|P_n(z)| > \varepsilon |a_n| R^n$ для некоторого $0 < \varepsilon < 1$, т.е.

$$|a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n| > \varepsilon |a_n| R^n. \tag{10}$$

Поскольку (по лемме о модуле старшего члена)

$$|P_n(z)| \geqslant |a_n| R^n - |P_{n-1}(z)|,$$

то при $0 < \varepsilon < 1$ справедливо неравенство

$$|a_n| R^n - |P_{n-1}(z)| > \varepsilon |a_n| R^n,$$

т.е.

$$|a_n|(1-\varepsilon) R^n > |P_{n-1}|$$

при достаточно больших R.

Лемма 3. *Если для R выполнено неравенство*

$$R > \frac{\sum\limits_{k=0}^{n-1} |a_k|}{|a_n|(1-\varepsilon)},$$

то выполнены условия (6) и (10).

Следствие 2. *Если*

$$R > \frac{K}{|a_n|(1-\varepsilon)},$$

то выполнены условия (6) и (10).

Найдем, когда при выполнении неравенства (10) справедливо неравенство

$$\varepsilon|a_n|R^n > |Q_n(z)| = R^n \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \frac{z^k}{R^n} \right|.$$

Это будет означать, что для данного R выполнено неравенство (5).

Из последнего неравенства получим

$$\varepsilon|a_n| > R \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \frac{z^k}{R^{n+1}} \right|. \tag{11}$$

Поскольку

$$R \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \frac{z^k}{R^{n+1}} \right| \leqslant R \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| R^{k-1-n} \right),$$

то неравенство (11) выполнено, если выполнено условие

$$\varepsilon|a_n| > \sum_{k=1}^{\infty} |a_{n+k}| R^k. \tag{12}$$

Пусть $R = \dfrac{K}{|a_n|(1-\varepsilon)}$, тогда (12) выполнено, если выполнено неравенство

$$\varepsilon|a_n| > \sum_{k=1}^{\infty} |a_{n+k}| \left(\frac{K}{|a_n|(1-\varepsilon)} \right)^k. \tag{13}$$

Так что справедливо утверждение

Лемма 4. *Если для* $R = \dfrac{K}{|a_n|(1-\varepsilon)}$ *выполнено условие (13), то справедливы неравенства (5) и (6).*

Приведем простые достаточные условия, при которых выполнена лемма 4. Для этого напомним некоторые понятия из теории целых функций (см., например, [14, 15]).

Целая функция $f(z)$ имеет *конечный порядок (роста)*, если существует такое положительное число A, что при $|z| = R \to +\infty$ выполнено условие

$$f(z) = O(e^{r^A}).$$

Нижняя грань ρ чисел A, для которых выполняется это соотношение, называется *порядком* функции.

Для определения порядка роста справедлива формула

$$\rho = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln n}{\ln \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}}, \tag{14}$$

где a_n — коэффициенты Тейлора функции $f(z)$ вида (1). В частности, $\rho = 0$, если

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}} = 0.$$

Предположим, что выполнено неравенство

$|a_{n+k}| \leqslant c|a_n|^{k\alpha}$ для некоторых $c > 0$, $\alpha > 1$, и для всех n, начиная с некоторого номера n.

Тогда, заменя условие (13), более сильным получим

$$\varepsilon|a_n| > c\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{K}{|a_n|^{1-\alpha}(1-\varepsilon)}\right)^k = c\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{K|a_n|^{\alpha-1}}{(1-\varepsilon)}\right)^k, \tag{15}$$

при выполнении которого выполнено (5).

Суммируя геометрическую прогрессию и учитывая, что $a_n \to 0$ при $n \to \infty$ (т.е знаменатель прогрессии становится по модулю меньше 1, начиная с некоторого номера n), получим

$$c\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{K|a_n|^{\alpha-1}}{(1-\varepsilon)}\right)^k = c\frac{K|a_n|^{\alpha-1}}{1-\varepsilon-K|a_n|^{\alpha-1}},$$

т.е. условие (15) принимает вид

$$\varepsilon|a_n| > c\frac{K|a_n|^{\alpha-1}}{1-\varepsilon-K|a_n|^{\alpha-1}}.$$

Предполагая, что $\alpha > 2$, отсюда получим

$$\varepsilon(1-\varepsilon-K|a_n|^{\alpha-1}) > K|a_n|^{\alpha-2}.$$

Тогда

$$K|a_n|^{\alpha-2} + \varepsilon K|a_n|^{\alpha-1} < \varepsilon(1-\varepsilon).$$

При достаточно больших n последнее неравенство, очевидно, выполняется.

Лемма 5. *Если для всех k выполнено условие*

$$|a_{n+k}| \leqslant c|a_n|^{k\alpha} \tag{16}$$

для некоторых $c > 0$, $\alpha > 2$ и для всех достаточно больших n, то, начиная с этого n, справедливы неравенства (5) и (6).

Пример 1. Рассмотрим функцию $f(z)$ с коэффициентами $a_n = e^{e^{-n}}$, тогда получаем, что

$$\frac{1}{|a_{n+k}|} = e^{e^{n+k}}, \quad \text{a} \quad \frac{1}{|a_n|^{k\alpha}} = e^{k\alpha e^n},$$

поэтому имеем (для выполнения (16)

$$e^{e^{n+k}} \geqslant e^{k\alpha e^n} \quad \text{или} \quad e^k \geqslant k\alpha,$$

что, очевидно, справедливо. Так что для функции $f(z)$ с коэффициентами $a_n = e^{e^{-n}}$ неравенство (5) выполняется для всех n достаточно больших. Заметим, что данная функция имеет порядок 0.

3 Построение результанта

Рассмотрим интеграл (3)

$$I_R = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_R} g(\zeta)\frac{df(\zeta)}{f(\zeta)} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_R} g(\zeta)\frac{d\left(P_n(\zeta)\left(1+\frac{Q_n(\zeta)}{P_n(\zeta)}\right)\right)}{P_n(\zeta)\left(1+\frac{Q_n(\zeta)}{P_n(\zeta)}\right)} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_R} g(\zeta)\left(\frac{dP_n(\zeta)}{P_n(\zeta)} + \frac{d\left(1+\frac{Q_n(\zeta)}{P_n(\zeta)}\right)}{1+\frac{Q_n(\zeta)}{P_n(\zeta)}}\right).$$

Вычислим интеграл

$$J_R = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_R} g(\zeta)\cdot\frac{dP_n(\zeta)}{P_n(\zeta)},$$

сделав замену $\zeta \to 1/w$. Получим

$$J_R = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{\frac{1}{R}}} g\left(\frac{1}{w}\right)\cdot\frac{d\left(\frac{P_n^*(w)}{w^n}\right)}{\frac{P_n^*(w)}{w^n}} = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{\frac{1}{R}}} g\left(\frac{1}{w}\right)\cdot\left(\frac{dP_n^*(w)}{P_n^*(w)} - n\frac{\frac{dw}{w^{n+1}}}{\frac{1}{w^n}}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{\frac{1}{R}}} g\left(\frac{1}{w}\right)\left(\frac{dP_n^*(w)}{P_n^*(w)} - \frac{ndw}{w}\right).$$

Напомним, что $P_n^*(w)$ определяется равенством (8), а в силу (2)

$$g\left(\frac{1}{w}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{b_k}{w^k}.$$

Поэтому
$$J_R = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{\frac{1}{R}}}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{b_k}{w^k}\right)\cdot\left(\frac{dP_n^*(w)}{P_n^*(w)}-\frac{ndw}{w}\right)=$$
$$= -\sum_{k=0}^{\infty} b_k \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{\frac{1}{R}}}\frac{1}{w^k}\cdot\left(\frac{dP_n^*(w)}{P_n^*(w)}-\frac{ndw}{w}\right).$$
Имеем
$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{\frac{1}{R}}}\frac{n}{w^k}\cdot\frac{dw}{w} = nb_0.$$
А
$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{\frac{1}{R}}}\frac{1}{w^k}\cdot\frac{dP^*(w)}{P^*(w)} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{\frac{1}{R}}}\frac{1}{w^k}\cdot d(\ln P^*(w)).$$
Так как многочлен $P^*(w)$ не имеет корней в $C_{\frac{1}{R}}$, то $\ln P^*(w)$ определен в этом круге. Поскольку $P_n^*(w) = a_0w^n + a_1w^{n-1} + \ldots + a_n$, то $\ln P^*(w) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k w^k$, где c_k определяются по формулам
$$c_k = \frac{(-1)^{k-1}}{ka_n^k}\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_n & 0 & \ldots & 0\\ 2a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ ka_{n-k} & a_{n-k+1} & a_{n-k+2} & \ldots & a_n \end{vmatrix} \tag{17}$$
(см., например, [4, §2, лемма 2.3]).

Поэтому
$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{\frac{1}{R}}}\frac{1}{w^k}\cdot\frac{dP^*(w)}{P^*(w)} = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{\frac{1}{R}}}\ln P^*(w)\frac{1}{w^k} =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{\frac{1}{R}}}\ln P^*(w)\frac{kdw}{w^{k+1}} = \frac{k}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{\frac{1}{R}}}\sum_{s=0}^{\infty}c_s w^s\cdot\frac{dw}{w^{k+1}} = kc_k.$$

Следовательно, справедливо утверждение

Теорема 1. *Интеграл*
$$J_R = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_R} g(\zeta)\cdot\frac{dP_n(\zeta)}{P_n(\zeta)} = nb_0 - \sum_{k=1}^{\infty} kb_kc_k,$$
где b_k — коэффициенты Тейлора функции $g(z)$, а c_k определяются формулами (17).

Используя формулу (17) можно получить

Следствие 3. *Интеграл*

$$J_R = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{a_n^k} \begin{vmatrix} nb_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_k \\ a_{n-1} & a_n & 0 & \dots & 0 \\ 2a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ ka_{n-k} & a_{n-k+1} & a_{n-k+2} & \dots & a_n \end{vmatrix}$$

Доказательство. Утверждение следствия вытекает из [12, теорема 3], в которой доказано равенство

$$nb_0 - \sum_{k=1}^{\infty} kb_kc_k = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{a_n^k} \begin{vmatrix} nb_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_k \\ a_{n-1} & a_n & 0 & \dots & 0 \\ 2a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ ka_{n-k} & a_{n-k+1} & a_{n-k+2} & \dots & a_n \end{vmatrix}.$$

□

Так что интеграл J_R может быть вычислен через коэффициенты Тейлора функций $f(z)$ и $g(z)$.

Рассмотрим далее интеграл

$$\tilde{J}_R = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_R} g(\zeta) \cdot \frac{d\left(1 + \frac{Q_n(\zeta)}{P_n(\zeta)}\right)}{1 + \frac{Q_n(\zeta)}{P_n(\zeta)}}.$$

Так как на окружности γ_R справедливо неравенство (5), то $\dfrac{|Q_n(\zeta)|}{|P_n(\zeta)|} < 1$, поэтому на γ_R определен $\ln\left(1 + \dfrac{Q_n(\zeta)}{P_n(\zeta)}\right)$.

Следовательно,

$$\tilde{J}_R = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_R} g(\zeta) \cdot d\ln\left(1 + \frac{Q_n(\zeta)}{P_n(\zeta)}\right) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_R} \ln\left(1 + \frac{Q_n(\zeta)}{P_n(\zeta)}\right) \cdot g'(\zeta) d\zeta =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s} \int\limits_{\gamma_R} g'(\zeta) \cdot \left(\frac{Q_n(\zeta)}{P_n(\zeta)}\right)^s d\zeta$$

Наша дальнейшая цель заключается в вычислении интегралов

$$\tilde{J}_R^s = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_R} g'(\zeta) \cdot \left(\frac{Q_n(\zeta)}{P_n(\zeta)}\right)^s d\zeta.$$

Положим $Q_n(\zeta) = \zeta^{n+1} \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{n+k+1}\zeta^k$. Обозначим $Q_n^*(\zeta) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{n+k+1}\zeta^k$, т.е. $Q_n(\zeta) = \zeta^{n+1}Q_n^*(\zeta)$.

Сделаем в интеграле $\tilde{J}_R^s$ замену $\zeta \to 1/w$, тогда имеем

$$\tilde{J}_R^s = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{\frac{1}{R}}} g'\left(\frac{1}{w}\right)\cdot\left(\frac{Q_n^*\left(\frac{1}{w}\right)}{P_n\left(\frac{1}{w}\right)}\right)^s\cdot\frac{dw}{w^{2+(n+1)s}} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{\frac{1}{R}}} g\left(\frac{1}{w}\right)\cdot\left(\frac{Q_n^*\left(\frac{1}{w}\right)}{P_n^*(w)}\right)^s\cdot\frac{dw}{w^{s+2}},$$

где (напомним) $P_n^*(w) = a_0w^n + a_1w^{n-1} + \ldots + a_0$. Функция $g'\left(\frac{1}{w}\right) = \sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{(m+1)c_{m+1}}{w^m}$. Так что нам нужно вычислить интегралы вида

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{\frac{1}{R}}}\left(\frac{Q_n^*\left(\frac{1}{w}\right)}{P_n^*(w)}\right)^s\cdot\frac{dw}{w^{s+m+2}}.$$

Разложим в степенной ряд функцию $(P_n^*)^{-s}(w)$. Многочлен $P_n^*(w)$ не имееет корней в замыкании круга $C_{\frac{1}{R}}$, поэтому функция $(P_n^*)^{-s}(w)$ — голоморфна в замыкании этого круга.

Для нахождения разложения функции $(P_n^*)^{-s}(w)$ воспользуемся следующим результатом из [12, лемма 4].

Let A and B be power series with non-zero radius of converges.

$$A = \sum_{k=0}^{\infty} a_kz^k = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots + a_nz^n + \ldots\ , \quad a_0 \neq 0,$$

$$B = A^n = \sum_{k=0}^{\infty} b_kz^k = b_0 + b_1z + b_2z^2 + \cdots + b_nz^n + \ldots\ ,$$

$a_0 \neq 0$, а степень n может быть и комплексной. Тогда справедливы формулы

$$b_k = \frac{a_0^{n-k}}{k!}\begin{vmatrix} na_1 & -1a_0 & 0 & \ldots & 0 \\ 2na_2 & (n-1)a_1 & -2a_0 & \ldots & 0 \\ 3na_3 & (2n-1)a_2 & (n-2)a_1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \vdots \\ kna_k & ((k-1)n-1)a_{k-1} & ((k-2)n-2)a_{k-2} & \ldots & (n-(k-1))a_1 \end{vmatrix}, \tag{18}$$

$k \geqslant 1$. А $b_0 = a_0^n$.

Полагая, что $n = -s$, $P_n^*(w) = a_0w^n + a_1w^{n-1} + \ldots + a_n$, а $(P_n^*)^{-s}(w) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} d_k^sz^k$ из формулы (18) получим $d_k^s = \dfrac{a_n^{-s-k}}{k!}\times$

$$\times\begin{vmatrix} -sa_{n-1} & -1a_n & 0 & \dots & 0 \\ -2sa_{n-2} & (-s-1)a_{n-1} & -2a_n & \dots & 0 \\ -3sa_{n-3} & (-2s-1)a_{n-2} & (-s-2)a_{n-1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ -ksa_{n-k} & (-(k-1)s-1)a_{n-k+1} & (-(k-2)s+2)a_{n-k+2} & \dots & (-s-(n-(k-1)))a_1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{(-1)^k a_n^{-s-k}}{k!}\begin{vmatrix} sa_{n-1} & a_n & 0 & \dots & 0 \\ 2sa_{n-2} & (s+1)a_{n-1} & 2a_n & \dots & 0 \\ 3sa_{n-3} & (2s+1)a_{n-2} & (s+2)a_{n-1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ ksa_{n-k} & ((k-1)s+1)a_{n-k+1} & ((k-2)s+2)a_{n-k+2} & \dots & (s+(n-(k-1)))a_1 \end{vmatrix}, \tag{19}$$

где $k \geqslant 1$. А $d_0^s = a_0^{-s}$.

Найдем теперь разложение функции $\left(Q_n^*\left(\dfrac{1}{w}\right)\right)^s$. Обозначим

$$\left(Q_n^*\left(\frac{1}{w}\right)\right)^s = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{e_k^s}{w^k}.$$

Воспользовавшись формулой (18), получим

$$e_k^s = \frac{a_{n+1}^{s-k}}{k!}\begin{vmatrix} sa_{n+2} & -1a_{n+1} & 0 & \dots & 0 \\ 2sa_{n+3} & (s-1)a_{n+2} & -2a_{n+1} & \dots & 0 \\ 3sa_{n+4} & (2s-1)a_{n+3} & (s-2)a_{n+2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ ksa_{n+k+1} & ((k-1)s-1)a_{n+k} & ((k-2)s-2)a_{n+k-1} & \dots & (s-(k-1))a_{n+1} \end{vmatrix}, \tag{20}$$

где $k \geqslant 1$. А $e_0^s = a_{n+1}^s$. Поэтому выполнено утверждение.

Лемма 6. *Справедлива формула*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{\frac{1}{R}}}\left(\frac{Q_n^*\left(\frac{1}{w}\right)}{P_n^*(w)}\right)^s\cdot\frac{dw}{w^{s+m+2}} = \sum_{k=0}^{\infty} e_k^s\cdot d_{m+k+s+1}^s,$$

где e_k^s, $d_{m+k+s+1}^s$ определяются формулами (19), (20).

Применяя формулы (19), (20), определение интеграла $\tilde{J}_R^s$ и теорему 1, получим утверждение

Теорема 2. *Интеграл I_R равен*

$$I_R = J_R + \tilde{J}_R = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{a_n^k} \begin{vmatrix} nb_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_k \\ a_{n-1} & a_n & 0 & \dots & 0 \\ 2a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ ka_{n-k} & a_{n-k+1} & a_{n-k+2} & \dots & a_n \end{vmatrix} -$$

$$-\sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s} \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) \sum_{k=0}^{\infty} e_k^s \cdot d_{m+k+s+1}^s \cdot b_{m+1}.$$

Рассматривая функцию $g^p(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k^p z^k$, получаем следствие

Следствие 4. *Справедлива формула*

$$I_R^p = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_R} g^p(\zeta) \frac{df(\zeta)}{f(\zeta)} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{a_n^k} \begin{vmatrix} nb_0^p & b_1^p & b_2^p & \dots & b_k^p \\ a_{n-1} & a_n & 0 & \dots & 0 \\ 2a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ ka_{n-k} & a_{n-k+1} & a_{n-k+2} & \dots & a_n \end{vmatrix} -$$

$$-\sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s} \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) \sum_{k=0}^{\infty} e_k^s \cdot d_{m+k+s+1}^s \cdot b_{m+1}^p,$$

$p = 1, \dots, n$.

Применяя теперь рекуррентные формулы Ньютона, получим выражение (4).

Список литературы

[1] Van der Waerden B.L. Algebra. Vol. 1. New York:Springer; 1950.

[2] Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 1968.

[3] Lang S. Algebra. Graduate Texts in Mathematics. Springer; 2002.

[4] Быков В.И., Кытманов А.М., Лазман М.Я. Методы исключения в компьютерной алгебре многочленов, Новосибирск, Наука, 1989.

[5] Быков В.И., Цыбенова С.Б. Нелинейные модели химической кинетики. КРАСАНД, Москва, 2011.

[6] Krein M.G., Naimark M.A. The method of symmetric and Hermitian forms in the theory of the roots of algebraic equation. Linear and Multilinear Algebra. 1981;10:265-308.

[7] Gohberg I.C., Heinig G. Resultant matrix and its generalization. I. Resultant operator of matrix polynomal. Acta Sci. Math. 1975; 37:41-61.

[8] Gohberg I.C., Heinig G. Resultant matrix and its generalization. II. Continual analog of resultant matrix. Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 1976; 28:189-209.

[9] Gohberg I.C., Lerer L.E. Resultant operators of a pair of analytic functions. Proc. Math. Amer. Soc. 1978; 72:1, 65-73.

[10] Gustafsson B., Tkachev V.G. The resultant on compact Riemann surfaces. Comm. Math. Physics. 2009; 10:265-308.

[11] Morozov A.Yu., Shakirov Sh.R. New and old resultant in resultant theory. Theor. math. Physics. 2010;163(2):587-617.

[12] Kytmanov A.M., Naprienko Ya.M. One approach to finding the resultant of two entire functions, Complex variables and elliptic equations, 2017, v. 62 no. 2, 269-286.

[13] Macdonald I.G. Symmetric Functions and Hall Polynomials. Oxford Math. Monograph, 1979.

[14] Титчмарш Е. Теория функций, М., Наука, 1980.

[15] Маркушевич А.И. Теория аналитических функций, т. 2, М., Наука, 1968.