

## ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS DE HORMIGÓN ARMADO Y PRETENSADO EN TEORÍA DE SEGUNDO ORDEN

Antonio R. Marí Bernat  
Doctor Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos.  
Profesor de la Cátedra de Hormigón de la  
E.T.S.I.C.C.P. de Barcelona.

451-9

### Introducción

La utilización, desde hace más de un siglo, de materiales altamente resistentes en la construcción, ha permitido al proyectista el diseño de estructuras cada vez más esbeltas, tanto en su conjunto como en cada uno de sus elementos resistentes, que obliga a la consideración de algunos aspectos relativos al comportamiento estructural, que pueden ser definitivos de cara al diseño.

La esbeltez como característica diferenciadora de un elemento estructural tiene su máxima relevancia en el caso de estructuras metálicas, donde muchas veces el fenómeno de la inestabilidad puede presentarse para cargas inferiores a las que agotarían la capacidad resistente del material.

En el caso de estructuras de hormigón, dada la menor resistencia del mismo respecto del acero, y por su particular tecnología, no se presenta esbeltez tan atrevida como en el caso de las estructuras metálicas y, consecuentemente, el fenómeno de la inestabilidad no ha sido preocupante. No obstante, el constante desarrollo en el campo de la tecnología del hormigón ha permitido construir estructuras cada vez más esbeltas en las que las fuertes cargas de compresión a que pueden verse sometidas podrían provocar fenómenos de inestabilidad.

Este es el caso de las pilas altas de puentes y los edificios en altura, más aún cuando cabe

la posibilidad de desplazamientos laterales de la estructura, originándose los llamados esfuerzos de segundo orden causados por las cargas de compresión al tener que cumplirse el equilibrio de la estructura en su configuración deformada.

Un análisis que tenga en cuenta este efecto se conoce como «análisis en segundo orden».

Los resultados de este tipo de cálculo difieren de los de un «análisis en primer orden» tanto más cuanto mayor sea la deformabilidad de la estructura y deben ser correctamente evaluados si se quiere establecer un método racional de diseño.

En las estructuras de hormigón armado y pretensado nos encontramos ante un material cuyo comportamiento tenso-deformacional se aleja del clásico material elástico-lineal por las siguientes razones:

- Heterogeneidad, ya que se hacen trabajar conjuntamente dos materiales de características claramente distintas (reología, etc.).
- No linealidad en las relaciones tensión-deformación de los materiales que lo componen.
- Fisuración del hormigón cuando la tensión de tracción supera la resistencia a tracción del mismo.
- Existencia de deformaciones diferidas (retracción y fluencia del hormigón) cuyos efectos en el tiempo, en determinadas ocasiones, pueden ser decisivos (pandeo por fluencia, redistribuciones de esfuerzos en estructuras hiperestáticas, etc.).
- Existencia de otros fenómenos como la fatiga ante cargas alternadas, disminución de resistencia del hormigón bajo carga mantenida (cansancio), efecto del confinamiento del hormigón debido a la armadura transversal, etc.

Todo ello afecta notablemente a la deformabilidad y distribución de esfuerzos en las estructuras de hormigón y debe ser tenido en cuenta en un planteamiento en segundo orden que pretenda ajustarse mínimamente a las características reales del comportamiento estructural.

El objeto del presente artículo (\*) es presentar un método general de cálculo de estructuras de hormigón que, con un grado de aproximación más que aceptable, modere los fenómenos más importantes anteriormente citados, y que por otra parte, no presente una complejidad excesiva ni un coste desmesurado.

Esta idea encaja con el actual planteamiento que del fenómeno del pandeo realiza la actual normativa española EH-80 en su artículo 43.

En ella, para un determinado tipo de estructuras, en las que las condiciones de esbeltez y deformabilidad superan un cierto rango, se establece que se deberá realizar la comprobación a pandeo de la estructura mediante un método general. El método propuesto en esta tesis, cuyas características veremos más adelante, engloba aparte de su carácter "general" la simplicidad y la economía.

## Breve revisión de los métodos existentes de análisis de estructuras de hormigón

Atendiendo al tipo de planteamiento del equilibrio (primer o segundo orden) así como a las características de los materiales (lineales o no) cabe distinguir cuatro grandes grupos:

- I Análisis lineal en primer orden.
- II Análisis no lineal por el material (primer orden).
- III Análisis elástico en segundo orden.
- IV Análisis no lineal en segundo orden.

En la tesis, origen de este artículo, se hace una amplia revisión de los distintos métodos existentes, desde los más generales (método de los elementos finitos, por ejemplo) hasta las más simplificadas y de limitado ámbito de aplicación. La mejor forma de tener aquí una amplia panorámica de los mismos, es a través de la explicación del cuadro-resumen que presentamos a continuación.

En él figuran únicamente los grupos III y IV y se hace hincapié en el último por ser el que más nos atañe.

Las características más interesantes a resaltar en un método de análisis de hormigón son:

1. **Nivel de aproximación al comportamiento real del material.** Puede hablarse de métodos "exactos" (E) y métodos "aproximados" (A)

(\*) Este artículo puede considerarse un resumen de la Tesis Doctoral de su autor, realizado bajo la dirección del doctor Ingeniero Juan Murcia, y leída en la E.T.S.I.C.C.P. de Barcelona, en mayo de 1981. La Tesis obtuvo la calificación de sobresaliente *cum laude*. (N. de la R.).

según concentren las rotaciones plásticas en secciones críticas o no. Los métodos exactos son válidos tanto en servicio como en rotura. En el cuadro queda reflejada esta característica en la columna correspondiente al tratamiento de la no linealidad.

2. **Tipo de planteamiento del equilibrio.** Puede ser global (estructura completa) o parcial (subentramado o soporte aislado). Asimismo puede considerarse únicamente el desplazamiento de los nudos de la estructura o la deformada de cada pieza. Para encontrar la solución de equilibrio puede procederse en el cálculo por métodos iterativos o directos, variando la matriz de rigidez de la estructura o el vector-fuerzas.
3. **Campo de aplicación y forma de utilización de los métodos.** Cabe distinguir los métodos manuales, ligados lógicamente al análisis más simplificado y aplicable a estructuras sencillas y los métodos automáticos de mayor generalidad.

Hay que resaltar que entre los métodos de análisis global, no lineales en segundo orden, no existe ninguno manual por la gran complejidad de cálculos que requiere. (Tabla 1).

4. **Objeto del método: Análisis o dimensionamiento.** En este sentido, los métodos aplicables a piezas simples están más desarrollados a nivel de dimensionamiento, mientras que a nivel global de la estructura queda un largo camino por realizar.

## Variables que intervienen en el comportamiento de estructuras esbeltas de hormigón armado

Entre los parámetros que intervienen de una forma más directa en el comportamiento de las estructuras esbeltas de hormigón armado cabe destacar, por su importancia, el estudio de la respuesta seccional calibrada a través del diagrama momento-curvatura que cuantifica la influencia de las características geométricas, mecánicas y de carga de la sección. Son variables importantes la relación de rigideces entre los distintos miembros de la estructura, las vinculaciones externas e internas de la misma y el tipo y duración de la carga. En este sentido se realiza un estudio del efecto de la fluencia en el caso de estructuras esbeltas, justificándose la adopción del método simplificado propuesto por el C.E.B. para su inclusión en el método de análisis propuesto.

Tabla 1

| METODO                       | EQUILIBRIO 2.º ORDEN     |                         | PROCEDIMIENTO            |         | NIVEL DE APROX. (2.º orden) | FORMA DE USO  | OBJETO                 | TRATAM. NO LIN. MATERIAL | APARTADO DEL CAPIT. II | COMENTARIOS                                  |
|------------------------------|--------------------------|-------------------------|--------------------------|---------|-----------------------------|---------------|------------------------|--------------------------|------------------------|--|
|                              | Nivel de planteamien.    | Considerac. def. pieza. | ITERATIVO                | DIRECTO |                             |               |                        |                          |                        |  |
| P - $\delta$                 | Global (C)               | No                      | Rigidez constante (R.C.) |         | Aproximado (A)              | Ordenador (O) | Análisis (A)           |                          | 2.4.2                  | No aplicable a estructuras intraslacionales. |
| FUNCIONES DE ESTABILIDAD     | Global y Parcial (G y P) | Sí                      | Rigidez variable (R. V.) |         | Exacto (E)                  | O             | A                      |                          | 2.4.1                  |  |
| ELEMENTOS FINITOS            | G. y P.                  | Sí                      | R.V.                     |         | E                           | O             | Análisis y dimens. (D) |                          | 2.5.1                  | Está incluido en el apartado 2.5.1.          |
| NIXON Y OTROS                | G                        | No                      |                          | X       | A                           | O             | A                      |                          | 2.4.3                  |  |
| GENERAL FRAME ANALYSIS (CEB) | G. y P.                  | Sí                      | R.V.                     |         | E                           | O             | A                      | Exacto (E)               | 2.5.1                  | Se recomienda utilizar elementos finitos.    |
| A. GRELAT (General)          | G. y P.                  | Sí                      | R.V.                     |         | E                           | O             | A                      | E                        | 2.5.2                  |  |
| A. GRELAT (Simplificado)     | G                        | No                      | R.V.                     |         | A                           | O             | A                      | Simplificado (S)         | 2.5.3.1                |  |
| SUBENTRAMADOS TRASLACIONALES | P                        | Sí                      | R.V.                     |         | A                           | O             | A                      | S                        | 2.5.3.2                |  |
| MOMENTO AMPL. (A.C.I.)       | P                        | Sí                      |                          | X       | A                           | Manual (M)    | A y D                  | S                        | 2.5.3.3                | Se trabaja con rigideces ficticias EI.       |
| COLUMNA MODELO (C.E.B.)      | P                        | Sí                      |                          | X       | A                           | M             | A y D                  | E                        | 2.5.3.4.a              | Extensible a entramados.                     |
| ESTADO DE EQUILIBRIO         | P                        | No                      |                          | X       | A                           | M             | A                      | E                        | 2.5.3.4.b              |  |
| MOMENTO SUPLEMENTARIO        | P                        | No                      |                          | X       | A                           | M             | D                      | S                        | 2.5.3.4.c              | Expresiones de carácter empírico.            |
| DEFORMADA SENOIDAL           | P                        | Sí                      |                          | X       | A                           | M             | A y D                  | E                        | 2.5.3.5.               | Extensible a entramados.                     |
| EH-80                        | P                        | No                      |                          | X       | A                           | M             | D                      | S                        | 2.5.3.6                |  |
| PROPUESTO                    | G. y P.                  | Sí                      | R.C.                     |         | E                           | O             | A                      | E                        |                        |  |

Hay que hacer especial hincapié en la interacción entre las no linealidades física y geométrica, que conduce a constantes redistribuciones de esfuerzos y variaciones de los desplazamientos. En la tesis, origen de este artículo, nos valemos de los resultados obtenidos en algunos ensayos realizados por otros autores para analizar cualitativamente la evolución de los esfuerzos con el proceso incremental de cargas y estudiar la influencia de los parámetros ya comentados.

## Método propuesto. Características generales

El método que se propone es aplicable a estructuras planas, de hormigón armado, formadas por barras sometidas a cualquier tipo de acción (cargas, desplazamientos de los apoyos, incrementos de temperatura, etc.). Se trata de un método de análisis no lineal, tanto por el material como por la consideración de los efectos de segundo orden. Es un método basado en el análisis de estructuras a partir de deformaciones impuestas y consta de dos etapas bien diferenciadas:

- I Cálculo lineal de la estructura (adoptando unas rigideces iniciales  $EI$ ,  $EA$  para todas las barras) bajo la acción de las cargas exteriores.
- II Proceso iterativo originado al introducir en la estructura unas deformaciones impuestas para considerar las no linealidades (física y geométrica), cuyo valor depende de los resultados de la iteración anterior. En todo este proceso la matriz de rigidez de la estructura no varía, siendo la misma que la calculada en la etapa I.

Aparte de las hipótesis más usuales de la resistencia de materiales y de las propias del hormigón armado (adherencia perfecta entre hormigón y acero, etc.) una hipótesis específica del método es la siguiente: la variación del esfuerzo axial de una barra, de unas iteraciones a otras, introduce variaciones despreciables en el diagrama momento-curvatura de las secciones de la pieza.

### Tratamiento de los efectos de segundo orden

Considérese una estructura esbelta solicitada por unas cargas en su plano medio que le producen, entre otros, fuertes esfuerzos de compresión en algunas piezas. La estructura se supondrá de material lineal, hiperestática y con posibilidad de desplazamiento de sus nudos (figura 1).

Sea la barra AB una cualquiera de la estructura y los esfuerzos y desplazamientos de la figura 2 los obtenidos en un análisis lineal. Si suponemos

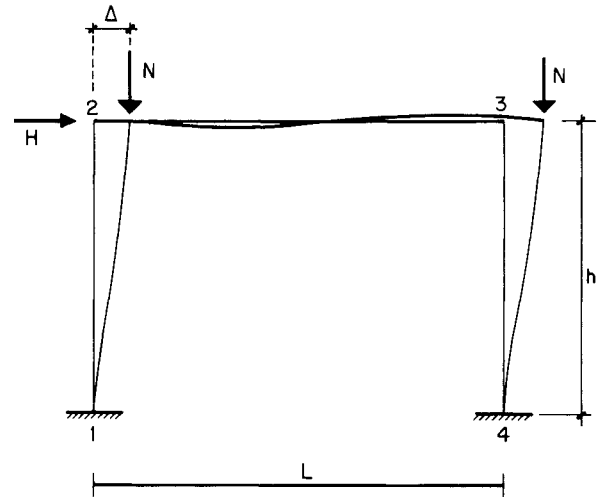


Fig. 1.—Estructura deformada bajo la acción de cargas horizontales y verticales.

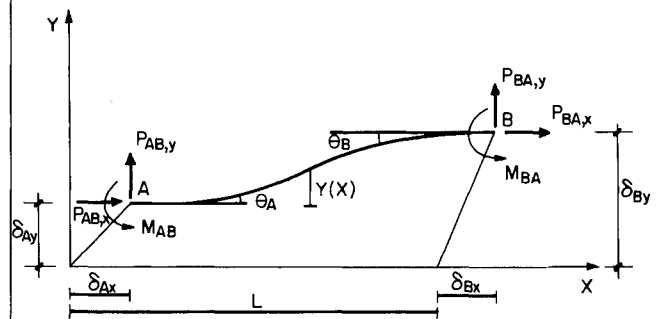


Fig. 2.—Fuerzas en los extremos de barra procedentes del cálculo lineal.

que no hay cargas aplicadas directamente sobre las barras, los esfuerzos de primer orden que solicitan una sección cualquiera de abscisa  $x$  (en coordenadas locales de la barra) serán:

$$\begin{aligned} M_1(x) &= -M_{AB} + P_{AB,y} \cdot x \\ V_1(x) &= P_{AB,y} \\ N_1(x) &= -P_{AB,x} \end{aligned} \quad (1)$$

Globalmente los designaremos por  $E_1(x)$

Ahora bien, si consideramos el efecto del axil en el equilibrio de la pieza deformada, y suponiéndola isostáticamente sustentada, deben aparecer en los extremos A y B unos incrementos de esfuerzos respecto de los calculados linealmente (ver figura 3) de valor:

$$\begin{aligned} M_A &= -N_1 \cdot \delta_1 \\ V_A &= N_1 \cdot \delta_{1/L} \\ N_A &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

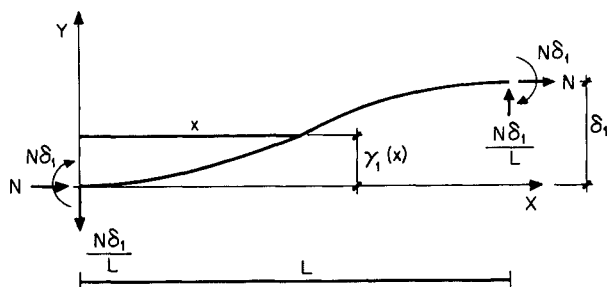


Fig. 3.—Esfuerzos isostáticos de segundo orden.

De manera que en un punto genérico de la barra A-B, de abscisa  $x$  y flecha  $Y_1(x)$  en los ejes locales de la figura, los incrementos y esfuerzos sufridos son:

$$\begin{aligned}\Delta M^{\text{II}}(x) &= -N_1 \cdot Y_1(x) + N_1 \cdot \delta_1 (1 - X/L) \\ \Delta V^{\text{II}}(x) &= N_1 \cdot \delta_{1/L} \\ \Delta N^{\text{II}}(x) &= 0\end{aligned}\quad (3)$$

Estos esfuerzos así calculados los denominamos esfuerzos isostáticos de segundo orden y los designaremos en adelante por  $\Delta E_j^I$ , correspondiendo la I a la inicial de isostáticos y la J a la iteración en que se trabaja.

Si despreciamos las deformaciones por cortante y siendo la rigidez elástica a flexión de la sección transversal de la pieza considerada  $k = EI$ , estos esfuerzos pueden asociarse a unas deformaciones (curvaturas) de valor:

$$\begin{aligned}\Delta \varphi^I(x) &= \frac{\Delta M^{\text{II}}(x)}{EI} = \\ &= \frac{N_1}{EI} \left[ -Y_1(x) + \delta_1 \left( 1 - \frac{x}{L} \right) \right]\end{aligned}\quad (4)$$

y, en general, se designarán por  $\Delta \varphi_j^I$ , teniendo I y j los significados anteriormente expuestos.

Conocidos ahora los esfuerzos isostáticos de segundo orden y sus curvaturas asociadas se pueden introducir en la estructura como acciones (deformaciones impuestas), efectuando un cálculo de la estructura con las características ya conocidas bajo estas acciones. Desde el punto de vista material esto equivale a una variación del vector de fuerzas manteniendo constante la matriz de rigidez de la estructura. El resultado de este cálculo serán los esfuerzos y desplazamientos hiperestáticos de segundo orden ( $\Delta E_j^{\text{H}}$  y  $\Delta \varphi_j^{\text{H}}$ ) que aparecen para compatibilizar a las deformaciones impuestas y que deberán acumularse sobre los isostáticos para cerrar el ciclo. Es decir, al final de esta primera iteración se tiene que los esfuerzos de segundo orden son:

$$\Delta E_1 = \Delta E_1^I + \Delta E_1^{\text{H}}$$

y los desplazamientos

$$\Delta \varphi_1 = \Delta \varphi_1^I + \Delta \varphi_1^{\text{H}}\quad (5)$$

valores que deberán superponerse a los resultados del análisis lineal:

$$E_2 = E_1 + \Delta E_1, \quad \varphi_2 = \varphi_1 + \Delta \varphi_1\quad (6)$$

A partir de aquí deberá repetirse el ciclo, puesto que han variado los esfuerzos y desplazamientos de la estructura y, por tanto, debe volver a plantearse el equilibrio en segundo orden. (Esto sería así, aunque la estructura fuese isostática, por la naturaleza de los esfuerzos de segundo orden).

Con los esfuerzos y desplazamientos finales de la primera iteración se puede iniciar el segundo ciclo, obteniendo la nueva ley de flechas de cada pieza  $Y_2(x)$  y con ella los nuevos esfuerzos isostáticos de segundo orden:

$$\begin{aligned}\Delta M_2^{\text{I}}(x) &= -N_2 \cdot Y_2(x) + N_2 \cdot \delta_2 \left( 1 - \frac{x}{L} \right) \\ \Delta V_2^{\text{I}}(x) &= N_2 \cdot \frac{\delta_2}{L} \\ \Delta N_2(x) &= 0\end{aligned}\quad (7)$$

A partir de aquí se obtendrían las curvaturas asociadas a estos esfuerzos y, tras el cálculo de la estructura bajo estas deformaciones impuestas, la superposición de los esfuerzos isostático e hiperestático sobre los lineales:

$$\begin{aligned}E_3 &= E_1 + \Delta E_2^{\text{I}} + \Delta E_2^{\text{H}} \\ \varphi_3 &= \varphi_1 + \Delta \varphi_2^{\text{I}} + \Delta \varphi_2^{\text{H}}\end{aligned}\quad (8)$$

El proceso iterativo debe continuar hasta que los resultados de dos iteraciones consecutivas sean suficientemente parecidos entre sí (en caso de convergencia del proceso).

En tal caso se puede asegurar que se ha encontrado una solución de esfuerzos y desplazamientos equilibrada en segundo orden y compatible con los enlaces de la estructura, pues procede de la superposición lineal de distintos estados que también tienen estas propiedades.

Para obtener el sistema de cargas, que producirían la inestabilidad del conjunto, puede procederse incrementando las cargas de compresión y manteniendo constante una carga perturbadora que provoque el primer modo de pandeo. Para cada escalón de carga se desarrolla todo el proceso iterativo anteriormente descrito hasta la convergencia del mismo, en cuyo caso se ha conseguido encontrar un punto de la curva genérica carga-desplazamiento que representa el equilibrio de la estructura en su configuración deformada.

Por este método se manifiesta la inestabilidad a través de la divergencia del proceso iterativo, dando lugar a una sucesión monótona en las variables estudiadas, lo que la distingue de otros tipos de divergencia (por ejemplo la debida a la acumulación de errores).

La traslacionalidad o no de la estructura no afecta en modo alguno al planteamiento ni resolución práctica del problema, ya que si en la ecuación (3) se hace  $\delta_1 = 0$  se tiene:

$$M_j^I = -N_j \cdot Y_j(x)$$

### Tratamiento conjunto de las no linealidades física y geométrica

Si en lugar de una estructura de material elástico consideramos una de hormigón armado debemos incluir los efectos de la no linealidad del material. Para ello se utilizará como herramienta de trabajo el diagrama momento-curvatura a axil constante de cada sección de la estructura. Sea el de la figura 4 el correspondiente a una sección genérica de una barra comprimida cualquiera.

Supongamos que se ha calculado linealmente la estructura con una rigidez elástica  $K_0 = EI$  (en esta sección), lo que en el diagrama corresponde a la recta que pasa por el origen y tiene por pendiente  $K_0$ . La solución del cálculo lineal conduce, en esta sección, a un momento que no está equilibrado en segundo orden y no cumple las propiedades del material, ya que no se encuentra sobre la curva M-C. La introducción del momento isostático de segundo orden  $\Delta M_1^I$  ya visto en el punto anterior puede verse gráficamente en la figura 4, con lo que se pasa del punto O al O'.

Para cumplir las condiciones del material deberá introducirse una curvatura impuesta  $\Delta C_1$  igual a la

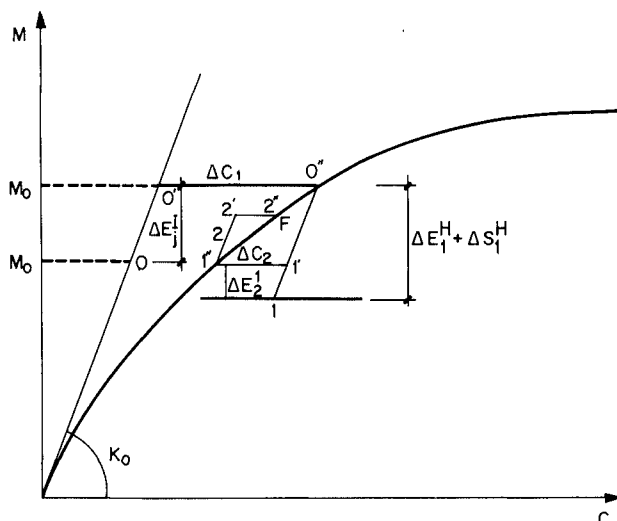


Fig. 4.—Diagrama Momento-curvatura de una sección arbitraria. Proceso iterativo.

diferencia entre las curvaturas que para ese momento corresponden según la rigidez elástica  $K_0$  y el diagrama momento-curvatura.

El cálculo de la estructura bajo la acción conjunta de las curvaturas isostáticas de segundo orden  $\Delta C_1^I$  y las debidas al material conduce a la respuesta hiperestática  $\Delta M_1^H$  (recta  $O' - 1$ ), con lo que el momento final de esta iteración será  $M_1 = M_0 + \Delta M_1^I + \Delta M_1^H$ , cada uno con su signo correspondiente.

Continuando de este modo el proceso iterativo llegaríamos a la solución final F que, además de ser equilibrada en segundo orden y compatible, cumple las propiedades del material.

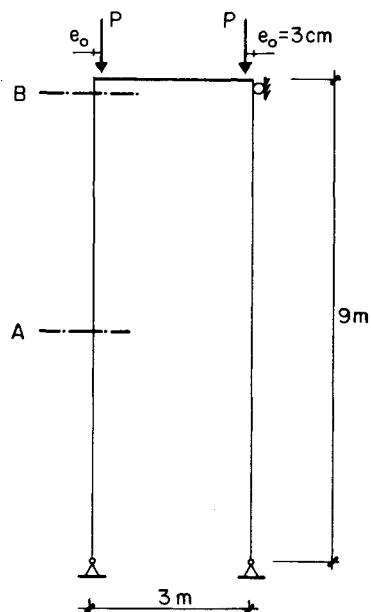
### Ejemplos

En la tesis, origen de este artículo, se presentan siete ejemplos tratando de cubrir una amplia gama de posibilidades estructurales (estructuras simples o complejas), de material lineal de hormigón armado, traslacionales e intraslacionales, etc., y comparando los resultados con los procedentes de otros métodos generales y simplificados así como los procedentes de la experimentación. Aquí expondremos los resultados únicamente de dos de las estructuras estudiadas que nos parecen suficientemente representativas.

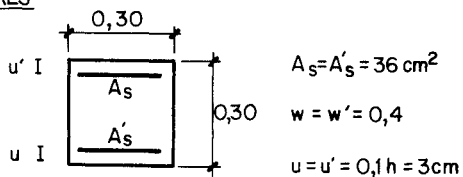
#### Ejemplo n.º 1

La estructura estudiada se trata de un pórtico biarticulado en su base, intraslacional sometido a un sistema simétrico de cargas (P) sobre el dintel muy próximas (3 cm) a la directriz del soporte contiguo (figura 5). Se ha estudiado la evolución del momento flector en las secciones A (punto medio del soporte) y B (arranque superior del soporte) a medida que aumenta el valor de la carga aplicada P, resultado que se muestra en la figura 6. Se observa que, mientras el momento en A aumenta considerablemente con la carga P, a partir de un cierto valor de ésta, el momento en B disminuye e incluso llega a cambiar de signo.

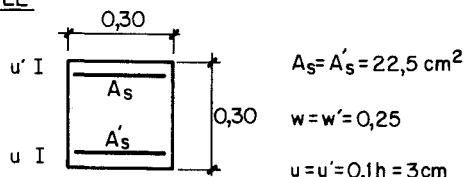
La interpretación de este fenómeno debe hacerse en función de la iteración existente entre las no linealidades geométricas y el material. Así, la fisuración de una sección de la columna, aparte de producir redistribuciones de esfuerzos, incrementa las flechas y con ellas los momentos de segundo orden, los cuales alteran la rigidez de las secciones produciendo de nuevo redistribuciones de esfuerzos. Todo este proceso de redistribución concluye en una situación de equilibrio si es que no se desencadena la inestabilidad estructural.



SECCION PILARES



SECCION DINTEL



MATERIALES:  $f_{cd} = 420 \text{ kp/cm}^2$   
 $f_{yd} = 4200 \text{ kp/cm}^2$   
 $E_s = 2,1 \cdot 10^4 \text{ kp/cm}^2$

Fig. 5.—Estructura analizada en el ejemplo núm. 1.

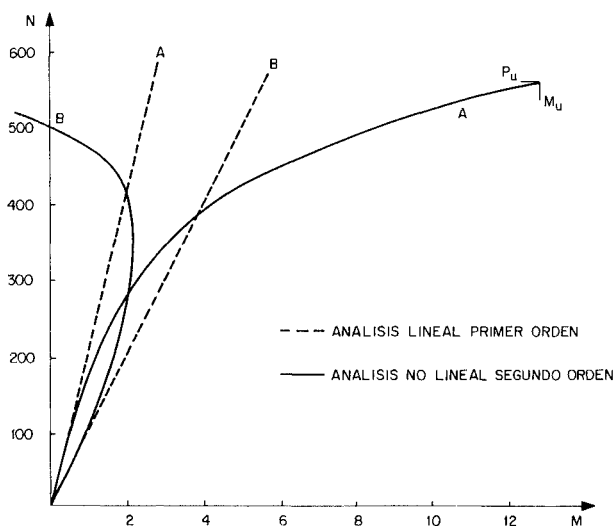
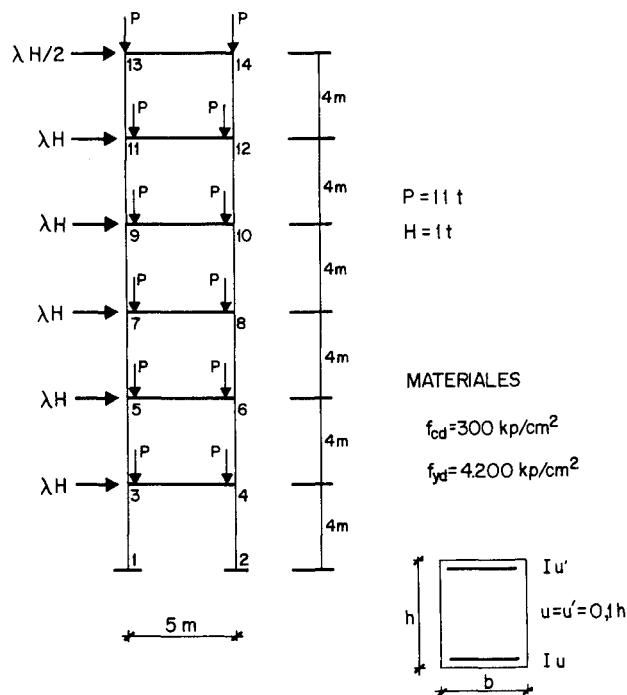


Fig. 6.—Esfuerzos obtenidos en el análisis del ejemplo núm. 1.

Ejemplo n.º 2

El ejemplo último que se presenta consiste en un pórtico de seis alturas y un solo vano empotrado en su base y sometido a cargas verticales en sus nudos y horizontales variables, cuyas características geométricas y mecánicas son las de la figura 7.

El análisis se efectúa bajo sucesivos incrementos de la carga horizontal, y el resultado de los nudos se refleja en las figuras 8 y 9. La primera de ellas muestra la curva «factor de carga,  $\lambda$  — desplazamiento en punta». Los puntos A, B, C, D indican que se ha alcanzado la plastificación del acero de tracción en las secciones indicadas en la figura 8. La inestabilidad se alcanza para  $\lambda = 3,1$ . La figura 9 muestra



SECCIONES TRANSVERSALES

| BARRA TIPO           | b (cm) | h (cm) | A COMP (cm <sup>2</sup> ) | A TRAC (cm <sup>2</sup> ) | w'    | w     | U <sub>c</sub> |
|----------------------|--------|--------|---------------------------|---------------------------|-------|-------|----------------|
| PILARES PLANTAS 1-4  | 30     | 35     | 18                        | 18                        | 0,24  | 0,24  | 315            |
| PILARES PLANTAS 5-6  | 30     | 30     | 5,5                       | 5,5                       | 0,085 | 0,085 | 270            |
| DINTELES PLANTAS 1-4 | 30     | 45     | 20,2                      | 20,2                      | 0,21  | 0,21  | 405            |
| DINTELES PLANTAS 5-6 | 30     | 45     | 8                         | 8                         | 0,084 | 0,084 | 405            |

Fig. 7.—Estructura analizada en el ejemplo núm. 2.

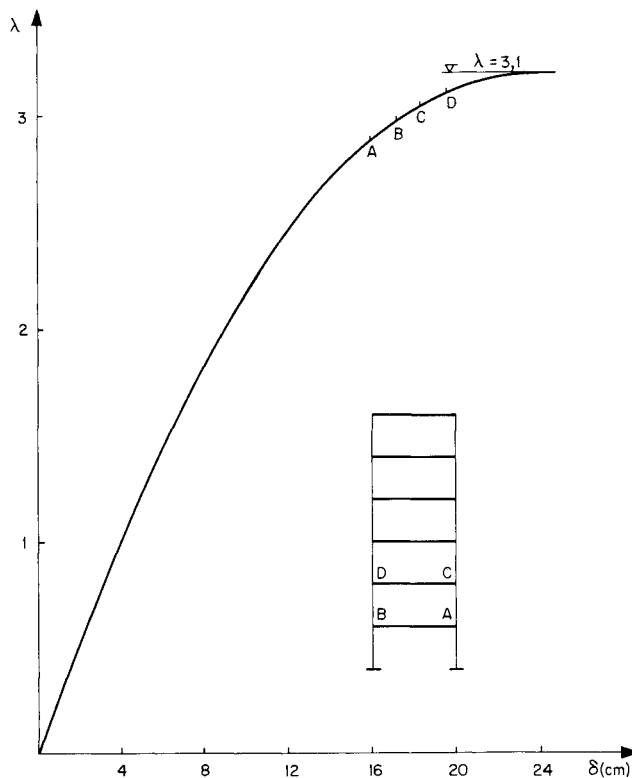


Fig. 8.—Desplazamientos obtenidos en el ejemplo núm. 2 en función del factor de carga.

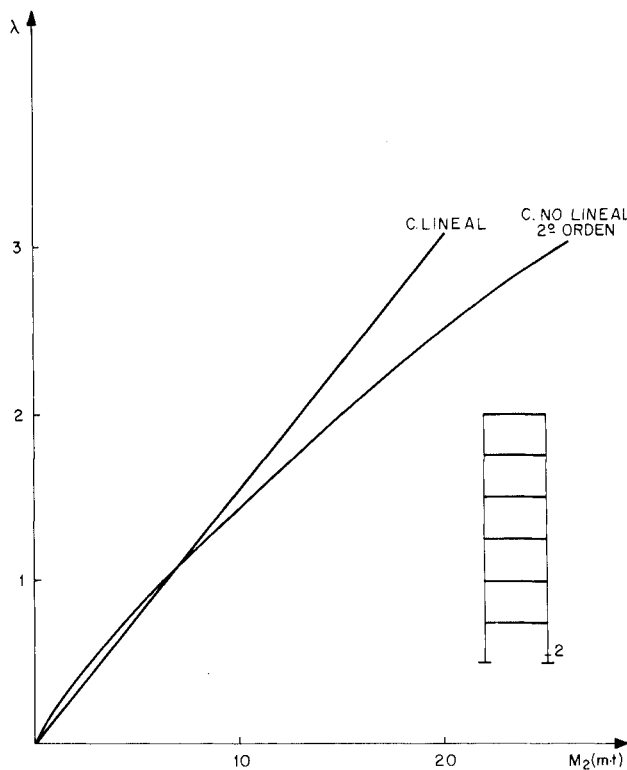


Fig. 9.—Esfuerzos obtenidos en el ejemplo núm. 2 en función del factor de carga.

la evolución del momento flector en el arranque inferior del soporte 2.4. Como puede comprobarse, para bajos valores de  $\lambda$  ( $\lambda \leq 1$ ), se produce

una redistribución favorable de esfuerzos respecto del cálculo lineal. Sin embargo, cuando los efectos de segundo orden llegan a ser importantes ( $\lambda > 2$ ) el momento crece más que proporcionalmente con la carga. Se ha considerado que el 20 % de las cargas tienen carácter permanente, con el correspondiente efecto por influencia en las deformaciones de la estructura. En este ejemplo, que por sus características puede ser real, queda reflejada la posibilidad de la inestabilidad global bajo una combinación de cargas no muy lejanas de las reales, cuando la sensibilidad frente a los efectos de segundo orden es importante.

## Consideraciones finales, conclusiones y perspectivas

Distinguiremos dos tipos de conclusiones: las derivadas del comportamiento estructural y las derivadas de las características del método.

Respecto de las primeras cabe destacar, una vez más, la influencia que la fisuración del hormigón y la plastificación de hormigón y acero tienen no sólo en la distribución de esfuerzos sino también en los desplazamientos de la estructura y, por lo tanto, en los esfuerzos de segundo orden. También hay que decir que, por los ejemplos tratados, que corresponden a un dimensionamiento "normal" tanto por cuantías, dimensiones, luces, cargas, etc., no parece frecuente el fenómeno de la inestabilidad global de la estructura para pórticos regulares múltiples, incluso traslacionales.

El método de análisis propuesto presenta como características más notables las siguientes:

1. Es un **método general** de análisis aplicable a estructuras planas de hormigón armado. Puede ser aplicable tanto manual como automáticamente y engloba, de una forma compacta, las no linealidades física y geométrica. Es válido, por tanto, en situaciones de servicio como en rotura. Dentro de los estados límites últimos puede detectar tanto la inestabilidad parcial o global de la estructura así como el agotamiento de alguna sección de la misma.
2. Puede considerarse un **método exacto** por la forma en que se tratan las no linealidades física y geométrica. En las rotaciones plásticas se tienen en cuenta todas las secciones en que se producen y no sólo en las zonas críticas. En cuanto al segundo orden, se calcula la deformada real de cada pieza y no se hace suposición respecto de la misma.
3. Dado que la matriz de rigidez de la estructura permanece constante en todo el proceso iterativo, y es igual a la calculada en régimen



lineal, se reduce considerablemente el tiempo de unidad del procesador, lo que incide en **la economía**. Además se pueden analizar estructuras de barras de gran envergadura sin la necesidad de nudos suplementarios en las barras, en lo que a la matriz de rigidez se refiere, por lo que cabe destacar su potencia.

4. Para mejorar **la convergencia del proceso iterativo** puede utilizarse como matriz de rigidez, en la etapa lineal, la deducida incluyendo en la misma el efecto de un axil supuesto a través de las funciones de estabilidad C y S. Es axil en casos normales de edificación fácilmente calculable por simple reparto isostático de cargas verticales con un error relativamente pequeño. En este caso, los esfuerzos isostáticos de segundo orden a introducir serán los creados por la variación de axil respecto del supuesto. (Es decir, en las expresiones (2), (4) y (7), deberá sustituirse  $N_j$  por  $\Delta N_j = N_j - N_1$ , siendo  $N_j$  el axil calculado en la iteración J.

5. Los resultados obtenidos evidencian una sensible coincidencia con el resto de los

métodos de tipo general existentes, teniendo como contrapartida una mayor sencillez conceptual y una facilísima adaptación a cualquier programa estándar de cálculo matricial.

En cuanto a perspectivas de futuro cabe pensar, por una parte, en el desarrollo del método para la inclusión de las deformaciones diferidas en un proceso de cálculo "step by step" en el tiempo. Pero lo más importante, a nuestro juicio, está en la posibilidad de desarrollar estudios paramétricos que traten de cuantificar la influencia de las distintas variables que se han mencionado con anterioridad, que influyen en el comportamiento de las estructuras esbeltas, con el fin de tratar de obtener una formulación analítica sencilla para la comprobación frente a pandeo de estructuras con una esbeltez considerable, tratando de dar una salida fácil y ajustada a la actual normativa en este tipo de estructuras. Por último, cabe señalar la necesidad de ampliar el método al caso de estructuras espaciales (pandeo por flexocompresión esviada) y la introducción de otro tipo de deformaciones (por ejemplo, deformaciones por cortantes) que generalmente se desprecian.

\* \* \*

## publicación del i.e.t. c.c.



**Manuel Fernández Cánovas**  
Dr. Ingeniero de Construcción

Este libro, el primero en lengua castellana sobre **resinas epoxi** aplicadas a la construcción, está dirigido a arquitectos, ingenieros, constructores y aplicadores. En él, sobre una reducida base teórica imprescindible, se asienta toda una extensa gama de aplicaciones de gran interés.

El autor trabaja desde hace muchos años en el campo de la investigación, especialmente en el estudio de refuerzos y reparaciones estructurales realizados con **resinas epoxi**.

Con un lenguaje sencillo se tocan todos los problemas que pueden presentarse en la construcción y en los que la solución puede radicar en el correcto empleo de las **resinas epoxi**.

Se estudian los componentes de las formulaciones **epoxi**, sus propiedades físicas y químicas, y aplicaciones, deteniéndose, detalladamente, en las siguientes:

Unión de hormigón fresco a hormigón endurecido. — Unión de hormigones entre sí. — Inyecciones de fisuras y grietas. — Unión de acero a hormigón. — Barnices y pinturas. — Las combinaciones breas-epoxi. — Revestimientos de depósitos alimenticios. — Sellado de superficies cerámicas. — Protección de tubos. — Los suelos epoxi en sus diferentes variantes. — Terrazo epoxi. — Reparación de baches. — Reparación de desperfectos en estructuras. — Reparación de carreteras de hormigón. — Juntas elásticas. — Guardacantos de tableros de puentes. — Refuerzos de pilares, vigas, forjados y zapatas, etc. — Consolidación de suelos. — Anclajes. — Protección de aceros en pretensado.

Se termina con unos capítulos dedicados a la limpieza y preparación de las superficies según los materiales a unir; al control del estado superficial de éstos; a las condiciones de temperatura de aplicación; limpieza de los útiles de trabajo; precauciones en el manejo de los sistemas; almacenaje, mezcla y manejo de las formulaciones epoxi y métodos de ensayo de sistemas y aplicaciones epoxidicas.

Un volumen encuadernado en cartón plastificado con lomo de tela, de 17 x 24 cm, compuesto de 334 páginas y 158 figuras y fotografías.

Madrid, 1981.

Precios: España, 1.700 ptas.; extranjero, \$ USA 34.00.