COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. LXIII 1992 FASC. 1

ANALYSE DE FOURIER ADAPTÉE À UNE PARTITION PAR DES CUBES DE WHITNEY

PAR

R. R. COIFMAN (NEW HAVEN, CONNECTICUT) ET Y. MEYER (PARIS)

EN HOMMAGE AU PROFESSEUR STANISLAW HARTMAN

1. Introduction. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. Considérons une partition de Ω par des cubes dyadiques Q_j, $j \in J$. Ces cubes seront appelés des *cubes de Whitney* s'il existe une constante $C > 1$ telle que, pour tout $j \in J$, la distance (notée L_j) entre Q_j et la frontière $\partial\Omega$ de Ω et la longueur l_j du côté de Q_j soient reliées par

$$C^{-1} l_j < L_j < C l_j \,. \tag{1.1}$$

Sous certaines conditions ($n = 2$ et choix approprié des Q_j), nous nous proposons de construire une *analyse de Fourier adaptée à une telle partition de Whitney.* Il s'agira, en fait, de définir, pour chaque Q_j, une *fenêtre* w_j *adaptée à* Q_j. Cela signifie que

$$\text{le support de } w_j \text{ est inclus dans } 2Q_j \,, \tag{1.2}$$

$$w_j \in C_0^\infty(\Omega) \,, \tag{1.3}$$

$$|\partial^\alpha w_j(x)| \le C_\alpha l_j^{-|\alpha|} \,. \tag{1.4}$$

Rappelons que $2Q_j$ est le cube dont le centre est le même que celui de Q_j et dont le côté est le double de celui de Q_j.

On a posé $\partial^\alpha = (\partial/\partial x_1)^{\alpha_1} \ldots (\partial/\partial x_n)^{\alpha_n}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, et les constantes C_α sont indépendantes de j.

Un programme trop optimiste est que l'on puisse choisir les fenêtres $w_j(x)$ de sorte que la famille $l_j^{-n/2} w_j(x) \exp(2\pi i k \cdot x / l_j)$, $k \in \mathbb{Z}^n$, soit une base orthonormée de $L^2(\Omega)$. On consultera à ce propos [2]. Mais nous montrerons que si $n = 2$ et si les $w_j(x)$ ainsi que les Q_j sont convenablement choisis, notre programme peut être réalisé, quitte à remplacer les exponentielles imaginaire par les fonctions

$$\sin[\pi(k_1 + \tfrac{1}{2})(x_1 - a_j^{(1)})/l_j] \sin[\pi(k_2 + \tfrac{1}{2})(x_2 - a_j^{(2)})/l_j]. \tag{1.5}$$

On a désigné par $(a_j^{(1)}, a_j^{(2)})$ un sommet du carré Q_j.

A quoi peuvent servir de telles bases? Si Ω est un ouvert borné régulier, elles conviennent à la description des espaces de Sobolev $H_0^s(\Omega)$, $s \geq 0$.

Une fonction f appartient à $H_0^s(\Omega)$ si et seulement si ses coefficients $\alpha(j,k)$, $k=(k_1,k_2)$, dans cette base vérifient $\sum_j \sum_k 4^{js}(1+|k|)^{2s}|\alpha(j,k)|^2 < \infty$. Il en résulte, par dualité, que les espaces de Sobolev $H^s(\Omega)$, $s \leq 0$, sont caractérisés également par cette condition.

2. Rappels sur la construction en dimension 1. Désignons par $\theta(x)$ une fonction indéfiniment dérivable de la variable réelle x, à valeurs dans $[0,1]$, égale à 1 si $x \leq -1$, à 0 si $x \geq 1$ et vérifiant, en outre,

$$\theta^2(x) + \theta^2(-x) = 1 \quad \text{pour tout } x \text{ réel}. \tag{2.1}$$

On désigne par H_0 le sous-espace fermé de $L^2(\mathbb{R})$ composé des fonctions $f(x)$ nulles si $x \geq 1$, de la forme $\theta(x)p(x)$ où $p(x) \in L^2[-1,1]$, $p(x) = p(-x)$, sur $[-1,1]$ et arbitraires si $x \leq -1$. L'opérateur P de projection orthogonale sur H_0 est donné par

$$Pf(x) = \theta^2(x)f(x) + \theta(x)\theta(-x)f(-x). \tag{2.2}$$

On définit de même $H_1 \subset L^2(\mathbb{R})$ par les conditions $f(x) = 0$ si $x \geq 1$, $f(x) = \theta(x)q(x)$, $q(x) \in L^2[-1,1]$, $q(-x) = -q(x)$ si $-1 \leq x \leq 1$ et $f(x)$ est arbitraire si $x \leq -1$. Alors l'opérateur de projection orthogonale sur H_1 est donné par

$$Qf(x) = \theta^2(x)f(x) - \theta(x)\theta(-x)f(-x). \tag{2.3}$$

Donnons-nous maintenant un intervalle $[a,b]$ ainsi que deux nombres réels positifs η et η' tels que $\eta + \eta' \leq l = b - a$. On définit, par simple changement d'origine et changement d'échelle, les projecteurs P_a et P_b. On a donc

$$P_a f(x) = \theta^2\left(\frac{x-a}{\eta}\right)f(x) + \theta\left(\frac{x-a}{\eta}\right)\theta\left(\frac{a-x}{\eta}\right)f(2a-x) \tag{2.4}$$

et de même pour P_b en remplaçant η par η'.

On a, dans ces conditions, $P_a \leq P_b$ et $P_b - P_a$ est un opérateur de projection orthogonale sur un sous-espace fermé $W_{(a,b)}$ de $L^2(\mathbb{R})$ que nous allons définir.

Une fonction $f \in W_{(a,b)}$ est nulle si $x \leq a - \eta$ ou si $x \geq b + \eta'$, est arbitraire si $a + \eta \leq x \leq b - \eta'$, et elle s'écrit

$$f(x) = \theta\left(\frac{x-a}{\eta}\right)\theta\left(\frac{a-x}{\eta}\right)q(x-a) \quad \text{si } |x-a| \leq \eta \tag{2.5}$$

où $q(t) \in L^2[-\eta,\eta]$, $q(-t) = -q(t)$. De même,

$$f(x) = \theta\left(\frac{x-b}{\eta'}\right)\theta\left(\frac{b-x}{\eta'}\right)p(x-b) \quad \text{si } |x-b| \leq \eta' \tag{2.6}$$

où $p(t) \in L^2[-\eta', \eta']$, $p(-t) = p(t)$.

On pose

$$w_{(a,b)}(x) = \left[\theta^2\left(\frac{x-b}{\eta'}\right) - \theta^2\left(\frac{x-a}{\eta}\right)\right]^{1/2}.$$

Alors les fonctions

$$\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\left[\pi\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{x-a}{l}\right)\right]w_{(a,b)}(x), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{2.7}$$

constituent une base orthonormée de $W_{(a,b)}$.

Les remarques précédentes conduisent à la construction d'une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$ adaptée à une partition arbitraire de $\mathbb{R}$ par des intervalles $[a_j, a_{j+1}]$. On suppose donc que a_j, $j \in \mathbb{Z}$, est une suite strictement croissante de nombres réels vérifiant $\lim_{j\to\pm\infty} a_j = \pm\infty$. On considère une suite $\eta_j > 0$ vérifiant $\eta_j + \eta_{j+1} \le l_j$ pour tout $j \in \mathbb{Z}$ et l'on construit les fenêtres $w_j(x) = w_{(a_j,b_j)}(x)$. Alors les fonctions

$$\sqrt{\frac{2}{l_j}}\sin\left[\pi\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{x-a_j}{l_j}\right)\right]w_j(x), \qquad j \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{N}, \tag{2.8}$$

constituent une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$.

En effet, pour chaque j fixé, les fonctions $u_{j,k}$, $k \in \mathbb{N}$, définies par (2.8), constituent une base orthonormée d'un sous-espace W_j de $L^2(\mathbb{R})$. L'opérateur de projection orthogonale sur W_j est $P_{j+1} - P_j$ où $P_j = P_{a_j}$. Or $\lim_{j\to+\infty} P_j = I$ car $\lim_{j\to+\infty} a_j = +\infty$ et $\lim_{j\to-\infty} P_j = 0$ car $\lim_{j\to-\infty} a_j = -\infty$.

Tous ces résultats sont établis dans [1] ou [2].

3. Le passage à la dimension 2. Soit R un rectangle $[a, b] \times [\alpha, \beta]$ de $\mathbb{R}^2$. Les deux côtés horizontaux de R seront appelés Γ_1 et Γ_3, les deux côtés verticaux Γ_2 et Γ_4. On désignera par η_1, η_2, η_3 et η_4 quatre nombres strictement positifs tels que $\eta_1 + \eta_3 \le \beta - \alpha$, $\eta_2 + \eta_4 \le b - a$. Dès que η_1, η_2, η_3 et η_4 sont fixés, le sous-espace correspondant $W_R = W_R^{(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4)}$ de $L^2(\mathbb{R}^2)$ est défini par les trois caractérisations équivalentes suivantes:

(a) W_R est la fermeture dans $L^2(\mathbb{R}^2)$ du produit tensoriel $W_{(a,b)} \otimes W_{(\alpha,\beta)}$ où $W_{(a,b)}$ est défini comme il est indiqué dans la section 2 avec $\eta = \eta_2$ et $\eta' = \eta_4$ et de même $W_{(\alpha,\beta)}$ avec $\eta = \eta_1$ et $\eta' = \eta_3$.

(b) W_R est l'image de $L^2(\mathbb{R}^2)$ par le projecteur

$$P_R = (P_b - P_a) \otimes (P_\beta - P_\alpha)$$

où η_2, η_4, η_1 et η_3 servent à définir respectivement P_a, P_b, P_α et P_β.

(c) Les fonctions

$$\frac{2}{\sqrt{lL}}\sin\left[\pi\left(\frac{x_1-a}{l}\right)\left(k_1+\frac{1}{2}\right)\right]\sin\left[\pi\left(\frac{x_2-a}{L}\right)\left(k_2+\frac{1}{2}\right)\right]w_R(x_1,x_2)$$

où $l=b-a$, $L=\beta-\alpha$ et $w_R(x_1,x_2)=w_{(a,b)}(x_1)w_{(\alpha,\beta)}(x_2)$ constituent une base orthonormée de W_R.

Notre propos sera de choisir convenablement les fenêtres w_R, c'est-à-dire les valeurs de η_1,η_2,η_3 et η_4 pour que $L^2(\Omega)$ soit la somme hilbertienne directe des espaces W_Q associés à une partition de Ω par des carrés de Whitney Q. *Nous poserons* $\eta_1=\delta_R(\Gamma_1),\ldots,\ \eta_4=\delta_R(\Gamma_4)$ *dans tout ce qui suit.* Tout comme en dimension 1, les choix de $\delta_R(\Gamma_1)$, $\delta_R(\Gamma_2)$, $\delta_R(\Gamma_3)$ et $\delta_R(\Gamma_4)$ dépendront des choix déjà faits pour les carrés R' adjacents à R ou rencontrant R. Cette dépendance, que nous expliciterons dans la section suivante, assurera l'orthogonalité entre les W_R et également le fait que $L^2(\Omega)$ soit la somme hilbertienne directe des W_R.

4. Le choix des $\delta_Q(\Gamma)$. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$. Pour tout carré dyadique $Q=[a,b]\times[\alpha,\beta]$ de $\mathbb{R}^2$, nous désignerons par $3Q$ le "carré triple", ayant même centre que Q et dont les côtés ont des longueurs triples de celles de Q.

On considère l'ensemble $\mathcal{E}$ de tous les carrés dyadiques Q de $\mathbb{R}^2$ tels que $3Q\subset\Omega$. On désigne par $E\subset\mathcal{E}$ l'ensemble des carrés dyadiques, appartenant à $\mathcal{E}$ et maximaux pour l'inclusion. Alors Ω est la réunion disjointe (à un ensemble de mesure nulle près) des carrés Q appartenant à E.

Soit $\Omega_j\subset\Omega$ la réunion des carrés dyadiques fermés Q, de côté 2^{-j}, tels que $3Q$ soit inclus dans Ω. Désignons, par ailleurs, par $E_j\subset E$ l'ensemble des $Q\in E$ de côté 2^{-j} et par G_j leur réunion. Alors Ω_j est la réunion disjointe de Ω_{j-1} et de G_j.

Enfin, Ω_j n'est pas vide si et seulement si $j\ge j_0$. Passons à la définition des nombres $\delta_Q(\Gamma)$ lorsque $Q\in E_j$ et que Γ est un côté de Q.

Tout d'abord on décide que $\delta_Q(\Gamma)=\frac14 2^{-j_0}$ chaque fois que $Q\in E_{j_0}$. On définit ensuite les nombres $\delta_Q(\Gamma)$, de proche en proche, si $j\ge j_0+1$, en appliquant les trois règles suivantes:

(4.1) Si $Q\in E_{j+1}$ et $Q\cap\Omega_j=\emptyset$, alors $\delta_Q(\Gamma)=\frac14 2^{-j-1}$ pour tout côté Γ de Q.

(4.2) Si un côté Γ de Q est contenu dans Ω_j, alors $\delta_Q(\Gamma)=\frac12 2^{-j-1}$.

(4.3) Si l'intersection $Q\cap\Omega_j$ se réduit à un sommet s de Q, on désigne par Γ_1 le côté horizontal de Q contenant s et par Γ_2 le côté vertical de Q contenant s. Alors $\delta_Q(\Gamma_1)=\frac12 2^{-j-1}$ et $\delta_Q(\Gamma_2)=\frac14 2^{-j-1}$.

(4.4) Si aucune des règles précédentes ne s'applique à Γ, côté de Q ($Q \in E_{j+1}$), alors $\delta_Q(\Gamma) = \frac{1}{4} 2^{-j-1}$.

Une fois que $\eta_1 = \delta_Q(\Gamma_1), \ldots, \eta_4 = \delta_Q(\Gamma_4)$ sont définis, la fenêtre $w_Q(x_1, x_2)$ correspondante en découle par la construction des sections 2 et 3.

THÉORÈME 1. *Si les fenêtres $w_Q(x_1, x_2)$ sont définies par les régles précédentes, alors la collection des fonctions*

$$(4.5) \quad 2^{-j-1} \sin[\pi(q_1 + \tfrac{1}{2})(2^j x_1 - k_1)] \times \sin[\pi(q_2 + \tfrac{1}{2})(2^j x_2 - k_2)] w_Q(x_1, x_2)$$

où $j \geq j_0$, $Q \in E$, $Q = [2^{-j}k_1, 2^{-j}(k_1+1)] \times [2^{-j}k_2, 2^{-1}(k_2+1)]$, $q_1 \in \mathbb{N}$, $q_2 \in \mathbb{N}$, est une base orthonormée de $L^2(\Omega)$.

Comme souvent, il est immédiat de vérifier que la suite $\psi_{Q,q}(x)$, $Q \in E$, $q \in \mathbb{N}^2$, des fonctions définies par (4.5) est une suite orthonormale et les difficultés apparaissent lorsqu'on veut établir la complétude. Nous nous limiterons donc à la complétude.

5. La preuve du théorème 1. Désignons par U_j la collection des cubes Q de côté 2^{-j} inclus dans Ω_j. Pour $Q \in U_j$, nous définirons la "fenêtre canonique" $\widetilde{w}_Q(x_1, x_2)$ en imposant le choix $\delta_Q(\Gamma) = \frac{1}{4} 2^{-j}$ pour tous les côtés Γ de Q. Enfin, on pose

$$(5.1) \qquad \Pi_j = \sum_{Q \in U_j} \widetilde{P}_Q$$

où $\widetilde{P}_Q$ est le projecteur sur le sous-espace $\widetilde{W}_Q$ construit à l'aide de la méthode de la section 2 à partir de $\widetilde{w}_Q$. Nous revenons aux fonctions définies par (4.5). Elles forment une base orthonormée d'un sous-espace W_Q. Nous désignerons par $P_Q : L^2(\mathbb{R}^2) \to W_Q$ le projecteur orthogonal et nous aurons démontré le théorème 1 si nous établissons

$$(5.2) \qquad \sum_{Q \in E_j} P_Q = \Pi_j - \Pi_{j-1} \quad \text{avec } \Pi_{j_0 - 1} = 0.$$

Il est, en effet, facile de vérifier que $\Pi_j \to I$ sur $L^2(\Omega)$ quand j tend vers $+\infty$, c'est-à-dire que $\lim \|\Pi_j(f) - f\|_{L^2(\Omega)} = 0$ pour $j \in L^2(\Omega)$. En fait, on se limite à des fonctions f continues, à support compact inclus dans Ω. Pour une telle fonction f, on ne change pas $\Pi_j(f)$ en remplaçant U_j par l'ensemble de tous les carrés dyadiques de côté 2^{-j}, du moins lorsque j est assez grand. Dans ces conditions $\Pi_j(f) = f$, lorsque j est assez grand.

Revenons à la preuve de (5.2). Si $j = j_0$, $E_j = U_j$ et $P_Q = \widetilde{P}_Q$ pour tout $Q \in E_j$.

Si $j \geq j_0 + 1$, on commence par décomposer chaque carré dyadique $Q \in U_{j-1}$ en quatre carrés dyadiques Q_1, Q_2, Q_3 et Q_4. On décompose du même coup l'opérateur $\widetilde{P}_Q$ en $P^\sharp_{Q_1} + P^\sharp_{Q_2} + P^\sharp_{Q_3} + P^\sharp_{Q_4}$. Voici la définition de ces quatre projecteurs. Revenons à la dimension 1 et aux notations de la section 2. Si $a < c < b$ et si $\eta'' > 0$ est assez petit pour que $\eta + \eta'' \leq c - a$, $\eta' + \eta'' \leq b - c$, alors $P_b - P_a = P_b - P_c + P_c - P_a$ où $P_a = P_{a,\eta}$, $P_b = P_{b,\eta'}$ et $P_c = P_{c,\eta''}$.

Si $Q = [a,b] \times [\alpha,\beta]$, $c = (a+b)/2$, $\gamma = (\alpha+\beta)/2$, $\eta + \eta' = l/4$ où $l = b - a = \beta - \alpha$ et enfin $\eta'' = 1/8$. On écrit $(P_b - P_a) \otimes (P_\beta - P_\alpha) = [(P_b - P_c) + (P_c - P_a)] \otimes [(P_\beta - P_\gamma) + (P_\gamma - P_\alpha)]$, ce qui conduit aux termes $P^\sharp_{Q_1}$, $P^\sharp_{Q_2}$, $P^\sharp_{Q_3}$ et $P^\sharp_{Q_4}$.

On a donc

$$\Pi_{j-1} + \sum_{Q \in E_j} P_Q = \sum_{Q \in U_j} L_j$$

où $L_Q = P_Q$ si $Q \in E_j$ et $L_Q = P^\sharp_Q$ si $Q \notin E_j$. Il reste à montrer que l'on peut en fait remplacer chaque L_Q par $\widetilde{P}_Q$.

Si $Q \in U_j$ et $Q \cap \Omega_{j-1} = \emptyset$, alors $Q \in E_j$ et, par construction, $P_Q = \widetilde{P}_Q$ de sorte que ces termes peuvent être oubliés.

Si $Q \in U_j$ et $Q \cap \Omega_{j-1}$ n'est pas vide, alors l'un des sommets s de Q est de la forme $(2k_1 2^{-j}, 2k_2 2^{-j})$. En outre les trois autre carrés dyadiques de côté 2^{-j} et ayant s pour sommet appartiennent également à U_j. Ces quatre carrés sont donc obtenus en divisant en quatre la “boîte” B_s, définie comme le carré de centre s et de côté 2^{-j+1}.

Ces boîtes sont deux à deux disjointes et nous nous proposons de démontrer que, pour tout s appartenant à la fois à Ω_{j-1} et au réseau $2^{-j+1}\mathbb{Z}^2$, on a

$$\sum_{\{Q \in U_j, Q \subset B_s\}} L_Q = \sum_{\{Q \in U_j, Q \subset B_s\}} \widetilde{P}_Q. \tag{5.3}$$

Pour établir (5.3), on écrit $B_s = [a,b] \times [\alpha,\beta]$, on pose $c = (a+b)/2$, $\gamma = (\alpha+\beta)/2$ et l'on décompose chacun des opérateurs L_Q à l'aide des opérateurs P_a, P_b, P_c, P_α, P_β et P_γ. Ces six opérateurs sont, en fait, douze car les trois nombres η, η' et η'' peuvent prendre chacun deux valeurs, à savoir $\frac{1}{2}2^{-j}$ et $\frac{1}{4}2^{-j}$. On écrira dans le premier cas $\mathbb{P}_a$, $\mathbb{P}_b, \ldots$ et dans le second P_a, $P_b, \ldots$ Les règles (4.2), (4.3) et (4.4) limitent cependant le nombre de cas possibles. Une limitation supplémentaire est obtenue en observant que le problème est symétrique en les variables x_1 et x_2 et que l'on peut également changer x_1 en $-x_1$ ou x_2 en $-x_2$. Finalement, il ne reste que deux cas. Pour le premier, $s = (c,\gamma)$, $\eta = \eta' = \frac{1}{4}2^{-j}$ et $\eta'' = \frac{1}{2}2^{-j}$, tant pour la variable x_1 que pour la variable x_2. L'identité (5.3) se réduit alors à

$$(\mathbb{P}_c - P_a) \otimes (\mathbb{P}_\gamma - P_\alpha) + (\mathbb{P}_c - P_a) \otimes (\mathbb{P}_\beta - \mathbb{P}_\gamma) \tag{5.4}$$

$$
\begin{aligned}
&+ (P_b - \mathbb{P}_c) \otimes (\mathbb{P}_\gamma - P_\alpha) + (P_b - \mathbb{P}_c) \otimes (P_\beta - \mathbb{P}_\gamma)\\
&\qquad = (P_c - P_a) \otimes (P_\gamma - P_\alpha) + (P_c - P_a) \otimes (P_\beta - P_\gamma)\\
&\qquad\quad + (P_b - P_c) \otimes (P_\gamma - P_\alpha) + (P_b - P_c) \otimes (P_\beta - P_\gamma).
\end{aligned}
$$

Ceci est presque évident.

Compte tenu des symétries, le second cas peut toujours être défini par les choix suivants :

(5.5) En ce qui concerne la variable x_2, les choix de η, η' et η'' sont $\eta = \eta' = \frac{1}{4}2^{-j}$ et $\eta'' = \frac{1}{2}2^{-j}$.

(5.6) En ce qui concerne la variable x_1, $\eta = \eta' = \eta'' = \frac{1}{4}2^{-j}$ pour les deux carrés supérieurs de la boîte B_s, tandis que $\eta'' = \frac{1}{2}2^{-j}$, $\eta = \eta' = \frac{1}{4}2^{-j}$ pour les deux carrés inférieurs.

L'identité (5.3) se ramène alors à

$$
\begin{aligned}
(5.7)\quad &(\mathbb{P}_c - P_a) \otimes (\mathbb{P}_\gamma - P_\alpha) + (P_b - \mathbb{P}_c) \otimes (\mathbb{P}_\gamma - P_\alpha)\\
&+ (P_c - P_a) \otimes (P_\beta - \mathbb{P}_\gamma) + (P_b - P_c) \otimes (P_\beta - \mathbb{P}_\gamma)\\
&\qquad = (P_c - P_a) \otimes (P_\gamma - P_\alpha) + (P_b - P_c) \otimes (P_\gamma - P_\alpha)\\
&\qquad\quad + (P_c - P_a) \otimes (P_\beta - P_\gamma) + (P_b - P_c) \otimes (P_\beta - P_\gamma).
\end{aligned}
$$

La règle (4.3) a pour finalité d'éviter le choix $\eta'' = \frac{1}{2}2^{-j}$ pour les deux carrés inférieurs, $\eta'' = \frac{1}{4}2^{-j}$ pour les carrés supérieurs (en ce qui concerne la variable x_1) et le choix similaire en ce qui concerne x_2. Au lieu de (5.4) ou (5.5) on tomberait sur

$$
\begin{aligned}
&(\mathbb{P}_c - P_a) \otimes (\mathbb{P}_\gamma - P_\alpha) + (P_b - \mathbb{P}_c) \otimes (P_\gamma - P_\alpha)\\
&+ (P_c - P_a) \otimes (P_\beta - \mathbb{P}_\gamma) + (P_b - P_c) \otimes (P_\gamma - P_\alpha)
\end{aligned}
$$

que l'on peut simplifier.

RÉFÉRENCES

[1] P. Auscher and G. Weiss, *The local sine and cosine base*, preprint, Department of Mathematics, Washington University, St. Louis, Missouri.

[2] R. R. Coifman et Y. Meyer, *Remarques sur l'analyse de Fourier à fenêtre*, C. R. Acad. Sci. Paris 312 (1991), 259–261.

[3] Y. Meyer, *Ondelettes et opérateurs*, Hermann, Paris 1990.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
YALE UNIVERSITY
NEW HAVEN, CONNECTICUT 06520
U.S.A.

CEREMADE, UNIVERSITÉ PARIS-IX
DAUPHINE
PLACE DE-LATTRE-DE-TASSIGNY
75775 PARIS CEDEX 16, FRANCE

Reçu par la Rédaction le 11.2.1991