

# ANALYSE UND SYNTHESE ELEKTROMECHANISCHER SYSTEME

von der Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik  
der Technischen Universität Chemnitz

genehmigte

## **Dissertation**

zur Erlangung des akademischen Grades

## **Doktor-Ingenieur**

(Dr.-Ing.)

vorgelegt

von Dipl.-Ing. Olaf Enge

geboren am 14.10.1961 in Karl-Marx-Stadt

eingereicht am 03. März 2005

Gutachter: Prof. Dr. sc. nat. Peter Maißer  
Prof. Dr.-Ing. Wolfram Dötzel  
Priv.-Doz. Dr.-Ing. habil. Roland Süße

Tag der Verleihung: 05. August 2005



# Analyse und Synthese elektromechanischer Systeme

Dissertation an der Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik der Technischen Universität Chemnitz

Anzahl der Seiten: 225  
Anzahl der Abbildungen: 60  
Anzahl der Literaturzitate: 251

## REFERAT

Die Arbeit behandelt Methoden zur Analyse bzw. Synthese elektromechanischer Systeme mit endlichem Freiheitsgrad (EMS). Dabei wird von einer *einheitlichen mathematischen Modellierung* solcher Systeme basierend auf dem Prinzip der virtuellen Arbeit in Lagrange'scher Fassung ausgegangen. Die Anwendung dieses Prinzips gründet sich auf die Graphentheorie zur Beschreibung topologischer Zusammenhänge sowie auf Starrkörpermechanik und Kirchhoff-Theorie zur Gewinnung eines einheitlichen differenzial-algebraischen Systems der Bewegungsgleichungen und Zwangsbedingungen.

Als Analysemethoden für strukturfeste EMS werden neben der numerischen Integration die Bestimmung von Gleichgewichtszuständen und die Herleitung der linearisierten Gleichungen zur Schwingungsanalyse dargelegt. Einer der beiden Hauptinhalte der Arbeit ist die einheitliche Modellierung und Behandlung von *strukturvariablen EMS*. Dazu werden Phänomene der Strukturvariabilität domänenunabhängig als unilaterale Bindungen aufgefasst und mittels komplementärer Variablen beschrieben. Das kombinatorische Problem der Strukturfindung wird mittels eines linearen Komplementaritätsproblems gelöst.

Die Synthese eines EMS wird als inverses Problem der Dynamik aufgefasst. Eine Lösung dieser Aufgabe bei gegebener Struktur kann mittels Parameteroptimierung erfolgen. Der zweite Hauptinhalt der Arbeit ist die *nichtlineare dynamische Steuerung* von EMS als die Lösung des inversen Problems bei fester Gesamtkonfiguration. Dazu wird ein so genannter erweiterter PD-Regler – bestehend aus einer nichtlinearen Vorsteuerung auf Basis der inversen Dynamik des EMS und einer linearen Rückführung des Lage- und Geschwindigkeitsfehlers – entworfen, der das gesamte EMS um einen Sollkonfigurationsraum regelt. Die globale asymptotische Stabilität dieses Regelgesetzes wird durch explizite Konstruktion einer Lyapunov-Funktion nachgewiesen.

Einige Beispiele zur Anwendung der aufgeführten Analyse- und Synthesemethoden runden die Arbeit ab.

## SCHLAGWÖRTER

Mechatronik, diskretes elektromechanisches System, einheitliche mathematische Modellierung, Prinzip der virtuellen Arbeit, Lagrange-Formalismus, Strukturvariabilität, unilaterale Bindung, lineares Komplementaritätsproblem, inverse Problemstellung, nichtlineare dynamische Steuerung, erweiterter PD-Regler, Lyapunov-Funktion



## Vorwort

Die vorliegende Dissertation entstand während meiner langjährigen Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Mechatronik e.V. Chemnitz, einem An-Institut an der TU Chemnitz.

Mein ganz herzlicher Dank gilt Herrn Prof. Dr. sc. nat. Peter Maißer, Direktor des Instituts, für die Anregung dieser Arbeit, seine hervorragende Unterstützung und Betreuung sowie wohlwollende Förderung. Seine motivierende Art und Unermüdlichkeit bei wissenschaftlichen Diskussionen hat ohne Frage ganz wesentlich zum Gelingen der Arbeit beigetragen. Für die Erstellung des Erstgutachtens bin ich ihm ebenfalls sehr dankbar.

Weiterhin gebührt mein Dank Herrn Prof. Dr.-Ing. Wolfram Dötzel für das freundliche Interesse, das mir entgegengebrachte Vertrauen und die Übernahme des zweiten Gutachtens. Die Zusammenarbeit mit seinem Lehrstuhl innerhalb des Sonderforschungsbereiches 379 an der TU Chemnitz hat wertvolle Impulse für meine Arbeit geliefert.

Herrn Priv.-Doz. Dr.-Ing. habil. Roland Süße danke ich für das lebhafte Interesse an dem Thema meiner Arbeit und die Anfertigung des dritten Gutachtens.

An dieser Stelle danke ich allen Kolleginnen und Kollegen am Institut für Mechatronik für die sehr von Freundlichkeit geprägte Arbeitsatmosphäre und die ständig abrufbare Hilfsbereitschaft. Besonders erwähnen möchte ich hier Herrn Dr. rer. nat. Gerald Kielau für die vielen wertvollen Diskussionen und hilfreichen Ideen sowie für die kritische Durchsicht des Manuskripts. Ebenso danke ich Herrn Dr. rer. nat. Uwe Jungnickel für seine besondere Hilfsbereitschaft.

Nicht zuletzt möchte ich meiner Lebensgefährtin Petra Rosenblatt und meinem Sohn Marcus Rosenblatt danken. Mit ihrer Unterstützung und ihrem Verständnis haben sie diese Arbeit erst möglich gemacht.

Hainichen, im März 2005

Olaf Enge

*Für Petra*

# Inhaltsverzeichnis

<b>Symbole und Abkürzungen</b>	<b>XI</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Das Selbstverständnis der Mechatronik . . . . .	1
1.2 Literaturübersicht . . . . .	2
1.2.1 Modellierung mechatronischer Systeme . . . . .	2
1.2.2 Modellierung von Strukturvariabilität . . . . .	5
1.2.3 Inverse Probleme/Dynamische Steuerung . . . . .	7
1.3 Aufbau der Arbeit . . . . .	8
1.4 Zielstellung der Arbeit . . . . .	9
1.5 Schreibweisen . . . . .	10
<b>2 Theoretische Grundlagen</b>	<b>11</b>
2.1 Graphentheorie . . . . .	11
2.1.1 Grundbegriffe . . . . .	11
2.1.2 Analytische Darstellung von Graphen . . . . .	13
2.1.3 Einige Eigenschaften . . . . .	14
2.2 Mehrkörpersysteme . . . . .	15
2.2.1 Topologie . . . . .	15
2.2.2 Kinematik . . . . .	17
2.2.3 Kinetik . . . . .	18
2.2.3.1 Konstitutive Gleichungen . . . . .	18
2.2.3.2 Prinzip der virtuellen Arbeit . . . . .	18
2.2.3.3 Zustandsfunktionen . . . . .	19
2.2.3.4 Struktur der Lagrange'schen Gleichungen . . . . .	19
2.2.4 Mehrkörpersysteme mit zusätzlichen Bindungen . . . . .	21
2.2.4.1 Zusätzliche Bindungen . . . . .	21
2.2.4.2 Bewegungsgleichungen . . . . .	22
2.3 Elektrische Systeme . . . . .	23
2.3.1 Repräsentierender Graph . . . . .	23
2.3.2 Kirchhoff'sche Gesetze . . . . .	24
2.3.3 Bewegungsgleichungen in Minimalkoordinaten . . . . .	25
2.3.3.1 Generalisierte Koordinaten . . . . .	25
2.3.3.2 Konstitutive Gleichungen . . . . .	27
2.3.3.3 Prinzip der virtuellen Arbeit . . . . .	27
2.3.3.4 Zustandsfunktionen . . . . .	28

2.3.3.5	Ein Lagrange'sches Modell für ES . . . . .	29
2.3.3.6	Struktur der Lagrange'schen Bewegungsgleichungen . . . . .	30
2.3.4	Bewegungsgleichungen in Nicht-Minimalkoordinaten . . . . .	33
2.3.4.1	Generalisierte Koordinaten . . . . .	33
2.3.4.2	Rheonome Bindungen . . . . .	34
2.3.4.3	Bewegungsgleichungen . . . . .	34
<b>3</b>	<b>Einheitliche mathematische Modellierung elektromechanischer Systeme</b>	<b>37</b>
3.1	Topologie/Kinematik . . . . .	38
3.2	Kinetik elektromechanischer Systeme . . . . .	39
3.2.1	Konstitutive Gleichungen . . . . .	39
3.2.2	Prinzip der virtuellen Arbeit . . . . .	39
3.2.3	Zustandsfunktionen . . . . .	40
3.2.4	Ein Lagrange'sches Modell für EMS . . . . .	42
3.2.4.1	Spezielle Konstitutivgleichungen . . . . .	42
3.2.4.2	Maschenspannungen . . . . .	42
3.2.4.3	Kraftgesetze . . . . .	44
3.2.5	Struktur der Lagrange'schen Bewegungsgleichungen . . . . .	45
3.3	EMS mit zusätzlichen Bindungen . . . . .	48
3.3.1	Kinematische und holonome Bindungen des EMS . . . . .	48
3.3.2	Bewegungsgleichungen . . . . .	49
<b>4</b>	<b>Analyse elektromechanischer Systeme bei fester Struktur</b>	<b>51</b>
4.1	Dynamische Simulation . . . . .	51
4.1.1	Rein mechanische Kräfte . . . . .	51
4.1.2	Elektrisch erzeugte Kräfte . . . . .	52
4.1.3	Bewegungsgleichungen des ETS bei strukturellen Singularitäten . . . . .	53
4.1.3.1	Formulierung in Minimalkoordinaten . . . . .	53
4.1.3.2	Formulierung in Nicht-Minimalkoordinaten . . . . .	56
4.2	Statisches Gleichgewicht . . . . .	58
4.2.1	Begriffsbestimmung . . . . .	58
4.2.2	Berechnung mittels Optimierung . . . . .	59
4.3	Lineare Schwingungsanalyse . . . . .	60
4.3.1	EMS ohne Zwangsbedingungen . . . . .	61
4.3.1.1	Störungsgleichungen . . . . .	61
4.3.1.2	Modalanalyse . . . . .	63
4.3.2	EMS mit Zwangsbedingungen . . . . .	65
4.3.2.1	Bewegungsgleichungen und Bindungen . . . . .	65
4.3.2.2	Störungsgleichungen . . . . .	66
4.3.2.3	Modalanalyse . . . . .	68
<b>5</b>	<b>Analyse elektromechanischer Systeme bei variabler Struktur</b>	<b>71</b>
5.1	Strukturvariabilität und unilaterale Bindungen . . . . .	71
5.2	Strukturvariabilität bei mechanischen Systemen . . . . .	72
5.2.1	Das Kontaktproblem . . . . .	73
5.2.2	Das Reibproblem . . . . .	76
5.3	Strukturvariabilität bei elektrischen Systemen . . . . .	79



5.3.1	Komplementäre Schaltzustände . . . . .	80
5.3.2	Fremdgesteuerte/selbststeuernde Schalter . . . . .	81
5.3.3	Die Diode als selbststeuernder Schalter . . . . .	83
	5.3.3.1 Zustandsbedingungen/Indikatorfunktionen . . . . .	83
	5.3.3.2 Zulässigkeitskriterien/Schaltbarkeit . . . . .	84
5.3.4	Andere selbststeuernde Schaltbauelemente . . . . .	86
	5.3.4.1 Die Zenerdiode . . . . .	86
	5.3.4.2 Der Thyristor . . . . .	88
5.3.5	Modellierung in Minimalkoordinaten . . . . .	89
	5.3.5.1 Charakterisierung der Fundamentalkreise . . . . .	90
	5.3.5.2 Bewegungsgleichungen . . . . .	90
	5.3.5.3 Schalter-Observable . . . . .	91
	5.3.5.4 Strukturauswahl mittels LCP . . . . .	92
	5.3.5.5 Spezialfälle . . . . .	95
5.3.6	Modellierung in Nicht-Minimalkoordinaten . . . . .	96
	5.3.6.1 Charakterisierung der Zweige . . . . .	97
	5.3.6.2 Bewegungsgleichungen mit Zwangsbedingungen . . . . .	98
	5.3.6.3 Schalter-Observable . . . . .	100
	5.3.6.4 Strukturauswahl mittels LCP . . . . .	100
	5.3.6.5 Spezialfälle . . . . .	104
5.4	Strukturvariabilität bei EMS . . . . .	105
<b>6</b>	<b>Inverse Problemstellungen</b>	<b>107</b>
6.1	Einleitung . . . . .	107
	6.1.1 Begriffe . . . . .	107
	6.1.2 Strukturentwurf . . . . .	108
6.2	Nichtlineare Optimierung . . . . .	109
6.3	Nichtlineare dynamische Steuerung . . . . .	111
	6.3.1 Bewegungsgleichungen . . . . .	111
	6.3.2 Voronetz-Gleichungen . . . . .	112
	6.3.3 Erweiterter PD-Regler . . . . .	114
	6.3.4 Lyapunov-Funktion . . . . .	117
	6.3.5 Dynamische Steuerung bei strukturellen Singularitäten . . . . .	119
	6.3.6 Grenzfälle . . . . .	124
	6.3.7 Sonderfall: Steuerung des MTS mittels ETS . . . . .	125
	6.3.7.1 Inverse Dynamik des MTS . . . . .	126
	6.3.7.2 Ermittlung der elektrischen Koordinaten . . . . .	126
	6.3.7.3 Inverse Dynamik des ETS . . . . .	128
<b>7</b>	<b>Anwendungsbeispiele</b>	<b>131</b>
7.1	Elektromechanische Systeme mit strukturvariablem elektrischen Teilsystem	131
	7.1.1 Einweggleichrichter mit kapazitiver Impedanzlast . . . . .	131
	7.1.2 Eintaktspannungsverdoppler mit induktiver Impedanzlast . . . . .	134
7.2	Inverse Dynamik am Plattenkondensator . . . . .	138
	7.2.1 Regelung des Plattenabstandes . . . . .	139
	7.2.2 Unabhängige Regelung von Plattenabstand und Ladung . . . . .	140
7.3	Mikrospiegel . . . . .	142

7.3.1	Mikrospiegel als diskrete EMS . . . . .	142
7.3.2	Dynamische Untersuchungen bei variabler Struktur . . . . .	144
7.3.3	Parameteroptimierung am Mikrospiegel . . . . .	147
7.3.4	Panoramaprojektion . . . . .	149
<b>8</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>153</b>
<b>A</b>	<b>Integrabilitätsbedingungen und Zustandsfunktionen</b>	<b>155</b>
A.1	Mehrkörpersysteme . . . . .	155
A.2	Elektrische Systeme . . . . .	156
A.3	Elektromechanische Systeme . . . . .	158
A.3.1	Integrabilitätsbedingungen . . . . .	159
A.3.2	Ermittlung der Zustandsfunktionen . . . . .	159
A.3.2.1	Zustandsfunktion $\Psi$ . . . . .	159
A.3.2.2	Zustandsfunktion $V$ . . . . .	161
A.3.2.3	Zustandsfunktion $D$ . . . . .	162
A.3.2.4	Bemerkung . . . . .	163
<b>B</b>	<b>Lineare Schwingungsanalyse</b>	<b>165</b>
B.1	Die Differentialgleichungen erster Ordnung für das elektrische Teilsystem .	165
B.2	Linearisierte Differentialgleichungen zweiter Ordnung für EMS ohne Zwangsbedingungen . . . . .	166
B.2.1	Störungsgleichungen . . . . .	166
B.2.2	Modalanalyse . . . . .	167
B.3	Linearisierte Differentialgleichungen zweiter Ordnung für EMS mit Zwangsbedingungen . . . . .	168
B.3.1	Störungsgleichungen . . . . .	168
<b>C</b>	<b>Das lineare Komplementaritätsproblem</b>	<b>171</b>
C.1	Matrizen mit bestimmten Eigenschaften . . . . .	171
C.2	Definition des LCP . . . . .	171
C.3	Existenz und Eindeutigkeit . . . . .	172
<b>D</b>	<b>Stabilitätsnachweise mittels Lyapunov-Funktion</b>	<b>175</b>
D.1	Einige Eigenschaften . . . . .	175
D.1.1	Eine Matrixzerlegung . . . . .	175
D.1.2	Eine quadratische Form . . . . .	176
D.2	Stabilität bei regulärer Induktivitätsmatrix . . . . .	176
D.3	Stabilität bei strukturellen Singularitäten . . . . .	178
<b>E</b>	<b>Modellierung von Mikrospiegeln</b>	<b>181</b>
E.1	Die Kapazitäten des 1D-Spiegels . . . . .	181
E.2	Die Kapazitäten des 2D-Spiegels . . . . .	182
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>185</b>
	<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>199</b>

## Symbole und Abkürzungen

### Lateinische Buchstaben

$a$	Länge
$a, a^k_j$	Knoten-Kanten-Inzidenzmatrix
$a, b, c$	Element der Indexmenge $\{1, 2, \dots\}$
$A$	Fläche
$A, \tilde{A}$	Matrix
$A, A^i_j, A^i_\mu$	Fundamentalkreismatrix
$A^a_b$	Systemmatrix
$b$	Breite
$b, b_a$	Vektor
$b_L, b_{LR}$	Element der Indexmenge $J \cup H_L^*$ bzw. $J \cup H_L^* \cup H_R^*$
$\tilde{b}^{js}, \hat{b}^{js}$	bekannter LCP-Vektor
$b^\nu$	Vektor
$b_\varphi$	Vektor bei Darstellung des elektrischen Teilmodells mittels Differentialgleichungen erster Ordnung
$B$	Anzahl der Kanten eines Graphen, Matrix
$B_0$	Inertialsystem (Fundament), Bezugskörper
$B_{ab}, B_a^b$	Matrix
$\tilde{B}^{jsis}$	LCP-Koeffizientenmatrix
$\hat{B}^{jsis}$	Koeffizientenmatrix
$B_k$	Nummer eines Körpers des mechanischen (Teil-)Systems
$B^{\eta\varphi}$	Inverse der Koeffizientenmatrix $B_{\varphi\eta}$
$B^{\nu\mu}, B_{\varphi\chi}$	Koeffizientenmatrix
$c$	Federsteifigkeit
$c_{ab}$	verallgemeinerte Steifigkeitsmatrix
$c_{\mu\nu}$	inverse Matrix der generalisierten Teilkapazitäten
$\check{c}_{\mu^1\nu^1_c}$	Kurzschreibweise für bestimmte aus $c_{\mu c \nu c}$ abgeleitete Terme
$c^{\nu c \mu c}$	Inverse der Submatrix $c_{\mu c \nu c}$
$C, C_0, C_1, C_2$	Kondensator, Kapazität
$C, C_a^b$	Matrix
$C_I$	Kapazität des ersten Quadranten
$\tilde{C}_I$	Näherung für Kapazität des ersten Quadranten
$C_{a_1 b_1}$	Matrix der Regler-Verstärkungsfaktoren für Lagefehler
$C_{i0}$	mechanisch erzeugte elektrische Spannungen infolge Elektrete
$C^{ij}$	Matrix der Teilkapazitäten
$C_{ij}$	inverse Matrix der Teilkapazitäten
$\hat{C}^{jscisc}$	Koeffizientenmatrix
$C_l, C_r$	links- bzw. rechtsseitige Kapazität
$\tilde{C}_l, \tilde{C}_r$	Näherung für links- bzw. rechtsseitige Kapazität
$C_{qq}$	Gainfaktor für Abweichung der elektrischen Ladung
$C_{xx}$	Gainfaktor für Abweichung der mechanischen Koordinate
$d$	Dämpfungskonstante, halber Elektrodenabstand
$d_{ab}$	verallgemeinerte Dämpfungsmatrix

$d_{\mu_L, \xi_2}^{(e,m)}$	Koeffizientenmatrix für den Einfluss gestörter mechanischer Geschwindigkeiten auf Zeitableitungen von elektrischen Strömen
$d_{\kappa_2, \vartheta_L}^{(m,e)}$	Koeffizientenmatrix für den Einfluss gestörter elektrischer Ströme auf mechanische Beschleunigungen
$d_{\kappa_2, \xi_2}^{(m,m)}$	Koeffizientenmatrix für den Einfluss gestörter mechanischer Geschwindigkeiten auf mechanische Beschleunigungen
$dm$	Massenelement
$ds$	Linielement
$dy$	Wegelement
$dA$	Flächenelement
$dC$	Kapazitätselement
$dV$	Volumenelement
$D$	Gebiet des Konfigurationsraumes, Rayleigh'sche Dissipationsfunktion
$D, D_1, D_2$	Diode
$D_1, D_2$	Anteile der Dissipationsfunktion vom Homogenitätsgrad 1 bzw. 2 bzgl. $\dot{q}^a$
$e$	Lagefehlervektor
$e^{a1}$	Abweichung zwischen tatsächlichem und vorgegebenem Wert der Koordinate $q^{a1}$ , Lagefehler
$\dot{e}^{a1}$	Geschwindigkeitsfehler
$\ddot{e}^{a1}$	Beschleunigungsfehler
$E_i^{(r)}$	Drehmatrix
$E_k^{(r)}$	Drehmatrix des Körpers $B_k$
$f$	Inzidenzfunktion, reelle Funktion
$f'$	Inzidenzfunktion eines Subgraphen, Funktionalableitung von $f$
$f^a$	Differenzialgleichungssystem
$f^{a1}$	rheonome Bindung, Definition des Zielkonfigurationsraumes
$f^{c1}_{\alpha}, f^{j0}_{\mu}, f^{e1}_{\alpha}$	Koeffizientenmatrix der kinematischen Zwangsbedingungen
$f_i$	Zweigrelation
$f_j$	Gelenkfreiheitsgrad des Gelenks $j$
$f_{S0}$	Indikatorfunktion für $\Gamma_{S0}$ -Schalter
$f_{S\times}$	Indikatorfunktion für $\Gamma_{S\times}$ -Schalter
$\tilde{f}^{\xi_1}_{e1}$	Inverse der Matrix $f^{e1}_{\xi_1}$
$F_{el}$	Quasifreiheitsgrad des elektrischen (Teil-)Systems
$F_g$	Summe der Gelenkfreiheitsgrade
$F_{me}$	Freiheitsgrad des mechanischen (Teil-)Systems
$F^{\xi}_{\xi_2}$	orthogonales Komplement zu $f^{\xi_1}_{\xi}$
$g$	Anzahl der Gelenke, Gravitationskonstante, Matrix
$g_0$	Potenzialanteil generalisierter Kräfte ausschließlich infolge Ladungs- bzw. Stromquellen
$g_0^j$	Quellladung im Zweig $j$
$g_{ab}$	Metrik, verallgemeinerte Trägheitsmatrix
$\bar{g}^{js}$	LCP-Variablenvektor
$g_N$	skalärer Wert des Abstandsvektors zwischen zwei Körpern

$g_N^i$	$g_N$ des potenziellen Kontaktes $i$
$\dot{g}_N^i$	Relativgeschwindigkeit in Normalenrichtung (bei Kontakt $i$ )
$\ddot{g}_N^i$	Relativbeschleunigung in Normalenrichtung (bei Kontakt $i$ )
$\dot{g}_T$	Relativgeschwindigkeit in Tangentialrichtung
$\ddot{g}_T$	Relativbeschleunigung in Tangentialrichtung
$\dot{g}_T^i$	Relativgeschwindigkeit in Tangentialrichtung (bei Reibpaarung $i$ )
$\ddot{g}_T^i$	Relativbeschleunigung in Tangentialrichtung (bei Reibpaarung $i$ )
$g_{\alpha\beta}$	Koeffizienten der Lagrange-Funktion, Metrik des Ereignisraumes
$\bar{g}_{\alpha\beta}$	Koeffizienten der kinetischen Energie
$g_{\kappa\lambda}, \bar{g}_{\kappa\lambda}$	verallgemeinerte Massenmatrix
$\check{g}_{\kappa_1\lambda_1}, \check{g}_{\mu_1\nu_1}$	Kurzschreibweise für bestimmte aus der Metrik abgeleitete Terme
$g^{\lambda\kappa}$	Inverse der Matrix $g_{\kappa\lambda}$
$g_{\mu\nu}$	Matrix der generalisierten Induktivitäten
$g^\nu$	Vektor
$G$	Gerüst eines Graphen
$G_{\kappa_1\lambda_1}, G_{\mu_1\nu_1}$	Kurzschreibweise für bestimmte aus der Metrik abgeleitete Terme
$G_{\mu_R^1\nu_R^1}$	Kurzschreibweise für bestimmte aus $r_{\mu_R\nu_R}$ abgeleitete Terme
$h$	Plattenabstand bei entspannten Federn
$h^{ch}$	holonome Zwangsbedingung des EMS
$h^{j_0}, h^{j_S}$	holonome Zwangsbedingung des elektrischen (Teil-)Systems
$h_{A_I}$	Plattenabstand für Kapazitätselement (erster Quadrant)
$h_{P_I}$	Plattenabstand für Überdeckungskreismitelpunkt (erster Quadrant)
$h^{\sigma_h}, h^{\sigma_1}$	holonome Zwangsbedingung des mechanischen (Teil-)Systems
$h^{\sigma_a}_\kappa$	Koeffizientenmatrix anholonomer Zwangsbedingungen
$h_N^i$	Kontaktabstandsfunktion in Normalenrichtung
$H$	Hamilton-Funktion
$H, H(G)$	Cogerüst eines Graphen, Indexmenge der Cogerüstkanten
$H_0$	Indexmenge der Cogerüstkanten mit Stromquellen
$H^*$	Indexmenge der Cogerüstkanten ohne Stromquellen, Indexmenge der generalisierten elektrischen Koordinaten bei Formulierung in Minimalkoordinaten
$H_1^*$	Indexmenge der dynamisch zu steuernden generalisierten elektrischen Koordinaten
$H_2^*$	Indexmenge der unabhängigen generalisierten elektrischen Koordinaten
$H_{C_0}$	Indexmenge der $H_C$ -Cogerüstkanten mit geöffneten (stromlosen) Schaltern
$H_{C\times}$	Indexmenge der $H_C$ -Cogerüstkanten mit geschlossenen (stromführenden) Schaltern
$H_C^*$	Indexmenge der $H_C$ -Cogerüstkanten ohne Stromquellen und ohne Schaltbauelemente
$H_L$	Indexmenge der Fundamentalkreise mit Induktoren
$H_R$	Indexmenge der Fundamentalkreise ohne Induktoren aber mit Resistoren
$H_C$	Indexmenge der Fundamentalkreise ohne Induktoren und Resistoren

	aber mit Kondensatoren
$H_{L0}, H_{L1}, H_{L2}$	Zerlegung der Indexmenge $H_L$ bzgl. der Existenz weiterer Bauelemente (Resistoren, Kondensatoren)
$H_{R0}, H_{R1}$	Zerlegung der Indexmenge $H_R$ bzgl. der Existenz weiterer Bauelemente (Kondensatoren)
$H_S$	Indexmenge der Cogerüstkanten mit Schaltbauelementen
$\bar{H}_S$	Indexmenge der Cogerüstkanten von schalterbehafteten Fundamentalkreisen
$H_{S0}$	Indexmenge der Cogerüstkanten mit geöffneten (stromlosen) Schaltern
$H_{S\times}$	Indexmenge der Cogerüstkanten mit geschlossenen (stromführenden) Schaltern
$H_S^s$	Indexmenge der „schaltbaren“ Schaltbauelemente (auf Cogerüstkanten)
$i$	Element der Indexmenge aller potenziellen Kontakte, Element der Indexmenge aller Reibpaare
$i, j, k, l$	Element der Indexmenge aller Kanten eines Graphen, Element der Indexmenge aller Zweige des elektrischen Netzwerkgraphen
$i_0, j_0$	Index für stromquellenbehafteten Zweig
$i_S, j_S$	Index für schalterbehafteten Zweig
$I$	elektrischer Strom, Indexmenge für die Zustandsgrößen des elektrischen Teilsystems (bei dessen Darstellung mittels Differenzialgleichungen erster Ordnung), Einheitsmatrix
$I^j$	Zweigstrom
$I_K$	Indexmenge aller potenziellen Kontakte des mechanischen (Teil-)Systems
$I_{KS}$	Indexmenge aller „schaltbaren“ Kontakte des mechanischen (Teil-)Systems
$I_R$	Indexmenge aller Reibpaare des mechanischen (Teil-)Systems
$I_{RS}$	Indexmenge aller „schaltbaren“ Reibpaare des mechanischen (Teil-)Systems
$j_{0L}, j_{0R}, j_{0C}$	Element der Indexmenge $\Gamma_{0L}, \Gamma_{0R}$ bzw. $\Gamma_{0C}$
$j_{SL}, j_{SR}, j_{SC}$	Element der Indexmenge $\Gamma_{SL}, \Gamma_{SR}$ bzw. $\Gamma_{SC}$
$J$	Indexmenge der generalisierten mechanischen Koordinaten, Zielfunktion, Zielfunktional
$J_1$	Indexmenge der dynamisch zu steuernden generalisierten mechanischen Koordinaten
$J_1^b, J_1^d, J_1^s$	Zerlegung der Indexmenge $J_1$ bzgl. verwendeter Antriebsprinzipien
$J_2$	Indexmenge der unabhängigen generalisierten mechanischen Koordinaten
$J_{ca}$	Indexmenge der anholonomen Zwangsbedingungen
$J_{ch}$	Indexmenge der holonomen Zwangsbedingungen
$k$	Knotenindex, Körperindex, Volumenkraftdichte
$k_{\mu_L, \xi_2}^{(e,m)}$	Koeffizientenmatrix für den Einfluss gestörter mechanischer Koordinaten auf Zeitableitungen von elektrischen Strömen
$k_{\kappa_2 \vartheta_{LR}}^{(m,e)}$	Koeffizientenmatrix für den Einfluss gestörter elektrischer Ladungen auf mechanische Beschleunigungen

$k_{\kappa_2 \xi_2}^{(m,m)}$	Koeffizientenmatrix für den Einfluss gestörter mechanischer Koordinaten auf mechanische Beschleunigungen
$K$	Anzahl der Körper
$K_{a_1 b_1}$	Matrix der Regler-Verstärkungsfaktoren für Geschwindigkeitsfehler
$K_k^{(i)}$	am Körper $B_k$ eingeprägte resultierende Kraft
$K_{qq}$	Gainfaktor für Abweichung des elektrischen Stromes
$K_{xx}$	Gainfaktor für Abweichung der mechanischen Geschwindigkeit
$l$	zyklomatische Zahl
$l_{\mu\nu}$	Matrix der generalisierten Induktivitäten
$l^{\nu\mu}$	Inverse der Matrix $l_{\mu\nu}$
$l^{\nu_L \mu_L}$	Inverse der Submatrix $l_{\mu_L \nu_L}$
$L$	Anzahl der unabhängigen kinematischen Schleifen, Induktor, Induktivität
$L_0$	maximale Induktivität
$L_{ij}$	Matrix der Induktivitäten (Induktormatrix)
$\hat{L}^{jsL^i sL}$	Koeffizientenmatrix
$L(k)$	Nummer des Vorgängerkörpers zum Körper $B_k$
$m$	Quasifreiheitsgrad des elektrischen (Teil-)Systems, Masse
$m_k$	Masse des Körpers $B_k$
$m_1$	Anzahl der dynamisch zu steuernden generalisierten elektrischen Koordinaten
$m_2$	Anzahl der unabhängigen generalisierten elektrischen Koordinaten
$m_t$	momentaner Freiheitsgrad des elektrischen (Teil-)Systems
$m_I$	Mächtigkeit der Indexmenge $I$
$m^\#$	Anzahl der Cogerüstkanten
$m^*$	Anzahl der Bewegungsgleichungen des elektrischen (Teil-)Systems, reduzierter Quasifreiheitsgrad des elektrischen (Teil-)Systems infolge algebraischer Gleichungen
$M$	Fundamentalkreis in einem Graphen
$M_k^{ij}$	schiefsymmetrischer Tensor des am Körper $B_k$ eingepägten resultierenden Momentes
$n$	Dimension, Freiheitsgrad des mechanischen (Teil-)Systems
$n_1$	Anzahl der dynamisch zu steuernden generalisierten mechanischen Koordinaten
$n_2$	Anzahl der unabhängigen generalisierten mechanischen Koordinaten
$N$	Anzahl der Knoten eines Graphen
$O$	Ursprung des Inertialkoordinatensystems
$p$	Anzahl der Komponenten eines Graphen
$p_{\mu_{R1} \xi_2}^{(e,m)}$	Koeffizientenmatrix für den Einfluss gestörter mechanischer Koordinaten auf elektrische Ströme
$P$	Punkt, Leistung
$q$	repräsentierender Punkt
$q_0$	Sollladung
$q^0$	Zeit $t$

$q^1, q^2, q^3$	Fundamentalkreisladungen
$q^a$	generalisierte Koordinate
$\dot{q}^1, \dot{q}^2, \dot{q}^3$	Fundamentalkreisstrom
$\dot{q}^a$	generalisierte Geschwindigkeit
$\ddot{q}^a$	generalisierte Beschleunigung
$q^{a1}$	dynamisch zu steuernde generalisierte Koordinate
$q_0^{a1}$	(zeitabhängiger) Sollwert für eine dynamisch zu steuernde generalisierte Koordinate
$q^{a2}$	unabhängige generalisierte Koordinate
$q_0^j$	Ladungsanteil im Zweig $j$ infolge aller Stromquellen des elektrischen (Teil-)Systems
$q_{sl}^1, q_{sl}^2$	Fundamentalkreisladung zum aktuell letzten Schaltzeitpunkt
$\dot{q}^1$	Zweigstrom
$\dot{q}_0^j$	Stromanteil im Zweig $j$ infolge aller Stromquellen des elektrischen (Teil-)Systems
$\dot{q}^g$	Gatestrom eines Thyristors
$\bar{q}^j$	Zweigladung
$\bar{q}^j$	Zweigstrom
$\bar{q}_0^j$	Ladungsanteil im Zweig $j$ infolge der zweigeigenen Stromquelle
$\bar{q}_0^j$	Stromanteil im Zweig $j$ infolge der zweigeigenen Stromquelle
$\bar{q}_0^j$	Anteil der Stromableitung im Zweig $j$ infolge der zweigeigenen Stromquelle
$\dot{q}_H^s$	Haltestrom eines Thyristors im Zweig $s$
$q^\kappa, q^\lambda, q^\rho, q^\sigma$	generalisierte mechanische Koordinate
$q^\mu$	Ladung im Fundamentalkreis $\mu$
$\tilde{q}^\mu$	Fundamentalkreisladung nach Hauptachsentransformation
$q_\tau^\mu$	Fundamentalkreisladung zum vorhergehenden Integrations-schritt
$\dot{q}^\mu$	Strom im Fundamentalkreis $\mu$
$\dot{\tilde{q}}^\mu$	Fundamentalkreisstrom nach Hauptachsentransformation
$q^\mu, q^\nu, q^\omega$	generalisierte elektrische Koordinate
$q^\varphi, q^\chi, q^\eta$	Zustandsgröße des elektrischen Teilsystems
$\dot{q}^\chi$	Zeitableitung der Zustandsgröße des elektrischen Teilsystems
$Q$	quadratische Form
$Q, Q_i^j, Q_i^\nu$	Fundamentalschnittmatrix
$Q_a^*$	verallgemeinerte „Kraft“, d.h. generalisierte mechanische Kraft oder elektrische Maschenspannung
$\check{Q}_a$	Zusammenfassung verschiedener generalisierter Kräfte bzw. Spannungen
$Q_\kappa$	generalisierte Kraft
$\check{Q}_\kappa$	Zusammenfassung verschiedener Anteile generalisierter Kräfte
$Q_\kappa^{(0)}, Q_\kappa^{(1)}, Q_\kappa^{(2)}$	Klasseneinteilung generalisierter Kräfte bzgl. Zustandsfunktionen
$\tilde{Q}_\kappa^{(0)}$	generalisierte Kräfte infolge $\tilde{\Psi}$
$\tilde{Q}_\kappa^{(1)}$	generalisierte Kräfte infolge $\tilde{\omega}_0^{(el)}$
$Q_\kappa^{(el)}$	generalisierte elektrisch erzeugte Kraft



$Q_{\kappa}^{(me)}$	generalisierte rein mechanische Kraft
$Q_{\kappa}^{(S)}$	sonstige generalisierte Kräfte
$\hat{Q}_{\mu R}, \bar{Q}_{\mu C}$	Zusammenfassung verschiedener Anteile generalisierter Spannungen
$r$	Anzahl aller Zwangsbedingungen eines EMS, reelle Zahl, Polarkoordinate des Flächenelementes
$r_0$	Anzahl der Kanten mit Stromquellen
$r_{aG}$	Anzahl der algebraischen Gleichungen des elektrischen (Teil-)Systems
$r_h$	Anzahl der holonomen Zwangsbedingungen eines EMS
$r_k$	statische und dynamische Kennwerte zur Bestimmung von Zielfunktion oder Zielfunktional bei der Optimierung
$r_m$	Anzahl aller Zwangsbedingungen des mechanischen (Teil-)Systems
$r_{ma}$	Anzahl der anholonomen Zwangsbedingungen des mechanischen (Teil-)Systems
$r_{mh}$	Anzahl der holonomen Zwangsbedingungen des mechanischen (Teil-)Systems
$r_S$	Anzahl der elektrischen Schaltbauelemente
$r_{\kappa 0}$	Absolutanteil der zugelassenen Kraftgesetze
$r_{\kappa \lambda}$	Koeffizientenmatrix der zugelassenen Kraftgesetze
$r_{\mu \nu}$	Koeffizientenmatrix bei Resistoren, Matrix der generalisierten Resistoren
$\tilde{r}_{\mu \nu}$	$r_{\mu \nu}$ erweitert um Anteile infolge explizit zeitabhängiger Induktivitäten
$\check{r}_{\mu R}^1 \nu_R^1$	Kurzschreibweise für bestimmte aus $r_{\mu R \nu R}$ abgeleitete Terme
$r^{\nu \mu}$	Inverse der Matrix $r_{\mu \nu}$
$r^{\nu R \mu R}$	Inverse der Submatrix $r_{\mu R \nu R}$
$R_0, R_1, R_2, R_3$	Ohm'scher Widerstand
$R_a$	generalisierte Reaktionen
$R_{a_1}$	generalisierte Reaktionskräfte/-spannungen, generalisierte Steuerkräfte/-spannungen
$R_{a_1}^{PD}$	Ausgangsvektor der linearen PD-Rückführung
$R_{ij}$	Resistormatrix
$\tilde{R}^{jSiS}$	LCP-Koeffizientenmatrix
$\hat{R}^{jSRiSR}$	Koeffizientenmatrix
$R_k$	Kurzschlusswiderstand
$R_{min}, R_{max}$	minimaler bzw. maximaler Widerstandswert
$\bar{R}_q$	Steuerspannung
$\bar{R}_x$	Steuerkraft
$\bar{R}_x^{(fb)}$	lineare Rückführung (feedback)
$\bar{R}_x^{(ffe)}$	elektrisch erzeugter Anteil der nichtlinearen Vorsteuerung (feed forward)
$\bar{R}_x^{(ffm)}$	rein mechanischer Anteil der nichtlinearen Vorsteuerung (feed forward)
$R_K$	Radius des Überdeckungskreises
$R_{\kappa}, R_{\mu}$	generalisierte Reaktionskräfte bzw. -spannungen
$\bar{R}_{\kappa 1}, \bar{R}_{\mu 1}$	modifizierte generalisierte Steuerkräfte bzw. -spannungen
$R_{\mu R}^P$	Ausgangsvektor der linearen P-Rückführung

$R_\mu^S$	generalisierte Reaktionsspannungen infolge fiktiver Stromquellen (d.h. geöffneter Schalter)
$s$	Starrkörperkoordinatenindex, Element der Indexmenge $\Gamma_S$
$s_p$	Systemparameter bzw. Optimierungsvariable
$s_{\alpha\beta}$	Koeffizienten der Dissipationsfunktion
$s_\kappa, s_\mu$	Koeffizienten des in den Geschwindigkeiten linearen Anteils der Dissipationsfunktion
$s_{\mu\nu}$	symmetrischer Anteil der Matrix der generalisierten Resistoren
$S$	Fundamentalschnitt durch einen Graphen, Massenmittelpunkt eines Körpers, Anzahl der Stromquellen im elektrischen (Teil-)System, Schalter
$t$	Zeit
$t_0$	fester Zeitpunkt
$t_s$	potenzieller Schaltzeitpunkt
$t_{sl}$	letzter vergangener Schaltzeitpunkt
$T$	kinetische Energie, Transformationsmatrix
$T_0, T_1, T_2$	Anteile der kinetischen Energie vom Homogenitätsgrad 0, 1 bzw. 2 bzgl. $\dot{q}^k$
$u, v, w$	Submatrix
$u_i$	Kante eines Graphen
$U$	Potenzial
$v_\mu$	Maschenspannung (Summe aller Zweigspannungen) im Fundamentalkreis $\mu$ , generalisierte elektrische Spannung
$v_\mu^{(0)}, v_\mu^{(1)}, v_\mu^{(2)}$	Klasseneinteilung der Maschenspannungen bzgl. Zustandsfunktionen
$v_\mu^{(C)}, v_\mu^{(R)}$	Maschenspannungsanteil infolge Kondensatoren bzw. Resistoren
$v_\mu^{(SBE)}$	Maschenspannungsanteil infolge Schaltbauelemente
$v_{\mu 0}$	Maschenspannungsanteil infolge Spannungsquellen
$\tilde{v}_{\mu 0}$	$v_{\mu 0}$ erweitert um Anteile infolge Permanentmagnete, Anfangsladungen oder Stromquellen
$\hat{v}_{\mu 0}$	$v_{\mu 0}$ erweitert um Anteile infolge Permanentmagnete oder Anfangsladungen
$V$	verallgemeinertes Potenzial, elektrische Spannung, Lyapunov-Funktion
$V_0$	Spannungsquelle
$V_0, V_1$	Anteile des verallgemeinerten Potenzials vom Homogenitätsgrad 0 bzw. 1 bzgl. $\dot{q}^a$
$V^D$	Spannung über einer Diode
$V_g$	Gatespannung an einem Thyristor
$V^h$	gyroskopisches Potenzial, homogener Anteil des verallgemeinerten Potenzials
$V_i$	Zweigspannung
$V_i^{(C)}$	kapazitiver Spannungsanteil im Zweig $i$
$V_i^{(L)}$	induktiver Spannungsanteil im Zweig $i$
$V_i^{(R)}$	resistiver Spannungsanteil im Zweig $i$
$V_i^{(S)}$	sonstiger Spannungsanteil im Zweig $i$

$V_i^{(SBE)}$	Spannungsanteil im Zweig $i$ infolge Schaltbauelement
$V_{i0}$	Spannungsquelle im Zweig $i$
$V_{i0}^{(C)}$	Spannungen infolge Anfangsladungen von Kondensatoren
$V_{in}$	Eingangsspannung
$V_{ns}$	negative „Spannungsreserve“ (Betrag einer negativen Spannungsdifferenz zum Schaltpunkt)
$V_{out}$	Ausgangsspannung
$V_{ps}$	positive „Spannungsreserve“ (positive Spannungsdifferenz zum Schaltpunkt)
$V_{zs}$	Durchbruchspannung einer Zenerdiode
$\tilde{w}_N^i$	ausschließlich koordinaten- und geschwindigkeitsabhängige Terme der Relativbeschleunigung in Normalenrichtung
$\bar{w}_N^i$	Absolutanteil des LCP in Normalenrichtung
$w_{N\kappa}^i$	Koeffizientenvektor der Relativgeschwindigkeit/-beschleunigung für die Normalenrichtung des Kontaktes $i$
$\tilde{w}_T^i$	ausschließlich koordinaten- und geschwindigkeitsabhängige Terme der Relativbeschleunigung in Tangentialrichtung
$\bar{w}_T^i$	Anteil der Relativbeschleunigung in Tangentialrichtung
$\hat{w}_{Tn,j}, \hat{w}_{Tp,j}$	Absolutanteil des LCP in Tangentialrichtung
$w_{T\kappa}^i$	Koeffizientenvektor der Relativgeschwindigkeit/-beschleunigung für die Tangentialrichtung des Reibpaares $i$
$w_{\kappa\lambda}$	schiefsymmetrische Koeffizientenmatrix der zugelassenen Kraftgesetze
$w_\mu$	Maschenspannungsanteil im Fundamentalkreis $\mu$ infolge Spannungsquellen, Elektrete oder Quellladungen
$w_{\mu\nu}$	schiefsymmetrischer Anteil der Matrix der generalisierten Resistoren
$W$	Weg in einem Graphen
$W_e$	elektrische Energie
$W'_m$	magnetische Coenergie
$W_N^{ij}$	Koeffizientenmatrix des LCP in Normalenrichtung
$W_T^{ij}$	Koeffizientenmatrix bei Reibkräften in Tangentialrichtung
$W_{Tji}$	Koeffizientenmatrix des LCP in Tangentialrichtung
$x$	Plattenabstand, Eisenkernposition
$x_0$	Sollplattenabstand
$x^a$	Störung der generalisierten Koordinate $q^a$ , Vektor der Zustandsvariablen, Vektor
$x_a$	Vektor
$x_h$	Eisenkernposition bei halber Induktivität
$x^i$	Vektor
$x_o, x_u$	oberer bzw. unterer Schleifkontaktweg
$\bar{x}^s$	Starrkörperkoordinaten
$x_A, y_A$	Koordinaten des Flächenelementes
$x_F$	Abstand bei entspannter Feder
$x^\zeta$	Störung einer Zustandsgröße des elektrischen Teilsystems (bei dessen Darstellung mittels Differenzialgleichungen erster Ordnung)
$x^\vartheta$	Störung einer elektrischen Maschenladung

$\dot{x}^\vartheta$	Störung eines elektrischen Maschenstromes
$x^\xi$	Störung einer generalisierten mechanischen Koordinate
$\dot{x}^\xi$	Störung einer generalisierten mechanischen Geschwindigkeit
$X, Y$	Knoten eines Graphen
$X^{(r)}$	Schwerpunktkoordinaten
$X_k^{(r)}$	Schwerpunktkoordinaten des Körpers $B_k$
$y$	Koordinate des Kapazitätselementes
$y, y_a, y^a$	Vektor
$z$	Vektor, Spiegelposition in $z$ -Richtung
$\bar{z}, z_a$	Vektor
$Z$	Zielfunktion für Gleichgewichtszustand des gesamten EMS
$Z_e$	Zielfunktion für Gleichgewichtszustand des elektrischen Teilsystems
$Z_m$	Zielfunktion für Gleichgewichtszustand des mechanischen Teilsystems

### Gothische Buchstaben

$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$	Klassen von Knoten eines Graphen
$\mathfrak{e}^{(r)}$	normierter Vektor im Inertialsystem
$\mathfrak{E}_i$	normierter Vektor im Bezugssystem
$\mathfrak{F}_N$	Kontaktkraft in Normalenrichtung
$\mathfrak{F}_T$	Reibkraft in Tangentialrichtung
$\mathfrak{g}$	Gravitationsvektor
$\mathfrak{g}_N$	Vektor des kürzesten Abstandes zwischen zwei Körpern
$\mathfrak{g}_T$	Zeitableitung des Vektors in Tangentialrichtung zwischen zwei körperfesten Punkten eines Reibpaares
$\mathfrak{k}$	eingeprägte Kraft
$\mathfrak{L}_t$	Menge der zur Zeit $t$ möglichen Lagen
$\mathfrak{n}$	Einheitsvektor in Normalenrichtung
$\mathfrak{r}, \mathfrak{R}$	Ortsvektor
$\mathfrak{t}$	Einheitsvektor in Tangentialrichtung
$\mathfrak{U}, \mathfrak{U}'$	Menge bzw. Teilmenge aller Kanten eines Graphen
$\mathfrak{X}, \mathfrak{X}'$	Menge bzw. Teilmenge aller Knoten eines Graphen

### Griechische Buchstaben

$\alpha$	Bryant- oder Kardanwinkel der Drehung um die körperfeste $x$ -Achse
$\beta$	Bryant- oder Kardanwinkel der Drehung um die körperfeste $y$ -Achse
$\alpha, \beta, \gamma$	Elemente der Indexmenge $\{0, 1, 2, \dots\}$
$\gamma^{j_0}_{\alpha\beta}$	Koeffizientenmatrix der dynamischen Zwangsbedingungen des elektrischen (Teil-)Systems
$\gamma^{\ell_1}_{\alpha\beta}$	Koeffizientenmatrix der dynamischen Zwangsbedingungen des mechanischen (Teil-)Systems
$\Gamma, \Gamma'$	Graph bzw. Subgraph, Indexmenge der Kanten eines Graphen bzw. Subgraphen
$\Gamma_0$	Indexmenge der Kanten mit Stromquellen
$\Gamma_{0L}, \Gamma_{0R}, \Gamma_{0C}$	Zerlegung der Indexmenge $\Gamma_0$ bzgl. der Inzidenz der jeweiligen stromquellenbehafteten Kante mit $H_L$ -, $H_R$ -, $H_C$ -Fundamentalkreisen

$\Gamma^\#$	Indexmenge der Kanten ohne Stromquellen (und ohne Schalter), Indexmenge der generalisierten Koordinaten bei Formulierung in Nicht-Minimalkoordinaten
$\Gamma_M$	Messgraph
$\Gamma_S$	Indexmenge der Kanten mit Schaltbauelementen
$\Gamma_{S0}$	Indexmenge der Kanten mit geöffneten (stromlosen) Schaltern
$\Gamma_{S\times}$	Indexmenge der Kanten mit geschlossenen (stromführenden) Schaltern
$\Gamma_S^s$	Indexmenge der „schaltbaren“ Schaltbauelemente
$\Gamma_{SL}, \Gamma_{SR}, \Gamma_{SC}$	Zerlegung der Indexmenge $\Gamma_S$ bzgl. der Inzidenz der jeweiligen schal- terbehafteten Kante mit $H_{L-}$ , $H_{R-}$ , $H_C$ -Fundamentalkreisen
$\Gamma_{\kappa\alpha\beta}, \bar{\Gamma}_{\kappa\alpha\beta}, \Gamma_{\mu\alpha\beta}$	Christoffel-Symbole erster Art
$\delta$	positive reelle Zahl, Polarkoordinate des Flächenelementes
$\delta_a(\cdot)$	Variations- oder Eulerableitung
$\delta_j^i$	Kronecker-Symbol, Einheitstensor (Einheitsmatrix)
$\delta^i A$	virtuelle Arbeit
$\Delta\bar{q}^s$	Ladungsdifferenz bei Schaltbauelement auf Kante $s$
$\Delta R$	Determinante der Resistormatrix
$\Delta t$	Zeitdifferenz
$\varepsilon$	positive reelle Zahl
$\varepsilon_0$	Dielektrizitätskonstante
$\varepsilon_e, \varepsilon_m$	kleine positive Ergänzungsfaktoren
$\zeta_{\mu 0}$	Maschenspannung infolge Elektrete oder Quellladungen
$\hat{\zeta}_{\mu 0}$	Maschenspannung infolge Elektrete
$\vartheta$	Faktor zur Maßeinheitenanpassung
$\vartheta_k^{ij}$	Binet'scher Trägheitstensor des Körpers $B_k$
$\kappa, \lambda, \varrho, \sigma, \xi$	Element der Indexmenge generalisierter mechanischer Koordinaten
$\lambda, \lambda_1, \lambda_2$	Reaktionsspannung über einem Schaltbauelement
$\lambda_H$	Haftkraft
$\lambda_N$	skalärer Wert der Kontaktkraft in Normalenrichtung
$\lambda_{Ni}$	Kontaktkraft in Normalenrichtung des potenziellen Kontaktes $i$
$\lambda_T$	skalärer Wert der Reibkraft in Tangentialrichtung
$\lambda_{Tn}$	Haftkraftreserve in negative Richtung
$\lambda_{Tp}$	Haftkraftreserve in positive Richtung
$\lambda_{Tni}$	Haftkraftreserve des Reibpaares $i$ in negative Richtung
$\lambda_{Tpi}$	Haftkraftreserve des Reibpaares $i$ in positive Richtung
$\lambda_{c1}, \lambda_{i0}, \lambda_{\varrho 1}$	Lagrange-Multiplikatoren
$\Lambda$	Lagrange-Funktion
$\mu, \nu, \omega, \vartheta$	Elemente der Indexmengen $H$ oder $H^*$
$\mu_0$	Index für Cogerüstkante eines stromquellenbehafteten Fundamentalkreis- es, Haftreibungskoeffizient
$\mu_{C\#}$	Element der Indexmenge $H_{L2} \cup H_{R1} \cup H_C$
$\mu_{\check{C}}$	Element der Indexmenge $H_{L2} \cup H_{R1}$
$\mu_{C*}$	Element der Indexmenge $H_{C\times} \cup H_C^*$
$\mu_L, \mu_R, \mu_C,$	Element der Indexmenge $H_L, H_R$ bzw. $H_C$
$\mu_{L'}$	Element der Indexmenge $H_{L2} \cup H_{L1}$

$\mu_{L1}, \mu_{L0}, \mu_{R0}$	Element der Indexmenge $H_{L1}, H_{L0}$ bzw. $H_{R0}$
$\mu_{LR}, \mu_{RC}$	Element der Indexmenge $H_L \cup H_R$ bzw. $H_R \cup H_C$
$\xi$	materieller Punkt
$\xi^i$	körperfeste Koordinaten
$\xi_{\rho 1}$	Störung des Lagrange-Multiplikators $\lambda_{\rho 1}$
$\Xi$	Menge aller materiellen Punkte
$\tau_i$	Integrationszeitpunkt
$\varphi, \chi, \eta, \zeta$	Element der Indexmenge $I$
$\Phi_\kappa$	generalisierte Störkraft
$\Phi_\mu$	generalisierte Störspannung
$\psi_\mu$	verketteter magnetischer Fluss im Fundamentalkreis $\mu$
$\psi_{\mu 0}$	verketteter magnetischer Fluss infolge Permanentmagnete oder Stromquellen
$\hat{\psi}_{\mu 0}$	verketteter magnetischer Fluss infolge Permanentmagnete
$\Psi$	magnetomechanisches Copotenzial (auch: magnetische Coenergie)
$\tilde{\Psi}$	Absolutanteil von $\Psi$
$\Psi_0, \Psi_1, \Psi_2$	Anteile des magnetomechanischen Copotenzials vom Homogenitätsgrad 0, 1 bzw. 2 bzgl. $\dot{q}^\mu$
$\Psi_i$	verketteter magnetischer Fluss im Zweig $i$
$\Psi_{i0}$	verketteter magnetischer Fluss infolge Permanentmagnete
$\omega_0$	elektromechanisches Potenzial
$\tilde{\omega}_0^{(el)}$	Absolutanteil von $\omega_0^{(el)}$
$\omega_a, \omega_\kappa, \omega_\mu$	Koeffizienten des verallgemeinerten Potenzials bei den generalisierten Geschwindigkeiten
$\Omega$	Zustandsfunktion

### Sonstige Symbole

$\mathbb{E}^3$	Euklid'scher Anschauungsraum
$\mathbb{E}_r, \mathbb{E}_{r_0}, \mathbb{E}_{r_m}$	durch Zwangsbedingungen aufgespannte Hyperebene des Konfigurationsraumes
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{R}^m$	Konfigurationenraum des elektrischen (Teil-)Systems
$\mathbb{R}^n$	Konfigurationenraum des mechanischen (Teil-)Systems
$\mathbb{R}^{(n+m)}$	Konfigurationenraum des EMS
$\mathbb{V}^n, \mathbb{V}_t^n$	Riemann'scher Raum bzw. zeitabhängiger Riemann'scher Raum
$\partial_0$	partielle Ableitung nach der Zeit
$\partial_a$	partielle Ableitung nach $q^a$
$\dot{\partial}_a$	partielle Ableitung nach $\dot{q}^a$
$\ddot{\partial}_a$	partielle Ableitung nach $\ddot{q}^a$
$\mathcal{S}$	„Summation“ (im Hamel'schen Sinne)
$\nexists$	keine Summation
$\emptyset$	leerer Graph
$\emptyset$	leere Menge
$\oplus$	direkte Summe

$\forall$	für alle
$(\cdot)$	totale Zeitableitung
$(\cdot)^T$	Transponierte einer Matrix
$(\cdot) _{MT}$	Maschentransformation
$(\cdot)_{(ij)}$	symmetrischer Anteil eines Tensors (einer Matrix)
$(\cdot)_{[ij]}$	schiefsymmetrischer Anteil eines Tensors (einer Matrix)
$(\cdot)^{(el)}$	Anteil einer Zustandsfunktion zur vollständigen Ableitung der generalisierten Spannungen, Anteil einer generalisierten Kraft infolge des elektrischen Teilsystems, Kennzeichnung diverser Objekte entsprechender Zustandsfunktionen und Kräfte
$(\cdot)^{(me)}$	Anteil einer Zustandsfunktion zur vollständigen Ableitung der generalisierten Kräfte, rein mechanischer Anteil einer generalisierten Kraft, Kennzeichnung diverser Objekte entsprechender Zustandsfunktionen und Kräfte
$(\cdot)_{(+)}$	positiver Teil
$(\cdot)_{(-)}$	negativer Teil
Subindex 1	Kennzeichnung einer abhängigen generalisierten Koordinate oder
(z.B. $q^{a_1}, q^{\nu_1^1}, x^{a_1}$ )	Störung, Kennzeichnung einer dynamisch zu steuernden generalisierten Koordinate
Subindex 2	Kennzeichnung einer unabhängigen generalisierten Koordinate oder
(z.B. $q^{a_2}, q^{\nu_2^2}, x^{a_2}$ )	Störung

### Abkürzungen

CES	„Constrained electrical system“ (elektrisches System bei Darstellung in Nicht-Minimalkoordinaten)
CEMS	Kombination aus CMS und CES
CMS	„Constrained mechanical system“ (Mehrkörpersystem mit zusätzlichen Bindungen)
DAE	„Differential-algebraic equation system“ (differenzial-algebraisches Gleichungssystem)
DGL	Differenzialgleichung
DGL <sub>n</sub>	Differenzialgleichungen
DGL 1.O.	Differenzialgleichung erster Ordnung
DGL 2.O.	Differenzialgleichung zweiter Ordnung
EMS	elektromechanisches System
ES	elektrisches System
ETS	elektrisches Teilsystem
FEM	Finite-Elemente-Methode
FET	Feldeffekt-Transistor
FKM	Fundamentalkreismatrix
FSM	Fundamentalschnittmatrix
GNB	Gleichungsnebenbedingungen
GTO	Gate-Turn-Off Thyristor
IGBT	Insulated-Gate Bipolar Transistor

LCP	„Linear complementarity problem“ (lineares Komplementaritätsproblem)
MKS	Mehrkörpersystem
MT	Maschentransformation
MTS	mechanisches Teilsystem
NCP	nichtlineares Komplementaritätsproblem
P-	Proportional-
P-Matrix	Matrix mit besonderen Eigenschaften (siehe Anhang C)
PD-	Proportional-Differenzial-
PD-Matrix	positiv definite Matrix
RLC-	Resistor-Induktor-Kondensator-
UNB	Ungleichungsnebenbedingungen



# Kapitel 1

## Einleitung

### 1.1 Das Selbstverständnis der Mechatronik

Auf vielen Gebieten in Forschung und Industrie ist die aktuelle Entwicklung durch zunehmende Komplexität und fortschreitende Miniaturisierung gekennzeichnet. Ein wichtiges charakteristisches Merkmal heutiger High-Tech-Produkte ist die integrierte Funktionalität physikalisch heterogener Substrukturen. Dabei wird die unmittelbare Kopplung verschiedener physikalischer Wirkprinzipien auf engstem Raum ergänzt durch lokale Informationsverarbeitung zur Regelung/Steuerung des dynamischen Systemverhaltens. Dieses interdisziplinäre Wechselspiel findet seinen Ausdruck in einer eher noch jungen Technikdisziplin – der Mechatronik.

Mechatronische Systeme sind schon seit vielen Jahren im Einsatz. Die Entwicklung solcher Systeme erfolgte anfangs mit den klassischen Entwurfsmethoden aus Mechanik und Elektrotechnik. Die gegenseitigen Wechselwirkungen wurden meist nur in eingeschränktem Umfang betrachtet. In jüngster Zeit zeigt sich allerdings einerseits eine stark wachsende Verbreitung solcher Systeme und andererseits deren atemberaubende Miniaturisierung. Die Integration von Komponenten verschiedener Fachdisziplinen in heutige mechatronische Systeme (Heterogenität) und deren hohe Komplexität stellen besonders hohe Anforderungen an den Entwurfs- und Entwicklungsprozess. Dadurch wird für die entsprechenden Analyse- und Synthesemethoden eine immer bessere mathematische Modellierung notwendig. Darüber hinaus ist zunehmend der Trend festzustellen, dass die klassischen Entwicklungsmethoden aus Mechanik und Elektrotechnik für den Entwurf mechatronischer Systeme nur bedingt geeignet sind oder gar gänzlich versagen. In zahlreichen Beiträgen wird deshalb in der Literatur auf die Notwendigkeit einer ganzheitlichen Herangehensweise sowohl bei der Analyse als auch – und gerade – beim Entwurf mechatronischer Systeme hingewiesen (z.B. [10, 11, 88, 234]). Die unter den Mechatronikern sich zunehmend verbreitende Herangehensweise, diese Ganzheitlichkeit mittels Hierarchisierung und Modularisierung zu realisieren, ist zunächst ein viel versprechender Ansatz. Gerade bei sehr komplexen Gesamtsystemen ist eine Zerlegung der übergeordneten Aufgabenstellung in einzelne komponentenbezogene Teilaufgaben sinnvoll und oft geradezu notwendig. Auch die Kopplung von zumeist domänenspezifischen Simulationswerkzeugen – meist mangels besserer Alternativen – hat in vielen Fällen ihre Berechtigung. Bei der Untersuchung von mechatronischen Teilsystemen bzw. Einzelkomponenten stößt diese allerdings zunehmend an ihre Grenzen. Die starke Verkopplung der Einzeldomänen

infolge der nichtlinearen elektromechanischen Wechselwirkungen lassen eine ganzheitliche Herangehensweise auch auf der untersten Hierarchieebene als zwingend notwendig erscheinen. Es müssen Methoden entwickelt werden, die mechatronische Komponenten mit einem einheitlichen mathematischen Modell beschreiben und dadurch verbesserte Untersuchungsmöglichkeiten bereitstellen.

Die Verwendung einer einheitlichen mathematischen Darstellung mechatronischer Systeme/Komponenten und eines darauf aufbauenden analytischen Werkzeugs hat unverkennbare Vorteile. Zunächst entfallen alle Probleme, die im Zusammenhang mit Werkzeugkopplung und Cosimulation auftreten können (notwendige Synchronisationsmaßnahmen, eingeschränkte Schrittweitensteuerung, Fragen der numerischen Stabilität usw.). Im Gegensatz zu gängigen Hardware-Beschreibungssprachen können die Möglichkeiten der Modelldefinition domänenspezifisch gestaltet werden (Eingabesprache oder grafische Oberfläche). Schließlich wird automatisch ein einziges differenzial-algebraisches Gleichungssystem für das Gesamtsystem aufgestellt, das Grundlage für alle weiteren Untersuchungen des dynamischen Verhaltens des mechatronischen Systems unter Einsatz bekannter mathematischer Methoden (z.B. Ermittlung von Gleichgewichtszuständen, Modalanalyse, Stabilität, Steuerbarkeit, Optimierung, Optimalsteuerung etc.) ist. Sicher kann ein einzelnes Werkzeug die Vielfalt der Aufgaben im mechatronischen Entwurf nicht abdecken. Andererseits ist eine Simulatorkopplung von domänenspezifischen Werkzeugen für Mechanik und Elektrotechnik infolge des vorhandenen Energieaustausches stets problematisch. Deshalb ist die Verknüpfung von mechanischer und elektrischer Domäne (als den beiden Hauptbestandteilen mechatronischer Systeme) innerhalb einer einheitlichen mathematischen Beschreibungsmethode von großem Vorteil und – gerade im Hinblick auf die fortschreitende Miniaturisierung (Stichwort Mikro-/Nanomechatronik [55, 176]) – definitiv notwendig. Das Selbstverständnis der Mechatronik als neues, interdisziplinäres – und vor allem eigenständiges – Wissenschaftsgebiet legt nahe, für mechatronische Systeme einheitliche Modelle zu entwerfen, um statische und dynamische Untersuchungen bei Analyse und Synthese solcher Systeme effektiv realisieren zu können.

## 1.2 Literaturübersicht

Die in der vorliegenden Arbeit verfolgten Hauptprobleme sind die ganzheitliche Modellierung elektromechanischer Systeme, die Modellbildung bei Strukturvariabilität und die nichtlineare dynamische Steuerung als ein inverses Problem. Deshalb wird die Literaturübersicht in drei entsprechende Abschnitte untergliedert.

### 1.2.1 Modellierung mechatronischer Systeme

In der Literatur ist eine unübersehbare Anzahl von Beiträgen zur Modellierung mechatronischer Systeme zu finden z.B. in Konferenz- und Tagungsmaterialien [6, 61, 63, 65, 89, 123, 145, 162, 176, 229, 238, 239, 240, 241, 245] oder in diversen Zeitschriften. Zahlreiche dieser Veröffentlichungen beschäftigen sich vor allem mit der Analyse solcher Systeme mittels diverser Simulationstools. Dabei stehen oft informations-/modellierungstechnische Gesichtspunkte im Vordergrund. Manche Autoren wählen z.B. einen modularen/komponentenbasierten Ansatz [98, 107], andere bevorzugen eine ob-

jektorientiert/hierarchische Denkweise [78, 79, 168], oder es wird eine Kombination aus beiden vorgeschlagen [1, 58, 91]. Gelegentlich werden auch Techniken des Softwareentwurfs für die Modellierung mechatronischer Systeme angewendet [206]. In vielen Arbeiten wird die Modellierung/Optimierung solcher Systeme an Hand eines konkreten Beispiels durchgeführt, teilweise ohne auf allgemeine Kriterien bei Analyse und Entwurf einzugehen [85, 117, 159, 165]. Oftmals sind dann Entwurf und Testung eines Reglers für das konkrete System der Hauptinhalt der Betrachtungen [112, 219, 222]. Andere Arbeiten beleuchten die Möglichkeiten zur Modellierung mechatronischer Systeme mittels Simulator-Kopplung [111, 166, 198, 204]. Wieder andere verwenden Hardware-Beschreibungssprachen [78, 79, 168, 197]. Einen guten Überblick über verschiedene, für die Simulation mechatronischer Systeme geeignete Methoden und Werkzeuge bietet PELZ [178]. Eine Sammlung von Modellierungskonzepten, Modellformen und Simulationswerkzeugen für allgemeine physikalisch-technische Systeme findet sich bei PANRECK [172].

In den letzten Jahren werden in zunehmendem Maße auch Anstrengungen unternommen, die auf die Unterstützung des Entwurfs durch die Simulation mechatronischer Systeme gerichtet sind. Dabei werden unterschiedliche Herangehensweisen vorgeschlagen [22, 92, 95, 124, 127, 233]. Verschiedene Softwarelösungen werden präsentiert [13, 79, 104, 113, 116, 188]. Die hohe Komplexität solcher Systeme und die Integration von Komponenten verschiedener Fachdisziplinen (Heterogenität) stellen jedoch besonders hohe Anforderungen an deren Entwurfs- und Entwicklungsprozess. Deshalb wird die Notwendigkeit eines ganzheitlichen Modells immer wieder hervorgehoben [59, 62, 88, 94, 97, 125, 126, 134, 251]. Gleichzeitig wird die möglichst frühzeitige Einbeziehung aller Komponenten des heterogenen Systems in den Entwurfprozess sowie dessen iterative Arbeitsweise betont (Stichwort „V-Modell“) [11, 59, 62, 64, 94]. Oft genannte Anforderungen sind ganzheitliche Ansätze zur Vermeidung von domänenisolierten Entwurfs- und Optimierungsprozessen oder die Verwendung interdisziplinärer Denk- und Begriffswelten zur Förderung des gemeinsamen Verständnisses [59, 60, 62, 64, 81, 93, 104, 113]. In Deutschland finden die entsprechenden Standardisierungsbemühungen ihren Ausdruck in der VDI-Richtlinie 2206 „Entwicklungsmethodik für mechatronische Systeme“ [11, 64]. Noch weiter geht allerdings TOMIZUKA [234], indem er sogar eine „Theorie hybrider Systeme“ fordert, um die Probleme auf Gebieten wie Mikrorobotik, Mikro- und Nanomechatronik, Ultrapräzisionsmechatronik usw. angehen und lösen zu können. Die Arbeit von BUSS [21] geht bereits in eine solche Richtung.

In der Literatur zur Modellierung mechatronischer Systeme werden mit steigender Tendenz auch einheitliche Beschreibungsformen für mechatronische Systeme präsentiert. Für die verschiedenen methodischen Ansätze ist eine Unterscheidung zwischen synthetischen und analytischen Herangehensweisen sinnvoll. Die als synthetisch zu bezeichnenden Ansätze bedienen sich entweder domänenspezifischer Methoden zur Modellierung der verschiedenen Teilsysteme, um danach die gegenseitigen Wechselwirkungen zu berücksichtigen und eine einheitliche Form der Bewegungsgleichungen zu realisieren, oder sie verwenden zwar ein einheitliches domänenübergreifendes Modellierungswerkzeug, allerdings bei weiterhin Teilsystem-gebundener Aufstellung der Bewegungsgleichungen. Die verwendeten Methoden und Werkzeuge erstrecken sich von der Aufstellung (und Kopplung) domänenspezifischer Bilanzgleichungen [157, 192, 231, 249] über graphentheoretische Ansätze (lineare Graphentheorie) [154, 202, 248], geometrisch orientierte Zugänge [87] und Bondgraphen [5, 96, 208] bis hin zur Multipol-Theorie [146, 147, 148], zu Signalfluss-

plänen/Blockdiagrammen [62, 233] oder sogar Prädikat/Transitionsnetzen [19]. Weit verbreitet sind auch Hardware-Beschreibungssprachen wie DSL [113], Dymola [31, 32, 168], Omola [7], VHDL-AMS [243], SystemC-AMS oder Modelica [33, 169, 170]. Die Anwendung von Bondgraphen ist mit gewissen Einschränkungen verbunden. Sowohl bei dreidimensionalen Mehrkörpersystemen als auch bei nichtpassiven elektrischen Schaltungen treten Probleme auf. Bondgraphen können deshalb nur für relativ einfache elektromechanische Systeme verwendet werden. Weiterhin ist jedem Element eine feste Kausalität zuzuordnen. Der Nachteil der Kausalitätsfestlegung gilt ebenso für eine Modelldarstellung mittels Signalflussplänen/Blockdiagrammen. Solche Modelle haben zwar Vorteile beim Reglerentwurf, sind allerdings nur eingeschränkt zur automatischen Generierung der Bewegungsgleichungen geeignet, weil im Allgemeinen die Signalflusspläne aus den Bewegungsgleichungen abgeleitet werden und nicht umgekehrt. Die Verwendung von Prädikat/Transitionsnetzen bietet zwar ein einheitliches Werkzeug zur numerischen Problemlösung, dennoch müssen die zu lösenden Differenzialgleichungen zunächst synthetisch aus den physikalischen Zusammenhängen (über Bilanzgleichungen usw.) gewonnen werden. Hardware-Beschreibungssprachen sind ebenfalls nur bedingt befriedigende Lösungen. Zwar stellen sie „geschlossene“ Werkzeuge dar (das Gesamt-Differenzialgleichungssystem wird gleichzeitig gelöst), da die Modellimplementation aber auch auf synthetische Art und Weise erfolgt, sind diesbezügliche Modellierungsfehler nicht auszuschließen. Zusätzlich sind die dort verwendeten Numerik-Solver oftmals nicht auf die Anforderungen mechatronischer Systeme abgestimmt.

Bei der Verwendung analytischer Methoden werden dagegen die Bewegungsgleichungen aus einem (für alle Teilsysteme gültigen) Prinzip abgeleitet (z.B. aus dem Prinzip der virtuellen Arbeit). Diese Art und Weise der Modellgenerierung ist bei wenigen Autoren anzutreffen z.B.: bei CRANDALL [27], MAISSER/STEIGENBERGER [144], ENGE/KIELAU/MAISSER [36], MAISSER ET AL. [137], HADWICH [76], HADWICH/PFEIFFER [77], SCHLACHER/KUGI/SCHIEDL [205], KUGI/SCHLACHER [108]. Die hier vorliegende Arbeit versteht sich als ein Beitrag zur Verbreitung der analytischen Methoden zur Modellbildung mechatronischer Systeme. Das zur Validierung und Beispielimplementierung verwendete Entwicklungswerkzeug für mechatronische Systeme **alaska** [3] verbindet eine objektorientierte (wahlweise grafische oder textuelle) Modelldefinition mit der Anwendung des Prinzips der virtuellen Arbeit in Lagrange'scher Fassung zur automatischen Generierung der Bewegungsgleichungen. In der Welt der Mehrkörperdynamik ist das Prinzip der virtuellen Arbeit wohlbekannt und weit verbreitet. In der Elektrotechnik jedoch werden Lagrange'sche Gleichungen bisher relativ selten benutzt. GÜNTHER/RENTROP stellen in [75] diese Methode detailliert dar. Bei SCHERPEN ET AL. [199, 200, 201] werden konkrete elektrische Systeme in Lagrange'scher Form modelliert. In letzteren Arbeiten werden auch geschaltete Systeme betrachtet. Allerdings werden nur fremdgesteuerte Schalter eingesetzt (zur Begriffbestimmung siehe Abschnitt 5.3). In den Lehrbüchern von SÜSSE ET AL. [225, 226, 227] wird u.a. auf die Lagrange-basierte Modellierung verschiedener Bauelemente der Elektrotechnik eingegangen.

In einigen Veröffentlichungen wird die in der vorliegenden Arbeit verwendete analytische Methode zur mathematischen Modellierung elektromechanischer oder mechatronischer Systeme in ähnlicher oder gleicher Form angewendet. BIELEFELD stellt in [13] Lagrange'sche Bewegungsgleichungen für elektromechanische Systeme auf. Diese werden dann allerdings im Gegensatz zur in der vorliegenden Arbeit verfolgten Philosophie in-

nerhalb des Schaltungssimulators SPICE umgesetzt. Bei nichttrivialen Systemen sind bei dieser Verfahrensweise aufgrund der dort zur Verfügung stehenden Numerik-Solver Probleme zu erwarten. Bei MCPHEE/SCHERRER/SHI in [154, 202] werden mit Graphentheorie, Kirchhoff-Theorie und dem Prinzip der virtuellen Arbeit die gleichen Methoden zur Modellierung mechatronischer Systeme verwendet wie in der vorliegenden Arbeit. Die Modellierung des mechanischen Teilsystems geht dabei auf den von MCPHEE in [152, 153] vorgeschlagenen graphentheoretischen Modellierungsansatz zurück. Darüber hinaus werden nur Aussagen zur numerischen Integration mechatronischer Systeme gemacht. Andere Analysemethoden werden ebenso wie strukturvariable Systeme (oder Methoden der Synthese) nicht erwähnt. HADWICH und PFEIFFER wenden in [76, 77] das Prinzip der virtuellen Arbeit auf mechatronische Systeme an. Dabei werden sowohl diskrete Systeme wie Starrkörpersysteme oder elektrische/fluidische Netzwerke als auch nicht-diskrete Systeme aus Kontinuumsmechanik und Elektrodynamik (Maxwell-Theorie) betrachtet und eine ganzheitliche Modellierung vorgestellt. Die letztlich zur Analyse verwendeten Bewegungsgleichungen werden allerdings nur für spezielle Beispiele angegeben. Zu Synthesemethoden erfolgt keine Aussage. Ebenso ist eine Modellierung von strukturvariablen Systemen nicht vorgesehen.

### 1.2.2 Modellierung von Strukturvariabilität

In zunehmendem Maße müssen bei der Untersuchung von mechatronischen Systemen auch Problemstellungen betrachtet werden, bei denen strukturelle Veränderungen eine Rolle spielen. Mechatronische Systeme mit variabler Struktur sind physikalisch heterogene Systeme, in deren Substrukturen (bzw. Domänen) Ereignisse stattfinden können, die nur durch ein Umschalten zwischen verschiedenen strukturellen Ausprägungen beschreibbar sind. Durch die wachsende Miniaturisierung und Integration bei mechatronischen Systemen kann eine ganzheitliche Modellierung auch für strukturvariable Systeme durchaus von Vorteil sein.

Ein umfassender Überblick über Arbeiten, die sich mit Systemen variabler Struktur beschäftigen, erscheint unmöglich. An dieser Stelle sollen lediglich einige Beispiele herausgegriffen werden, die für die vorliegende Arbeit von Bedeutung sind. Der weitaus größte Teil der Literatur zum Thema Strukturvariabilität betrachtet Systeme innerhalb einer bestimmten physikalischen Domäne. In der Mechanik sind solche Phänomene mit der Problematik Kontakt/Reibung/Stoß verbunden. Von LÖTSTEDT [119, 120, 121] stammen grundlegende Arbeiten zur Behandlung von zweidimensionalen Kontaktproblemen mit unilateralen Bindungen und Reibung. HAUG/WU/YANG [82] stellen Bewegungsgleichungen für Mehrkörpersysteme (MKS) mit reibungsbehafteten Kontakten, Stößen und wechselnden Bindungen auf. Sie treffen allerdings keine Aussage bezüglich der Auswahl einer erlaubten Struktur zum Zeitpunkt einer notwendigen strukturellen Veränderung. Auch PFEIFFER [180], KLEPP [103] und GLOCKER/PFEIFFER [69] modellieren strukturvariable Starrkörpersysteme mittels unilateraler Bindungen, lösen aber das kombinatorische Problem der Strukturfindung entweder mittels „trial and error“-Methode oder durch konkret auf das jeweilige Beispiel bezogenes a priori-Wissen. Bereits in [181] und [182] ergänzt PFEIFFER zu den Bewegungsgleichungen noch die Kontaktgesetze und formuliert ein lineares Komplementaritätsproblem (LCP) für die Auswahl einer Struktur. Zuvor hatten KWAK/LEE [110] das LCP für linear-elastische Kontaktprobleme in Ver-

bindung mit der Boundary-Element-Methode angewendet. Entscheidend vertieft wird die LCP-Anwendung für strukturvariable MKS von GLOCKER/PFEIFFER [70, 71, 72, 73] und GLOCKER [67]. Die grundsätzliche Vorgehensweise ist folgende: Ausgehend von einer Formulierung der Kontakt-/Reibgesetze auf Beschleunigungsebene werden die Kontakt- bzw. Reibkräfte berechnet und die Bewegungsgleichungen mit einem numerischen Integrator gelöst. Die jeweils aktuelle Systemkonfiguration wird überwacht (z.B. mittels Indikatorfunktionen) und falls notwendig neu bestimmt. Dazu wird aus dem Komplettsatz der Bewegungsgleichungen und den Nebenbedingungen der Bindungsdynamik ein LCP formuliert und gelöst. Auch SEYFFERTH [212] nutzt u.a. das LCP zur Kontaktmodellierung bei un stetigen Montageprozessen. PFEIFFER/GLOCKER geben in [186] eine umfassende Zusammenstellung der Theorie zur Dynamik von MKS mit unilateralen Bindungen und trockener Reibung. Sie behandeln zweidimensionale (d.h. ebene) Coulomb'sche Reibkontakte als LCP in Standardform. FUNK [56] nutzt ein LCP in Nicht-Standardform für eine kompaktere Darstellung der gleichen Problematik.

Im dreidimensionalen Fall des Kontakt-/Reibproblems reicht das LCP zu dessen Behandlung nicht mehr aus. Die Komplementaritätsbedingungen führen auf die Formulierung eines so genannten nichtlinearen Komplementaritätsproblems (NCP). KWAK zeigt in [109] die Aufstellung eines NCP für das allgemeine dreidimensionale Kontaktproblem. Eine Behandlung des räumlichen Kontakt-/Reibproblems mittels LCP ist möglich, wenn eine Approximation (Linearisierung) des Reibkegels durchgeführt wird. KLARBRING/BJÖRKMAN zeigen die Brauchbarkeit dieser Methode für unabhängige Kontakte [102]. TRINKLE ET AL. [235], ROSSMANN/PFEIFFER [189] und GLOCKER [68] wenden die Approximation des Reibkegels für abhängige Kontakte an. GLOCKER gibt darüber hinaus in [68] erstmals eine komplette Formulierung räumlicher Kontakte als NCP in Standardform an.

In neueren Veröffentlichungen zum Themenkreis Strukturvariabilität in mechanischen Systemen konzentriert sich z.B. WÖSLE in [250] auf einen Vergleich des LCP (mit Approximation des Reibkegels) mit anderen Methoden zur Behandlung räumlicher Kontakte, während STIEGELMEYR in [224] die numerische Lösung eines LCP und die entsprechenden Algorithmen ausführlich diskutiert. PFEIFFER umreißt in [183] und [184] die komplette Methodik der Darstellung unilateraler Bindungen in der Mechanik als Komplementaritätsprobleme und gibt mehrere Beispiele an. In [185] bietet er eine komprimierte Darstellung zu allgemeinen Reibkontakten.

Sowohl für LCP als auch für NCP wurden bisher einige Lösungsverfahren entwickelt. Obwohl sich die vorliegende Arbeit nicht mit diesem Problemkreis beschäftigt, sollen hier kurz einige Ergebnisse dazu vorgestellt werden. LCP mit kleinen Dimensionen sind grundsätzlich durch enumerative Methoden – d.h. durch die kombinatorische Auswertung des Problems – lösbar. Eine solche Methode ist auch die bei GLOCKER [67] beschriebene – und im Anhang C wiederholte – Aufspaltung eines  $n$ -dimensionalen LCP in  $2^n$  lineare Systeme. Für wachsendes  $n$  wird jedoch der Lösungsaufwand schnell größer und damit diese Methode praktisch nicht mehr anwendbar. Das erste Verfahren (ein komplementärer Pivot-Algorithmus) zur Lösung von LCP mit deutlich geringerem Aufwand wurde von LEMKE vorgestellt. Dieses hat allerdings den Nachteil, dass das Auffinden einer Lösung nicht garantiert werden kann. Der Lemke-Algorithmus und ähnliche Verfahren werden in den Standardwerken [25, 26, 161] aber z.B. auch bei SEYFFERTH [212] ausführlich beschrieben. WERNER [247] schlägt einen erweiterten Algorithmus vor für LCP, bei denen der Lemke-Algorithmus keine Lösung liefert. Von AL-KHAYYAL [2] schließlich wurde ein

Verfahren entwickelt, dass eine Kombination aus enumerativen Methoden und linearer Programmierung darstellt. Der Algorithmus beinhaltet ein wiederholtes Lösen schrittweise eingegrenzter linearer Optimierungsaufgaben. Auch für NCP sind neben der oben erwähnten Linearisierung (und Lösung mittels LCP) noch andere Lösungsverfahren bekannt (z.B. durch Abbildung des NCP auf äquivalente Punktmengen [161]).

In der Elektrotechnik sind Phänomene der Strukturvariabilität schon lange bekannt. In der entsprechenden Literatur tritt das LCP aber bisher selten in Erscheinung. Insbesondere in der Leistungselektronik treten infolge der dort verwendeten Leistungstore (Leistungsdioden, Leistungstransistoren in bipolarer oder FET-Ausführung, Thyristoren als Standard- oder GTO-Variante usw.) sehr oft Schaltvorgänge auf. Die Auswahl des jeweils gültigen Satzes von Differenzialgleichungen zur Modellierung des Systems im aktuellen Schaltzustand erfolgt allerdings überwiegend durch beispielabhängiges a priori-Wissen. Dazu wird für die konkret zu untersuchende elektrische Schaltung ein Zustandsdiagramm erstellt (z.B. [74]) und für jeden dort vertretenen Schaltzustand (jede mögliche Konfiguration) ein entsprechender Satz von Bewegungsgleichungen aufgebaut. Bei der numerischen Integration wird im Fall eines notwendigen Konfigurationswechsels an Hand der im Zustandsdiagramm existierenden Zustandsübergangspfade entschieden, welcher Satz von Bewegungsgleichungen für die weitere Simulation verwendet wird. Dabei müssen die Zustandsgrößen des Systems konsistent zwischen den Konfigurationen überführt werden.

In einigen Beiträgen wird das LCP zur Modellierung von elektrischen Systemen verwendet. STEVENS/LIN [223] und VAN EYNDHOVEN [48] beschreiben z.B. die Analyse von resistiven Schaltungen mit Bauelementen mit stückweise linearer Kennlinie mittels LCP. VANDENBERGHE/DE MOOR/VANDEWALLE nutzen zum gleichen Zweck ein so genanntes generalisiertes LCP [237]. Der Modellierung von speziellen hybriden Systemen, d.h. von Systemen, in denen sowohl zeitkontinuierliche als auch ereignisdiskrete Vorgänge ablaufen (vgl. [21]), widmen sich LOOTSMA/VAN DER SCHAFT/ÇAMLIBEL [118]. Sie behandeln physikalische (nicht unbedingt nur elektrische) Systeme, die lineare Relais-„Bauelemente“ enthalten, mittels LCP. In [196] definieren VAN DER SCHAFT/SCHUMACHER so genannte komplementäre Systeme (siehe auch [195]) als eine große Klasse der hybriden Systeme und geben eine mathematische Modellierung unter Nutzung des LCP an.

Ein Überblick über die Anwendung von Komplementaritätsverfahren in den Ingenieurwissenschaften im Allgemeinen ist in [50] enthalten. Die vollständige Abstinenz von Beispielen aus der elektrischen Domäne in diesem Übersichtsaufsatz zeigt, dass der Anwendung des LCP in der Elektrotechnik bisher noch wenig Beachtung geschenkt wurde. Eine einheitliche Modellierung strukturvariabler elektromechanischer Systeme mittels Lagrange-Formalismus und LCP wurde bisher nicht angegangen.

### 1.2.3 Inverse Probleme/Dynamische Steuerung

Die Fülle von Literaturbeiträgen zum Thema Steuerung/Regelung von physikalischen Systemen ist ebenfalls unübersehbar. An dieser Stelle sollen deshalb nur einige Beiträge erwähnt werden, die in engem Zusammenhang zur vorliegenden Arbeit stehen.

Inverse Probleme sind in der klassischen Mechanik seit langem bekannt [57, 230]. Aber auch in der Elektrodynamik werden solche Aufgabenklassen [163] behandelt. Sie führen letztlich immer auf die Synthese eines Systems mit gewissen Eigenschaften. Eine Teilaufgabe aus diesem Themenkreis ist die Problemstellung der inversen Dynamik eines

Systems. In der Mechanik beschäftigt sich diese Aufgabe mit der Ermittlung von eingepägten Kräften/Momenten, unter deren Einfluss das MKS (oder Teile des MKS) eine bestimmte vorgegebene Bewegung ausführen. Eine Möglichkeit zur Lösung einer solchen Aufgabenstellung ist das von MURRAY/LI/SASTRY [160] oder MAISSER/JUNGNICKEL [90, 139] für die dynamische Steuerung von MKS verwendete, so genannte erweiterte PD-Regelgesetz. Ein solcher Regler wurde erstmals von KODITSCHKEK in [105] vorgeschlagen. Bei PADEN/PANIA [171] und ORTEGA ET AL. [167] wird diese Regelmethode als PD+-Regler bezeichnet. WEN/BAYARD [246] und KODITSCHKEK [106] beweisen die globale Stabilität dieses Reglers mittels einer geeigneten Lyapunov-Funktion unter Verwendung so genannter Cross-Terme. Solche Terme werden z.B. auch in [160, 209] zur Wahl von Lyapunov-Funktionen verwendet.

Einen sehr guten Überblick über verschiedene Methoden der nichtlinearen Steuerungstheorie verschaffen SPONG/VIDYASAGAR [218], CORON/TEEL/PRALY [24] und NIJMEIJER/VAN DER SCHAFT [164]. Für die dynamische Steuerung von nichtlinearen dynamischen Systemen werden zunehmend Regelstrategien auf der Basis der Passivität eines Systems vorgeschlagen (siehe [167, 194, 209]). ORTEGA ET AL. behandeln in [167] neben MKS und elektrischen Systemen (ES) auch elektromechanische Systeme (EMS). Zur dynamischen Steuerung von EMS schlagen sie zwei Methoden vor, die auf der Passivität eines Systems basieren. Die erste ist die so genannte „energy shaping“-Methode (siehe auch [14] für einen solchen Regler für MKS). Diese Methode ist sehr ähnlich zu der in der vorliegenden Arbeit verwendeten. Allerdings werden keine Aussagen gemacht für den Fall einer singulären Induktormatrix des elektrischen Teilsystems. In der vorliegenden Arbeit wird dieser Fall untersucht. Darüber hinaus werden einige sinnvolle Modifikationen des „feed forward“-Terms vorgenommen, die einen relativ einfachen Nachweis der globalen Stabilität (im Vergleich zu [171]) mittels einer Lyapunov-Funktion mit Cross-Termen erlauben. Die zweite Methode bei ORTEGA ET AL. [167] wird „nested loop“-Methode genannt. Sie betrachtet das mechanische Teilsystem lediglich als passive Störung eines geregelten elektrischen Teilsystems. Diese Methode ist – wie sich in Kapitel 6 der vorliegenden Arbeit zeigen wird – unter Umständen unvorteilhaft, weil sie gewisse Vereinfachungen der elektromechanischen Wechselwirkungen vornimmt.

Die in dieser Arbeit untersuchten Regelaufgaben sind Probleme der Verfolgung und Einhaltung von Trajektorien oder Untermannigfaltigkeiten des Konfigurationsraumes des mechatronischen Systems. Mit Fragestellungen der Trajektorienverfolgung befassen sich z.B. auch SLOTINE/LI [216], BERGHUIS/ORTEGA/NIJMEIJER [9] und VON LÖWIS [122]. Dabei kommen allerdings entweder keine EMS in Betracht, oder es wird keine mathematisch einheitliche Modellierung des Systems zugrunde gelegt.

### 1.3 Aufbau der Arbeit

Die Arbeit besteht im Wesentlichen aus vier Teilen. Im ersten Teil (**Kapitel 2** und **3**) wird eine einheitliche Theorie zur Modellierung elektromechanischer Systeme dargelegt. Als Grundlage dient dabei der *Lagrange-Formalismus*, der einerseits auf mechanische Systeme (Mehrkörpersysteme) und andererseits – unter Einbeziehung graphentheoretischer Begriffe und Methoden – auf elektrische Systeme (Multipol-Netzwerke) angewendet wird. Methodischer Ausgangspunkt für die Herleitung der Bewegungsgleichungen ist jeweils



das Prinzip der virtuellen Arbeit. Die Anwendung einer einheitlichen Methode für beide Domänen ermöglicht eine in sich geschlossene Beschreibung von elektromechanischen Systemen (EMS) unter korrekter Beachtung der elektromechanischen Wechselwirkungen. Dieser Teil stützt sich wesentlich auf die einschlägigen Arbeiten zur Lagrange-basierten Modellierung von EMS von MAISSER/STEIGENBERGER [142, 143, 220, 221] und deren Fortentwicklung in [144] und insbesondere in [131]. Weitere Arbeiten mit neueren Anwendungen sind z.B. [36, 137].

Der zweite Teil (**Kapitel 4** und **5**) beschreibt verschiedene Methoden zur Analyse von EMS. Die konsequente Nutzung eines einheitlichen Zugangs zur Modellierung solcher Systeme ermöglicht deren Betrachtung als *ein einziges dynamisches System*. Entsprechende Untersuchungsmöglichkeiten für *Systeme mit fester Struktur* sind in **Kapitel 4** dargestellt. In **Kapitel 5** wird eine Methode zur Beschreibung von *EMS mit variabler Struktur* entwickelt. Dazu werden verschiedene Phänomene, die eine veränderliche Struktur des mechanischen und/oder elektrischen Teilsystems von EMS bewirken, aufgeführt und mit Hilfe von unilateralen Bindungen ausgedrückt. Potenzielle Zeitpunkte eines Strukturwechsels und die danach jeweils gültige neue Struktur werden über Indikatorfunktionen und die Aufstellung von Komplementaritätsproblemen bestimmt. Durch die einheitliche Beschreibungsmethode für unstetige Vorgänge in der mechanischen und der elektrischen Domäne kann auch für solche Systeme ein einheitlicher Zugang zur Modellierung realisiert werden.

Der dritte Teil (**Kapitel 6**) beschäftigt sich mit der *Synthese* (d.h. mit dem Entwurf) von EMS. Die bei der Konzeption des dynamischen Verhaltens mechatronischer (bzw. elektromechanischer) Systeme hauptsächlich zu bearbeitenden Aufgabenstellungen werden dazu als *inverse Probleme der Dynamik* verstanden. Auf diese inversen Probleme wird unter verschiedenen Gesichtspunkten eingegangen. In einem Abschnitt wird die Problematik unter der Voraussetzung einer fest vorgegebenen Struktur aber bei variablen Konstitutivparametern betrachtet. Diese Vorgaben führen auf die *nichtlineare Parameteroptimierung* als ein Entwurfswerkzeug. Ziel ist die optimale Anpassung der geometrischen und/oder Materialparameter an statische und/oder dynamische Eigenschaften des Gesamtsystems. In einem weiteren Abschnitt wird die Entwurfsthematik bei vollständig fest vorgegebenem System behandelt. Hier werden neben der Struktur auch die Konstitutivparameter (mit Ausnahme gewisser eingepprägter Kräfte/Momente und elektrischer Spannungen) als fixe Vorgaben betrachtet. Diese Herangehensweise führt auf Fragen der geeigneten Ansteuerung des Gesamtsystems zur Einhaltung gewisser Vorgaben für dessen Bewegung. Dabei kommen im Allgemeinen sowohl Vorgaben für die Zeitgeschichte von mechanischen und/oder elektrischen Koordinaten als auch gewisse Abhängigkeiten der Koordinaten untereinander in Betracht. Die hier betrachteten Vorgaben lassen sich als explizit zeitabhängige Sollwerte für die generalisierten Koordinaten darstellen. Die Ansteuerung des Systems erfolgt unter Verwendung einer *Lyapunov-stabilen Regelstrategie*.

Im vierten Teil (**Kapitel 7**) schließlich werden verschiedene Anwendungsbeispiele zu den vorher genannten Analyse- und Synthesemethoden aufgeführt.

## 1.4 Zielstellung der Arbeit

Die Zielstellung dieser Arbeit besteht darin, unter dem Gesichtspunkt einer einheitlichen mathematischen Modellierung verschiedene *Werkzeuge bzw. Methoden zur Analyse und*

*Synthese mechatronischer Systeme* zu entwickeln und darzustellen. Als *analytische Methoden* werden hauptsächlich die dynamische Simulation von strukturfesten (Abschnitt 4.1) und strukturvariablen (Kapitel 5) mechatronischen Systemen und – ergänzend dazu für strukturfeste EMS – die Bestimmung von Gleichgewichtszuständen des Gesamtsystems (Abschnitt 4.2) und die lineare Schwingungsanalyse (Abschnitt 4.3) betrachtet. *Methoden der Synthese* sind die nichtlineare Optimierung von Konstitutivparametern des EMS (Abschnitt 6.2) und die nichtlineare, Lyapunov-stabile Steuerung mittels inverser Dynamik (Abschnitt 6.3).

Das Konzept der Arbeit stützt sich wesentlich auf das Prinzip der virtuellen Arbeit in Lagrange'scher Fassung. Durch Anwendung dieses Prinzips auf das EMS als Gesamtsystem wird ein differenzial-algebraisches Gleichungssystem aufgebaut. Ausgehend von diesen Bewegungsgleichungen können verschiedene analytische Untersuchungen durchgeführt werden.

Die Modellierung von *strukturvariablen mechatronischen Systemen* erfolgt durch Beschreibung der Strukturvariabilität mittels unilateraler (einseitiger) Bindungen. Der Algorithmus zur Strukturbestimmung basiert auf der Generierung von *Komplementaritätsproblemen*, einer Methode der konvexen Analysis. Die Ermittlung potenzieller Schaltzeitpunkte wird mittels Indikatorfunktionen und Rootfinder-Integrationscodes realisiert.

Weiterhin werden verschiedene zweckspezifische *Synthesemethoden* vorgeschlagen. Die *Optimierung* von Konstitutivparametern ist ein weitläufig bekanntes Entwurfssfeld. Die neue Qualität in dieser Arbeit kommt auch hier durch die einheitliche Modellierung zum Ausdruck. Beliebige Konstitutivparameter können optimiert werden unabhängig davon, ob sie nur eines der beiden Subsysteme oder gleichzeitig die mechanische und die elektrische Domäne beeinflussen – d.h. simultan in den „mechanischen“ und den „elektrischen“ Bewegungsgleichungen auftreten (Begriffsbestimmung erfolgt später). Das Resultat ist ein optimales elektromechanisches Gesamtsystem. Die *Lyapunov-stabile dynamische Steuerung* schließlich ermöglicht die Erfüllung gewisser vorgegebener Anforderungen an die Bewegung eines EMS bei fester Gesamtkonfiguration (Struktur plus Konstitutivparameter). Eine solche Methode ist ohne einheitliche Modellierung nicht möglich.

## 1.5 Schreibweisen

In der gesamten Arbeit wird Tensorschreibweise verwendet. Es gilt die Einstein'sche Summationsvereinbarung, d.h., wenn gleiche obere und untere Indizes innerhalb eines Termes auftreten, wird über die gesamte Indexmenge summiert ( $a_i b^i$  bedeutet  $\sum_i a_i b^i$ ). Ausnahmen von dieser Regel sind mit „ $\not\sum$ “ gekennzeichnet. Weiterhin steht  $A_{(ij)}$  für den symmetrischen Anteil des Tensors  $A_{ij}$  (bzw. der Matrix  $(A_{ij})$ ) und  $A_{[ij]}$  für den schiefsymmetrischen Anteil. Das Kronecker-Symbol  $\delta_j^i$  wird für den Einheitstensor verwendet.

Gelegentlich werden Vektoren des Euklid'schen Anschauungsraumes  $\mathbb{E}^3$  verwendet. Diese sind stets durch Buchstaben des deutschen Frakturalphabets gekennzeichnet.

Partielle Ableitungen nach einer generalisierten Koordinate  $q^a$  (oder deren zeitlichen Ableitungen) werden im Allgemeinen mit  $\partial_a = \partial/\partial q^a$ ,  $\dot{\partial}_a = \partial/\partial \dot{q}^a$ ,  $\ddot{\partial}_a = \partial/\partial \ddot{q}^a$  bezeichnet. Die Schreibweise  $(\cdot)'$  steht für die totale Zeitableitung des Ausdrucks in der Klammer. Die Variations- oder Eulerableitung ist durch  $\delta_a(\cdot) = \left(\dot{\partial}_a(\cdot)\right)' - \partial_a(\cdot)$  definiert.

# Kapitel 2

## Theoretische Grundlagen

Als Kern der Mechatronik kann wohl die Elektromechanik betrachtet werden. Elektromechanische Systeme (EMS) sind heterogene Strukturen, die durch eine Wechselwirkung elektromagnetischer Felder mit massebehafteten Körpern charakterisiert sind. Grundlegend für eine einheitliche Modellierung und Simulation solcher Systeme ist eine mathematische Beschreibung, die sich an der klassischen analytischen Mechanik orientiert und durch einige Begriffe und Sachverhalte aus der Graphentheorie (hauptsächlich zur Charakterisierung topologischer Eigenschaften elektrischer Netzwerke) ergänzt wird. Aus diesem Grund werden in diesem Kapitel zunächst einige später notwendige Grundlagen der Graphentheorie zusammengestellt (Abschnitt 2.1). Weiterhin wird die Lagrange-Formulierung für mechanische Systeme in Abschnitt 2.2 wiederholt und – in relativ ausführlicher Form – für elektrische Systeme in Abschnitt 2.3 dargestellt.

### 2.1 Graphentheorie

Die Graphentheorie erweist sich als zweckmäßiges Werkzeug zur Beschreibung topologischer Zusammenhänge sowohl mechanischer als auch elektrischer Systeme. Sie kann somit als Grundlage für die Beschreibung elektromechanischer Systeme dienen. Einige Grundbegriffe aus der Graphentheorie, auf die in der weiteren Arbeit zurückgegriffen wird, werden im Folgenden in Anlehnung an [20, 190, 210, 211, 215] zusammengestellt.

#### 2.1.1 Grundbegriffe

**Definition 2.1** *Es bezeichne  $\Gamma := \{\mathfrak{X}, \mathfrak{U}, f\}$  einen endlichen, ungerichteten Graphen bestehend aus einer endlichen Menge  $\mathfrak{X}$  von Knoten und einer endlichen Menge  $\mathfrak{U}$  von Kanten. Die Inzidenzfunktion  $f$  ordnet jedem  $u \in \mathfrak{U}$  eindeutig ein ungeordnetes Paar voneinander verschiedener Knoten  $X, Y \in \mathfrak{X}$  zu. Die Knoten  $X, Y$  heißen Endpunkte von  $u$ . Die Kante  $u$  verbindet  $X$  und  $Y$  miteinander. Sie ist mit dem Knoten  $X$  (und auch mit  $Y$ ) inzident.*

Jeder Knoten kann Endpunkt mehrerer Kanten sein. Ein Knoten, der nicht Endpunkt einer Kante ist, heißt *isoliert*. Ein Knoten, der Endpunkt genau einer Kante ist, heißt *vereinzelt*. Ein Knoten, der Endpunkt von genau zwei Kanten ist, heißt *zweiwertig*. Ein Knoten, der Endpunkt von mindestens drei Kanten ist, heißt *mehrwertig*. Im Folgenden

werden nur Graphen betrachtet, deren sämtliche Knoten weder isoliert noch vereinzelt sind. (Das gilt für die gesamte Arbeit mit der einzigen Ausnahme der Topologierepräsentation von Mehrkörpersystemen mittels Graphen in Abschnitt 2.2.1).

Ein Graph  $\Gamma' = \{\mathfrak{X}', \mathfrak{U}', f'\}$  heißt *Subgraph* von  $\Gamma$ , wenn  $\mathfrak{X}' \subseteq \mathfrak{X}$  und  $\mathfrak{U}' \subseteq \mathfrak{U}$  ist und wenn  $f'$  die Einschränkung von  $f$  auf  $\mathfrak{U}'$  ist. Ein Subgraph heißt *maximal*, wenn er alle Knoten von  $\Gamma$  enthält (d.h.  $\mathfrak{X}' = \mathfrak{X}$ ).

Mehrere Kanten  $u_1, \dots, u_r$  von  $\Gamma$  ( $r > 1$ ) bilden eine Kantenfolge, wenn jede Kante  $u_i$ ,  $i = 2, \dots, r - 1$ , einen ihrer Endpunkte mit  $u_{i-1}$  und den anderen mit  $u_{i+1}$  gemeinsam hat. Derjenige Endpunkt von  $u_1$ , der nicht mit  $u_2$  inzident ist, heißt Endpunkt der Kantenfolge. Analog existiert ein der Kante  $u_r$  zugeordneter Endpunkt. Eine solche Kantenfolge heißt *Weg*, wenn sie keine Kante und keinen Knoten mehrfach enthält, wenn also auch die Endpunkte der Kantenfolge (und damit des Weges) nicht identisch sind. Ein Weg heißt *binärer Weg*, wenn alle Knoten des Weges außer den Endpunkten zweiwertige Knoten sind und beide Endpunkte mehrwertig (und voneinander verschieden) sind.

Ein Graph  $\Gamma$  heißt *zusammenhängend*, falls je zwei Knoten durch (mindestens) einen Weg verbunden sind. In einem nicht zusammenhängenden Graphen  $\Gamma$  erzeugt die Eigenschaft zweier Knoten, Endpunkte eines möglichen Weges zu sein, eine Klasseneinteilung der Knoten. Die Knoten einer Klasse und die mit ihnen inzidenten Kanten bilden eine *Komponente* von  $\Gamma$ .

Sind in  $\Gamma$  die Endpunkte eines Weges  $W$  durch eine Kante  $u \notin W$  verbunden, so entsteht durch Hinzunahme dieser Kante zu  $W$  ein Kreis. Infolge des Fehlens von isolierten oder vereinzelt Knoten ist jede Kante in  $\Gamma$  Bestandteil eines oder mehrerer Kreise. Zwei Kreise heißen voneinander *unabhängig*, wenn jeder Kreis mindestens eine im jeweils anderen Kreis nicht vorkommende Kante enthält. Ein zusammenhängender kreisloser Subgraph  $\Gamma'$  heißt *Baum*.

**Definition 2.2** *Ein maximaler kreisloser Subgraph von  $\Gamma$  heißt Gerüst  $G$  von  $\Gamma$ . Der genau die nicht zu  $G$  gehörenden Kanten und genau deren Endpunkte enthaltende Graph  $H = H(G)$  heißt Cogerüst zu  $G$  in  $\Gamma$ .*

Das Gerüst  $G$  von  $\Gamma$  enthält ebenso viele Bäume wie  $\Gamma$  Komponenten besitzt. Die Menge  $H$  der Cogerüstkanten ist niemals die leere Menge, weil die hier betrachteten Graphen aus mindestens einem Kreis bestehen. Das heißt, es existiert immer ein Cogerüst unabhängig von der Wahl von  $G$ .

Durch die Unterscheidung der Endpunkte einer Kante in einen Start- und einen Zielpunkt wird eine *Orientierung* der Kante angegeben. Ein *orientierter Graph* ist ein Graph, dessen sämtliche Kanten orientiert sind. Im Folgenden werden ausschließlich orientierte Graphen betrachtet.

**Satz 2.3** *Es bezeichne  $|\mathfrak{X}| = N$  die Anzahl Knoten,  $|\mathfrak{U}| = B$  die Anzahl Kanten und  $p$  die Anzahl der Komponenten in  $\Gamma$ . Sei  $G = \{\mathfrak{X}, \mathfrak{U}'\}$  ein Gerüst von  $\Gamma$ . Dann ist  $|\mathfrak{U}'| = N - p$  und heißt Rang von  $\Gamma$ . Das Cogerüst  $H(G)$  enthält  $l = B - N + p$  Kanten (Euler'scher Polyedersatz);  $l$  heißt zyklomatische Zahl von  $\Gamma$  und es gilt für die hier betrachteten Graphen  $l > 0$ .*

**Definition 2.4** Sei  $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\}$  eine beliebige (vollständige, paarweise disjunkte) Klasseneinteilung der Knoten in  $\mathfrak{X}$ . Dann gilt  $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} = \emptyset$  und  $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B} = \mathfrak{X}$ . Die Menge aller Kanten, deren Endpunkte verschiedenen Klassen angehören, heißt Schnitt  $S$ . Enthält  $S$  genau eine Kante eines Gerüsts  $G$ , so heißt  $S$  Fundamentalschnitt bezüglich  $G$ . Die (orientierte) Gerüstkante eines Fundamentalschnittes  $S$  erzeugt eine Orientierung von  $S$ : Eine Kante aus  $S$ , deren Startpunkt (Zielpunkt) zur selben Klasse gehört wie der Startpunkt der Gerüstkante, heißt positiv (negativ) orientiert bezüglich  $S$ . Ein Kreis, der genau eine Kante des Cogerüsts  $H(G)$  enthält, heißt Fundamentalkreis bezüglich  $G$ .

Die Definition 2.4 führt sofort auf die folgenden Eigenschaften:

- Die Herausnahme der Kanten eines Fundamentalschnittes aus  $\Gamma$  erhöht die Komponentenzahl von  $\Gamma$  um Eins.
- Fundamentalkreise zu einem Gerüst  $G$  sind stets voneinander unabhängig, weil jede Cogerüstkante zu genau einem solchen Kreis gehört.

**Definition 2.5** Ein Graph heißt kontrahierter Graph, wenn er keinen binären Weg enthält.

Ein kontrahierter Graph  $\Gamma_k$  kann aus einem Graphen  $\Gamma$  erzeugt werden, indem alle binären Wege bis auf deren Endpunkte (d.h. alle zu einem binären Weg gehörenden Kanten und zweiwertigen Knoten) entfernt und durch jeweils eine einzelne Kante ersetzt werden.

### 2.1.2 Analytische Darstellung von Graphen

Bei einem orientierten Graphen  $\Gamma = \{\mathfrak{X}, \mathfrak{U}, f\}$  ordnet die Inzidenzfunktion jeder Kante  $u \in \mathfrak{U}$  eindeutig ein geordnetes Paar voneinander verschiedener Knoten  $X_S, X_Z \in \mathfrak{X}$  zu, wobei  $X_S$  den Startknoten und  $X_Z$  den Zielknoten bezeichnet. Mit beliebiger (aber fester) Durchnummerierung der Knoten ( $k = 1, \dots, N$ ) und Kanten ( $j = 1, \dots, B$ ) lässt sich dieser als Topologie bezeichnete Zusammenhang durch die Knoten-Kanten-Inzidenzmatrix  $a = (a^k_j)$  beschreiben. Ihre Elemente sind definiert durch

$$a^k_j = \begin{cases} +1, & \text{Knoten } k \text{ ist Startknoten der Kante } j, \\ -1, & \text{Knoten } k \text{ ist Zielknoten der Kante } j, \\ 0, & \text{Knoten } k \text{ ist nicht inzident mit Kante } j. \end{cases} \quad (2.1)$$

Im Folgenden soll die Indexmenge zur Nummerierung der Kanten des Graphen  $\Gamma$  mit demselben Symbol  $\Gamma$  bezeichnet werden:

$$u_i, i \in \Gamma: \text{ Kante des Graphen } \Gamma.$$

Weiterhin sollen die Indexmengen zur Nummerierung von Gerüst- und Cogerüstkanten sowie von Fundamentalschnitten und -kreisen durch die Symbole der entsprechenden Subgraphen bezeichnet werden:

$$\begin{aligned} u_j, j \in G: & \text{ Kante des Gerüsts } G; \\ S_j, j \in G: & \text{ Fundamentalschnitt zur Gerüstkante } u_j; \\ u_i, i \in H: & \text{ Kante des Cogerüsts } H; \\ M_i, i \in H: & \text{ Fundamentalkreis zur Cogerüstkante } u_i. \end{aligned}$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können zuerst die Kanten in  $H$  und dann die

Kanten in  $G$  fortlaufend nummeriert werden:

$$\begin{aligned} i \in H: & \quad i = 1, \dots, l; \\ i \in G: & \quad i = l + 1, \dots, B. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Die Inzidenz der Kanten von  $\Gamma$  mit dem Fundamentalschnittsystem zu  $G$  wird durch die *Fundamentalschnittmatrix* (FSM)  $Q = (Q_i^j)$  beschrieben. Ihre Elemente sind definiert durch

$$Q_i^j = \begin{cases} +1, & u_i \in S_j, u_i \text{ positiv orientiert bzgl. } S_j \\ -1, & u_i \in S_j, u_i \text{ negativ orientiert bzgl. } S_j \\ 0, & u_i \notin S_j \end{cases}, \quad i \in \Gamma, j \in G.$$

Die Inzidenz der Kanten von  $\Gamma$  mit dem Fundamentalkreissystem zu  $H(G)$  wird durch die *Fundamentalkreismatrix* (FKM)  $A = (A^i_j)$  beschrieben. Deren Elemente sind definiert durch

$$A^i_j = \begin{cases} +1, & u_i \in M_j, u_i \text{ positiv orientiert bzgl. } M_j \\ -1, & u_i \in M_j, u_i \text{ negativ orientiert bzgl. } M_j \\ 0, & u_i \notin M_j \end{cases}, \quad i \in \Gamma, j \in H.$$

Mit der Nummerierung (2.2) haben die FSM und die FKM die Gestalt:

$$Q = \underbrace{\begin{bmatrix} Q_i^j \\ \delta_i^j \end{bmatrix}}_{j \in G} \begin{matrix} \} & i \in H \\ \} & i \in G \end{matrix}, \quad A = \underbrace{\begin{bmatrix} \delta^i_j \\ A^i_j \end{bmatrix}}_{j \in H} \begin{matrix} \} & i \in H \\ \} & i \in G \end{matrix}. \tag{2.3}$$

Zwischen der FKM  $A$  und der FSM  $Q$  besteht die (z.B. in elektrischen Systemen aus der Leistungsbilanz  $V_i I^i = 0$  folgende) Beziehung

$$A^i_j = -Q_j^i, \quad i \in G, \quad j \in H, \tag{2.4}$$

so dass in Matrixschreibweise gilt:

$$A^T Q = 0.$$

Die Matrizen  $A^T$  und  $Q$  sind somit zueinander orthogonal.

### 2.1.3 Einige Eigenschaften

Die Knoten-Kanten-Inzidenzmatrix  $a = (a^k_j)$  besteht aus  $N$  Zeilen ( $k = 1, \dots, N$ ) und  $B$  Spalten ( $j = 1, \dots, B$ ) mit  $N \leq B$ . Ihr Rang ist  $\text{rang}(a^k_j) = N - p$ . Die Spaltennummern einer beliebigen regulären  $(N - p)$ -reihigen Untermatrix von  $a^k_j$  definieren die Kantennummern eines Gerüsts  $G$  von  $\Gamma$  (vgl. [20]). Dann lässt sich ein linearer Vektorraum der Dimension  $|H| = l = B - N + p > 0$  definieren:

$$a^k_j x^j = 0, \quad j \in \Gamma.$$

Durch Streichung von genau  $p$  unabhängigen Zeilen aus  $a^k_j$  entsteht die so genannte *reduzierte* Knoten-Kanten-Inzidenzmatrix  $a^{k'}_j$  ( $k' = 1, \dots, N - p; j = 1, \dots, B$ ). Diese lässt sich zerlegen gemäß

$$a^{k'}_j x^j = a^{k'}_{j_1} x^{j_1} + a^{k'}_{j_2} x^{j_2} = 0, \quad j_1 \in H, \quad j_2 \in G,$$

wobei  $a_{j_2}^{k'}$  eine quadratische Matrix mit vollem Rang ist ( $\text{rang}(a_{j_2}^{k'}) = N - p$ ). Mit der Inversen  $\tilde{a}_{j_2}^{k'}$  von  $a_{j_2}^{k'}$  wird

$$x^{j_2} = -\tilde{a}_{j_2}^{k'} a_{j_1}^{k'} x^{j_1}$$

und daraus schließlich

$$x^i = A^i_{j_1} x^{j_1}, \quad i \in \Gamma, \quad j_1 \in H,$$

mit

$$A = (A^i_{j_1}) = \left[ \begin{array}{l} \delta^{i_1}_{j_1} \\ -\tilde{a}_{j_2}^{k'} a_{j_1}^{k'} \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} \} \quad i = i_1 \in H \\ \} \quad i = j_2 \in G \end{array} \right\}$$

und  $\text{rang}(A) = B - N + p$ . Die so konstruierte Matrix  $A$  ist gerade die Fundamentalkreismatrix (vgl. [211]). Auf diese Weise lassen sich bei Kenntnis der Topologie ( $a^k_j$ ) zu jedem Gerüst  $G$  von  $\Gamma$  die Fundamentalmatrizen  $A$  und  $Q$  bestimmen.

## 2.2 Mehrkörpersysteme

Die Dynamik von Mehrkörpersystemen wird in der Literatur ausführlich behandelt (z.B. [175, 203, 213]). Im Folgenden werden Begriffe und Bezeichnungen aus der analytischen Starrkörpermechanik in Lagrange'scher Formulierung in Anlehnung an [28, 128, 132, 133] zusammengestellt.

**Definition 2.6** *Unter einem Mehrkörpersystem (MKS) wird – in der vorliegenden Arbeit – eine endliche Menge starrer Körper verstanden, die in den euklidischen Raum  $\mathbb{E}^3$  eingebettet sind. Die Körper können untereinander und mit einem (raumfesten) Fundament geometrisch und/oder physikalisch gekoppelt sein.*

Eine geometrische Kopplung resultiert in Zwangskräften (Reaktionen). Eine physikalische Kopplung wird durch eingeprägte Kräfte/Momente beschrieben.

Die hier getroffene Einschränkung „starre Körper“ kann selbstverständlich fallen gelassen werden. Ein MKS darf auch flexible Körper enthalten, wobei dann das elastische Verschiebungsfeld durch Ritz-Ansätze mathematisch diskretisiert wird und damit ein System mit endlichem Freiheitsgrad entsteht.

### 2.2.1 Topologie

MKS besitzen topologische, kinematische und konstitutive Eigenschaften. Topologie und Kinematik werden zusammen als Struktur bezeichnet. Zu den topologischen Eigenschaften gehören die Anzahl der zum MKS zählenden Körper sowie die Informationen, welche Körper über Gelenke *geometrisch* miteinander gekoppelt sind. Eine symbolische Darstellung der Topologie kann zweckmäßig durch Graphen erfolgen. Dabei wird jeder Körper durch einen Knoten und jedes Gelenk durch eine Kante repräsentiert. Die Endpunkte einer jeden Kante stehen somit für die beiden Körper, die durch das Gelenk geometrisch gekoppelt sind. Diese Topologiedarstellung wird als *Repräsentation mittels Graphen* bezeichnet.

Zur Beschreibung der Topologie wird zunächst von MKS mit kinematischer Baumstruktur (d.h. offene, verzweigte kinematische Ketten, Topologiegraph enthält keine Kreise) ausgegangen. Dabei kann ein MKS (und damit der Topologiegraph) aus mehreren Bäumen bestehen. Ein (nicht zum MKS gehörender) „Bezugskörper“  $B_0$  diene als Inertialsystem. Er wird als Fundament bezeichnet. Alle Körper des MKS werden mit  $B_k$ ,  $k = 1, \dots, K$  ( $K$  – Anzahl der Körper) folgendermaßen nummeriert:

- Alle Knoten  $B_k$  des Baumes, der  $B_0$  enthält, werden so nummeriert, dass für alle Knoten  $B_i$  des Weges zwischen  $B_0$  und  $B_k$  gilt:  $0 < i < k \leq K$ .
- Auf jedem  $B_0$ -freien Baum wird ein „ausgezeichneter“ Knoten  $B_j$  gewählt und alle anderen Knoten  $B_k$  dieses Baumes werden so nummeriert, dass für alle Knoten  $B_i$  des Weges zwischen  $B_j$  und  $B_k$  gilt:  $j < i < k \leq K$ .

Diese Vorschrift induziert eine Abbildung  $L : \{k\} \rightarrow \{L(k)\}$  der Art, dass jedem  $k$  genau ein  $L(k)$  mit  $L(k) < k$ , zugeordnet ist.  $L(k)$  ist die niedrigste der Nummern von Körpern, die mit  $B_k$  durch ein Gelenk geometrisch gekoppelt sind. Der Körper  $B_{L(k)}$  heißt *Vorgänger* von  $B_k$ . Für einen „ausgezeichneten“ Körper  $B_j$  (eines  $B_0$ -freien Baumes) gelte  $L(j) = 0$ . Ein solcher Körper ist mit dem Fundament  $B_0$  über ein so genanntes „freies Gelenk“ verbunden.  $L(k)$  heißt *Zusammenhangsvektor* des MKS und beschreibt dessen Topologie eindeutig.

MKS, die keine kinematische Baumstruktur aufweisen, sind durch mindestens eine kinematische Schleife gekennzeichnet. Solche Systeme können durch virtuelles „Aufschneiden“ genau eines Gelenks je kinematischer Schleife zunächst in MKS mit Baumstruktur überführt werden. Diese Gelenke heißen Schließgelenke. Die geometrischen Kopplungen infolge der Schließgelenke werden durch zusätzliche Bindungen zwischen den gekoppelten Körpern berücksichtigt (vgl. hierzu Abschnitt 2.2.4). Zur vollständigen Beschreibung der Topologie solcher Systeme wird neben dem Zusammenhangsvektor für jedes Schließgelenk ein ungeordnetes Paar  $(B_i, B_j)$ ,  $i, j \in 1, \dots, K$ , von Nummern der beteiligten Körper eingeführt.

Die Vorteile der Topologie-Repräsentation mittels Graphen sind vielfältig (siehe z.B. [236]). So können bekannte Eigenschaften und Verfahren aus der Graphentheorie direkt für MKS angewendet werden (Fundamentalkreise, Euler’scher Polyedersatz, systematische Aufzählung). Der größte Vorteil ist allerdings die Identifizierbarkeit der Topologie verschiedener MKS. Gerade beim Entwurf mechanischer Systeme sind durch so genannte Isomorphiebetrachtungen unnötige Mehrfachentwicklungen vermeidbar. Gleichzeitig kann durch systematische Aufzählung aller Möglichkeiten unter gewissen Rahmenbedingungen (z.B. Anzahl der Körper, Anzahl der kinematischen Schleifen) die Auswahl einer geeigneten Topologie erleichtert werden (vgl. [150, 151, 244]).

Zur symbolischen Darstellung der Topologie eines MKS können auch andere Methoden genutzt werden. Weit verbreitet ist die so genannte *Strukturdarstellung* (z.B. [29, 47, 158, 191, 236]). Hier wird jeder Körper durch ein (unregelmäßiges, eventuell auch konkaves) Polygon repräsentiert, das genau so viele Ecken (Endpunkte) hat, wie der Körper Gelenke besitzt. Da jedes Gelenk genau zwei Körper geometrisch miteinander koppelt, müssen immer zwei Endpunkte verschiedener Polygone zusammenfallen. Eine solche Darstellung ermöglicht eine schnelle Erfassung der Bewegungsmöglichkeiten eines MKS und damit ein



einfaches Verständnis der Funktion. Sie ist besonders geeignet für ebene Systeme, d.h. für solche MKS, deren Körper sich sämtlich in einem zweidimensionalen Unterraum des euklidischen Anschauungsraumes  $\mathbb{E}^3$  bewegen. Diese Topologiedarstellung soll hier nicht weiter verfolgt werden.

### 2.2.2 Kinematik

Es bezeichne  $(O, \mathbf{e}_{(r)})$  ein raumfestes orthonormiertes Dreibein im Ursprung  $O$  des Inertialkoordinatensystems fixiert. Sei weiterhin  $S$  der Massenmittelpunkt eines freien starren Körpers und es bezeichne  $(S, \mathbf{E}_i)$  ein körperfestes orthonormiertes Dreibein. Die Lage von  $S$  im Inertialkoordinatensystem sei angegeben durch den Ortsvektor  $\mathfrak{R} = \overrightarrow{OS}$ . Ein beliebiger Punkt  $P$  des Körpers habe die körperfesten Koordinaten  $\xi^i$ . Dann wird die Lage von  $P$  (und damit die Lage des starren Körpers selbst) im Inertialsystem beschrieben durch den Ortsvektor

$$\overrightarrow{OP} = \underset{P}{\mathfrak{r}} = \mathfrak{R} + \xi^i \mathbf{E}_i, \quad \mathfrak{R} = \overrightarrow{OS} = X^{(r)} \mathbf{e}_{(r)}, \quad \mathbf{E}_i = E_i^{(r)} \mathbf{e}_{(r)} \quad (2.5)$$

( $X^{(r)}$  – Schwerpunktkoordinaten,  $E_i^{(r)}$  – „Drehmatrix“). Die  $X^{(r)}$  und  $E_i^{(r)}$  hängen lokal umkehrbar eindeutig von jeweils drei Parametern ab –  $X^{(r)}$  von drei Verschiebungen und  $E_i^{(r)}$  von drei Drehungen. Diese heißen Starrkörperkoordinaten und seien mit  $\bar{x}^s$  ( $s = 1, \dots, 6$ ) bezeichnet.

Die Lage eines MKS mit  $K$  Körpern  $B_k$  wird durch alle  $X_k^{(r)}$  und  $E_k^{(r)}$  ( $k = 1, \dots, K$ ) beschrieben. Die zugehörigen Starrkörperkoordinaten  $\bar{x}_k^s$  sind dann infolge der im Allgemeinen vorhandenen Gelenke nicht unabhängig voneinander. Die Geometrie eines jeden Gelenks bewirkt gewisse Einschränkungen der Bewegungsmöglichkeiten der beiden durch dieses Gelenk miteinander verbundenen starren Körper. Der Grad dieser Einschränkung wird durch den Gelenkfreiheitsgrad bestimmt. Dann kann die Kinematik des MKS folgendermaßen definiert werden:

**Definition 2.7** *Ein MKS hat den endlichen Freiheitsgrad  $n$ , wenn die Menge  $\mathfrak{L}_t$  der zur Zeit  $t$  möglichen Lagen des MKS eineindeutig auf ein Gebiet  $D \subset \mathbb{R}^n$  gemäß*

$$\mathfrak{L}_t := \left\{ \bar{x}_k^s = \bar{x}_k^s(q^1, \dots, q^n, t) \mid (q^1, \dots, q^n) \in D \subset \mathbb{R}^n \right\} \quad (2.6)$$

abgebildet werden kann.

Der Vektor  $q = (q^k) = (q^1, \dots, q^n) \in D$  heißt *repräsentierender Punkt* und  $\mathbb{R}^n$  *Konfigurationsraum* des MKS. Die  $q^1, \dots, q^n$  heißen *generalisierte Koordinaten* des MKS. Der Freiheitsgrad  $n$  ist identisch mit der Anzahl der generalisierten Koordinaten und somit mit der Anzahl der unabhängigen Bewegungsmöglichkeiten. Stetige, stückweise zweimal stetig differenzierbare Funktionen  $q = q(t)$  beschreiben eine Bewegung des MKS. Das  $2n$ -Tupel  $(\dot{q}, q)$  heißt *Zustand* (auch *Bewegungszustand*) des MKS.

Ein MKS heißt *holonom*, wenn zwischen den generalisierten Koordinaten keine nichtintegrierbaren differenziellen Bindungen bestehen, andernfalls *anholonom*. Ein MKS heißt *skleronom*, wenn keine Starrkörperkoordinate  $\bar{x}_k^s$  explizite Funktion der Zeit  $t$  ist, sonst *rheonom*. Im Folgenden werden stets holonome MKS betrachtet, falls nicht ausdrücklich anders vermerkt.

### 2.2.3 Kinetik

In diesem Abschnitt wird die Kinetik von MKS unter Verwendung von Minimalkoordinaten erläutert. Es wird somit vorausgesetzt, dass entweder das MKS Baumstruktur aufweist oder – bei Existenz kinematischer Schleifen – eine entsprechende Anzahl Koordinaten mit Hilfe der Zwangsbedingungen vollständig (und global) eliminiert werden kann. Die Verwendung von Nicht-Minimalkoordinaten wird in Abschnitt 2.2.4 behandelt.

#### 2.2.3.1 Konstitutive Gleichungen

Die an den starren Körpern angreifenden eingepprägten Kräfte seien mit  $d\mathfrak{k}(\xi)$  ( $\xi \in \Xi$ ,  $\Xi$  – Menge aller materiellen Punkte des MKS) und die entsprechend zugeordneten generalisierten Kräfte mit  $Q_\kappa$  bezeichnet. Dann gilt

$$Q_\kappa = \mathcal{S} \partial_\kappa \mathfrak{r} d\mathfrak{k}$$

( $\mathcal{S}$  steht für „Summation“ über alle  $\xi \in \Xi$ ). Für Einzelkräfte  $\mathfrak{k}_i$  ist  $Q_\kappa = \sum_i \partial_\kappa \mathfrak{r}_i \mathfrak{k}_i$ . Die konstitutiven Gleichungen eines MKS seien durch

$$d\mathfrak{k} = d\mathfrak{k}(\xi; \dot{\mathfrak{r}}, \mathfrak{r}, t) = k(\xi; \dot{\mathfrak{r}}, \mathfrak{r}, t) dV$$

( $k$  – Volumenkraftdichte,  $dV$  – Volumenelement) mit hinreichend glatten Funktionen  $k$  und letztlich durch

$$Q_\kappa = Q_\kappa(\dot{q}, q, t)$$

gegeben.

#### 2.2.3.2 Prinzip der virtuellen Arbeit

Die Bewegung eines MKS kann als die Bewegung seines repräsentierenden Punktes im  $n$ -dimensionalen Konfigurationenraum  $\mathbb{R}^n$  betrachtet werden.

**Definition 2.8** Eine virtuelle Verschiebung eines MKS ist die Menge differenzieller Änderungen der Ortsvektoren  $\mathfrak{r}$  (und damit der Starrkörperkoordinaten  $\bar{x}_k^s$ ) zu einer (willkürlichen) Variation  $\delta q^\kappa$  der generalisierten Koordinaten  $q^\kappa$  bei fester Zeit  $t$ :

$$\left\{ \delta \mathfrak{r} \mid \delta \mathfrak{r} = \partial_\kappa \mathfrak{r} \delta q^\kappa \right\} \quad \text{bzw.} \quad \left\{ \delta \bar{x}_k^s \mid \delta \bar{x}_k^s = \partial_\kappa \bar{x}_k^s \delta q^\kappa \right\}.$$

Die Kinetik des MKS wird dann durch das Prinzip der virtuellen Arbeit in Lagrange'scher Fassung bestimmt:

**Axiom 2.9** Unter allen möglichen Bewegungen eines MKS ist die tatsächlich eintretende Bewegung dadurch gekennzeichnet, dass zu jeder Zeit  $t$  gilt

$$\delta'A := \mathcal{S} \delta \mathfrak{r} (d\mathfrak{k} - \ddot{\mathfrak{r}} dm) = 0 \quad \text{für alle virtuellen } \delta \mathfrak{r} \quad (2.7)$$

( $\mathcal{S}$  – „Summation“ über alle materiellen Punkte  $\xi \in \Xi$ ,  $d\mathfrak{k}$  – eingepprägte Kräfte beliebiger Verteilung,  $\mathfrak{r}(\xi, q, t)$  – Ortsvektor des materiellen Punktes  $\xi$ ,  $\ddot{\mathfrak{r}} = \frac{d}{dt} \dot{\mathfrak{r}} = \frac{d^2}{dt^2} \mathfrak{r}$ ,  $dm$  – Massenelement).

Mit der kinetischen Energie eines MKS

$$T(\dot{q}, q, t) := \frac{1}{2} \int \dot{\mathbf{r}}^2 dm \quad (2.8)$$

und  $\mathcal{S} \delta \mathbf{r} d\mathbf{k} \equiv \mathcal{S} \partial_\kappa \mathbf{r} d\mathbf{k} \delta q^\kappa \equiv Q_\kappa \delta q^\kappa$  folgt aus (2.7)

$$\delta' A := \left[ - \left( \dot{\partial}_\kappa T \right)' + \partial_\kappa T + Q_\kappa \right] \delta q^\kappa = 0 \quad \forall \delta q^\kappa.$$

Somit lauten die (Lagrange'schen) Bewegungsgleichungen eines MKS

$$\left( \dot{\partial}_\kappa T \right)' - \partial_\kappa T = Q_\kappa. \quad (2.9)$$

### 2.2.3.3 Zustandsfunktionen

Folgende additive Zerlegung der generalisierten Kräfte in vier Klassen mit bestimmten Eigenschaften erweist sich als zweckmäßig:

$$Q_\kappa = Q_\kappa^{(0)} + Q_\kappa^{(1)} + Q_\kappa^{(2)} + Q_\kappa^{(S)}. \quad (2.10)$$

Dabei sollen  $Q_\kappa^{(0)}$  als Gradient im Konfigurationsraum,  $Q_\kappa^{(1)}$  als Variationsableitung eines verallgemeinerten Potentials und  $Q_\kappa^{(2)}$  als Gradient im Geschwindigkeitsraum darstellbar sein:

$$Q_\kappa^{(0)} = Q_\kappa^{(0)}(q, t) = -\partial_\kappa U(q, t), \quad (2.11a)$$

$$Q_\kappa^{(1)} = Q_\kappa^{(1)}(\dot{q}, q, t) = \delta_\kappa V(\dot{q}, q, t), \quad (2.11b)$$

$$Q_\kappa^{(2)} = Q_\kappa^{(2)}(\dot{q}, q, t) = -\dot{\partial}_\kappa D(\dot{q}, q, t). \quad (2.11c)$$

Die Funktionen  $U$ ,  $V$  und  $D$  heißen in dieser Reihenfolge *Potenzial*, *verallgemeinertes (gyroskopisches) Potenzial* und *Rayleigh'sche Dissipationsfunktion*. Sie sind Zustandsfunktionen des MKS. Alle Anteile der  $Q_\kappa$ , die nicht durch diese Zustandsfunktionen dargestellt werden können oder sollen, werden in  $Q_\kappa^{(S)}$  („sonstige“ Anteile der generalisierten Kräfte) zusammengefasst. Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Klassenzugehörigkeit (Integrabilitätsbedingungen) sowie die Ermittlung der Zustandsfunktionen wurden z.B. in [131] und in anderer Form bereits von HELMHOLTZ in [83] angegeben. Beide Darstellungen sind im Anhang, Abschnitt A.1, nochmals kurz wiedergegeben.

### 2.2.3.4 Struktur der Lagrange'schen Gleichungen

Sei  $\mathbf{r}$  der Ortsvektor eines beliebigen materiellen Punktes eines MKS und  $\dot{\mathbf{r}} = \partial_\kappa \mathbf{r} \dot{q}^\kappa + \partial_0 \mathbf{r}$  dessen Geschwindigkeit. Dann ist nach (2.8) die kinetische Energie  $T$  eines holonomen MKS eine quadratische Funktion in den  $\dot{q}$  und es gilt  $T = T_2 + T_1 + T_0$  ( $T_i$  – in den generalisierten Geschwindigkeiten homogenes Polynom  $i$ -ten Grades,  $i = 0, 1, 2$ ). Sie habe die Form

$$T = \frac{1}{2} \bar{g}_{\kappa\lambda}(q, t) \dot{q}^\kappa \dot{q}^\lambda + \bar{g}_{\kappa 0}(q, t) \dot{q}^\kappa + \frac{1}{2} \bar{g}_{00}(q, t) \equiv \frac{1}{2} \bar{g}_{\alpha\beta}(q, t) \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta \quad (2.12)$$

mit  $\kappa, \lambda \in J$  ( $J$  – Indexmenge der generalisierten Koordinaten),  $q^0 \equiv t$  und  $\alpha, \beta \in J \cup \{0\}$ . Dabei ist

$$\bar{g}_{\alpha\beta} = \sum_{k=1}^K (m_k \partial_\alpha X_k^{(i)} \partial_\beta X_k^{(i)} + \vartheta_k^{ij} \partial_\alpha E_k^{(r)} \partial_\beta E_k^{(r)}) = \bar{g}_{\beta\alpha} \quad (2.13)$$

( $X_k^{(i)} X_k^{(i)} := X_k^{(i)} X_k^{(j)} \delta_{(i)(j)}$ ,  $E_k^{(r)} E_k^{(r)} := E_k^{(r)} E_k^{(s)} \delta_{(r)(s)}$ ,  $m_k$  – Masse des Körpers  $B_k$ ,  $\vartheta_k^{ij}$  – Binet'scher Trägheitstensor des Körpers  $B_k$ ). Der Querstrich in (2.13) dient lediglich der Unterscheidung der Koeffizienten ( $\bar{g}_{\alpha\beta}$ ) der kinetischen Energie von denen der später verwendeten Lagrange-Funktion (dort:  $g_{\alpha\beta}$ ). Für skleronome MKS entfallen das lineare und das Absolutglied ( $T = T_2$ ) und es gilt  $\bar{g}_{\kappa\lambda} = \bar{g}_{\kappa\lambda}(q)$ . Eine ableitungsfreie Generierung der  $\bar{g}_{\alpha\beta}$  ist ebenfalls möglich. Darauf soll aber in dieser Arbeit nicht näher eingegangen werden. Ausführliche Erläuterungen hierzu finden sich z.B. in [132].

Die (Lagrange'schen) Bewegungsgleichungen (2.9) lauten mit (2.12) in ihrer expliziten Form

$$\bar{g}_{\kappa\lambda}(q, t) \ddot{q}^\lambda + \bar{\Gamma}_{\kappa\alpha\beta}(q, t) \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta = Q_\kappa(\dot{q}, q, t). \quad (2.14)$$

Dabei bezeichnet  $\bar{g}_{\kappa\lambda}$  die symmetrische und positiv definite verallgemeinerte Massenmatrix,  $\bar{\Gamma}_{\kappa\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\partial_\alpha \bar{g}_{\kappa\beta} + \partial_\beta \bar{g}_{\kappa\alpha} - \partial_\kappa \bar{g}_{\alpha\beta}) = \bar{\Gamma}_{\kappa\beta\alpha}$  sind die Christoffel-Symbole erster Art und

$$Q_\kappa = \sum_{k=1}^K (K_k^{(i)} \partial_\kappa X_k^{(i)} + \frac{1}{2} M_k^{ij} \partial_\kappa E_k^{(r)} E_k^{(r)})$$

( $K_k^{(i)}$  – resultierende am Körper  $B_k$  eingeprägte Kraft,  $M_k^{ij}$  – schiefsymmetrischer Tensor des am Körper  $B_k$  eingepprägten resultierenden Momentes) sind die generalisierten Kräfte.

Mit der Zerlegung gemäß (2.10) mit (2.11) kann eine Lagrange-Funktion

$$\Lambda(\dot{q}, q, t) := T - U - V \quad (2.15)$$

eingeführt werden. Dann erhält (2.9) die Form

$$\left( \dot{\partial}_\kappa \Lambda \right) - \partial_\kappa \Lambda + \dot{\partial}_\kappa D = Q_\kappa^{(S)}. \quad (2.16)$$

Die Bewegungen eines MKS werden dann beschrieben durch die Lösungen  $q(t)$  der Lagrange'schen Gleichungen (2.16). Das Funktionentripel  $\{\Lambda, D, Q_\kappa^{(S)}\}$  ist ein *mathematisches Modell* des MKS. Bei Nichtexistenz von „sonstigen“ Kraftanteilen existiert ein *Lagrange'sches Modell*  $\{\Lambda, D, 0\} = \{\Lambda, D\}$  des MKS.

Die Lagrange-Funktion (2.15) hat wegen (2.12) (und wegen (A.3a) und (A.4), siehe Anhang A) die explizite Form

$$\Lambda = \frac{1}{2} g_{\kappa\lambda}(q, t) \dot{q}^\kappa \dot{q}^\lambda + g_{\kappa 0}(q, t) \dot{q}^\kappa + \frac{1}{2} g_{00}(q, t) \equiv \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}(q, t) \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta. \quad (2.17)$$

Dabei gilt  $g_{\alpha\beta} = \bar{g}_{\alpha\beta}$ , falls  $\alpha, \beta \neq 0$  (d.h.  $g_{\kappa\lambda} = \bar{g}_{\kappa\lambda}$ ). Zusammen mit der Dissipationsfunktion  $D = \frac{1}{2} s_{\alpha\beta}(q, t) \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta$  lauten somit die Lagrange'schen Gleichungen explizit ( $\Gamma_{\kappa\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\partial_\alpha g_{\kappa\beta} + \partial_\beta g_{\kappa\alpha} - \partial_\kappa g_{\alpha\beta}) = \Gamma_{\kappa\beta\alpha}$ )

$$g_{\kappa\lambda}(q, t) \ddot{q}^\lambda + \Gamma_{\kappa\alpha\beta}(q, t) \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta + s_{\kappa\alpha}(q, t) \dot{q}^\alpha = Q_\kappa^{(S)}(\dot{q}, q, t). \quad (2.18)$$

Somit sind alle gemäß (2.11) mittels Zustandsfunktionen darstellbaren Anteile der generalisierten Kräfte auf der linken Seite von (2.18) enthalten.

**Bemerkungen:**

Die kinetische Energie eines MKS ist eine positiv definite quadratische Funktion in den (absoluten) Starrkörpergeschwindigkeiten  $\dot{\tilde{x}}_k^s$  der beteiligten Körper und deshalb auch in den generalisierten Geschwindigkeiten  $\dot{q}$ . Somit kann für jedes MKS durch das Linienelement

$$ds^2 := g_{\kappa\lambda}(q, t) dq^\kappa dq^\lambda = \dot{\partial}_\kappa \dot{\partial}_\lambda T dq^\kappa dq^\lambda \quad (2.19)$$

für jedes feste  $t$  im Konfigurationenraum  $\mathbb{R}^n$  eine von der Zeit abhängige Riemann'sche Metrik  $g_{\kappa\lambda}(q, t)$  eingeführt werden. Der  $\mathbb{R}^n$  erfährt somit eine (zeitabhängige) Maßbestimmung durch die kinetische Energie des MKS. Der für jedes  $t$  so metrisierte Konfigurationenraum ist ein (quasi „atmender“) Riemann'scher Raum  $\mathbb{V}_t^n$ . Die  $\Gamma_{\kappa\lambda\rho}(q, t)$  ( $\kappa, \lambda, \rho \in J$ ) sind die Christoffel-Symbole erster Art. Die Bewegung eines rheonomen MKS kann als eine Trajektorie in einem  $(n + 1)$ -dimensionalen Ereignisraum  $\mathbb{V}^{n+1}$  aufgefasst werden. Im skleronomen Fall ist  $g_{\kappa\lambda} = g_{\kappa\lambda}(q)$  und der Riemann'sche Raum  $\mathbb{V}^n$  ist zeitunabhängig (nicht atmend).

Die Metrisierung des Konfigurationenraumes ermöglicht die Verwendung von Begriffen, Definitionen und Bezeichnungen der Riemann'schen Geometrie bei der Untersuchung von MKS (und später von EMS). Es können diverse differenzialgeometrische Methoden zur Untersuchung der Dynamik solcher Systeme angewendet werden. Ausführliche Erläuterungen hierzu finden sich z.B. in [131].

## 2.2.4 Mehrkörpersysteme mit zusätzlichen Bindungen

Mehrkörpersysteme mit zusätzlichen Bindungen sind dadurch charakterisiert, dass ihre Topologie nicht durch eine Baumstruktur dargestellt werden kann. Solche Systeme werden auch als „Constrained Mechanical Systems“ (CMS) bezeichnet. Sie sind durch die Existenz von kinematischen Schleifen und entsprechenden zusätzlichen Zwangsbedingungen gekennzeichnet. Falls mit Hilfe dieser Zwangsbedingungen eine entsprechende Anzahl von Koordinaten global eliminiert werden kann, ist weiterhin eine Modellierung mit einem Minimalensatz von Bewegungsgleichungen möglich. Falls jedoch eine komplette Elimination nicht durchgeführt werden kann oder soll, so erfordert die Modellierung die Berücksichtigung der zusätzlichen Zwangsbedingungen in Form von algebraischen Gleichungen neben den Bewegungsdifferentialgleichungen. Die Herleitung der CMS-Modellgleichungen kann dann z.B. mit der Methode der Lagrange-Multiplikatoren erfolgen.

### 2.2.4.1 Zusätzliche Bindungen

Es sei wieder  $J$  die Indexmenge der generalisierten Koordinaten und es gelte  $\kappa, \lambda \in J$  und  $\alpha, \beta \in J \cup \{0\}$  ( $q^0 \equiv t$ ). Die zusätzlichen Bindungen infolge kinematischer Schleifen des MKS können als geometrische (holonome) – eventuell rheonome – Bindungen

$$h^{\sigma_h}(q, t) = 0, \quad \sigma_h \in J_{c_h}, \quad |\{\sigma_h\}| = r_{mh}, \quad (2.20)$$

( $J_{c_h}$  – Indexmenge der holonomen Bindungen) und/oder als nichtintegrale kinematische (anholonome) – hier nur skleronome – Bindungen

$$h^{\sigma_a}_{\kappa}(q)\dot{q}^{\kappa} = 0, \quad \sigma_a \in J_{c_a}, \quad |\{\sigma_a\}| = r_{ma}, \quad (2.21)$$

( $J_{c_a}$  – Indexmenge der anholonomen Bindungen) gegeben sein. (Die Nichtintegrierbarkeit der differentiellen Bindungen gelte unter Berücksichtigung der vorhandenen geometrischen Bindungen des MKS.) Weiterhin sei

$$f^{\varrho_1}_{\alpha} := \begin{cases} \partial_{\alpha} h^{\sigma_h}, & \varrho_1 = \sigma_h \\ h^{\sigma_a}_{\kappa}, & \varrho_1 = \sigma_a, \quad \alpha = \kappa, \end{cases} \quad (2.22)$$

mit dem Rang  $\text{rang}(f^{\varrho_1}_{\alpha}) = r_m < n$ ,  $r_m := r_{mh} + r_{ma}$ , in einem gewissen Gebiet  $D \subset \mathbb{R}^n$  (d.h., es sollen keine abhängigen Bindungen auftreten). Dann definiert die Gesamtheit aller kinematischen (holonomen und anholonomen) Bindungen im Punkt  $q$  des CMS-Konfigurationsraumes eine  $(n - r_m)$ -dimensionale Hyperebene  $\mathbb{E}_{r_m}$  mittels

$$f^{\varrho_1}_{\alpha}(q, t)\dot{q}^{\alpha} = f^{\varrho_1}_{\kappa}(q, t)\dot{q}^{\kappa} + f^{\varrho_1}_0(q, t) = 0. \quad (2.23)$$

Die Ableitungen der kinematischen Zwangsbedingungen (2.23) nach der Zeit  $t$  heißen *dynamische* Zwangsbedingungen (Bindungen auf Beschleunigungsebene). Mit  $\gamma^{\varrho_1}_{\alpha\beta} := \partial_{\beta} f^{\varrho_1}_{\alpha}$  gilt

$$(f^{\varrho_1}_{\alpha}\dot{q}^{\alpha})' = f^{\varrho_1}_{\alpha}\ddot{q}^{\alpha} + \gamma^{\varrho_1}_{\alpha\beta}\dot{q}^{\alpha}\dot{q}^{\beta} = 0. \quad (2.24)$$

Der Freiheitsgrad des CMS im Großen ist  $n - r_{mh}$ , im Kleinen  $n - r_m$ . Für  $r_{ma} = 0$  heißt das CMS *holonom*, andernfalls *anholonom*. Auf eine ausführliche Diskussion der Problematik Anholonomität und der damit verbundenen kinematischen Steuerbarkeit soll hier nicht eingegangen werden. Dazu wird auf die einschlägige Literatur (siehe z.B. [15, 100, 149, 174]) verwiesen.

#### 2.2.4.2 Bewegungsgleichungen

Nach dem Lagrange'schen Befreiungsprinzip entsprechen den Bindungen (2.23) gewisse (generalisierte) Reaktionskräfte  $R_{\kappa}$ . Damit werden die Lagrange'schen Bewegungsgleichungen (2.16) für ein CMS zu

$$\left(\dot{\partial}_{\kappa}\Lambda\right)' - \partial_{\kappa}\Lambda + \dot{\partial}_{\kappa}D = Q_{\kappa}^{(S)} + R_{\kappa}. \quad (2.25)$$

Bei idealen Bindungen steht der Vektor  $R_{\kappa}$  senkrecht auf der Hyperebene  $\mathbb{E}_{r_m}$  und ist eine Linearkombination der  $r_m$  ( $n$ -dimensionalen) Normalenvektoren  $f^{\varrho_1}_{\kappa}$  ( $\varrho_1 = 1, \dots, r_m$ ;  $\kappa = 1, \dots, n$ ). Somit lassen sich die Reaktionen mit Hilfe von Lagrange-Multiplikatoren  $\lambda_{\varrho_1}$  wie folgt darstellen

$$R_{\kappa} = \lambda_{\varrho_1} f^{\varrho_1}_{\kappa}. \quad (2.26)$$

Die Gleichungen (2.25) lauten folglich in expliziter Form

$$g_{\kappa\lambda}\ddot{q}^{\lambda} + \Gamma_{\kappa\alpha\beta}\dot{q}^{\alpha}\dot{q}^{\beta} + s_{\kappa\alpha}\dot{q}^{\alpha} = Q_{\kappa}^{(S)} + \lambda_{\varrho_1} f^{\varrho_1}_{\kappa}. \quad (2.27)$$

Sie heißen Lagrange'sche Gleichungen gemischten Typs. Bei bekanntem Bewegungszustand  $(\dot{q}, q)$  des CMS können mit (2.27) und (2.24) die Beschleunigungen  $\ddot{q}^\kappa(t)$  und die Lagrange-Multiplikatoren  $\lambda_{\varrho_1}(t)$  gemäß

$$g_{\kappa\lambda}\ddot{q}^\lambda - f^{\varrho_1}_{\kappa}\lambda_{\varrho_1} = Q_\kappa^{(S)} - \Gamma_{\kappa\alpha\beta}\dot{q}^\alpha\dot{q}^\beta - s_{\kappa\alpha}\dot{q}^\alpha, \quad (2.28a)$$

$$f^{\kappa_1}_{\lambda}\ddot{q}^\lambda = -\gamma^{\kappa_1}_{\alpha\beta}\dot{q}^\alpha\dot{q}^\beta \quad (2.28b)$$

bestimmt werden. Zur Einhaltung der Bindungen auf Lage- und Geschwindigkeitsebene ist eine entsprechende Stabilisierung z.B. mittels Projektion ([4, 30]) oder Regularisierung ([8]) notwendig. Mit den Bezeichnungen

$$(G_{ab}) := \begin{bmatrix} (g_{\kappa\lambda}) & (f^{\varrho_1}_{\kappa})^T \\ (f^{\kappa_1}_{\lambda}) & 0 \end{bmatrix}, \quad (X^b) := \begin{bmatrix} \ddot{q}^\lambda \\ -\lambda_{\varrho_1} \end{bmatrix}$$

und

$$(\bar{Q}_a) := \begin{bmatrix} Q_\kappa^{(S)} - \Gamma_{\kappa\alpha\beta}\dot{q}^\alpha\dot{q}^\beta - s_{\kappa\alpha}\dot{q}^\alpha \\ -\gamma^{\kappa_1}_{\alpha\beta}\dot{q}^\alpha\dot{q}^\beta \end{bmatrix}$$

ergibt sich für (2.28) die Form

$$G_{ab}X^b = \bar{Q}_a.$$

Weil die Submatrizen in  $G_{ab}$  jeweils von vollem Rang sind ( $\text{rang}(g_{\kappa\lambda}) = n$ ,  $\text{rang}(f^{\kappa_1}_{\lambda}) = r_m$ ), ist  $G_{ab}$  nicht nur symmetrisch, sondern auch regulär (aber nicht positiv definit) und somit invertierbar. Mit  $X^b = G^{ba}\bar{Q}_a$  ( $G^{ab} : G^{ab}G_{bc} = \delta_c^a$ ) sind dann zu jedem festen Zeitpunkt  $t$  die Beschleunigungen  $\ddot{q}^\kappa(t)$ , die Lagrange-Multiplikatoren  $\lambda_{\varrho_1}(t)$  und schließlich auch die generalisierten Reaktionen

$$R_\kappa(t) := \lambda_{\varrho_1}(t) f^{\varrho_1}_{\kappa}(q(t))$$

eindeutig bestimmt.

## 2.3 Elektrische Systeme

Die Anwendung des Lagrange-Formalismus auf elektrische Systeme (ES) mit *konzentrierten Parametern* basiert auf dem Konzept des Multipols und dessen Repräsentation durch abstrakte Zweipole. Weiterhin finden die Kirchhoff-Theorie und das Prinzip der virtuellen Arbeit Anwendung. Die folgende Darstellung ist vor allem angelehnt an die Arbeiten [131, 142, 144].

### 2.3.1 Repräsentierender Graph

**Definition 2.10** *Unter einem elektrischen System (ES) wird eine endliche Menge räumlich abgegrenzter Objekte (elektrische Bauelemente) verstanden, in denen elektrodynamische (gelegentlich auch elektro-magnetodynamische) Vorgänge ablaufen. Jedes Bauelement besitzt endlich viele Anschlussklemmen. Durch verlustfreie Verbindungen („ideale Drähte“) zwischen zwei oder mehreren solcher Anschlussklemmen können die Bauelemente miteinander galvanisch gekoppelt sein.*

Das interne dynamische Verhalten eines elektrischen Bauelements (Induktor, Resistor, Kondensator usw.) sei durch externe Messungen (mit idealen Messinstrumenten) an dessen  $n$  Anschlussklemmen beschreibbar. Das Bauelement kann somit als „Blackbox“ betrachtet werden.

Ein Bauelement mit zwei Klemmen heißt *elektrischer Zweipol*. Jeder Zweipol definiert einen Zweig des ES. Die gemessenen physikalischen Größen  $V(t)$  und  $I(t)$  werden Zweigspannung und Zweigstrom genannt. Deren mathematischer Zusammenhang heißt Zweigrelation. Er wird z.B. in Form einer Konstitutivgleichung dargestellt. Ein Bauelement mit  $n$  Anschlussklemmen,  $n > 2$ , heißt *elektrischer Multipol* oder elektrischer  $n$ -Pol. Seine elektrischen Eigenschaften werden charakterisiert durch die Menge aller Relationen der  $\binom{n}{2}$  Spannungen zwischen je zwei Klemmen und den  $n$  am Multipol ein- bzw. ausfließenden Strömen. Die an einem  $n$ -Pol ausführbaren  $\binom{n}{2}$  externen Spannungsmessungen definieren einen vollständigen Messgraphen  $\Gamma_M$ , dessen Knoten die Klemmen des  $n$ -Pols und dessen Kanten fiktive Zweipole repräsentieren. Durch Vorgabe der Spannungen und Ströme in einem beliebigen Gerüst des Messgraphen sind aufgrund der Kirchhoff'schen Gesetze gleichzeitig alle anderen Zweigspannungen und -ströme eindeutig bestimmt. Somit kann jeder  $n$ -Pol durch  $n - 1$  fiktive Zweipole repräsentiert werden, die gerade mit einem Gerüst von  $\Gamma_M$  zusammenfallen. Der entsprechende Subgraph ist also ein Baum mit  $n$  Knoten und  $n - 1$  Kanten. Die Zweigrelationen der fiktiven Zweipole sind definiert durch die elektrischen Eigenschaften des gesamten Multipols. In jeder dieser Zweigrelationen können deshalb neben den „zweigeigenen“ elektrischen Größen  $V(t)$  und  $I(t)$  auch solche Größen aus anderen fiktiven Zweipolen desselben  $n$ -Pols auftreten. Reale und fiktive Zweipole werden zusammen *abstrakte Zweipole* genannt. Das komplette ES kann somit durch ein (endliches) Netzwerk von abstrakten Zweipolen repräsentiert werden (siehe auch [36, 137]). Ein solches Netzwerk kann auch aus mehreren Komponenten bestehen, die untereinander galvanisch nicht gekoppelt sind.

Die galvanische Kopplung der abstrakten Zweipole definiert die *Topologie* des ES. Die symbolische Darstellung der Topologie eines ES erfolgt zweckmäßigerweise durch einen Graphen  $\Gamma$ , dessen Kanten die abstrakten Zweipole und dessen Knoten die galvanischen Kopplungen zwischen zwei oder mehr Anschlussklemmen repräsentieren. Dieser Graph heißt *repräsentierender Graph* des elektrischen Netzwerkes – gelegentlich verkürzt auch Netzwerkgraph. Er besteht aus ebenso vielen Komponenten wie das elektrische Netzwerk.

### 2.3.2 Kirchhoff'sche Gesetze

Der repräsentierende Graph  $\Gamma$  eines elektrischen Netzwerkes habe  $B$  Kanten,  $N$  Knoten und  $p$  Komponenten. Es bezeichne  $G$  ein beliebiges (aber festes) Gerüst von  $\Gamma$  und  $H$  sei das Cogerüst zu  $G$  in  $\Gamma$ . Die dazu gehörende Fundamentalkreis­matrix heiße  $A$  und die entsprechende Fundamentalschnittmatrix heiße  $Q$ . Dann lauten die Kirchhoff'schen Gesetze

$$A_{\mu}^i V_i = 0, \quad i \in \Gamma, \quad \mu \in H, \quad (2.29a)$$

$$Q_j^{\nu} I^j = 0, \quad j \in \Gamma, \quad \nu \in G. \quad (2.29b)$$

Gleichung (2.29a) entspricht dem „Maschensatz“ und (2.29b) dem „Knotensatz“. Beide linearen Gleichungssysteme sind von maximalem Rang ( $|H| = \text{rang}(A) = B - N + p$  und



$|G| = \text{rang}(Q) = N - p$ ). Zusammen mit den  $B$  Zweigrelationen der abstrakten Zweipole bilden sie ein System von  $2B$  Gleichungen für die  $B$  Zweigspannungen  $V_i(t)$  und die  $B$  Zweigströme  $I^i(t)$  (jeweils  $i \in \Gamma$ ). Aus der Auflösbarkeit dieses Gleichungssystems resultieren drei wesentlich verschiedene Möglichkeiten für die Einführung generalisierter Koordinaten für ein ES. In dieser Arbeit werden stets elektrische „Ladungen“ (Zeitintegrale elektrischer Ströme) als generalisierte Koordinaten verwendet. Dieser Modellierungsansatz heißt *Ladungsformulierung*. Eine Lagrange'sche Formulierung der Bewegungsgleichungen eines ES ist ebenfalls unter Verwendung von „Flüssen“ (Zeitintegrale elektrischer Spannungen) bzw. von Ladungen und Flüssen möglich. Diese Ansätze heißen *Flussformulierung* bzw. *gemischte Formulierung*. Sie werden in [220] bzw. [221] ausführlich behandelt und sollen hier nicht weiter verfolgt werden.

Zunächst kann (2.29b) mit (2.3) nach den Strömen in den Gerüstzweigen aufgelöst werden. Wegen  $Q_k^i I^k = \delta_l^i I^l + Q_j^i I^j = 0$ ,  $k \in \Gamma$ ,  $i, l \in G$ ,  $j \in H$ , folgt  $I^i = -Q_j^i I^j$ ,  $i \in G$ ,  $j \in H$ . Mit (2.4) ergibt sich daraus  $I^i = A^i_j I^j$ ,  $i \in G$ ,  $j \in H$ . Das heißt mit (2.3), dass jeder Zweigstrom  $I^j = \dot{\bar{q}}^j$ ,  $j \in \Gamma$ , sich als eine Linearkombination der Ströme im Cogerüst  $\dot{q}^\mu$ ,  $\mu \in H$ , darstellen lässt:

$$\dot{\bar{q}}^j = A^j_\mu \dot{q}^\mu, \quad j \in \Gamma, \quad \mu \in H. \quad (2.30)$$

Analog sind alle Zweigladungen  $\bar{q}^j$ ,  $j \in \Gamma$ , Linearkombinationen der Cogerüstladungen  $q^\mu$ ,  $\mu \in H$ :

$$\bar{q}^j = A^j_\mu q^\mu, \quad j \in \Gamma, \quad \mu \in H. \quad (2.31)$$

Die Menge aller Zweigladungen  $\{\bar{q}^j, j \in \Gamma\}$  heißt eine Lage des ES. Die Gleichungen (2.30) bzw. (2.31) heißen *Maschentransformation*. In Sinne der analytischen Mechanik definieren sie die *Kinematik* eines ES.

### 2.3.3 Bewegungsgleichungen in Minimalkoordinaten

In diesem Abschnitt werden die Bewegungsgleichungen eines ES unter Verwendung von Minimalkoordinaten hergeleitet. Dazu wird vorausgesetzt, dass zwischen allen im Netzwerk eventuell vorhandenen Stromquellen keine linearen Abhängigkeiten bestehen. (ES mit linear abhängigen idealen Stromquellen sind physikalisch nicht sinnvoll und sollen deshalb hier nicht betrachtet werden.) Dann lässt sich für das ES ein Modell mit der minimal möglichen Anzahl von Differenzialgleichungen finden, weil die kinematischen Zwangsbedingungen (Knotensatz) und die rheonomen Bindungen infolge Stromquellen vollständig eliminiert werden können.

#### 2.3.3.1 Generalisierte Koordinaten

Wegen (2.30) bzw. (2.31) erscheint es zweckmäßig, für das Netzwerk aus abstrakten Zweipolen ein stromquellenfreies Gerüst zu wählen. Alle Stromquellen liegen dann im Cogerüst und erzeugen eine Zerlegung der Indexmenge

$$H = H^* \cup H_0, \quad (2.32)$$

$H^*$  : Cogerüstkanten ohne Stromquellen,

$H_0$  : Cogerüstkanten mit Stromquellen.

Im Weiteren sollen nur solche Stromquellen verwendet werden, die nur explizit von der Zeit  $t$  abhängige Funktionen sind (eigentliche Stromquellen). Die Zerlegung (2.32) impliziert das Vorhandensein maximal einer Stromquelle in jedem Fundamentalkreis. Die Maschentransformation (2.30) lautet mit (2.32)

$$\dot{\bar{q}}^j = A^j_{\mu} \dot{q}^{\mu} + \dot{q}_0^j(t) = A^j_{\mu} \dot{q}^{\mu} + A^j_{\mu_0} \dot{q}^{\mu_0}(t), \quad j \in \Gamma, \quad \mu \in H^*, \quad \mu_0 \in H_0, \quad (2.33)$$

und aus (2.31) wird mit (2.32)

$$\bar{q}^j = A^j_{\mu} q^{\mu} + q_0^j(t) = A^j_{\mu} q^{\mu} + A^j_{\mu_0} q^{\mu_0}(t), \quad j \in \Gamma, \quad \mu \in H^*, \quad \mu_0 \in H_0. \quad (2.34)$$

In (2.33) bezeichnet  $\dot{q}_0^j(t) = A^j_{\mu_0} \dot{q}^{\mu_0}(t)$  den Stromanteil des Zweiges  $j$  infolge aller im Netzwerk vorhandenen Stromquellen. In (2.34) steht  $q_0^j(t)$  für den entsprechenden Ladungsanteil.

Die Mächtigkeit der Teilmenge  $H^*$  sei mit  $m$  bezeichnet ( $m := |H| - |H_0|$ ). Dann bestimmen alle Ladungen  $\bar{q}^j$ , die zur Zeit  $t$  für alle Knoten  $k$  den Knotensatz in integrierter Form ( $a^k_j \bar{q}^j = 0$ ,  $a^k_j$  – Knoten-Kanten-Inzidenzmatrix gemäß (2.1)) erfüllen, die Menge

$$\mathfrak{L}_t := \{ \bar{q}^j \mid \bar{q}^j = A^j_{\mu} q^{\mu} + A^j_{\mu_0} q^{\mu_0}, \quad q^{\mu} \in \mathbb{R}^m \} \quad (2.35)$$

aller zur Zeit  $t$  möglichen Lagen des ES. Durch (2.35) wird eine eindeutige Abbildung von  $\mathfrak{L}_t$  auf den  $\mathbb{R}^m$  definiert. Da zwischen den  $q^{\mu}$  keine differenziellen Bindungen bestehen, heißt das ES *holonom* mit dem *Quasifreiheitsgrad*  $m$  (vgl. auch unten angeführte Bemerkung). Der Vektor  $q = (q^{\mu})$ ,  $\mu \in H^*$ , heißt *repräsentierender Punkt* und  $\mathbb{R}^m$  *Konfigurationenraum* des ES ( $q \in \mathbb{R}^m$ ). Die  $q^{\mu}$  heißen (topologisch generierte) *generalisierte Koordinaten* des ES. Sie bilden eine Minimalmenge generalisierter Koordinaten für ein ES in Ladungsformulierung. Stetige, stückweise zweimal stetig differenzierbare Funktionen  $q = q(t)$  beschreiben eine „Bewegung“ des ES, d.h. eine zeitliche Abfolge von möglichen Lagen. Das  $2m$ -Tupel  $(\dot{q}, q)$  heißt *Zustand* (auch Bewegungszustand) des ES. Besitzt das ES mindestens eine Stromquelle, so ist  $H_0 \neq \emptyset$ , und das ES heißt *rheonom*, andernfalls *skleronom*.

### Bemerkung:

In den in Abschnitt 2.3.2 erwähnten Modellansätzen mittels Flussformulierung oder gemischter Formulierung ergeben sich im Allgemeinen andere Freiheitsgrade als bei der hier erläuterten Ladungsformulierung. Dieser Sachverhalt ist einer der Gründe für die Wahl des Terminus „Quasi“freiheitsgrad. Ein anderer wird später angegeben (siehe Abschnitt 2.3.3.6). Die Tatsache, dass verschiedene Modellierungen ein und desselben Systems unterschiedliche Freiheitsgrade nach sich ziehen, ist jedoch nicht auf ES beschränkt. Auch in der analytischen Mechanik ist es möglich, statt der „klassischerweise“ verwendeten (kovarianten) Lagekoordinaten (Verschiebungen und Drehungen) die (kontravarianten) Impulse als generalisierte Koordinaten vorzusehen (siehe z.B. [228]). Ebenso ist eine gemischte Formulierung denkbar. Diese Modellierungszugänge werden jedoch nur äußerst selten benutzt.

### 2.3.3.2 Konstitutive Gleichungen

Unter der Voraussetzung, dass die Zweigrelationen der abstrakten Zweipole nach den Spannungen bzw. Flüssen auflösbar sind, können die Ladungen und deren Zeitableitungen (Ströme) als unabhängige Variablen betrachtet werden. Im Fall von Stromquellen sollen die Zweigrelationen gegeben sein durch

$$\bar{q}^j = g_0^j(t), \quad j \in H_0. \quad (2.36)$$

Andernfalls seien die Zweigrelationen gegeben in der Form

$$V_i = f_i(\ddot{\bar{q}}, \dot{\bar{q}}, \bar{q}, t), \quad i \in \Gamma \setminus H_0. \quad (2.37)$$

Beide Funktionen  $f_i$  und  $g_0^j$  seien hinreichend oft differenzierbar. Die Gleichungen (2.36) und (2.37) sind im Sinne der analytischen Mechanik die *konstitutiven Gleichungen* des ES.

### 2.3.3.3 Prinzip der virtuellen Arbeit

Die Bewegung eines ES kann als die Bewegung seines repräsentierenden Punktes im  $m$ -dimensionalen Konfigurationsraum  $\mathbb{R}^m$  betrachtet werden.

**Definition 2.11** *Eine virtuelle Verschiebung eines ES ist definiert als die Menge der differentiellen Änderungen der Zweigladungen  $\bar{q}^j$ ,  $j \in \Gamma$ , zu einer (willkürlichen) Variation  $\delta q^\mu$  der generalisierten Koordinaten  $q^\mu$ ,  $\mu \in H^*$ , bei fester Zeit  $t$ :*

$$\{ \delta \bar{q}^j \mid \delta \bar{q}^j = A^j_\mu \delta q^\mu \}.$$

(Wegen  $A^j_\nu = \delta^j_\nu$  für alle  $j, \nu \in H$  ist  $\delta \bar{q}^j = 0$  für alle  $j \in H_0$ .)

Zusammen mit den in den vorhergehenden Abschnitten eingeführten Begriffen lassen sich die Bewegungsgleichungen eines ES (in Analogie zur analytischen Mechanik) durch Anwendung des Prinzip der virtuellen Arbeit gewinnen.

**Axiom 2.12** *Unter allen möglichen Bewegungen eines ES ist die tatsächlich eintretende Bewegung dadurch gekennzeichnet, dass zu jeder Zeit  $t$  gilt*

$$\delta' A := -V_i \delta \bar{q}^i = 0 \quad \text{für alle virtuellen } \delta \bar{q}^i. \quad (2.38)$$

Wegen  $V_i \delta \bar{q}^i = V_i A^i_\mu \delta q^\mu$  ist (2.38) äquivalent mit dem Kirchhoff'schen Maschensatz (2.29a).

Mit der Indexmengenzerlegung (2.32) und der Maschentransformation (2.34) (bzw. (2.33)) können die rheonomen Bindungen infolge Stromquellen leicht eliminiert werden. Die Zeitverläufe der Ladungen  $q^{\mu_0}(t)$  und Ströme  $\dot{q}^{\mu_0}(t)$  der stromquellenbehafteten Fundamentalkreise  $\mu_0$ ,  $\mu_0 \in H_0$ , sind durch die Funktionen (2.36) festgelegt. Für diese Maschen folgt aus (2.29a) zunächst  $A^i_{\mu_0} V_i = A^j_{\mu_0} V_j + A^k_{\mu_0} V_k = 0$ ,  $i \in \Gamma$ ,  $j \in G$ ,  $k \in H$ , und daraus wegen  $A^k_{\mu_0} V_k = \delta^k_{\mu_0} V_k = V_{\mu_0}$  mit (2.4) schließlich

$$V_{\mu_0} = -A^j_{\mu_0} V_j = Q_{\mu_0}^j V_j, \quad \mu_0 \in H_0, \quad j \in G.$$

Deshalb bestimmt (2.29a) für diese Maschen lediglich die Spannungen über den Stromquellen. Bei Verwendung von Minimalkoordinaten gehören somit die Gleichungen (2.29a) für  $\mu \in H_0$  nicht zu den Bewegungsgleichungen. Die aus (2.38) resultierenden Bewegungsgleichungen sind somit Lagrange'sche Gleichungen zweiter Art, d.h., die Anzahl der Bewegungsgleichungen ist die minimal mögliche.

### 2.3.3.4 Zustandsfunktionen

Falls im Folgenden nicht ausdrücklich anders vermerkt, durchlaufen lateinische Indizes  $\Gamma$  und griechische  $H^*$ .

Für die Herleitung der Bewegungsgleichungen eines ES in Lagrange'scher Form aus dem Prinzip der virtuellen Arbeit ist die Einhaltung gewisser notwendiger und hinreichender Bedingungen für die Maschenspannungen  $v_\mu(\dot{q}, \dot{q}, q, t)$  bezüglich der Existenz eines kinetischen Potentials erster Art  $\Lambda = \Lambda(\dot{q}, q)$  notwendig. Solche Bedingungen hat HELMHOLTZ angegeben (siehe [83]). Ihre Herleitung wird der Vollständigkeit halber im Anhang, Abschnitt A.2 wiederholt. Diese Bedingungen ermöglichen die Definition von elektrischen Bauelementen mit gewissen physikalischen Eigenschaften: Die Spannungen eines (stromquellenfreien) Zweiges  $i$  lassen sich stets (aber nicht eindeutig) gemäß

$$V_i = V_i^{(L)} + V_i^{(R)} + V_i^{(C)} + V_{i0} + V_i^{(S)}, \quad i \in \Gamma \setminus H_0, \quad (2.39)$$

mit

$$\begin{aligned} V_i^{(L)} &= \dot{\Psi}_i, & \Psi_i &= \Psi_i(\dot{q}, t), \\ V_i^{(R)} &= V_i^{(R)}(\dot{q}, \bar{q}, t), \\ V_i^{(C)} &= V_i^{(C)}(\bar{q}, t), \\ V_{i0} &= V_{i0}(t) \end{aligned}$$

zerlegen. Die entsprechenden elektrischen Bauelemente heißen – in der in (2.39) genannten Reihenfolge – Induktor, (quasilinearer) Resistor, Kondensator und Spannungsquelle. Die  $V_i^{(S)}$  verkörpern diejenigen („sonstigen“) Spannungsanteile, die keinem der vier Bauelemente zugeordnet werden können oder sollen. Die Spannungsanteile der quasilinearen Resistoren ergeben sich aus in den Strömen linearen Zweigrelationen, d.h.  $V_i^{(R)} = R_{ij}(\bar{q}, t)\dot{q}^j$ . Spannungsanteile infolge evtl. auftretender nicht(quasi)linearer Resistoren seien in den sonstigen Anteilen  $V_i^{(S)}$  enthalten. Im Weiteren werden die den quasilinearen Resistoren entsprechenden Anteile der Maschenspannungen dargestellt als  $v_\mu^{(R)} = A^i{}_\mu V_i^{(R)} = r_{\mu\nu}(q, t)\dot{q}^\nu + s_\mu(q, t)$  (siehe auch Anhang, Abschnitt A.2).

Unter diesen Voraussetzungen können die folgenden Zustandsfunktionen eingeführt werden (vgl. Anhang, Abschnitt A.2): magnetische Coenergie  $W'_m$ , elektrische Energie  $W_e$ , verallgemeinertes (gyroskopisches) Potenzial  $V^h$  und Rayleigh'sche Dissipationsfunktion  $D = D(\dot{q}, q, t)$ . Mit der Lagrange-Funktion

$$\Lambda(\dot{q}, q, t) := W'_m - W_e - V^h \quad (2.40)$$

lauten dann die Bewegungsgleichungen in Lagrange'scher Form

$$\left( \dot{\partial}_\mu \Lambda \right)' - \partial_\mu \Lambda + \dot{\partial}_\mu D = Q_\mu^{(S)}, \quad (2.41)$$

wobei in  $Q_\mu^{(S)} := -A^i{}_\mu V_i^{(S)}$  diejenigen Maschenspannungen zusammengefasst sind, die nicht durch  $\Lambda$  oder  $D$  dargestellt werden können oder sollen.

Die Funktionen  $\Lambda$  und  $D$  sind Zustandsfunktionen des ES. Das Funktionentripel  $\{\Lambda, D, Q_\mu^{(S)}\}$  ist ein *mathematisches Modell* des ES. Für jedes solche Modell gelten die Bewegungsgleichungen gemäß (2.41). Gemäß (2.39) existiert stets das triviale Modell  $\{0, 0, Q_\mu^{(S)}\}$  (Kirchhoff-Modell). Demgegenüber heißt  $\{\Lambda, D, 0\} = \{\Lambda, D\}$  ein *Lagrange'sches Modell* des ES.

### 2.3.3.5 Ein Lagrange'sches Modell für ES

Ein Lagrange'sches Modell eines ES ist realisierbar, falls in (2.39) die „sonstigen“ Spannungsanteile  $V_i^{(S)}$  verschwinden und nur quasilineare Resistoren auftreten, von denen lediglich der symmetrische Anteil explizit zeitabhängig sein darf (so genannte rheolineare Resistoren). Ein solches Lagrange'sches Modell wird im Folgenden für konventionelle, *elektrisch lineare ES* (RLC-Netzwerke mit Spannungs- und Stromquellen) aufgestellt. Die Konstitutivgleichungen des ES seien gegeben durch

$$V_i = V_i^{(L)} + V_i^{(R)} + V_i^{(C)} + V_{i0}. \quad (2.42)$$

Jeder dieser Spannungsanteile lasse sich durch entsprechende Konstitutivparameter gemäß

$$\begin{aligned} V_i^{(L)} &= \dot{\Psi}_i, & \Psi_i(\dot{q}, t) &= L_{ij}(t)\dot{q}^j + \Psi_{i0}(t), \\ V_i^{(R)} &= R_{ij}(t)\dot{q}^j, \\ V_i^{(C)} &= C_{ij}(t)\bar{q}^j + V_{i0}^{(C)}, \\ V_{i0} &= V_{i0}(t) \end{aligned} \quad (2.43)$$

darstellen. Dabei soll (zur Erfüllung der Integrabilitätsbedingungen) gelten

$$L_{ij} = L_{ji}, \quad C_{ij} = C_{ji}, \quad \partial_0 R_{[ij]} = 0. \quad (2.44a-c)$$

Die Konstitutivparameter werden folgendermaßen bezeichnet:  $L_{ij}(t)$  – Matrix der Induktivitäten (auch abkürzend Induktormatrix),  $\Psi_{i0}(t)$  – explizit zeitabhängige magnetische Flüsse infolge Permanentmagneten,  $R_{ij}(t)$  – Resistormatrix,  $C_{ij}(t)$  – inverse Matrix der Teilkapazitäten,  $V_{i0}^{(C)}$  – Spannungen infolge Anfangsladungen von Kondensatoren,  $V_{i0}(t)$  – Spannungsquellen. Die inverse Matrix der Teilkapazitäten  $C_{ij}$  wird definiert durch  $C_{ij}C^{jk} = \delta_i^k$  für alle kondensatorbehafteten Zweige  $i, j, k$  und durch  $C_{ij} = 0$  für alle kondensatorfreien Zweige  $i$  (mit  $j \in \Gamma$ ). Dabei ist  $\bar{q}^j := C^{jk}V_k$  für  $j = k$  die Ladung auf einem Kondensator mit der (Teil-)Kapazität  $C^{jk}$ , über dem die Spannung  $V_k$  abfällt. Für  $j \neq k$  vermittelt die Teil- oder „Gegen“kapazität  $C^{jk}$  den wechselseitigen Einfluss eines elektrischen Feldes zwischen den Kondensatoren der Zweige  $j$  und  $k$ .

Die Konstitutivparameter in (2.43) seien jeweils beliebig gegeben, und gemäß (2.36) gelte weiterhin  $\bar{q}^i(t) := g_0^i(t)$  für alle  $i \in H_0$ . Die vorausgesetzte Symmetrie der induktiven und kapazitiven Konstitutivparameter ( $L_{ij}, C_{ij}$ ) ist – innerhalb der Kirchhoff-Theorie – direkte Folge der Symmetrie des Permeabilitäts- und des Dielektrizitätstensors.

Wegen (2.44a,b) sind die Integrabilitätsbedingungen (A.7) und (A.9) (vgl. Anhang, Abschnitt A.2) erfüllt und mit  $q_0^j(t) = A^j_{\mu_0} g_0^{\mu_0}(t)$  bzw.  $\dot{q}_0^j(t) = A^j_{\mu_0} \dot{g}_0^{\mu_0}(t)$  (jeweils  $\mu_0 \in H_0$ ) ergibt sich für die magnetische Coenergie

$$\begin{aligned} W'_m(\dot{q}, t) &:= \frac{1}{2} A^i_{\mu} A^j_{\nu} L_{ij}(t) \dot{q}^{\mu} \dot{q}^{\nu} + A^i_{\mu} [L_{ij}(t) \dot{q}_0^j(t) + \Psi_{i0}(t)] \dot{q}^{\mu} + \\ &\quad + \underbrace{\left[ \frac{1}{2} L_{ij}(t) \dot{q}_0^j(t) + \Psi_{i0}(t) \right]}_{\text{}} \dot{q}_0^i(t) \end{aligned} \quad (2.45)$$

und für die elektrische Energie

$$W_e(q, t) := \frac{1}{2} A^i{}_\mu A^j{}_\nu C_{ij}(t) q^\mu q^\nu + A^i{}_\mu \left[ C_{ij}(t) q_0^j(t) + V_{i0}^{(C)} + V_{i0}(t) \right] q^\mu + \underbrace{\left[ \frac{1}{2} C_{ij}(t) q_0^j(t) + V_{i0}^{(C)} + V_{i0}(t) \right] q_0^i(t)}_{(2.46)}$$

Rheolineare Resistoren erfüllen (A.11) und wegen (2.44c) gilt auch (A.13). Diesen Bauelementen können deshalb das gyroscopische Potenzial

$$V^h(\dot{q}, q) := \frac{1}{2} A^i{}_\mu A^j{}_\nu R_{[ij]} q^\mu \dot{q}^\nu = -\frac{1}{2} A^i{}_\mu A^j{}_\nu R_{[ij]} \dot{q}^\nu q^\mu \quad (2.47)$$

und die Dissipationsfunktion

$$D(\dot{q}, t) := \frac{1}{2} A^i{}_\mu A^j{}_\nu R_{(ij)} \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu + A^i{}_\mu R_{ij} \dot{q}_0^j(t) \dot{q}^\mu \quad (2.48)$$

zugeordnet werden (siehe ebenfalls Anhang, Abschnitt A.2). Zur Gewinnung der expliziten Bewegungsgleichungen wird in (2.41) lediglich die Variationsableitung der Lagrange-Funktion benötigt. Wegen  $\delta_\mu F(t) \equiv 0$  kann deshalb im Folgenden auf die rein zeitabhängigen (durch Unterstreichung gekennzeichneten) Terme in (2.45) und (2.46) verzichtet werden. Somit kann das Lagrange-Modell  $\{\Lambda, D\}$  eines elektrisch linearen ES gemäß

$$\begin{aligned} \Lambda(\dot{q}, q, t) &:= \frac{1}{2} A^i{}_\mu A^j{}_\nu \left[ L_{ij}(t) \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu - R_{[ij]} q^\mu \dot{q}^\nu - C_{ij}(t) q^\mu q^\nu \right] + \\ &\quad + A^i{}_\mu \left\{ \left[ L_{ij}(t) \dot{q}_0^j(t) + \Psi_{i0}(t) \right] \dot{q}^\mu - \left[ C_{ij}(t) q_0^j(t) + V_{i0}^{(C)} + V_{i0}(t) \right] q^\mu \right\}, \\ D(\dot{q}, t) &:= \frac{1}{2} A^i{}_\mu A^j{}_\nu R_{(ij)}(t) \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu + A^i{}_\mu R_{ij}(t) \dot{q}_0^j(t) \dot{q}^\mu. \end{aligned}$$

aufgestellt werden.

### 2.3.3.6 Struktur der Lagrange'schen Bewegungsgleichungen

Die Struktur der Bewegungsgleichungen (2.41) hängt wesentlich von den auf den einzelnen Zweigen vorhandenen elektrischen Bauelementen ab. Ein ES kann induktorfreie Fundamentalkreise enthalten, welche zunächst auf Differenzialgleichungen erster Ordnung führen (strukturelle Singularität der Induktormatrix). Weiterhin sind sogar gleichzeitig induktor- und kondensatorfreie bzw. auch gleichzeitig induktor- und resistorfreie Fundamentalkreise möglich. Solche Maschen liefern Gleichungen nullter Ordnung, d.h. algebraische Gleichungen für Ströme bzw. Ladungen. Folglich ist die Ordnung der Bewegungsgleichungen kleiner oder gleich  $2m$ . Diese Tatsache begründet im Wesentlichen die Wahl des Terminus „Quasi“freiheitsgrad für die Mächtigkeit der Menge  $H^*$  (neben den Ausführungen in der Bemerkung zu Abschnitt 2.3.3.1).

Falls Gleichungen nullter Ordnung auftreten, stellen diese infolge der elektrisch linearen Konstitutivgleichungen (2.42) stets lineare Zwangsbedingungen für gewisse Maschenströme oder Maschenladungen dar. Diese Zwangsbedingungen können deshalb einfach zur Elimination einer entsprechenden Anzahl von Maschenströmen und/oder Maschenladungen verwendet werden. Deshalb kann auch in diesem Fall die Modellierung des ES mit

einem minimalen Satz von Koordinaten erfolgen. Eine geeignete Zerlegung der Indexmenge  $H^*$  und die sich daraus ergebenden Bewegungsgleichungen sind in Abschnitt 4.1.3.1 angegeben.

Die hier im Weiteren dargestellten Betrachtungen zur Struktur der Lagrange'schen Bewegungsgleichungen basieren zunächst auf Differenzialgleichungen zweiter Ordnung, d.h. dem Vorhandensein von ausschließlich induktorbehafteten Fundamentalkreisen. Das im vorhergehenden Abschnitt 2.3.3.5 hergeleitete Lagrange-Modell  $\{\Lambda, D\}$  eines ES verwendet Zustandsfunktionen, die maximal quadratisch in den  $\dot{q}$  sind. Diese lassen sich also darstellen als

$$\Lambda = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\dot{q}^\mu\dot{q}^\nu + g_{\mu 0}\dot{q}^\mu + \frac{1}{2}g_{00}, \quad D = \frac{1}{2}s_{\mu\nu}\dot{q}^\mu\dot{q}^\nu + s_\mu\dot{q}^\mu,$$

wobei wegen (2.40) die Koeffizienten durch (2.45–2.48) bestimmt sind:

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}(t) &:= l_{\mu\nu}(t) \equiv A^i{}_\mu A^j{}_\nu L_{ij}(t), \\ g_{\mu 0}(q, t) &:= \frac{1}{2}A^i{}_\mu A^j{}_\nu R_{[ij]}q^\nu + A^i{}_\mu [L_{ij}(t)\dot{q}_0^j(t) + \Psi_{i0}(t)], \\ g_{00}(q, t) &:= -A^i{}_\mu \left\{ A^j{}_\nu C_{ij}(t)q^\nu + 2 [C_{ij}(t)q_0^j(t) + V_{i0}^{(C)} + V_{i0}(t)] \right\} q^\mu, \\ s_{\mu\nu}(t) &:= A^i{}_\mu A^j{}_\nu R_{(ij)}(t), \\ s_\mu(t) &:= A^i{}_\mu R_{ij}(t)\dot{q}_0^j(t). \end{aligned}$$

Im Folgenden sei  $\mu, \nu, \omega \in H^*$  und  $\alpha, \beta \in H^* \cup \{0\}$  ( $q^0 \equiv t$ ). Dann lauten die Lagrange'schen Gleichungen mit  $\Gamma_{\mu\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\partial_\alpha g_{\mu\beta} + \partial_\beta g_{\mu\alpha} - \partial_\mu g_{\alpha\beta}) = \Gamma_{\mu\beta\alpha}$  in expliziter Form

$$g_{\mu\nu}\ddot{q}^\nu + \Gamma_{\mu\alpha\beta}\dot{q}^\alpha\dot{q}^\beta + s_{\mu\nu}\dot{q}^\nu + s_\mu = 0. \quad (2.49)$$

Dabei ist (wegen  $g_{\mu 0} = g_{0\mu}$ )

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu\omega} &\equiv 0, \\ \Gamma_{\mu\nu 0} = \Gamma_{\mu 0\nu} &= \frac{1}{2}(\partial_\nu g_{\mu 0} - \partial_\mu g_{\nu 0} + \partial_0 g_{\mu\nu}) = \frac{1}{2}A^i{}_\mu A^j{}_\nu (\dot{L}_{ij}(t) + R_{[ij]}), \\ \Gamma_{\mu 00} &= \partial_0 g_{\mu 0} - \frac{1}{2}\partial_\mu g_{00} \\ &= A^i{}_\mu A^j{}_\nu C_{ij}(t)q^\nu + A^i{}_\mu (L_{ij}(t)\ddot{q}_0^j(t) + \dot{L}_{ij}(t)\dot{q}_0^j(t) + \dot{\Psi}_{i0}(t)) + \\ &\quad + A^i{}_\mu (C_{ij}(t)q_0^j(t) + V_{i0}^{(C)} + V_{i0}(t)). \end{aligned}$$

Die Gleichungen (2.49) können mit  $\tilde{r}_{\mu\nu} := \partial_0 l_{\mu\nu} + r_{\mu\nu}$  (wobei  $r_{\mu\nu} := A^i{}_\mu A^j{}_\nu R_{ij}$ ),  $c_{\mu\nu} := A^i{}_\mu A^j{}_\nu C_{ij}$  und  $\tilde{v}_{\mu 0} = A^i{}_\mu (L_{ij}\ddot{q}_0^j + (\dot{L}_{ij} + R_{ij})\dot{q}_0^j + C_{ij}q_0^j + \dot{\Psi}_{i0} + V_{i0}^{(C)} + V_{i0})$  auch in der Form

$$l_{\mu\nu}\ddot{q}^\nu + \tilde{r}_{\mu\nu}\dot{q}^\nu + c_{\mu\nu}q^\nu + \tilde{v}_{\mu 0} = 0 \quad (2.50)$$

dargestellt werden.

### Bemerkungen:

Für jedes ES mit positiv definitem  $l_{\mu\nu}$  kann durch das Linienelement  $ds$ , definiert durch

$$ds^2 := g_{\mu\nu}(t) dq^\mu dq^\nu = \dot{\partial}_\mu \dot{\partial}_\nu W'_m dq^\mu dq^\nu \quad (2.51)$$

für jedes feste  $t$  im Konfigurationsraum  $\mathbb{R}^m$  eine von der Zeit abhängige Riemann'sche Metrik  $g_{\mu\nu}(t)$  eingeführt werden. Der  $\mathbb{R}^m$  erfährt somit eine (zeitabhängige) Maßbestimmung durch die magnetische Coenergie des ES. Eine solche Metrisierung des Konfigurationsraumes ermöglicht die Verwendung von Begriffen, Definitionen und Bezeichnungen der Riemann'schen Geometrie bei der Untersuchung von ES. Diese Tatsache ist besonders wichtig für die Untersuchung von elektromechanischen Systemen (siehe Kapitel 3), weil dadurch eine *einheitliche Betrachtungsweise* für das Gesamtsystem ermöglicht wird.

Die magnetische Coenergie eines ES nach (2.45) ist wegen (2.33) eine quadratische Funktion in den Zweigströmen  $\vec{q}^j$  durch die im Netzwerk vorhandenen Induktoren. Wegen der generellen Nichtnegativität der magnetischen Coenergie ist somit die Matrix der Induktivitäten  $L_{ij}$  stets positiv semidefinit (aber nicht notwendigerweise positiv definit!). Gleiches gilt für die Matrix der generalisierten (auf die Fundamentalkreise bezogenen) Induktivitäten  $l_{\mu\nu}$ . Ein Rangabfall kann verschiedene Ursachen haben:

- (a) Singularitäten infolge der modellabhängig variablen Matrixelemente (oft nur zeitweilig auftretend, deshalb auch als momentane Singularitäten bezeichnet),
- (b) linear abhängige Zeilen oder Spalten,
- (c) Zeilen oder Spalten mit ausschließlich Null-Elementen.

Momentane Singularitäten nach (a) werden in dieser Arbeit nicht betrachtet. Sie sind durch eine leichte Modellmodifikation (Matrixregularisierung durch Addition von vergleichsweise kleinen Werten in der Hauptdiagonalen) behebbar. Ein (permanenter) Rangabfall nach (b) kann bei ungünstiger Wahl des Gerüsts für den elektrischen Netzwerkgraphen auftreten. Eine solche Singularität ist durch eine veränderte Gerüstwahl in einen Rangabfall nach (c) wandelbar. Eine Singularität nach (c) tritt aufgrund der Verteilung der Bauelemente im elektrischen Netzwerk auf. Ein solcher Rangabfall wird deshalb in der weiteren Arbeit als *strukturell* bezeichnet. Falls  $l_{\mu\nu}$  einen strukturellen Rangabfall aufweist ( $\text{rang}(l_{\mu\nu}) < m$  infolge Abwesenheit von Induktoren in einigen Fundamentalkreisen des ES), ist eine Metrisierung des Konfigurationsraumes mittels (2.51) nicht möglich. Bei Aufstellung der ES-Bewegungsgleichungen gemäß (2.50) ergeben sich Ordnungsreduktionen der ursprünglichen Differenzialgleichungen zweiter Ordnung. Ein Modell des ES unter Anwendung des Lagrange-Formalismus kann trotzdem aufgestellt werden. Dazu wird eine Klasseneinteilung der generalisierten Koordinaten  $q^\mu$  eingeführt, die die Existenz von Induktoren in den Fundamentalkreisen (und danach die Existenz von Resistoren in den induktorfreen Maschen) berücksichtigt. Nähere Ausführungen dazu finden sich in Abschnitt 4.1.

Die elektrische Energie eines ES nach (2.46) ist wegen (2.34) eine quadratische Funktion in den Zweigladungen  $\vec{q}^j$  der im Netzwerk vorhandenen Kondensatoren. Wegen der generellen Nichtnegativität der elektrischen Energie ist somit die inverse Matrix der Teilkapazitäten  $C_{ij}$  ebenfalls stets positiv semidefinit. Gleiches gilt für die generalisierte (auf die Fundamentalkreise bezogene) inverse Matrix der Teilkapazitäten  $c_{\mu\nu}$ .

Der Energieverlust eines ES infolge Dissipation ergibt sich aus der Leistung  $P$  der resistiven Spannungsanteile  $V_i^{(R)}$  gemäß

$$P = -V_i^{(R)} \dot{q}^i.$$

Wegen (2.43) ist  $P$  eine quadratische Funktion in den Strömen der resistorbehafteten Zweige und bei ausschließlicher Verwendung von reziproken Resistoren stets nicht posi-



tiv. Somit ist die Resistormatrix  $R_{ij}$  positiv semidefinit. Gleiches gilt für die Matrix der generalisierten (auf die Fundamentalkreise bezogenen) Resistoren  $r_{\mu\nu}$ .

### 2.3.4 Bewegungsgleichungen in Nicht-Minimalkoordinaten

In diesem Abschnitt erfolgt die Darstellung der Bewegungsgleichungen eines ES unter der Annahme, dass die rheonomen Bindungen infolge Stromquellen nicht eliminiert werden sollen. Vielmehr sollen diese Bindungen mittels Reaktionsspannungen befriedigt werden, die sich nach dem Lagrange'schen Befreiungsprinzip ergeben. Dieser Modellierungsansatz ist somit dem in Abschnitt 2.2.4 für mechanische Systeme mit zusätzlichen Bindungen (CMS) dargestellten vergleichbar. Er soll deshalb als „CES“-Modellierung (Constrained Electrical System) bezeichnet werden. Auch hier erfolgt die Herleitung der Modellgleichungen mit der Methode der Lagrange-Multiplikatoren.

Der Vorteil dieser Herangehensweise ist der Wegfall der Einschränkung, dass in jedem Fundamentalkreis nur höchstens eine Stromquelle vorhanden sein darf. Diese Eigenschaft erweist sich als günstig bei der späteren Behandlung von strukturvariablen Systemen (siehe Abschnitt 5.3.6). Für eine eindeutige Lösbarkeit des Systems der Bewegungsgleichungen wird allerdings ebenso wie in Abschnitt 2.3.3 vorausgesetzt, dass die im ES vorhandenen Stromquellen keine linearen Abhängigkeiten aufweisen. Das stellt insofern keine Einschränkung dar, als dass ES mit linear abhängigen Stromquellen physikalisch nicht sinnvoll sind.

#### 2.3.4.1 Generalisierte Koordinaten

Im Gegensatz zur Modellierung mit Minimalkoordinaten (Abschnitt 2.3.3) wird hier für den repräsentierenden Graphen des elektrischen Netzwerkes ein nicht notwendigerweise stromquellenfreies Gerüst  $G$  gewählt. Das entsprechende Cogerüst  $H(G)$  habe  $m^\#$  Kanten ( $m^\# := |H|$ ). Die Menge aller (Gerüst- und Cogerüst-)Kanten mit Stromquellen sei mit  $\Gamma_0$  bezeichnet. Dann kann folgende Indexmengenzerlegung der Kanten des elektrischen Netzwerkes erfolgen:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \Gamma^\# \cup \Gamma_0, \\ \Gamma^\# &: \text{Kanten ohne Stromquellen,} \\ \Gamma_0 &: \text{Kanten mit Stromquellen.} \end{aligned} \tag{2.52}$$

Die Anzahl der Kanten mit Stromquellen sei  $r_0 := |\Gamma_0|$ . Da zunächst nur ES mit fixer Struktur und nicht schaltenden Bauelementen betrachtet werden, darf die Anzahl der Stromquellen die der Fundamentalkreise nicht übersteigen. Somit gilt  $r_0 \leq m^\#$ . Alle Maschenladungen  $q^\mu$ ,  $\mu \in H$ , werden als generalisierte Koordinaten verwendet, die dann noch – bei Existenz von Stromquellen –  $r_0$  rheonomen Bindungen genügen müssen.

#### **Bemerkung:**

Im Gegensatz zur Modellierung in Abschnitt 2.3.3 wird hier keine Unterscheidung in stromquellenfreie und stromquellenbehaftete Cogerüstkanten vorgenommen. In der Indexmengenzerlegung (2.32) gilt somit

$$H_0 = \emptyset.$$

Deshalb ist bei Bezug auf Gleichungen der Minimalkoordinaten-Formulierung zu beachten, dass grundsätzlich die explizit angegebenen Strom- und Ladungsanteile eines Zweiges infolge aller vorhandenen Stromquellen entfallen ( $\dot{q}_0^j(t) \equiv 0$ ,  $q_0^j(t) \equiv 0$ ). Gleiches gilt für die Zeitableitung der Ströme ( $\ddot{q}_0^j(t) \equiv 0$ ). Die entsprechenden Anteile sind aufgrund der Modellierung mittels Nicht-Minimalkoordinaten bereits in den generalisierten Koordinaten  $q^\mu$  und deren Zeitableitungen enthalten.

### 2.3.4.2 Rheonome Bindungen

Die rheonomen Bindungen infolge Stromquellen seien definiert durch

$$h^{j_0}(\bar{q}, t) \equiv \bar{q}^{j_0} - \bar{q}_0^{j_0}(t) = 0, \quad j_0 \in \Gamma_0, \quad (2.53)$$

wobei  $\bar{q}_0^{j_0}(t)$  die durch die Stromquelle im Zweig  $j_0$  produzierte Quellenladung (Zeitintegral des Quellenstromes) ist. Damit sind die Bindungen (2.53) stets holonom. (Anholonome Bindungen könnten z.B. auftreten, wenn – im Vergleich zu (2.36) – allgemeinere Stromquellen mit Zweigrelationen der Form  $\bar{q}_0^{j_0} = g_0^{j_0}(\dot{q}, q, t)$  zugelassen würden.) Mit (2.31) ergeben sich aus (2.53) rheonome (elektrisch lineare) Bindungen für die generalisierten Koordinaten

$$h^{j_0}(q, t) \equiv A^{j_0}_\mu q^\mu - \bar{q}_0^{j_0}(t) = 0, \quad j_0 \in \Gamma_0, \quad \mu \in H. \quad (2.54)$$

Analog zu (2.22) gilt offensichtlich  $f^{j_0}_\mu := \partial_\mu h^{j_0} = A^{j_0}_\mu$  und somit  $\partial_\alpha f^{j_0}_\mu \equiv 0$  ( $\alpha \in H \cup \{0\}$ ). Somit lassen sich – in Anlehnung an den entsprechenden Begriff aus der analytischen Mechanik – die dynamischen Zwangsbedingungen aus (2.54) leicht durch zweifaches Ableiten nach der Zeit  $t$  zu

$$\ddot{h}^{j_0}(q, t) \equiv A^{j_0}_\mu \ddot{q}^\mu - \ddot{\bar{q}}_0^{j_0}(t) = 0 \quad (2.55)$$

ermitteln. Wegen der Unabhängigkeit der Stromquellen hat  $A^{j_0}_\mu$  vollen Rang ( $\text{rang}(A^{j_0}_\mu) = r_0$ ) und (2.54) definiert eine  $(m^\# - r_0)$ -dimensionale Hyperebene  $\mathbb{E}_{r_0}$  im  $\mathbb{R}^{m^\#}$ . Alle Zweigladungen  $\bar{q}^j$ , die zur Zeit  $t$  für alle Knoten  $k$  den Knotensatz in integrierter Form ( $a^k_j \bar{q}^j = 0$ ,  $a^k_j$  – Knoten-Kanten-Inzidenzmatrix gemäß (2.1)) und für  $j = j_0$  gleichzeitig die Bindungen (2.53) erfüllen, bestimmen die Menge

$$\mathfrak{L}_t := \left\{ \bar{q}^j \mid \bar{q}^j = A^j_\mu q^\mu, \quad j \in \Gamma, \quad q^\mu \in \mathbb{E}_{r_0} \subset \mathbb{R}^{m^\#} \right\} \quad (2.56)$$

aller zur Zeit  $t$  möglichen Lagen des ES. Der Freiheitsgrad des ES ist somit  $m := m^\# - r_0 = |H| - |\Gamma_0|$ . Die  $q^\mu$ ,  $\mu \in H$ , bilden eine *nichtminimale Menge* von generalisierten Koordinaten.

### 2.3.4.3 Bewegungsgleichungen

Nach dem Lagrange'schen Befreiungsprinzip entsprechen den Bindungen (2.54) gewisse (generalisierte) Reaktionsspannungen  $R_\mu$ . Damit wird aus den Lagrange'schen Bewegungsgleichungen (2.41) eines ES bei Verwendung der CES-Formulierung

$$\left( \dot{\partial}_\mu \Lambda \right) - \partial_\mu \Lambda + \dot{\partial}_\mu D = Q_\mu^{(S)} + R_\mu, \quad \mu \in H. \quad (2.57)$$

Bei idealen Bindungen steht der Vektor  $R_\mu$  senkrecht auf der Hyperebene  $\mathbb{E}_{r_0}$  und ist eine Linearkombination der  $r_0$  ( $m^\#$ -dimensionalen) Normalenvektoren  $f^{j_0}_\mu$  ( $j_0 = 1, \dots, r_0$ ;  $\mu = 1, \dots, m^\#$ ). Somit lassen sich die Reaktionsspannungen mit Hilfe von Lagrange-Multiplikatoren  $\lambda_{i_0}$  darstellen gemäß

$$R_\mu = \lambda_{i_0} f^{i_0}_\mu = \lambda_{i_0} A^{i_0}_\mu, \quad i_0 \in \Gamma_0. \quad (2.58)$$

Sei  $V_{i_0}^{(SQ)}$  die über einer Stromquelle im Zweig  $i_0$  (als Reaktion auf den von der Quelle in das restliche Netzwerk eingespeisten Strom) messbare Spannung. Bei unabhängigen Stromquellen gilt dann gerade

$$V_{i_0}^{(SQ)} = -\lambda_{i_0}.$$

Mit (2.58) lauten die Gleichungen (2.57) in expliziter Form (vgl. (2.49))

$$g_{\mu\nu} \ddot{q}^\nu + \Gamma_{\mu\alpha\beta} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta + s_{\mu\nu} \dot{q}^\nu = Q_\mu^{(S)} + \lambda_{i_0} A^{i_0}_\mu \quad (2.59)$$

(wegen  $H_0 = \emptyset$  gilt hier  $\Gamma_{\mu 00} = A^i_\mu A^j_\nu C_{ij} q^\nu + A^i_\mu (\dot{\Psi}_{i_0} + V_{i_0}^{(C)} + V_{i_0})$  sowie  $s_\mu = 0$ ) oder in der zu (2.50) analogen Darstellung (jetzt ohne „sonstige“ Spannungsanteile)

$$l_{\mu\nu} \ddot{q}^\nu + \tilde{r}_{\mu\nu} \dot{q}^\nu + c_{\mu\nu} q^\nu + \hat{v}_{\mu 0} = \lambda_{i_0} A^{i_0}_\mu \quad (2.60)$$

mit  $\hat{v}_{\mu 0} := A^i_\mu (\dot{\Psi}_{i_0} + V_{i_0}^{(C)} + V_{i_0})$  an Stelle von  $\tilde{v}_{\mu 0}$  (vgl. Bemerkung in Abschnitt 2.3.4.1).

Die Gleichungen (2.59) bzw. (2.60) können analog zur analytischen Mechanik als Lagrange'sche Gleichungen gemischten Typs bezeichnet werden. Bei bekanntem Bewegungszustand  $(\dot{q}, q)$  des ES können mit (2.60) und (2.55) die zweiten zeitlichen Ableitungen der Maschenladungen  $\ddot{q}^\mu(t)$  (die „Beschleunigungen“) und die Lagrange-Multiplikatoren  $\lambda_{i_0}(t)$  gemäß

$$\begin{aligned} l_{\mu\nu} \ddot{q}^\nu - A^{i_0}_\mu \lambda_{i_0} &= -\tilde{r}_{\mu\nu} \dot{q}^\nu - c_{\mu\nu} q^\nu - \hat{v}_{\mu 0}, \\ A^{j_0}_\nu \ddot{q}^\nu &= \ddot{q}_0^{j_0}(t) \end{aligned} \quad (2.61)$$

bestimmt werden. Zur Einhaltung der Bindungen auf Ladungs- und Stromniveau ist eine Stabilisierung mittels Projektion oder Regularisierung ([4, 8, 30]) notwendig. Mit den Bezeichnungen

$$(G_{ab}) := \begin{bmatrix} (l_{\mu\nu}) & (A^{i_0}_\mu)^T \\ (A^{j_0}_\nu) & 0 \end{bmatrix}, \quad (X^b) := \begin{bmatrix} \ddot{q}^\nu \\ -\lambda_{i_0} \end{bmatrix}$$

und

$$(\bar{Q}_a) := \begin{bmatrix} -\tilde{r}_{\mu\nu} \dot{q}^\nu - c_{\mu\nu} q^\nu - \hat{v}_{\mu 0} \\ \ddot{q}_0^{j_0}(t) \end{bmatrix}$$

ergibt sich für (2.61) die Form

$$G_{ab} X^b = \bar{Q}_a.$$

Die Matrix  $A^{j_0}_\nu$  hat vollen Rang, d.h., wenn  $l_{\mu\nu}$  regulär ist, gilt das auch für  $G_{ab}$ . Diese ist damit invertierbar (und gleichzeitig symmetrisch). Mit  $X^b = G^{ba} \bar{Q}_a$  ( $G^{ab} : G^{ab} G_{bc} = \delta_c^a$ )

sind dann zu jedem festen Zeitpunkt  $t$  die „Beschleunigungen“  $\ddot{q}^\nu(t)$ , die Lagrange-Multiplikatoren  $\lambda_{i_0}(t)$  (somit die Spannungen über den Stromquellen) und schließlich auch die generalisierten Reaktionsspannungen

$$R_\mu(t) := \lambda_{i_0}(t) A^{i_0}_\mu$$

eindeutig bestimmt. Falls  $l_{\mu\nu}$  strukturell singulär ist, muss eine entsprechende Klasseneinteilung der generalisierten Koordinaten vorgenommen werden. Nähere Ausführungen dazu finden sich in Abschnitt 4.1.3.2. Der Fall einer momentanen Singularität, die aufgrund der Zeitabhängigkeit von  $l_{\mu\nu}$  auftreten kann, wird hier nicht behandelt.

# Kapitel 3

## Einheitliche mathematische Modellierung elektromechanischer Systeme

In diesem Kapitel wird eine Methode zur *einheitlichen mathematischen Modellierung elektromechanischer Systeme* (EMS) dargestellt. Sie basiert durchgehend auf dem Lagrange-Formalismus und stellt somit eine Vereinheitlichung der in Kapitel 2 vorgestellten Modellierung von (rein mechanischen) Mehrkörpersystemen (MKS) und rein elektrischen Systemen (ES) dar. Beide Domänen erscheinen in EMS als so genannte Teilsysteme, zwischen denen im Allgemeinen Wechselwirkungen bestehen. Beide Teilsysteme eines EMS sind charakterisiert durch physikalische Objekte mit *überwiegend* domänenspezifischen Eigenschaften. Das mechanische Teilsystem (MTS) besteht aus Starrkörpern, den dazugehörigen geometrischen Kopplungen (Gelenken) und den auftretenden Kräften/Momenten. Letztere können allerdings auch elektromagnetischen Ursprungs sein. Zum elektrischen Teilsystem (ETS) gehören die vorhandenen Bauelemente (Multipole beschrieben durch abstrakte Zweipole) und deren galvanische Kopplung. In den Zweipolrelationen dürfen jedoch auch mechanische Koordinaten (in geeigneter Weise) auftreten.

Die physikalischen Vorgänge, die über solche in rein mechanischen bzw. rein elektrischen Systemen hinausgehen, sind die – für EMS charakteristischen – Wechselwirkungen zwischen bewegten massebehafteten Körpern und elektromagnetischen Feldern. Diese finden ihren Ausdruck in konstitutiven Gleichungen, die zunächst die Kopplung von (Kontinuums-)Mechanik und Maxwell-Theorie beschreiben. In dieser Arbeit werden jedoch ausschließlich EMS betrachtet, die sich durch Kopplung von Starrkörpermechanik (MKS mit endlichem Freiheitsgrad) und Kirchhoff-Theorie (als quasi-stationäre Näherung der Maxwell-Theorie) beschreiben lassen.

**Definition 3.1** *Eine endliche Menge physikalischer Objekte, die gleichzeitig Eigenschaften von Starrkörpern und elektrischen Multipolen aufweisen und zwischen denen mechanische, elektrische und elektromagneto-mechanische (d.h. domänenübergreifende) Wechselwirkungen auftreten können, heißt diskretes EMS.*

Im Folgenden werden einige Begriffe aus der analytischen Starrkörpermechanik (Topologie, Kinematik, Kinetik) auf EMS übertragen (Abschnitt 3.1). Die einheitlichen

EMS-Bewegungsgleichungen werden zunächst für MTS mit kinematischer Baumstruktur und ETS in Minimalkoordinaten-Formulierung aus dem Prinzip der virtuellen Arbeit in Lagrange'scher Fassung abgeleitet (Abschnitt 3.2). Schließlich erfolgt die Erweiterung auf EMS mit zusätzlichen Bindungen (CEMS, d.h. MTS mit kinematischen Schleifen und/oder ETS in Nicht-Minimalkoordinaten) mit der Methode der Lagrange-Multiplikatoren (Abschnitt 3.3).

Für weiterführende detaillierte Erläuterungen z.B. bezüglich der auftretenden elektromechanischen Wechselwirkungen und deren Ordnung oder bezüglich einer ausführlichen Leistungsbilanz sei auf die Literatur verwiesen ([143], [144] bzw. [36], [131]).

### 3.1 Topologie/Kinematik

Die *Topologie eines EMS* ist bestimmt durch die Topologie des mechanischen und des elektrischen Teilsystems. Sie setzt sich damit aus dem Zusammenhangsvektor des MTS (im Fall eines CMS als mechanisches Teilsystem zusätzlich aus den Schließgelenkinformationen) und der Knoten-Kanten-Inzidenzmatrix des ETS zusammen. Die Topologien beider Teilsysteme sind unabhängig voneinander mittels zweier Graphen darstellbar. Die symbolische Darstellung der Topologie des gesamten EMS erfolgt somit durch einen Graphen mit mindestens zwei Komponenten. Mindestens eine Komponente repräsentiert Körper (Knoten) und Gelenke (Kanten) des MTS. Ebenfalls mindestens eine Komponente repräsentiert Punkte stets gleichen elektrischen Potentials (Knoten) und abstrakte Zweipole (Kanten) des ETS.

Die *Kinematik eines EMS* ist bestimmt einerseits durch die geometrischen Bindungen der starren Körper und andererseits durch die Maschentransformation des elektrischen Netzwerkes abstrakter Zweipole. Die Menge  $\{\bar{x}_k^s, \bar{q}^i\}$  der Starrkörperkoordinaten  $\bar{x}_k^s$ ,  $s = 1, \dots, 6$ ,  $k = 1, \dots, K$  ( $K$  – Anzahl der starren Körper) und der Zweigladdungen  $\bar{q}^i$ ,  $i \in \Gamma$  ( $\Gamma$  – repräsentierender Graph des Zweipol-Netzwerkes) heißt eine *Lage* des EMS. Im Folgenden wird zur Beschreibung des ETS die Ladungsformulierung in Minimalkoordinaten verwendet (siehe Abschnitt 2.3.3). Alle zur Zeit  $t$  den Zwangsbedingungen des EMS (geometrische Bindungen des MTS und Knotensatz/Maschentransformation des ETS) genügenden Starrkörperkoordinaten  $\bar{x}_k^s$  und Zweigladdungen  $\bar{q}^i$  bestimmen die Menge

$$\mathfrak{L}_t := \left\{ \bar{x}_k^s, \bar{q}^i \mid \begin{array}{l} \bar{x}_k^s = \bar{x}_k^s(q^\kappa, t), \\ \bar{q}^i = A^i_\mu q^\mu + q_0^i(t) \end{array} ; \quad \begin{array}{l} s = 1, \dots, 6; \quad k = 1, \dots, K; \quad i \in \Gamma; \\ (q^\kappa, q^\mu) \in \mathbb{R}^{n+m}; \quad \kappa \in J; \quad \mu \in H^* \end{array} \right\} \quad (3.1)$$

der zur Zeit  $t$  *möglichen* Lagen. Dabei ist  $J$  die Indexmenge der generalisierten „mechanischen“ Koordinaten  $q^\kappa$  und wie in Abschnitt 2.3 bezeichnet  $H^*$  den stromquellenfreien Teil des Cogerüsts  $H$  von  $\Gamma$  und damit gleichzeitig die Indexmenge der generalisierten „elektrischen“ Koordinaten  $q^\mu$  (in Minimalkoordinaten-Formulierung). Offensichtlich gilt  $J \cap H^* = \emptyset$ . Die Menge  $\mathfrak{L}_t$  ist nach (3.1) eineindeutig abbildbar auf ein Gebiet  $D \subset \mathbb{R}^{n+m}$ ,  $n := |J|$ ,  $m := |H^*|$ . Deshalb heißt  $(n + m)$  *Quasifreiheitsgrad* des EMS. Der Vektor  $q = (q^a) = (q^\kappa, q^\mu)$  heißt *repräsentierender Punkt* und  $\mathbb{R}^{n+m}$  *Konfigurationsraum* des EMS. Die  $q^\kappa$  und  $q^\mu$  sind die *generalisierten Koordinaten* des EMS. Die Funktionen  $q = q(t)$  seien stetig und stückweise zweimal stetig differenzierbar. Sie beschreiben eine Bewegung des EMS (im Sinne einer zeitlichen Abfolge von möglichen Lagen). Die

Aggregation  $(\dot{q}, q)$  heißt *Zustand* (auch Bewegungszustand) des EMS. Das EMS heißt *holonom*, falls die  $q$  keinen nichtintegrablen differenziellen Bindungen unterliegen, sonst *anholonom*. Das MTS heißt anholonom, wenn nichtintegrablen Bindungen gemäß (2.21) auftreten. Ein ETS mit den in Abschnitt 2.3.3.2 zugelassenen konstitutiven Gleichungen ist stets holonom. (Anholonome Bindungen könnten z.B. auftreten, wenn – im Vergleich zu (2.36) – allgemeinere Stromquellen mit Zweigrelationen der Form  $\vec{q}_0^j = g_0^j(\dot{q}^a, q^a, t)$  zugelassen würden.) Im Folgenden werden – falls nicht ausdrücklich anders vermerkt – nur holonome EMS betrachtet. Das EMS heißt *skleronom*, falls in (3.1) die Zeit  $t$  nicht explizit auftritt (d.h. nur zeitunabhängige geometrische Bindungen, keine Stromquellen), sonst *rheonom*.

Zwecks Verkürzung der Schreibweise werden – falls nicht explizit anders angegeben – im Weiteren einige Indexbezeichnungen fest den hier angegebenen Indexmengen zugeordnet:  $\kappa, \lambda, \rho, \sigma \in J$ ;  $i, j \in \Gamma$ ;  $\mu, \nu, \omega \in H^*$ ;  $a, b, c \in J \cup H^*$ . Darüber hinaus wird mit  $q^0 \equiv t$  gelegentlich  $\alpha, \beta, \gamma \in J \cup H^* \cup \{0\}$  verwendet.

## 3.2 Kinetik elektromechanischer Systeme

### 3.2.1 Konstitutive Gleichungen

Wie im Abschnitt 2.2.3 für MKS bereits eingeführt seien  $d\mathfrak{k}(\xi)$  die an den starren Körpern des EMS angreifenden eingepprägten Kräfte und (analog zu Abschnitt 2.3.3)  $V_i$  die Spannungen der abstrakten Zweipole. Die zugeordneten generalisierten Kräfte und Spannungen (Maschenspannungen) seien mit  $Q_\kappa$  und  $v_\mu$  bezeichnet. (Beide zusammen werden gelegentlich auch verallgemeinerte „Kräfte“ des EMS genannt.) Dann gilt

$$Q_\kappa := \mathcal{S} \partial_\kappa \mathfrak{r} d\mathfrak{k}, \quad v_\mu := A^i_\mu V_i. \quad (3.2)$$

Die konstitutiven Gleichungen eines EMS seien letztlich durch

$$Q_\kappa = Q_\kappa(\dot{q}^c, q^c, t), \quad v_\mu = v_\mu(\ddot{q}^c, \dot{q}^c, q^c, t) \quad (3.3)$$

mit hinreichend glatten Funktionen  $Q_\kappa, v_\mu$  gegeben. Infolge der Verwendung von Minimalkoordinaten für das ETS gilt die Maschentransformation (2.33), und der Kirchhoff'sche Maschensatz für die stromquellenbehafteten Fundamentalkreise ((2.29a) mit  $\mu \in H_0$ ) liefert keinen Beitrag zu den Bewegungsgleichungen. Somit können die konstitutiven Gleichungen von Stromquellen separat behandelt werden. Falls in (3.3) mechanische und elektrische Koordinaten ( $q^\lambda$  und  $q^\nu$ ) oder deren Ableitungen nach der Zeit  $t$  simultan auftreten, existiert eine Kopplung zwischen mechanischen und elektrischen Phänomenen (einseitige elektromechanische Kopplung oder elektromechanische Wechselwirkung).

### 3.2.2 Prinzip der virtuellen Arbeit

Die Bewegung des EMS kann als die Bewegung seines repräsentierenden Punktes im  $(n + m)$ -dimensionalen Konfigurationsraum  $\mathbb{R}^{n+m}$  betrachtet werden.

**Definition 3.2** Eine virtuelle Verschiebung eines EMS ist die Menge differenzieller Änderungen der Starrkörperkoordinaten  $\bar{x}_k^s$  und Zweigladungen  $\bar{q}^i$  zu einer (willkürlichen) Variation  $\delta q^a = (\delta q^\kappa, \delta q^\mu)$  bei fester Zeit  $t$ :

$$\left\{ \delta \bar{x}_k^s, \delta \bar{q}^i \mid \delta \bar{x}_k^s = \partial_{\bar{x}_k^s} \bar{x}_k^s \delta q^\kappa, \delta \bar{q}^i = A^i_\mu \delta q^\mu; \delta q^a \text{ beliebig} \right\}. \quad (3.4)$$

Die Bewegungsgleichungen eines EMS lassen sich durch Anwendung des Prinzips der virtuellen Arbeit in Lagrange'scher Fassung gewinnen. Damit wird – in Anlehnung an den Begriff aus der analytischen Mechanik – die „Kinetik“ eines EMS festgelegt.

**Axiom 3.3** Unter allen möglichen Bewegungen eines EMS ist die tatsächlich eintretende Bewegung dadurch gekennzeichnet, dass zu jeder Zeit  $t$  gilt

$$\delta' A := \mathcal{S} \delta \mathbf{r} (d\mathbf{k} - \ddot{\mathbf{r}} dm) - V_i \delta \bar{q}^i = 0 \quad \text{für alle virtuellen } \delta \mathbf{r}, \delta \bar{q}^i \quad (3.5)$$

( $\mathcal{S}$  – „Summation“ über alle materiellen Punkte  $\xi \in \Xi$ ,  $d\mathbf{k}$  – eingeprägte Kräfte beliebiger Verteilung,  $\mathbf{r}(\xi, q^\kappa, t)$  – Ortsvektor des materiellen Punktes  $\xi$ ,  $\ddot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt} \dot{\mathbf{r}} = \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}$ ,  $dm$  – Massenelement,  $V_i$  – Spannungen der abstrakten Zweipole).

Mit der kinetischen Energie des EMS (bzw. MTS)

$$T(\dot{q}^\sigma, q^\sigma, t) := \frac{1}{2} \int \dot{\mathbf{r}}^2 dm$$

und

$$\mathcal{S} \delta \mathbf{r} d\mathbf{k} \equiv \mathcal{S} \partial_{\kappa} \mathbf{r} d\mathbf{k} \delta q^\kappa \equiv Q_\kappa \delta q^\kappa, \quad V_i \delta \bar{q}^i \equiv V_i A^i_\mu \delta q^\mu \equiv v_\mu \delta q^\mu$$

wird aus (3.5)

$$\delta' A = \left[ - \left( \dot{\partial}_\kappa T \right)' + \partial_\kappa T + Q_\kappa \right] \delta q^\kappa - v_\mu \delta q^\mu = 0 \quad \forall \delta q^\kappa, \delta q^\mu.$$

Wegen der Willkürlichkeit der  $\delta q^\kappa$ ,  $\delta q^\mu$  folgen daraus die Bewegungsgleichungen des EMS zunächst als „mechanische“ Lagrange'sche Gleichungen und Kirchhoff'sche Maschengleichungen

$$\left( \dot{\partial}_\kappa T \right)' - \partial_\kappa T = Q_\kappa, \quad v_\mu = 0. \quad (3.6)$$

### 3.2.3 Zustandsfunktionen

Die Herleitung der EMS-Bewegungsgleichungen in Lagrange'scher und damit *einheitlicher* Form erfordert die Darstellbarkeit der  $Q_\kappa$ ,  $v_\mu$  mittels zweier Zustandsfunktionen  $\Omega(\dot{q}, q, t)$  und  $D(\dot{q}, q, t)$ :

$$Q_a^* \equiv \delta_a \Omega - \dot{\partial}_a D = \left( \dot{\partial}_a \Omega \right)' - \partial_a \Omega - \dot{\partial}_a D, \quad (3.7)$$

wobei die verallgemeinerten „Kräfte“  $Q_a^*$  des EMS sich zusammensetzen aus generalisierten mechanischen Kräften und generalisierten elektrischen Spannungen

$$Q_a^* := \begin{cases} Q_\kappa, & a = \kappa \in J \\ -v_\mu, & a = \mu \in H^* \end{cases} \quad (3.8)$$



(geeignete Zählweise bei der Indizierung vorausgesetzt!). Daraus folgen gewisse Strukturaussagen bezüglich der  $Q_\kappa$ ,  $v_\mu$  und  $\Omega$ , die hier nicht näher erläutert werden sollen (siehe z.B. [143] oder [144]). Sie ergeben schließlich

$$\Omega := -\Psi + V \quad \text{mit} \quad \Psi = \Psi(\dot{q}^\omega, q^c, t) \quad \text{und} \quad V(\dot{q}, q, t) := \omega_a(q, t)\dot{q}^a + \omega_0(q, t).$$

Die Zustandsfunktion  $\Psi$  hängt somit nicht von den generalisierten „mechanischen“ Geschwindigkeiten  $\dot{q}^\lambda$  ab. Damit erscheint eine additive Zerlegung der  $Q_a^*$  (analog zu (2.10)) sinnvoll:

$$\begin{aligned} Q_\kappa &= Q_\kappa^{(0)} + Q_\kappa^{(1)} + Q_\kappa^{(2)} + Q_\kappa^{(S)}, \\ -v_\mu &= -\dot{\psi}_\mu - v_\mu^{(0)} - v_\mu^{(1)} - v_\mu^{(2)} - v_\mu^{(S)}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

wobei die Anteile außer  $Q_\kappa^{(S)}$ ,  $v_\mu^{(S)}$  durch drei Zustandsfunktionen  $\Psi$ ,  $V$ ,  $D$  gemäß

$$\begin{aligned} \psi_\mu &= \dot{\partial}_\mu \Psi, & v_\mu^{(0)} &= -\partial_\mu \Psi, & Q_\kappa^{(0)} &= \partial_\kappa \Psi, & (Q_a^{(0)} &= \partial_a \Psi) \\ v_\mu^{(1)} &= -\delta_\mu V, & Q_\kappa^{(1)} &= \delta_\kappa V, & (Q_a^{(1)} &= \delta_a V) \\ v_\mu^{(2)} &= \dot{\partial}_\mu D, & Q_\kappa^{(2)} &= -\dot{\partial}_\kappa D & (Q_a^{(2)} &= -\dot{\partial}_a D) \end{aligned} \quad (3.10)$$

ausgedrückt werden. Alle (sonstigen) Kraft- und Spannungsanteile, die nicht mittels Zustandsfunktionen  $\Psi$ ,  $V$ ,  $D$  in der in (3.10) angegebenen Weise dargestellt werden können oder sollen, werden in  $Q_\kappa^{(S)}$  bzw.  $v_\mu^{(S)}$  zusammengefasst. Diese Klasseneinteilung ist hinreichend für die Darstellbarkeit der  $Q_\kappa$ ,  $v_\mu$  gemäß (3.7). Die Bedingungen für die Klassenzugehörigkeit der Kraft- und Spannungsanteile sowie die konkrete Berechnung der Zustandsfunktionen  $\Psi$ ,  $V$ ,  $D$  (und damit auch  $\Omega$ ) finden sich im Anhang, Abschnitte A.3.1 bzw. A.3.2.

Mit (3.10) lässt sich unter Beachtung von  $\partial_\mu T \equiv 0$ ,  $\dot{\partial}_\mu T \equiv 0$  und  $\dot{\partial}_\lambda \Psi \equiv 0$  eine Lagrange-Funktion gemäß

$$\Lambda := T - \Omega = T(\dot{q}^\sigma, q^\sigma, t) + \Psi(\dot{q}^\omega, q^c, t) - V(\dot{q}^c, q^c, t) \quad (3.11)$$

eingeführen. Mit dieser und (3.7) kann (3.6) in Lagrange'scher Form dargestellt werden:

$$\left( \dot{\partial}_a \Lambda \right) - \partial_a \Lambda + \dot{\partial}_a D = 0. \quad (3.12)$$

In (3.11) bezeichnet  $T$  die kinetische Energie, die Zustandsfunktionen  $\Psi$  das *magneto-mechanische Copotenzial* (auch „magnetische Coenergie“) und  $V$  das *verallgemeinerte Potenzial*. Die Zustandsfunktion  $D$  in (3.12) heißt *Rayleigh'sche Dissipationsfunktion*. Bei gegebenen  $Q_\kappa$ ,  $v_\mu$  können  $\Psi$ ,  $V$  und  $D$  berechnet werden (siehe Anhang, Abschnitt A.3.2). Die restlichen (sonstigen) Anteile der generalisierten Kräfte und Spannungen  $Q_\kappa^{(S)}$ ,  $v_\mu^{(S)}$  aus der Klasseneinteilung (3.9) erscheinen auf der rechten Seite von (3.12). Somit lauten die kompletten Lagrange'schen Bewegungsgleichungen eines EMS schließlich

$$\left( \dot{\partial}_a \Lambda \right) - \partial_a \Lambda + \dot{\partial}_a D = Q_a^{(S)}, \quad (3.13)$$

mit

$$Q_a^{(S)} := \begin{cases} Q_\kappa^{(S)}, & a = \kappa \in J \\ -v_\mu^{(S)}, & a = \mu \in H^*. \end{cases}$$

Lagrange-Funktion  $\Lambda$  und Dissipationsfunktion  $D$  bestimmen zusammen mit  $Q_a^{(S)}$  über einen wohldefinierten (vom konkreten EMS unabhängigen) Formalismus die Bewegungsgleichungen des EMS. Somit ist das Funktionentripel  $\{\Lambda, D, Q_a^{(S)}\}$  ein *mathematisches Modell* des EMS. Gemäß (3.13) existiert stets das triviale Modell  $\{T, 0, Q_a^{(S)}\}$ . Das Funktionentupel  $\{\Lambda, D, 0\} = \{\Lambda, D\}$  heißt *Lagrange'sches Modell* des EMS.

### 3.2.4 Ein Lagrange'sches Modell für EMS

#### 3.2.4.1 Spezielle Konstitutivgleichungen

Ein Lagrange'sches Modell eines EMS ist genau dann realisierbar, wenn Lagrange'sche Modelle beider Teilsysteme unter Beachtung der elektromechanischen Wechselwirkungen aufgestellt werden können. Das heißt, dass alle „sonstigen“ Anteile der generalisierten Kräfte und Spannungen identisch verschwinden müssen ( $Q_\kappa^{(S)} \equiv 0, v_\mu^{(S)} \equiv 0$ ), bzw. gleichbedeutend, dass alle im MTS wirkenden Kräfte (rein mechanisch erzeugte, elektromagnetisch erzeugte) als auch alle Maschenspannungen mittels Zustandsfunktionen darstellbar sein müssen.

Im Folgenden wird ein Lagrange'sches Modell für EMS mit speziellen konstitutiven Gleichungen des ETS aufgestellt. Wie sich zeigt, sind damit EMS behandelbar, deren ETS aus konventionellen, elektrisch linearen RLC-Netzwerken mit Strom- und Spannungsquellen besteht. Die Modellierung des ETS erfolgt dabei in Minimalkoordinaten gemäß Abschnitt 2.3.3. Analog zu (2.42) seien die Konstitutivgleichungen des ETS gegeben durch

$$V_i = V_i^{(L)} + V_i^{(R)} + V_i^{(C)} + V_{i0} \quad (3.14)$$

allerdings jetzt mit einer von der aktuellen *Lage des MTS* abhängigen Darstellung

$$\begin{aligned} V_i^{(L)} &= \dot{\Psi}_i, & \Psi_i &= L_{ij}(\bar{x}, t)\dot{q}^j + \Psi_{i0}(\bar{x}, t), & L_{ij} &= L_{ji}, \\ V_i^{(R)} &= R_{ij}(\bar{x}, t)\dot{q}^j, & R_{[ij]} &= \text{const.}, \\ V_i^{(C)} &= C_{ij}(\bar{x}, t)\dot{q}^j + C_{i0}(\bar{x}, t), & C_{ij} &= C_{ji}, \\ V_{i0} &= V_{i0}(t) \end{aligned} \quad (3.15)$$

( $\bar{x} = (\bar{x}_k^s)$  – Starrkörperkoordinaten des MTS,  $C_{i0}$  – mechanisch erzeugte Spannungen infolge Elektrete). Die Konstitutivparameter der Induktoren, Kondensatoren, Permanentmagnete und Elektrete sowie der symmetrische Anteil der Resistoren (zugelassen sind nur quasilineare) dürfen somit Funktionen der mechanischen Starrkörperkoordinaten und der Zeit sein.

#### 3.2.4.2 Maschenspannungen

Zunächst werden sämtliche im ETS auftretenden Maschenspannungen mittels der Zustandsfunktionen  $\Psi$ ,  $V$  und  $D$  ausgedrückt.

Infolge der ausschließlichen Betrachtung diskreter EMS und damit der Anwendung der Kirchhoff-Theorie (als quasistationäre Näherung der Maxwell-Gleichungen) hängt das magnetomechanische Copotenzial  $\Psi$  nicht von den Ladungen  $q^\mu$  ab. Deshalb wird in (3.10)  $v_\mu^{(0)} = -\partial_\mu \Psi \equiv 0$ . Mit der Klasseneinteilung (3.9) und den in Abschnitt 3.2.3 erwähnten

Strukturaussagen ([143], [144]) folgt daraus eine Zerlegung der Maschenspannungen  $v_\mu$  gemäß

$$v_\mu = \dot{\psi}_\mu + v_\mu^{(1)} + v_\mu^{(2)}$$

mit

$$\begin{aligned}\psi_\mu &\equiv A^i{}_\mu \Psi_i = l_{\mu\nu}(q^\sigma, t) \dot{q}^\nu + \psi_{\mu 0}(q^\sigma, t), \\ v_\mu^{(1)} &= w_{\mu\nu} \dot{q}^\nu + c_{\mu\nu}(q^\sigma, t) q^\nu + \zeta_{\mu 0}(q^\sigma, t) + v_{\mu 0}(t), \\ v_\mu^{(2)} &= s_{\mu\nu}(q^\sigma, t) \dot{q}^\nu + s_\mu(q^\sigma, t),\end{aligned}$$

wobei folgende, auf Fundamentalkreise bezogene Konstitutivparameter („konstitutive Maschenparameter“) verwendet werden:

$$\begin{aligned}l_{\mu\nu} &:= A^i{}_\mu A^j{}_\nu L_{ij}[\bar{x}(q^\sigma, t), t], \\ \psi_{\mu 0} &:= A^i{}_\mu \{L_{ij}[\bar{x}(q^\sigma, t), t] \dot{q}_0^j(t) + \Psi_{i0}[\bar{x}(q^\sigma, t), t]\}, \\ w_{\mu\nu} &:= A^i{}_\mu A^j{}_\nu R_{[ij]}, \\ c_{\mu\nu} &:= A^i{}_\mu A^j{}_\nu C_{ij}[\bar{x}(q^\sigma, t), t], \\ \zeta_{\mu 0} &:= A^i{}_\mu \{C_{ij}[\bar{x}(q^\sigma, t), t] \dot{q}_0^j(t) + C_{i0}[\bar{x}(q^\sigma, t), t]\}, \\ v_{\mu 0} &:= A^i{}_\mu V_{i0}(t), \\ s_{\mu\nu} &:= A^i{}_\mu A^j{}_\nu R_{(ij)}[\bar{x}(q^\sigma, t), t], \\ s_\mu &:= A^i{}_\mu \{R_{(ij)}[\bar{x}(q^\sigma, t), t] + R_{[ij]}\} \dot{q}_0^j(t).\end{aligned}\tag{3.16a}$$

Später werden auch die Abkürzungen

$$\begin{aligned}r_{\mu\nu} &:= s_{\mu\nu} + w_{\mu\nu} = A^i{}_\mu A^j{}_\nu (R_{(ij)}(q^\sigma, t) + R_{[ij]}), \\ w_\mu &:= \zeta_{\mu 0} + v_{\mu 0} = A^i{}_\mu [C_{ij}(q^\sigma, t) \dot{q}_0^j(t) + C_{i0}(q^\sigma, t) + V_{i0}(t)]\end{aligned}\tag{3.16b}$$

verwendet. Die  $v_\mu$ -Anteile können dann dargestellt werden mittels

$$\psi_\mu = \dot{\partial}_\mu \Psi, \quad v_\mu^{(1)} = -\delta_\mu V^{(el)}, \quad v_\mu^{(2)} = \dot{\partial}_\mu D^{(el)},\tag{3.17}$$

wobei  $(\cdot)^{(el)}$  denjenigen Anteil der jeweiligen Zustandsfunktion bezeichnet, aus dem sich die Maschenspannungen gemäß (3.17) vollständig ableiten lassen (d.h.  $\delta_\mu(V - V^{(el)}) \equiv 0$ ). Die entsprechenden Zustandsfunktionsanteile lauten (siehe Anhang, Abschnitt A.3.2)

$$\Psi := \frac{1}{2} l_{\mu\nu}(q^\sigma, t) \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu + \psi_{\mu 0}(q^\sigma, t) \dot{q}^\mu + \tilde{\Psi}(q^\sigma, t),\tag{3.18a}$$

$$\begin{aligned}V^{(el)} &:= \omega_\nu^{(el)}(q^\omega) \dot{q}^\nu + \omega_0^{(el)}(q^c, t) \\ &:= \frac{1}{2} w_{\mu\nu} q^\mu \dot{q}^\nu + \frac{1}{2} c_{\mu\nu}(q^\sigma, t) q^\mu q^\nu + [\zeta_{\mu 0}(q^\sigma, t) + v_{\mu 0}(t)] q^\mu + \tilde{\omega}_0^{(el)}(q^\sigma, t),\end{aligned}\tag{3.18b}$$

$$D^{(el)} := \frac{1}{2} s_{\mu\nu}(q^\sigma, t) \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu + s_\mu(q^\sigma, t) \dot{q}^\mu\tag{3.18c}$$

mit

$$\tilde{\Psi} := \int \tilde{Q}_\kappa^{(0)}(q^\sigma, t) dq^\kappa \quad \text{und} \quad \tilde{\omega}_0^{(el)} := - \int \tilde{Q}_\kappa^{(1)}(q^\sigma, t) dq^\kappa.\tag{3.19}$$

Die Struktur der „Absolut“-anteile  $\tilde{\Psi}$  und  $\tilde{\omega}_0^{(el)}$  der Zustandsfunktionen (nicht explizit abhängig von elektrischen Koordinaten) lässt sich ermitteln (siehe Anhang, Abschnitt A.3.2). Es ergibt sich schließlich

$$\tilde{\Psi}(q^\sigma, t) = \frac{1}{2}L_{ij}(q^\sigma, t)\dot{q}_0^i\dot{q}_0^j + \Psi_{i0}(q^\sigma, t)\dot{q}_0^i, \quad (3.20a)$$

$$\tilde{\omega}_0^{(el)}(q^\sigma, t) = \frac{1}{2}C_{ij}(q^\sigma, t)q_0^i q_0^j + C_{i0}(q^\sigma, t)q_0^i + V_{i0}(t)q_0^i. \quad (3.20b)$$

### 3.2.4.3 Kraftgesetze

Die generalisierten Kräfte  $Q_\kappa$  sind eine Superposition aus Anteilen rein mechanischen Ursprungs und elektrischen Ursprungs

$$Q_\kappa := Q_\kappa^{(me)} + Q_\kappa^{(el)}.$$

Für die Kräfte rein mechanischen Ursprungs  $Q_\kappa^{(me)}$  kann die Zustandsfunktion  $\Psi$  wegen (3.18a) keinen Anteil liefern. Dann können folgende Kraftgesetze zugelassen werden:

$$Q_\kappa^{(me)} := \delta_\kappa V^{(me)} - \dot{\partial}_\kappa D^{(me)} = -r_{\kappa\lambda}(q^\sigma, t)\dot{q}^\lambda - r_{\kappa 0}(q^\sigma, t).$$

Mit  $r_{[\kappa\lambda]} := w_{\kappa\lambda}$  und unter der Voraussetzung  $\partial_\rho w_{\kappa\lambda} + \partial_\lambda w_{\rho\kappa} + \partial_\kappa w_{\lambda\rho} = 0$  ist

$$2\partial_{[\lambda}\bar{r}_{\kappa]0} = \partial_0 w_{\kappa\lambda}$$

ein vollständig integrables partielles Differenzialgleichungssystem, aus dem sich eine spezielle Lösung  $\bar{r}_{\kappa 0}$  bestimmen lässt (vgl. [144]). Dann können aus

$$2\partial_{[\lambda}\omega_\kappa^{(me)}] = w_{\lambda\kappa}, \quad 2\partial_{[\lambda}\omega_0^{(me)}] = \bar{r}_{\lambda 0} \quad (3.21)$$

die Funktionen  $\omega_\kappa^{(me)}$  und  $\omega_0^{(me)}$  berechnet werden. Damit und mit  $s_\kappa := r_{\kappa 0} - \bar{r}_{\kappa 0}$ ,  $s_{\kappa\lambda} := r_{(\kappa\lambda)}$  ergeben sich diejenigen Anteile der Zustandsfunktionen  $V$  und  $D$ , aus denen die rein mechanischen Kräfte hervorgehen, zu

$$\begin{aligned} V^{(me)} &:= \omega_\kappa^{(me)}(q^\sigma, t)\dot{q}^\kappa + \omega_0^{(me)}(q^\sigma, t), \\ D^{(me)} &:= \frac{1}{2}s_{\kappa\lambda}(q^\sigma, t)\dot{q}^\kappa\dot{q}^\lambda + s_\kappa(q^\sigma, t)\dot{q}^\kappa. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Die Kräfte elektrischen Ursprungs  $Q_\kappa^{(el)}$  lassen sich aus (3.18) ableiten. Wegen  $\dot{\partial}_\kappa D^{(el)} \equiv 0$  ergeben sie sich zu

$$Q_\kappa^{(el)} := -\delta_\kappa(\Psi - V^{(el)}) = \partial_\kappa \Psi + \delta_\kappa V^{(el)}.$$

Die „Absolut“-anteile  $\tilde{\Psi}$  und  $\tilde{\omega}_0^{(el)}$  der verwendeten Zustandsfunktionen in (3.18) liefern noch entsprechende Anteile  $\tilde{Q}_\kappa^{(0)}$  und  $\tilde{Q}_\kappa^{(1)}$  der generalisierten Kräfte. Mit (3.19) folgt aus (3.20)

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_\kappa^{(0)}(q^\sigma, t) &= \frac{1}{2}\partial_\kappa L_{ij}(q^\sigma, t)\dot{q}_0^i\dot{q}_0^j + \partial_\kappa \Psi_{i0}(q^\sigma, t)\dot{q}_0^i, \\ \tilde{Q}_\kappa^{(1)}(q^\sigma, t) &= -\frac{1}{2}\partial_\kappa C_{ij}(q^\sigma, t)q_0^i q_0^j - \partial_\kappa C_{i0}(q^\sigma, t)q_0^i. \end{aligned}$$

Schließlich lässt sich mit (3.11) sowie (2.12), (3.18) und (3.22) ein Lagrange'sches Modell  $\{\Lambda, D\}$  des EMS formulieren. Wegen  $g_{\kappa\mu} = g_{\mu\kappa} \equiv 0$  und  $s_{\kappa\mu} = s_{\mu\kappa} \equiv 0$  lautet es

$$\begin{aligned}\Lambda &:= T + \Psi - V^{(me)} - V^{(el)} \\ &= \frac{1}{2}g_{\kappa\lambda}\dot{q}^\kappa\dot{q}^\lambda + \bar{g}_{\kappa 0}\dot{q}^\kappa + \frac{1}{2}\bar{g}_{00} + \frac{1}{2}l_{\mu\nu}\dot{q}^\mu\dot{q}^\nu + \psi_{\mu 0}\dot{q}^\mu + \tilde{\Psi} - \\ &\quad - \omega_\kappa^{(me)}\dot{q}^\kappa - \omega_0^{(me)} - \omega_\mu^{(el)}\dot{q}^\mu - \omega_0^{(el)},\end{aligned}\tag{3.23}$$

$$\begin{aligned}D &:= D^{(me)} + D^{(el)} \\ &= \frac{1}{2}s_{\kappa\lambda}\dot{q}^\kappa\dot{q}^\lambda + s_\kappa\dot{q}^\kappa + \frac{1}{2}s_{\mu\nu}\dot{q}^\mu\dot{q}^\nu + s_\mu\dot{q}^\mu\end{aligned}$$

mit  $g_{\kappa\lambda}$ ,  $\bar{g}_{\kappa 0}$ ,  $\bar{g}_{00}$  gemäß (2.13) des mechanischen Teilsystems,  $\omega_\kappa^{(me)}$ ,  $\omega_0^{(me)}$  gemäß (3.21) und  $\omega_\mu^{(el)}$ ,  $\omega_0^{(el)}$  gemäß (3.18b).

### 3.2.5 Struktur der Lagrange'schen Bewegungsgleichungen

Aus (3.23) folgt, dass beide Zustandsfunktionen des Lagrange'schen Modells  $\{\Lambda, D\}$  quadratisch in  $\dot{q}^\alpha$  sind:

$$\Lambda = \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}(q, t)\dot{q}^\alpha\dot{q}^\beta, \quad D = \frac{1}{2}s_{\alpha\beta}(q, t)\dot{q}^\alpha\dot{q}^\beta.$$

Wegen  $(\dot{\partial}_a \Lambda) = (g_{ab}\dot{q}^b) = g_{ab}\ddot{q}^b + \partial_\gamma g_{ab}\dot{q}^b\dot{q}^\gamma$  und  $\partial_a \Lambda = \frac{1}{2}\partial_a g_{\beta\gamma}\dot{q}^\beta\dot{q}^\gamma$  sowie  $\dot{\partial}_a D = s_{a\beta}\dot{q}^\beta$  ergeben sich mit  $\Gamma_{a\beta\gamma} = \frac{1}{2}(\partial_\beta g_{a\gamma} + \partial_\gamma g_{a\beta} - \partial_a g_{\beta\gamma}) = \Gamma_{a\gamma\beta}$  die Lagrange'schen Gleichungen (3.12) in expliziter Form zu

$$g_{ab}(q, t)\ddot{q}^b + \Gamma_{a\beta\gamma}(q, t)\dot{q}^\beta\dot{q}^\gamma + s_{a\beta}\dot{q}^\beta = 0.\tag{3.24}$$

Dabei ist

$$g_{ab} := \dot{\partial}_a \dot{\partial}_b \Lambda = g_{ba}.$$

Mit  $\Lambda = T + \Psi - V$  sowie  $g_{\kappa\lambda} = \dot{\partial}_\kappa \dot{\partial}_\lambda T$  und  $g_{\mu\nu} = \dot{\partial}_\mu \dot{\partial}_\nu \Psi = l_{\mu\nu}$  folgt

$$(g_{ab}) = \begin{bmatrix} g_{\kappa\lambda} & 0 \\ 0 & g_{\mu\nu} \end{bmatrix},\tag{3.25}$$

d.h.,  $g_{ab}$  ist direkte Summe der beiden Matrizen  $g_{\kappa\lambda}$  und  $g_{\mu\nu}$  ( $(g_{ab}) = (g_{\kappa\lambda}) \oplus (g_{\mu\nu})$ ). Wegen der quasi-stationären Näherung der Maxwell-Theorie ( $\partial_\mu \Psi \equiv 0$ ) ist  $g_{ab}$  unabhängig von  $q^\mu$ . Wenn  $g_{\mu\nu}$  regulär ist, dann ist  $g_{ab}$  ebenfalls regulär (wegen der positiven Definitheit der kinetischen Energie  $T$  ist  $g_{\kappa\lambda}$  immer regulär). Unter diesen Voraussetzungen definiert  $g_{ab}(q^\sigma, t)$  eine im Allgemeinen zeitabhängige Riemann'sche Metrik im  $\mathbb{R}^{n+m}$  und die  $\Gamma_{abc}(q^\sigma, t)$  sind die Christoffelsymbole erster Art.

Wegen (3.25) lässt sich (3.24) zerlegen in zwei Systeme von Differenzialgleichungen. Die „mechanischen“ Gleichungen sind durch das Auftreten mechanischer Beschleunigungen ( $\ddot{q}^\lambda$ ) und die „elektrischen“ Gleichungen durch das Auftreten der zeitlichen Ableitungen der elektrischen Ströme als „Beschleunigungen“ der elektrischen Ladungen ( $\dot{q}^\nu$ )

gekennzeichnet. Die Anführungsstriche sollen verdeutlichen, dass beide Systeme ebenso Zustandsvariable des jeweils anderen Systems enthalten. Sie beschreiben also nicht nur domänenspezifische Verhältnisse sondern ebenso domänenübergreifende physikalische Effekte (die elektromechanischen Wechselwirkungen).

Für die in den „mechanischen“ Gleichungen auftretenden Christoffelsymbole  $\Gamma_{\kappa bc}$  gilt

$$\begin{aligned}\Gamma_{\kappa\lambda\rho} &= \frac{1}{2}(\partial_\lambda g_{\kappa\rho} + \partial_\rho g_{\kappa\lambda} - \partial_\kappa g_{\lambda\rho}), \\ \Gamma_{\kappa\lambda\nu} &= \Gamma_{\kappa\nu\lambda} \equiv 0, \quad \Gamma_{\kappa\nu\omega} = -\frac{1}{2}\partial_\kappa g_{\nu\omega} = -\frac{1}{2}\partial_\kappa l_{\nu\omega}\end{aligned}\quad (3.26a)$$

und für die in den „elektrischen“ Gleichungen auftretenden  $\Gamma_{\mu bc}$  gilt

$$\Gamma_{\mu\lambda\rho} \equiv 0, \quad \Gamma_{\mu\lambda\nu} = \Gamma_{\mu\nu\lambda} = \frac{1}{2}\partial_\lambda g_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\partial_\lambda l_{\mu\nu}, \quad \Gamma_{\mu\nu\omega} \equiv 0. \quad (3.26b)$$

Die Zerlegung von (3.24) in „mechanische“ und „elektrische“ Gleichungen gemäß (3.25) liefert somit

$$\begin{aligned}g_{\kappa\lambda}\ddot{q}^\lambda + \Gamma_{\kappa\lambda\rho}\dot{q}^\lambda\dot{q}^\rho - \frac{1}{2}\partial_\kappa g_{\nu\omega}\dot{q}^\nu\dot{q}^\omega + (2\Gamma_{\kappa b0} + s_{\kappa b})\dot{q}^b + \Gamma_{\kappa 00} + s_{\kappa 0} &= 0, \\ g_{\mu\nu}\ddot{q}^\nu + \partial_\lambda g_{\mu\nu}\dot{q}^\lambda\dot{q}^\nu + (2\Gamma_{\mu b0} + s_{\mu b})\dot{q}^b + \Gamma_{\mu 00} + s_{\mu 0} &= 0.\end{aligned}\quad (3.27)$$

Die Gleichungen (3.27) sind die expliziten Lagrange'schen Bewegungsgleichungen des Gesamt-EMS in „domänenorientierter“ Darstellung. Diese Struktur der Lagrange'schen Gleichungen resultiert aus (3.24) formal durch eine Klasseneinteilung der generalisierten Koordinaten  $q = (q^\kappa, q^\mu)$  gemäß (3.9) in Verbindung mit der Darstellung des  $q^\mu$ -unabhängigen Maßtensors  $g_{ab}$  als direkte Summe von  $g_{\kappa\lambda}$  und  $g_{\mu\nu}$ . *Die Gleichungen (3.27) stellen den Ausgangspunkt für alle weiteren Untersuchungen von EMS in dieser Arbeit dar.*

Einige Terme in (3.27) haben eine einfache physikalische Bedeutung. Bekanntermaßen steht zum Beispiel  $g_{\kappa\lambda}\ddot{q}^\lambda$  für die (generalisierten) mechanischen Beschleunigungskräfte und  $\Gamma_{\kappa\lambda\rho}\dot{q}^\lambda\dot{q}^\rho$  enthält rein mechanische Coriolis- und Zentrifugalterme. Weiterhin verkörpert  $\frac{1}{2}\partial_\kappa g_{\nu\omega}\dot{q}^\nu\dot{q}^\omega$  generalisierte mechanische Kräfte elektrischer Herkunft (Lorentz-Kräfte). Der Term  $g_{\mu\nu}\ddot{q}^\nu$  beschreibt induzierte Spannungen infolge Stromänderungen und  $\partial_\lambda g_{\mu\nu}\dot{q}^\lambda\dot{q}^\nu$  definiert Coriolis-Spannungen.

Die in (3.27) auftretenden Christoffel-Symbole  $\Gamma_{ab0}$  und  $\Gamma_{a00}$  berechnen sich aus den Zustandsfunktionen  $T$ ,  $\Psi$ ,  $V$  wegen  $\partial_\nu T \equiv 0$ ,  $\partial_\kappa \partial_\nu V_1 \equiv 0$  (siehe (3.18b)),  $g_{\kappa\nu} \equiv 0$ ,  $\partial_\nu \partial_\kappa V_1 \equiv 0$  (siehe (3.22)),  $\partial_\mu \partial_\nu \Psi_1 \equiv 0$  (siehe (3.18a)),  $\partial_0 \partial_\mu V_1 \equiv 0$  (siehe (3.18b)) zu:

$$\begin{aligned}\Gamma_{\kappa\lambda 0} &= \frac{1}{2}\partial_0 \dot{\partial}_\kappa \dot{\partial}_\lambda T_2 - \partial_{[\kappa} \dot{\partial}_{\lambda]} T_1 - \partial_{[\lambda} \dot{\partial}_{\kappa]} V_1, & \Gamma_{\kappa\nu 0} &= -\frac{1}{2}\partial_\kappa \dot{\partial}_\nu \Psi_1, \\ \Gamma_{\kappa 00} &= \partial_0 \dot{\partial}_\kappa (T_1 - V_1) - \partial_\kappa (T_0 + \Psi_0 - V_0), \\ \Gamma_{\mu\lambda 0} &= -\Gamma_{\kappa\nu 0}, & \Gamma_{\mu\nu 0} &= \frac{1}{2}\partial_0 \dot{\partial}_\mu \dot{\partial}_\nu \Psi_2 - \partial_{[\nu} \dot{\partial}_{\mu]} V_1, & \Gamma_{\mu 00} &= \partial_0 \dot{\partial}_\mu \Psi_1 + \partial_\mu V_0.\end{aligned}$$

Hierbei bezeichnen  $T_i$ ,  $\Psi_i$ ,  $V_i$  ( $i = 0, 1, 2$ ) jeweils in den generalisierten Geschwindigkeiten  $\dot{q}^a$  homogene Polynome  $i$ -ten Grades (vgl. Anhang, Abschnitt A.3.2.4). Sie sind (2.12), (3.18a) bzw. (A.25) zu entnehmen.

Später wird gelegentlich eine vereinfachte Form der Bewegungsgleichungen (3.27) verwendet. Dabei werden in den „mechanischen“ Gleichungen in Anlehnung an die Form (2.14) die rein mechanischen generalisierten Kräfte in  $Q_\kappa^{(me)}$  und die elektromagnetisch erzeugten Kräfte in  $Q_\kappa^{(el)}$  zusammengefasst. Es ergibt sich rein formal

$$Q_\kappa^{(me)} = - \left( 2\Gamma_{\kappa b 0}^{(me)} + s_{\kappa b}^{(me)} \right) \dot{q}^b - \Gamma_{\kappa 0 0}^{(me)} - s_{\kappa 0}^{(me)}, \quad (3.28a)$$

$$Q_\kappa^{(el)} = \frac{1}{2} \partial_\kappa g_{\nu\omega} \dot{q}^\nu \dot{q}^\omega - \left( 2\Gamma_{\kappa b 0}^{(el)} + s_{\kappa b}^{(el)} \right) \dot{q}^b - \Gamma_{\kappa 0 0}^{(el)} - s_{\kappa 0}^{(el)}. \quad (3.28b)$$

In den „elektrischen“ Gleichungen werden die Terme nach den Ableitungen der generalisierten elektrischen Koordinaten sortiert. Die Bewegungsgleichungen lauten dann

$$g_{\kappa\lambda}(q^\sigma, t) \ddot{q}^\lambda + \Gamma_{\kappa\lambda\rho}(q^\sigma, t) \dot{q}^\lambda \dot{q}^\rho - Q_\kappa^{(me)}(\dot{q}^\sigma, q^\sigma, t) - Q_\kappa^{(el)}(q^\sigma, \dot{q}^\omega, q^\omega, t) = 0, \quad (3.29a)$$

$$l_{\mu\nu}(q^\sigma, t) \ddot{q}^\nu + \tilde{r}_{\mu\nu}(\dot{q}^\sigma, q^\sigma, t) \dot{q}^\nu + c_{\mu\nu}(q^\sigma, t) q^\nu + \tilde{v}_{\mu 0}(\dot{q}^\sigma, q^\sigma, t) = 0, \quad (3.29b)$$

wobei gilt

$$\begin{aligned} l_{\mu\nu} &= A^i_\mu A^j_\nu L_{ij}(q^\sigma, t), \\ \tilde{r}_{\mu\nu} &:= \partial_\lambda l_{\mu\nu} \dot{q}^\lambda + \partial_0 l_{\mu\nu} + A^i_\mu A^j_\nu R_{ij}(q^\sigma, t), \\ c_{\mu\nu} &= A^i_\mu A^j_\nu C_{ij}(q^\sigma, t), \\ \tilde{v}_{\mu 0} &:= \partial_\lambda \psi_{\mu 0}(q^\sigma, t) \dot{q}^\lambda + \partial_0 \psi_{\mu 0}(q^\sigma, t) + \\ &\quad + A^i_\mu [R_{ij}(q^\sigma, t) \dot{q}_0^j(t) + C_{ij}(q^\sigma, t) q_0^j(t) + C_{i0}(q^\sigma, t) + V_{i0}(t)] \end{aligned} \quad (3.30)$$

(mit  $\psi_{\mu 0} = A^i_\mu [L_{ij}(q^\sigma, t) \dot{q}_0^j(t) + \Psi_{i0}(q^\sigma, t)]$ ).

Auch in EMS ist die magnetische Coenergie  $\Psi$  eine quadratische Funktion in den Zweigströmen durch die im Netzwerk vorhandenen Induktoren (vgl. Anhang, Abschnitt A.3.2.1). Wegen der generellen Nichtnegativität der magnetischen Coenergie sind somit  $L_{ij}$  und  $l_{\mu\nu}$  positiv semidefinit. Für (3.29b) gelten deshalb die Ausführungen in Abschnitt 2.3.3.6 bezüglich Rangabfall der Koeffizientenmatrix  $l_{\mu\nu}$  in gleicher Weise. Auch hier ist eine Ordnungsreduktion bzw. Entartung der Differenzialgleichungen oder eine lineare Abhängigkeit der Koeffizienten möglich. Bei strukturellem Rangabfall infolge Abwesenheit von Induktoren wird eine Klasseneinteilung der generalisierten Koordinaten  $q^\mu$  eingeführt, die die Existenz zunächst von Induktoren in Fundamentalkreisen und danach von Resistoren in den induktorfreen Maschen berücksichtigt. Nähere Ausführungen dazu finden sich in Abschnitt 4.1.3.1.

Ein klassisches Beispiel für eine permanent vorliegende lineare Abhängigkeit der Koeffizienten (und damit für einen Rangabfall nach (b), siehe Bemerkungen in Abschnitt 2.3.3.6) ist das Modell in erster Näherung des elektrischen Teilsystems der in der Antriebstechnik weit verbreiteten Dreiphasenmaschine. Hier macht eine Klasseneinteilung der generalisierten Koordinaten keinen Sinn. Stattdessen kann entweder eine Matrixregularisierung mit zusätzlichen (vergleichsweise kleinen) Induktivitäten in der Hauptdiagonale oder eine geeignete Koordinatentransformation vorgenommen werden (vgl. hierzu z.B. Kapitel 8 in [36]).

### 3.3 EMS mit zusätzlichen Bindungen

In diesem Abschnitt wird die einheitliche Modellierung eines EMS mit zusätzlichen Bindungen vorgestellt. Solche Systeme sollen als CEMS („Constrained Electromechanical Systems“) bezeichnet werden. Die Darstellung basiert auf der CMS-Modellierung für mechanische Systeme (siehe Abschnitt 2.2.4) und der CES-Formulierung (mittels Nicht-Minimalkoordinaten) für elektrische Systeme (siehe Abschnitt 2.3.4).

#### 3.3.1 Kinematische und holonome Bindungen des EMS

Als zusätzliche Bindungen sollen nur „domänenreine“ Bindungen zugelassen werden, d.h., es werden keine Zwangsbedingungen zwischen mechanischen und elektrischen Koordinaten betrachtet. Die Gesamtheit der EMS-Bindungen zerfällt in (mechanische und elektrische) holonome rheonome Bindungen (vgl. (2.20) und (2.54))

$$h^{c_h}(q, t) = 0, \quad c_h \in J_{c_h} \cup \Gamma_0, \quad |\{c_h\}| = r_h, \quad (3.31)$$

und in (rein mechanische) anholonome Bindungen (vgl. (2.21))

$$h^{\sigma_a}_\kappa(q)\dot{q}^\kappa = 0, \quad \sigma_a \in J_{c_a}, \quad |\{\sigma_a\}| = r_{ma}. \quad (3.32)$$

In (3.31) gelte  $h^{\sigma_h} = h^{\sigma_h}(q^\kappa, t)$ ,  $\sigma_h \in J_{c_h}$ , und  $h^{j_0} = h^{j_0}(q^\mu, t)$ ,  $j_0 \in \Gamma_0$ . Weiterhin sei

$$f^{c_1}_\alpha := \begin{cases} \partial_\alpha h^{c_h}, & c_1 = c_h, \\ h^{\sigma_a}_\kappa, & c_1 = \sigma_a, \alpha = \kappa, \end{cases}$$

mit  $\text{rang}(f^{c_1}_\alpha) = r < n + m^\#$ ,  $r = r_h + r_{ma}$ , in einem gewissen Gebiet  $D \subset \mathbb{R}^{(n+m^\#)}$  (d.h., es sollen in beiden Teilsystemen keine abhängigen Bindungen auftreten). Dann definiert die Gesamtheit aller kinematischen (holonomen rheonomen und anholonomen) Bindungen im Punkt  $q$  des CEMS-Konfigurationenraumes eine  $(n + m^\# - r)$ -dimensionale Hyperebene  $\mathbb{E}_r$  mittels

$$f^{c_1}_\alpha(q, t)\dot{q}^\alpha = 0. \quad (3.33)$$

Die Ableitungen der kinematischen Zwangsbedingungen (3.33) nach der Zeit  $t$  heißen *dynamische* Zwangsbedingungen:

$$(f^{c_1}_\alpha \dot{q}^\alpha)' = f^{c_1}_\alpha \ddot{q}^\alpha + \gamma^{c_1}_{\alpha\beta} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta = 0, \quad \gamma^{c_1}_{\alpha\beta} := \partial_\beta f^{c_1}_\alpha. \quad (3.34)$$

Dabei gilt  $f^{\varrho_1}_\mu \equiv 0$  (d.h. auch  $\gamma^{\varrho_1}_{\mu\alpha} \equiv 0$ ),  $f^{j_0}_\kappa \equiv 0$  (d.h. auch  $\gamma^{j_0}_{\kappa\alpha} \equiv 0$ ) und weiter  $\gamma^{j_0}_{\mu\beta} \equiv 0$  (elektrisch *lineare* Bindungen), weshalb (3.34) schließlich lautet

$$(f^{c_1}_\alpha \dot{q}^\alpha)' = \begin{cases} f^{\varrho_1}_\kappa \ddot{q}^\kappa + \gamma^{\varrho_1}_{\kappa\lambda} \dot{q}^\kappa \dot{q}^\lambda + 2\gamma^{\varrho_1}_{\kappa 0} \dot{q}^\kappa + \gamma^{\varrho_1}_{00} = 0, & c_1 = \varrho_1, \\ f^{j_0}_\mu \ddot{q}^\mu + \gamma^{j_0}_{00} = A^{j_0}_\mu \ddot{q}^\mu - \ddot{q}_0^{j_0}(t) = 0 & , \quad c_1 = j_0. \end{cases} \quad (3.35)$$

Der Freiheitsgrad des CEMS (im Kleinen) ist  $n + m^\# - r$ .



### 3.3.2 Bewegungsgleichungen

Nach dem Lagrange'schen Befreiungsprinzip entsprechen den Bindungen (3.33) gewisse verallgemeinerte Reaktionskräfte  $R_a$ . Damit werden die Lagrange'schen Bewegungsgleichungen (3.29) zu

$$g_{\kappa\lambda}\ddot{q}^\lambda + \Gamma_{\kappa\lambda\rho}\dot{q}^\lambda\dot{q}^\rho - Q_\kappa^{(me)} - Q_\kappa^{(el)} = R_\kappa, \quad (3.36a)$$

$$l_{\mu\nu}\ddot{q}^\nu + \tilde{r}_{\mu\nu}\dot{q}^\nu + c_{\mu\nu}q^\nu + \hat{v}_{\mu 0} = R_\mu \quad (3.36b)$$

mit  $\hat{v}_{\mu 0} = A^i_\mu \left( \dot{\Psi}_{i0}(q^\sigma, t) + C_{i0}(q^\sigma, t) + V_{i0}(t) \right)$  an Stelle von  $\tilde{v}_{\mu 0}$  (vgl. Bemerkung in Abschnitt 2.3.4.1).

Bei idealen Bindungen steht der Vektor  $R_a$  senkrecht auf der Hyperebene  $\mathbb{E}_r$  und ist eine Linearkombination der  $r$  (jetzt  $(n + m^\#)$ -dimensionalen) Normalenvektoren  $f^{c_1}_a$  ( $c_1 = 1, \dots, r$ ,  $a = 1, \dots, n + m^\#$ ). Somit lassen sich die Reaktionen mit Hilfe von Lagrange-Multiplikatoren  $\lambda_{c_1}$  darstellen gemäß

$$R_a = \lambda_{c_1} f^{c_1}_a$$

und die CEMS-Bewegungsgleichungen (3.36) lauten explizit (mit  $i_0 \in \Gamma_0$ )

$$g_{\kappa\lambda}\ddot{q}^\lambda + \Gamma_{\kappa\lambda\rho}\dot{q}^\lambda\dot{q}^\rho - Q_\kappa^{(me)} - Q_\kappa^{(el)} = \lambda_{\rho 1} f^{\rho 1}_\kappa, \quad (3.37a)$$

$$l_{\mu\nu}\ddot{q}^\nu + \tilde{r}_{\mu\nu}\dot{q}^\nu + c_{\mu\nu}q^\nu + \hat{v}_{\mu 0} = \lambda_{i_0} A^{i_0}_\mu. \quad (3.37b)$$

Sie heißen Lagrange'sche Gleichungen gemischten Typs. Bei bekanntem Bewegungszustand  $(\dot{q}, q)$  des CEMS können mit (3.37) und (3.35) die Beschleunigungen  $\ddot{q}^a(t) = (\ddot{q}^\lambda(t), \ddot{q}^\nu(t))$  und die Lagrange-Multiplikatoren  $\lambda_{c_1}(t) = (\lambda_{\rho 1}(t), \lambda_{i_0}(t))$  gemäß

$$g_{\kappa\lambda}\ddot{q}^\lambda - f^{\rho 1}_\kappa \lambda_{\rho 1} = Q_\kappa^{(me)} + Q_\kappa^{(el)} - \Gamma_{\kappa\lambda\rho}\dot{q}^\lambda\dot{q}^\rho, \quad (3.38a)$$

$$f^{\kappa 1}_\lambda \ddot{q}^\lambda = -\gamma^{\kappa 1}_{\lambda\rho}\dot{q}^\lambda\dot{q}^\rho - 2\gamma^{\kappa 1}_{\lambda 0}\dot{q}^\lambda - \gamma^{\kappa 1}_{00}, \quad (3.38b)$$

$$l_{\mu\nu}\ddot{q}^\nu - A^{i_0}_\mu \lambda_{i_0} = -\tilde{r}_{\mu\nu}\dot{q}^\nu - c_{\mu\nu}q^\nu - \hat{v}_{\mu 0}, \quad (3.38c)$$

$$A^{j_0}_\nu \ddot{q}^\nu = \ddot{q}_0^{j_0}(t) \quad (3.38d)$$

bestimmt werden. Zur Einhaltung der Bindungen auf „Lageebene“ (d.h. auch Ladungsniveau) und „Geschwindigkeitsebene“ (d.h. auch Stromniveau) ist eine Stabilisierung notwendig. Mit den Bezeichnungen

$$(G_{ab}) := \left[ \begin{array}{cc|cc} (g_{\kappa\lambda}) & (f^{\rho 1}_\kappa)^T & 0 & 0 \\ (f^{\kappa 1}_\lambda) & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & (l_{\mu\nu}) & (A^{i_0}_\mu)^T \\ 0 & 0 & (A^{j_0}_\nu) & 0 \end{array} \right], \quad (X^b) := \begin{bmatrix} \ddot{q}^\lambda \\ -\lambda_{\rho 1} \\ \ddot{q}^\nu \\ -\lambda_{i_0} \end{bmatrix}$$

sowie

$$(\bar{Q}_a) := \begin{bmatrix} Q_\kappa^{(me)} + Q_\kappa^{(el)} - \Gamma_{\kappa\lambda\rho}\dot{q}^\lambda\dot{q}^\rho \\ -\gamma^{\kappa 1}_{\lambda\rho}\dot{q}^\lambda\dot{q}^\rho - 2\gamma^{\kappa 1}_{\lambda 0}\dot{q}^\lambda - \gamma^{\kappa 1}_{00} \\ -\tilde{r}_{\mu\nu}\dot{q}^\nu - c_{\mu\nu}q^\nu - \hat{v}_{\mu 0} \\ \ddot{q}_0^{j_0}(t) \end{bmatrix}$$

ergibt sich für (3.38) die Form

$$G_{ab}X^b = \bar{Q}_a$$

Die verallgemeinerte Massenmatrix  $g_{\kappa\lambda}$  ist stets regulär. Sowohl  $f^{\varrho_1}_{\kappa}$  als auch  $A^{i_0}_{\mu}$  haben jeweils vollen Rang. Wenn die Matrix der generalisierten Induktivitäten  $l_{\mu\nu}$  regulär ist, ist  $G_{ab}$  somit auch regulär und folglich invertierbar (und gleichzeitig symmetrisch). Mit  $X^b = G^{ba}\bar{Q}_a$  ( $G^{ab} : G^{ab}G_{bc} = \delta_c^a$ ) sind dann zu jedem festen Zeitpunkt  $t$  die Beschleunigungen  $\ddot{q}^a(t)$ , die Lagrange-Multiplikatoren  $\lambda_{c_1}(t)$  und schließlich auch die generalisierten Reaktionen gemäß

$$R_a(t) := \lambda_{c_1}(t) f^{c_1}_a(q(t)) = \begin{cases} \lambda_{\varrho_1}(t) f^{\varrho_1}_{\kappa}(q(t), t), & a = \kappa, \\ \lambda_{i_0}(t) A^{i_0}_{\mu} & , \quad a = \mu, \end{cases}$$

eindeutig bestimmt. Falls  $l_{\mu\nu}$  strukturell singulär ist, muss eine entsprechende Klasseneinteilung der generalisierten elektrischen Koordinaten vorgenommen werden. Nähere Ausführungen dazu finden sich in Abschnitt 4.1.3.2. Der Fall einer momentanen Singularität – infolge einer bestimmten Lage des mechanischen Teilsystems oder infolge der Zeitabhängigkeit – wird hier nicht behandelt.

# Kapitel 4

## Analyse elektromechanischer Systeme bei fester Struktur

Die Analyse von EMS bei fester Struktur basiert auf dem in Abschnitt 3.2.4 hergeleiteten Lagrange'sche Modell  $\{\Lambda, D\}$ . Die daraus generierten Bewegungsgleichungen werden sowohl für die dynamische Simulation also auch für die Ermittlung von stationären Lagen und die lineare Schwingungsanalyse verwendet. Im Unterschied zur allgemeinen Darstellung im vorhergehenden Kapitel werden hier eventuell auftretende Ordnungsreduktionen bzw. Entartungen der Differenzialgleichungen infolge Abwesenheit gewisser Klassen von Bauelementen in Zweigen des elektrischen Teilsystems (ETS) berücksichtigt.

### 4.1 Dynamische Simulation

Das Lagrange'sche Modell  $\{\Lambda, D\}$  gemäß (3.23) bildet die Grundlage für eine automatische Generierung der Bewegungsgleichungen (3.27) bzw. (3.29). Dabei werden die konstitutiven Maschenparameter nach (3.16) verwendet. Im Folgenden werden gelegentlich diejenigen Anteile der Zustandsfunktionen  $\Psi$  und  $V^{(el)}$  benötigt, die nur infolge Stromquellen entstehen und somit keine Funktionen der elektrischen Koordinaten sind (vgl. Abschnitt 3.2.4). Aus (3.20) ergibt sich die Ersetzung

$$g_0 := 2\tilde{\Psi} - 2\tilde{\omega}_0^{(el)} = L_{ij}\dot{q}_0^i\dot{q}_0^j - C_{ij}q_0^i q_0^j + 2\Psi_{i0}\dot{q}_0^i - 2C_{i0}q_0^i - 2V_{i0}q_0^i. \quad (4.1)$$

#### 4.1.1 Rein mechanische Kräfte

Die Objekte in den „mechanischen“ Gleichungen in (3.27) zerfallen in rein mechanische und elektrisch erzeugte Kräfte. Alle Terme, die nicht von elektrischen Koordinaten abhängen, bilden die rein mechanischen Kräfte. Neben den Trägheitskräften  $g_{\kappa\lambda}\ddot{q}^\lambda$  und den Coriolis-/Zentrifugaltermen  $\Gamma_{\kappa\lambda\varrho}\dot{q}^\lambda\dot{q}^\varrho$  sind das die in (3.28a) zu  $Q_\kappa^{(me)}$  zusammengefassten Objekte. Diese können im Einzelnen dargestellt werden durch

$$\begin{aligned} \Gamma_{\kappa\lambda 0}^{(me)} &= \frac{1}{2}\partial_0 g_{\kappa\lambda} - \partial_{[\kappa}\bar{g}_{\lambda]0} - \partial_{[\lambda}\omega_{\kappa]}^{(me)}, & \Gamma_{\kappa\nu 0}^{(me)} &= 0, \\ \Gamma_{\kappa 00}^{(me)} &= \partial_0(\bar{g}_{\kappa 0} - \omega_\kappa^{(me)}) - \frac{1}{2}\partial_\kappa\bar{g}_{00} + \partial_\kappa\omega_0^{(me)}, \\ s_{\kappa\lambda}^{(me)} &= \dot{\partial}_\kappa\dot{\partial}_\lambda D_2^{(me)}, & s_{\kappa\nu}^{(me)} &= 0, & s_{\kappa 0}^{(me)} &= \dot{\partial}_\kappa D_1^{(me)}. \end{aligned}$$

### 4.1.2 Elektrisch erzeugte Kräfte

Die „mechanischen“ Gleichungen in (3.27) enthalten Terme, die von den generalisierten elektrischen Koordinaten (oder deren ersten Zeitableitungen) abhängig sind, und/oder Terme, die nur bei Existenz von Stromquellen auftreten. Diese Objekte verkörpern zusätzliche, elektrisch (oder elektromagnetisch) erzeugte verallgemeinerte Kräfte. Sie berechnen sich gemäß (3.28b). Bei Verwendung von Minimalkoordinaten für das ETS gemäß Abschnitt 2.3.3 können die Koeffizienten in (3.28b) mit (3.16a) und (4.1) dargestellt werden durch

$$\begin{aligned} \partial_\kappa g_{\nu\omega} &= \partial_\kappa l_{\nu\omega}, \\ \Gamma_{\kappa\lambda 0}^{(el)} &= 0, & \Gamma_{\kappa\nu 0}^{(el)} &= -\frac{1}{2}\partial_\kappa \psi_{\nu 0}, \\ \Gamma_{\kappa 00}^{(el)} &= \frac{1}{2}\partial_\kappa c_{\nu\omega} q^\nu q^\omega + \partial_\kappa \zeta_{\nu 0} q^\nu - \frac{1}{2}\partial_\kappa g_0, \\ s_{\kappa b}^{(el)} &= 0, & s_{\kappa 0}^{(el)} &= 0 \end{aligned}$$

( $\nu, \omega \in H^*$ ). Damit gilt

$$Q_\kappa^{(el)} = \frac{1}{2}\partial_\kappa l_{\nu\omega} \dot{q}^\nu \dot{q}^\omega + \partial_\kappa \psi_{\nu 0} \dot{q}^\nu - \frac{1}{2}\partial_\kappa c_{\nu\omega} q^\nu q^\omega - \partial_\kappa \zeta_{\nu 0} q^\nu + \frac{1}{2}\partial_\kappa g_0 \quad (4.2)$$

( $\nu, \omega \in H^*$ ). Diese elektrisch erzeugten Kräfte realisieren den Einfluss des elektrischen auf das mechanische Teilsystem (MTS), d.h. eine Richtung der elektromechanischen Wechselwirkungen. Im Einzelnen entsprechen die Terme  $\frac{1}{2}\partial_\kappa l_{\nu\omega} \dot{q}^\nu \dot{q}^\omega$  Kräften infolge Induktoren,  $\partial_\kappa \psi_{\nu 0} \dot{q}^\nu$  realisieren Kräfte infolge Permanentmagneten (und Kräfte in Induktoren unter Beteiligung von Stromquellen),  $\frac{1}{2}\partial_\kappa c_{\nu\omega} q^\nu q^\omega$  verkörpern durch Kondensatoren vermittelte Kräfte,  $\partial_\kappa \zeta_{\nu 0} q^\nu$  stellen Kräfte aufgrund von Elektreten dar (und Kräfte in Kondensatoren unter Beteiligung von Stromquellen) und schließlich sind  $\frac{1}{2}\partial_\kappa g_0$  Kräfte, die infolge Stromquellen auch bei verschwindenden elektrischen Zustandsgrößen auftreten.

Bei Verwendung von Nicht-Minimalkoordinaten sind alle durch Stromquellen verursachten Anteile der Zweigladungen und -ströme bereits in den generalisierten elektrischen Koordinaten (und deren Zeitableitungen) enthalten. Die elektrisch erzeugten Kräfte lassen sich dann mit (3.16a) unter Beachtung von  $q_0^j(t) \equiv 0$  und  $\dot{q}_0^j(t) \equiv 0$  ermitteln. Insbesondere lauten einige Koeffizienten in (3.28b) in modifizierter Form

$$\begin{aligned} \Gamma_{\kappa\nu 0}^{(el)} &= -\frac{1}{2}\partial_\kappa \hat{\psi}_{\nu 0}, \\ \Gamma_{\kappa 00}^{(el)} &= \frac{1}{2}\partial_\kappa c_{\nu\omega} q^\nu q^\omega + \partial_\kappa \hat{\zeta}_{\nu 0} q^\nu \end{aligned}$$

mit  $\nu, \omega \in H$  sowie  $\hat{\psi}_{\nu 0} = A^i{}_\mu \Psi_{i0}(q^\sigma, t)$  und  $\hat{\zeta}_{\nu 0} = A^i{}_\mu C_{i0}(q^\sigma, t)$ . Damit gilt für die elektrisch erzeugten Kräfte ( $\nu, \omega \in H$ )

$$Q_\kappa^{(el)} = \frac{1}{2}\partial_\kappa l_{\nu\omega} \dot{q}^\nu \dot{q}^\omega + \partial_\kappa \hat{\psi}_{\nu 0} \dot{q}^\nu - \frac{1}{2}\partial_\kappa c_{\nu\omega} q^\nu q^\omega - \partial_\kappa \hat{\zeta}_{\nu 0} q^\nu.$$

**Bemerkung:**

Kräfte infolge Permanentmagneten können aus physikalischen Gründen nur bei gleichzeitiger Existenz von Induktoren auftreten. Diese Tatsache ist in Abschnitt 4.3 von Bedeutung.

### 4.1.3 Bewegungsgleichungen des ETS bei strukturellen Singularitäten

#### 4.1.3.1 Formulierung in Minimalkoordinaten

Die Koeffizienten der „elektrischen“ Gleichungen in (3.27) lassen sich mit (3.16) darstellen durch

$$\begin{aligned}
 g_{\mu\nu} &= l_{\mu\nu}, & \partial_\lambda g_{\mu\nu} &= \partial_\lambda l_{\mu\nu}, \\
 \Gamma_{\mu\lambda 0} &= \frac{1}{2} \partial_\lambda \psi_{\mu 0}, & \Gamma_{\mu\nu 0} &= \frac{1}{2} \partial_0 l_{\mu\nu} + \frac{1}{2} w_{\mu\nu}, \\
 \Gamma_{\mu 00} &= c_{\mu\nu} q^\nu + \partial_0 \psi_{\mu 0} + \zeta_{\mu 0} + v_{\mu 0}, \\
 s_{\mu\lambda} &= 0, & s_{\mu\nu} &= \dot{\partial}_\mu \dot{\partial}_\nu D_2^{(el)}, & s_{\mu 0} &= \dot{\partial}_\mu D_1^{(el)} = s_\mu.
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Somit lauten die „elektrischen“ Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned}
 l_{\mu\nu} \ddot{q}^\nu + (\partial_\lambda l_{\mu\nu} \dot{q}^\lambda + \partial_0 l_{\mu\nu} + r_{\mu\nu}) \dot{q}^\nu + c_{\mu\nu} q^\nu + \\
 + \partial_\lambda \psi_{\mu 0} \dot{q}^\lambda + \partial_0 \psi_{\mu 0} + s_\mu + \zeta_{\mu 0} + v_{\mu 0} = 0.
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Gleichung (4.4) ist identisch mit (3.29b) unter Beachtung von (3.30).

Da fast alle Terme in (4.4) Funktionen der mechanischen Koordinaten sein können, ist der Einfluss des mechanischen auf das elektrische Teilsystem (zweite Richtung der elektromechanischen Wechselwirkungen) in den Gleichungen enthalten. In Abhängigkeit von der Struktur und von den Parametern des elektrischen Netzwerkes können Terme in (4.4) verschwinden, so dass die „elektrischen“ Bewegungsgleichungen in verschiedene Spezialfälle entarten können. Bei der dynamischen Simulation müssen alle möglichen Fälle beachtet werden. Insbesondere bei Verwendung expliziter Integrationscodes (d.h. Darstellung der Differentialgleichungen in der Form  $\dot{z}^a = f^a(z, t)$ ,  $z = (z^a)$  – Vektor der Zustandsvariablen,  $t$  – Zeit) sind Unterscheidungen hinsichtlich der jeweils auftretenden höchsten zeitlichen Ableitung der generalisierten elektrischen Koordinaten zu treffen. Das steht im Gegensatz zu den „mechanischen“ Bewegungsgleichungen, die infolge der positiven Definitheit der verallgemeinerten Massenmatrix  $g_{\kappa\lambda}$  stets eine Beschleunigungskomponente aufweisen.

Im Folgenden wird vorausgesetzt, dass in jedem Fundamentalkreis zumindest eines der drei Bauelemente Induktor, Resistor oder Kondensator auftritt. Elektrische Teilsysteme mit anderen Fundamentalkreisen sollen hier nicht betrachtet werden. Dann erscheint folgende Indexmengenzerlegung sinnvoll:

$$H^* = H_L \cup H_R \cup H_C, \tag{4.5}$$

$H_L$  : Indexmenge der Fundamentalkreise mit Induktoren,

$H_R$  : Indexmenge der Fundamentalkreise ohne Induktoren aber mit Resistoren,

$H_C$  : Indexmenge der Fundamentalkreise ohne Induktoren und ohne Resistoren (also mit Kondensatoren).

Da kein Fundamentalkreis gleichzeitig in zwei der drei Indexmengen auftritt, sind alle drei Indexmengen paarweise disjunkt. Im Weiteren werden folgende Indexbezeichnungen vereinbart  $\mu_L, \nu_L \in H_L$ ,  $\mu_R, \nu_R \in H_R$  und  $\mu_C, \nu_C \in H_C$ . Deshalb gilt  $\{\mu\} = \{\mu_L\} \cup \{\mu_R\} \cup \{\mu_C\}$  bzw.  $(q^\mu) = (q^{\mu_L}, q^{\mu_R}, q^{\mu_C})$ . Gelegentlich werden auch Kombinationen der Indexmengen verwendet (z.B.  $\mu_{LR} \in H_L \cup H_R$  oder  $\mu_{RC} \in H_R \cup H_C$ ).

Die Bewegungsgleichungen der  $H_L$ -Fundamentalkreise enthalten zumindest  $\ddot{q}^\mu$ -Terme. Sie sind damit Differenzialgleichungen höchstens zweiter Ordnung. Wenn in der Matrix der generalisierten Induktivitäten ein struktureller Rangabfall auftritt, dann sind die Mengen  $H_R$  und  $H_C$  nicht gleichzeitig leer. Die zu diesen Indexmengen gehörenden Bewegungsgleichungen enthalten keine  $\ddot{q}^\mu$ -Terme. Sie sind damit zunächst Differenzialgleichungen höchstens erster Ordnung, d.h., die Koeffizienten der höchsten Ableitungen werden aus  $\tilde{r}_{\mu\nu} = r_{\mu\nu}$  (wegen  $l_{\mu\nu} \equiv 0$ ) gebildet. Falls in der Koeffizientenmatrix  $r_{\mu\nu}$  ebenfalls ein struktureller Rangabfall auftritt (z.B. bei zusätzlicher Abwesenheit von Resistoren in induktorfreen Maschen), kann infolge oben genannter Voraussetzung die Indexmenge  $H_C$  nicht leer sein. Dann entartet ein Teil der Bewegungsgleichungen zu algebraischen Gleichungen für  $q$ .

Aus der Zerlegung (4.5) folgt sofort  $l_{\mu\nu_{RC}} \equiv 0$  und  $r_{\mu\nu_C} \equiv 0$  und daraus mit (3.30) die Vereinfachung  $\tilde{r}_{\mu\nu_{RC}} = r_{\mu\nu_{RC}}$ . Des Weiteren liefert die Klasseneinteilung (4.5), dass  $l_{\mu_L\nu_L}$  und  $r_{\mu_R\nu_R}$  zumindest nicht strukturell singulär sind. Momentane Singularitäten, die infolge der zugelassenen Abhängigkeiten der Konstitutivparameter von der Lage des MTS oder der Zeit  $t$  auftreten können, werden in dieser Arbeit nicht betrachtet. Dann sind  $l_{\mu_L\nu_L}$  und  $r_{\mu_R\nu_R}$  regulär und somit sogar positiv definit (vgl. hierzu die Bemerkungen in Abschnitt 2.3.3.6). Infolge der oben erwähnten Voraussetzung ist die Matrix  $c_{\mu_C\nu_C}$  ebenfalls zumindest nicht strukturell singulär und kann deshalb gleichfalls als regulär und sogar positiv definit festgestellt werden (siehe ebenfalls die Bemerkungen in Abschnitt 2.3.3.6). Dann lassen sich die Bewegungsgleichungen des ETS (3.29b) zunächst darstellen gemäß

$$l_{\mu_L\nu_L}\ddot{q}^{\nu_L} + \tilde{r}_{\mu_L\nu_L}\dot{q}^{\nu_L} + r_{\mu_L\nu_R}\dot{q}^{\nu_R} + c_{\mu_L\nu}q^\nu + \tilde{v}_{\mu_L0} = 0, \quad (4.6a)$$

$$r_{\mu_R\nu_L}\dot{q}^{\nu_L} + r_{\mu_R\nu_R}\dot{q}^{\nu_R} + c_{\mu_R\nu}q^\nu + \tilde{v}_{\mu_R0} = 0, \quad (4.6b)$$

$$c_{\mu_C\nu_{LR}}q^{\nu_{LR}} + c_{\mu_C\nu_C}q^{\nu_C} + \tilde{v}_{\mu_C0} = 0. \quad (4.6c)$$

Die Gesamtkoeffizientenmatrix vor den „höchsten auftretenden Ableitungen“ in (4.6) ( $\dot{q}^{\nu_L}$ ,  $\dot{q}^{\nu_R}$  und  $q^{\nu_C}$ ) ist invertierbar. Die Gleichungen (4.6a) sind im Allgemeinen Differenzialgleichungen zweiter Ordnung in  $q^{\nu_L}$ . Differenzialgleichungen erster Ordnung in  $\dot{q}^{\nu_L}$  treten auf, falls in  $H_L$ -Fundamentalkreisen keine Kondensatoren vorhanden sind ( $c_{\mu_L\nu} \equiv 0$ ). Bei gleichzeitiger Abwesenheit von Kondensatoren und Resistoren in  $H_L$ -Fundamentalkreisen können (falls zusätzlich  $\frac{d}{dt}l_{\mu_L\nu_L} \equiv 0$  ist) Entartungen zu algebraischen Gleichungen für  $\ddot{q}^{\nu_L}$  (d.h. Zwangsbedingungen für Zeitableitungen der Ströme) auftreten. Die Gleichungen (4.6b) stellen Differenzialgleichungen höchstens erster Ordnung in  $q^{\nu_R}$  dar. Bei zusätzlicher Abwesenheit von Kondensatoren treten Entartungen zu algebraischen Gleichungen für  $\dot{q}^{\nu_R}$  (d.h. Zwangsbedingungen für Ströme) auf. Die Gleichungen (4.6c) sind stets algebraische Gleichungen, die Zwangsbedingungen für Ladungen realisieren. Deshalb wird im Weiteren folgende – gegenüber (4.5) präzisierete – Klasseneinteilung der Fundamentalkreise des elektrischen Teilsystems verwendet:

$$H_L = H_{L2} \cup H_{L1} \cup H_{L0}, \quad (4.7a)$$

$$H_R = H_{R1} \cup H_{R0}, \quad (4.7b)$$

- $H_{L2}$  : Indexmenge der Fundamentalkreise mit Induktoren und Kondensatoren (DGL 2.O. in den Ladungen),
- $H_{L1}$  : Indexmenge der Fundamentalkreise mit Induktoren und Resistoren aber ohne Kondensatoren (DGL 1.O. in den Strömen),
- $H_{L0}$  : Indexmenge der Fundamentalkreise mit Induktoren, aber weder mit Resistoren noch mit Kondensatoren (algebraische Gleichungen für  $\ddot{q}^{\mu L}$ ),
- $H_{R1}$  : Indexmenge der Fundamentalkreise ohne Induktoren aber mit Resistoren und Kondensatoren (DGL 1.O. in den Ladungen),
- $H_{R0}$  : Indexmenge der Fundamentalkreise mit Resistoren, aber weder mit Induktoren noch mit Kondensatoren (algebraische Gleichungen für  $\dot{q}^{\mu R}$ ).

Sämtliche Indexmengen sind paarweise disjunkt. Zusätzlich werden zur Verkürzung der nachfolgenden Ausdrücke folgende Schreibweisen vereinbart:

- $\{\mu_{L'}\} := H_{L2} \cup H_{L1}$  : gleichzeitig induktor- und resistorbehaftete Fundamentalkreise,
- $\{\mu_{C\#}\} := H_{L2} \cup H_{R1} \cup H_C$  : Maschen mit Kondensatoren,
- $\{\mu_{\check{C}}\} := H_{L2} \cup H_{R1}$  : kondensatorbehaftete Fundamentalkreise mit Induktoren und/oder Resistoren.

Dann gilt  $r_{\mu_{L0}\nu} = c_{\mu_{L0}\nu} \equiv 0$  (d.h. auch  $r_{\mu_{R0}\nu_{L0}} \equiv 0$ ),  $l_{\mu_{R0}\nu} = c_{\mu_{R0}\nu} \equiv 0$  und  $c_{\mu_{L1}\nu} \equiv 0$  sowie  $c_{\mu_{C\nu_{L1}}} = c_{\mu_{C\nu_{L0}}} = c_{\mu_{C\nu_{R0}}} \equiv 0$ . Aus (4.6) ergibt sich somit ein System von Bewegungsgleichungen

$$l_{\mu_{L'}\nu_L} \ddot{q}^{\nu L} + \tilde{r}_{\mu_{L'}\nu_{L'}} \dot{q}^{\nu_{L'}} + r_{\mu_{L'}\nu_R} \dot{q}^{\nu R} + c_{\mu_{L'}\nu_{C\#}} q^{\nu_{C\#}} + \tilde{v}_{\mu_{L'}0} = 0, \quad (4.8a)$$

$$r_{\mu_{R1}\nu_{L'R}} \dot{q}^{\nu_{L'R}} + c_{\mu_{R1}\nu_{C\#}} q^{\nu_{C\#}} + \tilde{v}_{\mu_{R1}0} = 0 \quad (4.8b)$$

(mit  $c_{\mu_{L1}\nu_{C\#}} \equiv 0$ ) und ein System von Zwangsbedingungen

$$l_{\mu_{L0}\nu_L} \ddot{q}^{\nu L} + \tilde{v}_{\mu_{L0}0} = 0, \quad (4.9a)$$

$$r_{\mu_{R0}\nu_{L'R}} \dot{q}^{\nu_{L'R}} + \tilde{v}_{\mu_{R0}0} = 0, \quad (4.9b)$$

$$c_{\mu_{C\nu_{C\#}}} q^{\nu_{C\#}} + \tilde{v}_{\mu_{C0}} = 0. \quad (4.9c)$$

Sei  $r_{aG} := |H_{L0}| + |H_{R0}| + |H_C|$  die Anzahl aller algebraischen Gleichungen in (4.9). Dann verringert sich der Quasifreiheitsgrad des ETS aufgrund der  $r_{aG}$  Zwangsbedingungen auf  $m^* := m - r_{aG}$ . Somit ist  $m^*$  die Anzahl der Bewegungsgleichungen (4.8).

Aus (4.9) folgt, dass sämtliche möglichen algebraischen Gleichungen stets lineare Zwangsbedingungen darstellen. Mit ihrer Hilfe lassen sich deshalb die entsprechenden Maschenladungen oder deren Zeitableitungen leicht eliminieren. Deshalb kann die Modellierung für die dynamische Simulation stets mit einem minimalen Satz von ETS-Bewegungsgleichungen erfolgen. Das System aus (3.29a) und den Differenzialgleichungen (4.8) nach Elimination der im ETS auftretenden Zwangsbedingungen (4.9) ist der entsprechende Satz der Bewegungsgleichungen eines diskreten EMS.

Wegen der Indexmengenzerlegungen (4.5) und (4.7) setzt sich der Zustand eines solchen dynamischen Systems aus folgenden Größen zusammen:  $\dot{q}^\lambda$ ,  $q^\lambda$ ,  $\dot{q}^{\nu_{L'}}$ ,  $q^{\nu_{L2}}$ ,  $q^{\nu_{R1}}$ . Die

Matrix der Koeffizienten vor den höchsten Ableitungen  $\ddot{q}^\lambda$ ,  $\ddot{q}^{\nu_{L'}}$ ,  $\dot{q}^{\nu_{R1}}$  lautet

$$\begin{pmatrix} g_{\kappa\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & l_{\mu_{L'}\nu_{L'}} & r_{\mu_{L'}\nu_{R1}} \\ 0 & 0 & r_{\mu_{R1}\nu_{R1}} \end{pmatrix}.$$

Infolge der Regularität von  $g_{\kappa\lambda}$ ,  $l_{\mu_{L'}\nu_{L'}}$  und  $r_{\mu_{R1}\nu_{R1}}$  ist das entsprechende Gleichungssystem invertierbar und kann somit mittels geeigneter Integrationscodes numerisch gelöst werden.

#### 4.1.3.2 Formulierung in Nicht-Minimalkoordinaten

Die „elektrischen“ Bewegungs- und Bindungsgleichungen in der CEMS-Formulierung (3.38) lauten

$$l_{\mu\nu}\ddot{q}^\nu + \tilde{r}_{\mu\nu}\dot{q}^\nu + c_{\mu\nu}q^\nu + \hat{v}_{\mu 0} - A^{i_0}{}_\mu \lambda_{i_0} = 0, \quad (4.10a)$$

$$A^{j_0}{}_\nu \ddot{q}^\nu = \ddot{q}_0^{j_0}(t). \quad (4.10b)$$

In Abhängigkeit von der Struktur und den Parametern des elektrischen Netzwerkes können Terme in (4.10a) verschwinden, so dass die „elektrischen“ Bewegungsgleichungen in verschiedene Spezialfälle entarten können. Bei der Formulierung in Nicht-Minimalkoordinaten müssen für die dynamische Simulation – analog zum vorhergehenden Abschnitt – entsprechende Unterscheidungen hinsichtlich der höchsten auftretenden zeitlichen Ableitungen getroffen werden. Zunächst wird eine Zerlegung in paarweise disjunkte Indexmengen ähnlich (4.5) für sämtliche generalisierten elektrischen Koordinaten gewählt:

$$H = H_L \cup H_R \cup H_C, \quad (4.11)$$

$H_L$  : Indexmenge der Fundamentalkreise mit Induktoren,

$H_R$  : Indexmenge der Fundamentalkreise ohne Induktoren aber mit Resistoren,

$H_C$  : Indexmenge der Fundamentalkreise ohne Induktoren und ohne Resistoren (also mit Kondensatoren).

Die bei (4.5) eingeführten Indexbezeichnungen werden hier sinngemäß verwendet. Wegen  $l_{\mu\nu_{RC}} \equiv 0$  und  $r_{\mu\nu_C} \equiv 0$  lässt sich dann (4.10a) darstellen gemäß

$$l_{\mu_L\nu_L}\ddot{q}^{\nu_L} + \tilde{r}_{\mu_L\nu_L}\dot{q}^{\nu_L} + r_{\mu_L\nu_R}\dot{q}^{\nu_R} + c_{\mu_L\nu}q^\nu + \hat{v}_{\mu_L 0} - \lambda_{i_0}A^{i_0}{}_{\mu_L} = 0, \quad (4.12a)$$

$$r_{\mu_R\nu_L}\dot{q}^{\nu_L} + r_{\mu_R\nu_R}\dot{q}^{\nu_R} + c_{\mu_R\nu}q^\nu + \hat{v}_{\mu_R 0} - \lambda_{i_0}A^{i_0}{}_{\mu_R} = 0, \quad (4.12b)$$

$$c_{\mu_C\nu_{LR}}q^{\nu_{LR}} + c_{\mu_C\nu_C}q^{\nu_C} + \hat{v}_{\mu_C 0} - \lambda_{i_0}A^{i_0}{}_{\mu_C} = 0. \quad (4.12c)$$

Analog zu den Erläuterungen zum Gleichungssystem (4.6) können neben den algebraischen Gleichungen für  $q^{\mu_C}$  (4.12c) auch in (4.12a), (4.12b) Zwangsbedingungen für  $\ddot{q}^{\mu_L}$  bzw.  $\dot{q}^{\mu_R}$  auftreten. Mit einer präzisierten Zerlegung der Indexmengen analog zu (4.7) zerfällt (4.12) in ein System von Bewegungsgleichungen und ein System von Zwangsbedingungen. Auf eine detaillierte Darstellung wird hier verzichtet. Beide werden später in Abschnitt 4.3.2.1 angegeben. Mit der Anzahl  $r_{aG}$  aller algebraischen Gleichungen in



(4.12) und der Anzahl  $r_0$  aller Stromquellen reduziert sich der ETS-Quasifreiheitsgrad auf  $m^* := m^\# - r_0 - r_{aG}$ .

Die zusätzlichen Zwangsbedingungen infolge Stromquellen gemäß (4.10b) wurden zunächst auf „Beschleunigungsebene“ (d.h. auf dem Niveau der Stromableitungen) formuliert. Für die  $H_R$ -Fundamentalkreise reicht jedoch eine Darstellung auf „Geschwindigkeitsebene“ (Stromniveau) und für die  $H_C$ -Maschen sogar eine Formulierung auf „Lageebene“ (Ladungsniveau) aus. Deshalb wird eine Klasseneinteilung der Stromquellen unter Nutzung der Indexmengenzerlegung (4.11) vorgenommen. Folgende Bezeichnungen und Vereinbarungen sollen gelten:

- C-Stromquellen:
  - der Stromquellenzweig liegt auf mindestens einem  $H_C$ -Fundamentalkreis,
  - die entsprechende Indexmenge sei bezeichnet mit  $\Gamma_{0C}$ ,
- R-Stromquellen:
  - der Stromquellenzweig liegt auf keinem  $H_C$ -Fundamentalkreis jedoch auf mindestens einem  $H_R$ -Fundamentalkreis,
  - die entsprechende Indexmenge sei bezeichnet mit  $\Gamma_{0R}$ ,
- L-Stromquellen:
  - der Stromquellenzweig liegt auf keinem  $H_C$ - und keinem  $H_R$ -Fundamentalkreis (damit jedoch auf mindestens einem  $H_L$ -Fundamentalkreis),
  - die entsprechende Indexmenge sei bezeichnet mit  $\Gamma_{0L}$ .

Wegen der festgelegten Voraussetzung, dass in jedem Fundamentalkreis mindestens eines der drei Bauelemente Induktor, Resistor oder Kondensator existiert (siehe (4.5)), ist die Indexmengenzerlegung der Stromquellen-Kanten vollständig und es gilt

$$\Gamma_0 = \Gamma_{0L} \cup \Gamma_{0R} \cup \Gamma_{0C}. \quad (4.13)$$

Gleichzeitig sind die Indexmengen paarweise disjunkt. Bei Verwendung von (4.13) und mit  $j_{0L} \in \Gamma_{0L}$ ,  $j_{0R} \in \Gamma_{0R}$  und  $j_{0C} \in \Gamma_{0C}$  können die Zwangsbedingungen infolge Stromquellen folgendermaßen dargestellt werden:

$$A^{j_{0L}}{}_{\nu_L} \ddot{q}^{\nu_L} = \ddot{\bar{q}}_0^{j_{0L}}(t), \quad (4.14a)$$

$$A^{j_{0R}}{}_{\nu_R} \dot{q}^{\nu_R} + A^{j_{0R}}{}_{\nu_R} \dot{q}^{\nu_R} = \dot{\bar{q}}_0^{j_{0R}}(t), \quad (4.14b)$$

$$A^{j_{0C}}{}_{\nu_L} q^{\nu_L} + A^{j_{0C}}{}_{\nu_R} q^{\nu_R} + A^{j_{0C}}{}_{\nu_C} q^{\nu_C} = \bar{q}_0^{j_{0C}}(t). \quad (4.14c)$$

Analog zu (3.38c, 3.38d) lässt sich aus (4.12) und (4.14) schließlich folgendes Gleichungssystem aufstellen:

$$\begin{aligned} l_{\mu_L \nu_L} \ddot{q}^{\nu_L} + r_{\mu_L \nu_R} \dot{q}^{\nu_R} + c_{\mu_L \nu_C} q^{\nu_C} - \lambda_{i_0} A^{i_0}{}_{\mu_L} &= -\hat{v}_{\mu_L 0} - \tilde{r}_{\mu_L \nu_L} \dot{q}^{\nu_L} - c_{\mu_L \nu_{LR}} q^{\nu_{LR}}, \\ r_{\mu_R \nu_R} \dot{q}^{\nu_R} + c_{\mu_R \nu_C} q^{\nu_C} - \lambda_{i_0} A^{i_0}{}_{\mu_R} &= -\hat{v}_{\mu_R 0} - r_{\mu_R \nu_L} \dot{q}^{\nu_L} - c_{\mu_R \nu_{LR}} q^{\nu_{LR}}, \\ c_{\mu_C \nu_C} q^{\nu_C} - \lambda_{i_0} A^{i_0}{}_{\mu_C} &= -\hat{v}_{\mu_C 0} - c_{\mu_C \nu_{LR}} q^{\nu_{LR}}, \\ A^{j_{0L}}{}_{\nu_L} \ddot{q}^{\nu_L} &= \ddot{\bar{q}}_0^{j_{0L}}(t), \\ A^{j_{0R}}{}_{\nu_R} \dot{q}^{\nu_R} &= \dot{\bar{q}}_0^{j_{0R}}(t) - A^{j_{0R}}{}_{\nu_L} \dot{q}^{\nu_L}, \\ A^{j_{0C}}{}_{\nu_C} q^{\nu_C} &= \bar{q}_0^{j_{0C}}(t) - A^{j_{0C}}{}_{\nu_L} q^{\nu_L} - A^{j_{0C}}{}_{\nu_R} q^{\nu_R}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Das System (4.15) besteht aus Differenzial- und algebraischen Gleichungen. Zusammen mit den „mechanischen“ Bewegungsgleichungen (3.38a) und den Zwangsbedingungen (3.38b) bildet (4.15) schließlich das Gleichungssystem zur vollständigen Beschreibung der Dynamik eines EMS in einer Formulierung in Nicht-Minimalkoordinaten. Die in Abschnitt 4.1.3.1 genannten Regularitätseigenschaften gelten für die hier verwendeten Teilmatrizen  $l_{\mu L \nu L}$ ,  $r_{\mu R \nu R}$  und  $c_{\mu C \nu C}$  ebenso. Infolge der vorausgesetzten Unabhängigkeit der Stromquellen sind die Submatrizen von  $A^{j_0 \nu}$  von vollem Rang. Deshalb ist das Gesamtsystem invertierbar und kann mittels geeigneter Integrationscodes (d.h. hier: DAE-Solver) numerisch gelöst werden.

## 4.2 Statisches Gleichgewicht

In der analytischen Mechanik ist ein wichtiger Aspekt bei der Untersuchung von Mehrkörpersystemen die Ermittlung von möglichen Ruhelagen (oder statischen Gleichgewichtslagen). Eine solche Lage zeichnet sich dadurch aus, dass alle angreifenden Kräfte sich gerade aufheben, so dass keinerlei Beschleunigungen der zum MKS gehörenden Körper zu verzeichnen sind. Zusätzlich verschwinden sämtliche Geschwindigkeiten, so dass alle MKS-Koordinaten konstant bleiben. Eine MKS-Ruhelage ist also durch einen konstant bleibenden Zustandsvektor – bestehend aus verallgemeinerten Lagekoordinaten (beliebig konstant) und Geschwindigkeiten (konstant identisch gleich Null) – gekennzeichnet.

Dieses Kapitel behandelt die Ermittlung von statischen Gleichgewichten für elektromechanische Systeme. Dazu wird zunächst der Begriff *statischer Gleichgewichtszustand eines EMS* (nicht Gleichgewichtslage!) definiert. Dann wird ein Verfahren zur Berechnung eines solchen Gleichgewichts mittels Optimierung angegeben.

### 4.2.1 Begriffsbestimmung

Für die Behandlung von statischen Gleichgewichten werden alle explizit zeitabhängigen Größen des EMS (z.B. eingeprägte Kräfte, Strom- oder Spannungsquellen) mit ihrem Wert zum Zeitpunkt  $t = 0$  in die Berechnung einbezogen und im Weiteren als konstant vorausgesetzt.

Zunächst ist die Gleichgewichtslage eines rein mechanischen Systems definiert durch das Verschwinden sämtlicher Geschwindigkeiten ( $\dot{q}^\lambda \equiv 0$ ) und Beschleunigungen ( $\ddot{q}^\lambda \equiv 0$ ). Übertragen auf EMS würde das für den elektrischen Teil das identische Verschwinden aller Maschenströme  $\dot{q}^\mu$  und somit aller Zweigströme

$$\dot{q}^i \equiv 0$$

bedeuten. Sind zeitabhängige Spannungs- und/oder Stromquellen im elektrischen Teil vorhanden, so existiert im Allgemeinen keine solche Ruhelage für das gesamte EMS. Andererseits sind elektrische Netzwerke ohne Spannungs- und Stromquellen nur selten von Interesse. Deshalb soll im Weiteren der Begriff *statischer Gleichgewichtszustand* für ein EMS in einem zu dem Terminus Ruhelage erweiterten Sinne verwendet werden.

**Definition 4.1** *Unter einem statischen Gleichgewichtszustand eines elektromechanischen Systems wird ein Zustand verstanden, der folgende Bedingungen erfüllt:*

- das mechanische Teilsystem befindet sich in einer Ruhelage,
- das elektrische Teilsystem führt eine Bewegung aus, die dadurch gekennzeichnet ist, dass der Zustand des ETS (bestehend aus den Maschengrößen  $\dot{q}^{\nu_{L'}}$ ,  $q^{\nu_{L2}}$ ,  $q^{\nu_{R1}}$ ) konstant (im Fall von  $\dot{q}^{\nu_{L2}}$  konstant gleich Null) bleibt,
- für die evtl. vorhandenen Zwangsbedingungen des ETS soll gelten:  $\ddot{q}^{\nu_{L0}} \equiv 0$ ,  $\dot{q}^{\nu_{R0}} \equiv \text{const.}$ ,  $q^{\nu_C} \equiv \text{const.}$

In einem solchen Gleichgewichtszustand eines EMS verschwinden somit alle mechanischen Geschwindigkeiten und Beschleunigungen

$$\dot{q}^\lambda \equiv 0, \quad \ddot{q}^\lambda \equiv 0 \quad (4.16)$$

und sowohl alle Maschenströme in induktorbehafteten Fundamentalkreisen (Indexmengen  $H_{L2}$  und  $H_{L1}$ ) als auch alle Maschenladungen in kondensatorbehafteten Fundamentalkreisen (Indexmenge  $H_{C\#} = H_{L2} \cup H_{R1} \cup H_C$ ) sind konstant (gleich Null ist zugelassen). Somit muss gelten

$$\dot{q}^{\nu_{L'}} \equiv \text{const.}, \quad (4.17a)$$

$$q^{\nu_{C\#}} \equiv \text{const.} \quad (4.17b)$$

Aufgeschlüsselt auf die präzierte Indexmengenzerlegung nach (4.7) ergibt sich für einen statischen Gleichgewichtszustand eines EMS mit Zwangsbedingungen per definitionem

$$\begin{aligned} \ddot{q}^\lambda &\equiv 0, & \dot{q}^\lambda &\equiv 0, & q^\lambda &= \text{const.}, \\ \ddot{q}^{\nu_{L2}} &\equiv 0, & \dot{q}^{\nu_{L2}} &\equiv 0, & q^{\nu_{L2}} &= \text{const.}, \\ \ddot{q}^{\nu_{L1}} &= 0, & \dot{q}^{\nu_{L1}} &= \text{const.}, & & \\ \ddot{q}^{\nu_{L0}} &= 0, & & & & \\ & & \dot{q}^{\nu_{R1}} &= 0, & q^{\nu_{R1}} &= \text{const.}, \\ & & \dot{q}^{\nu_{R0}} &= \text{const.}, & & \\ & & & & q^{\nu_C} &= \text{const.}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Aus (4.18) folgt die Konstanz (teilweise Nullgleichheit) des gesamten EMS-Zustandsvektors (bestehend aus  $\dot{q}^\lambda$ ,  $q^\lambda$ ,  $\dot{q}^{\nu_{L'}}$ ,  $q^{\nu_{L2}}$ ,  $q^{\nu_{R1}}$ ). Wegen der bei  $t = 0$  fixierten Werte der Strom- und Spannungsquellen gilt immer  $\dot{q}^{\nu_{R0}} = \text{const.}$  Für den Nachweis eines statischen Gleichgewichts des ETS ist es somit hinreichend, wenn die Zeitableitungen der Ströme in induktorbehafteten Fundamentalkreisen und die Ströme in kondensatorbehafteten Maschen identisch verschwinden. Wenn sich gleichzeitig das MTS in einer Ruhelage befindet, ist ein statischer Gleichgewichtszustand des gesamten EMS im Sinne von Definition 4.1 erreicht.

### 4.2.2 Berechnung mittels Optimierung

Die Ermittlung eines statischen Gleichgewichtszustandes eines EMS erfolgt zweckmäßig mittels Optimierung. Dazu werden für das MTS und das ETS je eine quadratische Zielfunktion definiert. Beide werden nach energetischen Gesichtspunkten gewichtet und ihre Summe wird dann minimiert. Um von den Größenordnungen her vergleichbare Zielfunktionen zu realisieren, werden einerseits die Metrik des MTS und andererseits die

Induktivitätsmatrix und die inverse Matrix der Teilkapazitäten als Wichtungsmatrizen verwendet. Für das mechanische Teilsystem müssen infolge des möglichen Auftretens von nichtlinearen Kraftkoppellementen und den daraus resultierenden Schwierigkeiten, dessen potenzielle Energie zu bestimmen, die Geschwindigkeiten durch Zusatzbedingungen auf Null gezwungen werden. Somit ergibt sich als Zielfunktion für das MTS die Beschleunigungsenergie (vgl. auch das Gauß'sche Prinzip des kleinsten Zwanges)

$$Z_m = \frac{1}{2} g_{\kappa\lambda} \ddot{q}^\kappa \ddot{q}^\lambda \quad \text{mit der Zusatzbedingung } \dot{q}^\rho = 0. \quad (4.19)$$

Da  $g_{\kappa\lambda}$  positiv definit ist, wird  $Z_m$  nicht negativ und genau dann gleich Null, wenn  $\ddot{q}^\kappa \equiv 0$  für alle  $\kappa \in J$  ist. Zur Berechnung der Zielfunktion für das ETS werden die Zeitableitungen der Ströme in induktorbehafteten Fundamentalkreisen und die Ströme in kondensatorbehafteten Maschen herangezogen. Dann kann die Zielfunktion

$$Z_e = \frac{1}{2} l_{\mu_L \nu_L} \ddot{q}^{\mu_L} \ddot{q}^{\nu_L} + \frac{1}{2} c_{\mu_{C\#} \nu_{C\#}} \dot{q}^{\mu_{C\#}} \dot{q}^{\nu_{C\#}} \quad (4.20)$$

verwendet werden. Infolge des Ausschlusses von momentanen Singularitäten (siehe Bemerkungen in Abschnitt 2.3.3.6) ist die Matrix  $l_{\mu_L \nu_L}$  positiv definit. Die Matrix  $c_{\mu_{C\#} \nu_{C\#}}$  ist allerdings nur positiv semidefinit. Im Fall einer singulären Matrix  $c_{\mu_{C\#} \nu_{C\#}}$  muss diese durch Addition von zusätzlichen, vergleichsweise kleinen Werten auf der Hauptdiagonalen regularisiert werden. Durch diese Maßnahme verschwindet  $Z_e$  genau dann, wenn alle  $\ddot{q}^{\mu_L}$  und  $\dot{q}^{\mu_{C\#}}$  gleichzeitig verschwinden. Bei zum Zeitpunkt  $t = 0$  fixierten Werten aller zeitabhängigen Größen ist schließlich

$$Z_m = 0 \quad \wedge \quad \dot{q}^\kappa = 0 \quad \wedge \quad Z_e = 0$$

eine notwendige und hinreichende Bedingung für einen statischen Gleichgewichtszustand des gesamten EMS. Zu dessen Ermittlung mittels Optimierung kann somit die Gesamtzielfunktion

$$\begin{aligned} Z &= Z_m + Z_e \\ &= \frac{1}{2} g_{\kappa\lambda} \ddot{q}^\kappa \ddot{q}^\lambda + \frac{1}{2} l_{\mu_L \nu_L} \ddot{q}^{\mu_L} \ddot{q}^{\nu_L} + \frac{1}{2} c_{\mu_{C\#} \nu_{C\#}} \dot{q}^{\mu_{C\#}} \dot{q}^{\nu_{C\#}} \end{aligned}$$

unter den Nebenbedingungen  $\dot{q}^\kappa = 0$  minimiert werden.

Das hier gezeigte Verfahren zur Bestimmung eines statischen Gleichgewichts eines EMS trifft keine Aussage über den Charakter des gefundenen Zustandes. Das Ergebnis kann somit sowohl ein stabiles als auch ein instabiles Gleichgewicht des EMS sein. Nähere Untersuchungen hierzu können durch eine Analyse der Störungsgleichungen durchgeführt werden (vgl. Abschnitt 4.3).

### 4.3 Lineare Schwingungsanalyse

Für viele praktische Problemstellungen ist es wichtig, Aussagen über das Verhalten eines Systems in der Umgebung eines konkreten Zustandes zu treffen, z.B. zur Ermittlung der Eigenfrequenzen des Systems in einem statischen Gleichgewicht oder um einen bestimmten Arbeitspunkt (z.B. für den Reglerentwurf). Als Hilfsmittel hierzu eignen sich

bei Kenntnis der Bewegungsgleichungen die linearisierten Gleichungen des Systems. Deshalb soll hier eine Möglichkeit dargestellt werden, die linearisierten Gleichungen eines elektromechanischen Systems automatisiert zu entwickeln.

### 4.3.1 EMS ohne Zwangsbedingungen

Der hier dargestellte Zugang zur Linearisierung der EMS-Bewegungsgleichungen baut auf Untersuchungen zur linearen Schwingungsanalyse für Mehrkörpersysteme (MKS) (z.B. in [54, 84]) auf. Ausgangspunkt sind allerdings die in Kapitel 3 auf der Basis des Lagrange-Formalismus entwickelten Bewegungsgleichungen des Gesamt-EMS (3.27). Wie in Abschnitt 4.1 bereits erläutert, können in den „elektrischen Gleichungen“ abhängig von Struktur und Parametern des elektrischen Teilsystems (ETS) Terme verschwinden, so dass die ursprünglichen Differenzialgleichungen zweiter Ordnung in solche erster Ordnung übergehen oder gar zu algebraischen Gleichungen entarten können. Die deshalb für die dynamische Simulation notwendige Klasseneinteilung gemäß (4.7) kann allerdings bei der linearen Schwingungsanalyse von EMS ohne Zwangsbedingungen umgangen werden. Dazu werden zur Modellierung des ETS alle nicht entarteten Differenzialgleichungen als DGLn erster Ordnung dargestellt.

Für die weiteren Betrachtungen sollen die folgenden Indexvereinbarungen gelten. Es sei  $\kappa, \lambda, \rho, \sigma, \xi \in J$  und  $\mu, \nu, \omega \in H^*$ . Zusätzlich zu diesen aus Kapitel 2 bereits bekannten Indexmengen wird die Indexmenge für die Differenzialgleichungen erster Ordnung des ETS eingeführt. Diese sei mit  $I$  bezeichnet. Dann gelte  $\varphi, \chi, \eta, \zeta \in I$ . Im gesamten Abschnitt 4.3 sei darüber hinaus  $a, b \in J \cup I$ .

Die Lagrange'schen Bewegungsgleichungen (3.29) für ein EMS werden zur besseren Nachvollziehbarkeit hier noch einmal angeführt. Mit den genannten Indexvereinbarungen gilt

$$g_{\kappa\lambda}(q^\sigma, t)\ddot{q}^\lambda + \Gamma_{\kappa\lambda\rho}(q^\sigma, t)\dot{q}^\lambda\dot{q}^\rho - Q_\kappa^{(me)}(\dot{q}^\sigma, q^\sigma, t) - Q_\kappa^{(el)}(q^\sigma, \dot{q}^\omega, q^\omega, t) = 0, \quad (4.21a)$$

$$l_{\mu\nu}(q^\sigma, t)\ddot{q}^\nu + \tilde{r}_{\mu\nu}(\dot{q}^\sigma, q^\sigma, t)\dot{q}^\nu + c_{\mu\nu}(q^\sigma, t)q^\nu + \tilde{v}_{\mu 0}(\dot{q}^\sigma, q^\sigma, t) = 0. \quad (4.21b)$$

Wegen der positiven Definitheit von  $g_{\kappa\lambda}$  ist (4.21a) immer ein System von Differenzialgleichungen zweiter Ordnung. Das System (4.21b) kann jedoch zunächst aus Differenzialgleichungen erster und zweiter Ordnung sowie aus algebraischen Gleichungen (Zwangsbedingungen für  $\ddot{q}^\mu$ ,  $\dot{q}^\mu$  oder  $q^\mu$ ) bestehen. An dieser Stelle seien nur Differenzialgleichungen erster und zweiter Ordnung zugelassen. Die Auswirkungen von Zwangsbedingungen auf die Störungsgleichungen werden später diskutiert (siehe Abschnitt 4.3.2).

#### 4.3.1.1 Störungsgleichungen

Im Weiteren werden nur die Bewegungsgleichungen aus (4.21b) betrachtet (siehe auch (4.8)). Diese sollen sämtlich durch einen Satz von Differenzialgleichungen erster Ordnung beschrieben werden. Zu diesem Zweck wird die in Abschnitt 4.1.3 eingeführte präzisierete Indexmengenzerlegung (4.7) herangezogen. Die Indexmenge  $H_{L2}$  liefert DGLn zweiter Ordnung. Die Indexmengen  $H_{L1}$  und  $H_{R1}$  führen auf DGLn erster Ordnung. Bei einer Darstellung der Bewegungsgleichungen des ETS (4.21b) mittels Differenzialgleichungen erster Ordnung beziehen sich somit die Elemente der Indexmenge  $I$  auf Maschenladungen und -ströme der  $H_{L2}$ -Fundamentalkreise, Maschenströme der  $H_{L1}$ -Fundamentalkreise

sowie Maschenladungen der  $H_{R1}$ -Fundamentalkreise. Die Menge  $I$  indiziert damit alle Zustandsgrößen des ETS. Ihre Mächtigkeit sei mit  $m_I := |I|$  bezeichnet. Mit  $\chi \in I$ ,  $\mu_{L2} \in H_{L2}$ ,  $\mu_{L1} \in H_{L1}$  und  $\mu_{R1} \in H_{R1}$  gilt

$$\{q^\chi\} = \{\dot{q}^{\mu_{L2}}\} \cup \{q^{\mu_{L2}}\} \cup \{\dot{q}^{\mu_{L1}}\} \cup \{q^{\mu_{R1}}\}. \quad (4.22)$$

Die  $H_{L2}$ -Differenzialgleichungen werden in DGLn erster Ordnung transformiert. Die  $H_{L1}$ - und  $H_{R1}$ -Differenzialgleichungen gehen direkt in die Darstellung des ETS ein.

Mit der der Darstellung (4.22) zugrunde liegenden Klasseneinteilung der Fundamentalkreise folgt aus (4.2), dass die elektrisch erzeugten Kräfte nicht von Maschenströmen in  $H_{R1}$ -Fundamentalkreisen abhängen können, da definitionsgemäß in solchen Maschen keine Induktoren vorhanden sind ( $l_{\nu\omega} \equiv 0$  und somit  $\psi_{\nu 0} \equiv 0$ , siehe Bemerkung in Abschnitt 4.1.2). Vielmehr können sie lediglich Funktionen der Maschenströme in  $H_L$ -Fundamentalkreisen ( $H_{L2} \cup H_{L1}$ ) und – wegen des Ausschlusses von Zwangsbedingungen – Funktionen der Maschenladungen in  $H_{L2}$ - und  $H_{R1}$ -Fundamentalkreisen des ETS sein. Damit ergeben sich die Bewegungsgleichungen des EMS unter Darstellung des elektrischen Teilsystems mittels Differenzialgleichungen erster Ordnung (im Weiteren gelegentlich als ETS-DGLn bezeichnet) zu

$$g_{\kappa\lambda}(q^\sigma, t)\ddot{q}^\lambda + \Gamma_{\kappa\lambda\rho}(q^\sigma, t)\dot{q}^\lambda\dot{q}^\rho = Q_\kappa^{(me)}(\dot{q}^\sigma, q^\sigma, t) + Q_\kappa^{(el)}(q^\sigma, q^\eta, t) \quad (4.23a)$$

$$B_{\varphi\chi}(\dot{q}^\sigma, q^\sigma, t)\dot{q}^\chi = b_\varphi(\dot{q}^\sigma, q^\sigma, q^\eta, t) \quad (4.23b)$$

(mit  $\kappa, \lambda, \rho, \sigma \in J$  und  $\varphi, \chi, \eta \in I$ ). Eine Darstellung der Matrix  $B_{\varphi\chi}$  und des Vektors  $b_\varphi$  findet sich im Anhang, Abschnitt B.1.

Bei der linearen Schwingungsanalyse eines EMS kann also von den Gleichungen (4.23) ausgegangen werden. Das Systemverhalten soll in der Nähe einer ungestörten Referenzlösung  $q^a(t)$  untersucht werden. Mittels der Transformation  $q^a \mapsto \bar{q}^a = q^a + x^a$  lassen sich für kleine Störungen  $x^a$  die Terme in (4.23) in bekannter Weise linear approximieren ( $x^\xi$  bzw.  $\dot{x}^\xi$  – Störung einer mechanischen Koordinate bzw. Geschwindigkeit,  $x^\zeta$  – Störung einer elektrischen Zustandsgröße):

$$\begin{aligned} g_{\kappa\lambda}(\bar{q}^\sigma, t)\ddot{\bar{q}}^\lambda &= g_{\kappa\lambda}(q^\sigma, t)\ddot{q}^\lambda + g_{\kappa\xi}(q^\sigma, t)\ddot{x}^\xi + \partial_\xi g_{\kappa\lambda}(q^\sigma, t)\ddot{q}^\lambda x^\xi, \\ \Gamma_{\kappa\lambda\rho}(\bar{q}^\sigma, t)\dot{\bar{q}}^\lambda\dot{\bar{q}}^\rho &= \Gamma_{\kappa\lambda\rho}(q^\sigma, t)\dot{q}^\lambda\dot{q}^\rho + 2\Gamma_{\kappa\lambda\xi}(q^\sigma, t)\dot{q}^\lambda\dot{x}^\xi + \partial_\xi \Gamma_{\kappa\lambda\rho}(q^\sigma, t)\dot{q}^\lambda\dot{q}^\rho x^\xi, \\ Q_\kappa^{(me)}(\dot{\bar{q}}^\sigma, \bar{q}^\sigma, t) &= Q_\kappa^{(me)}(\dot{q}^\sigma, q^\sigma, t) + \dot{\partial}_\xi Q_\kappa^{(me)}(\dot{q}^\sigma, q^\sigma, t)\dot{x}^\xi + \partial_\xi Q_\kappa^{(me)}(\dot{q}^\sigma, q^\sigma, t)x^\xi, \\ Q_\kappa^{(el)}(\bar{q}^\sigma, \bar{q}^\eta, t) &= Q_\kappa^{(el)}(q^\sigma, q^\eta, t) + \partial_\xi Q_\kappa^{(el)}(q^\sigma, q^\eta, t)x^\xi + \partial_\zeta Q_\kappa^{(el)}(q^\sigma, q^\eta, t)x^\zeta, \\ B_{\varphi\chi}(\dot{\bar{q}}^\sigma, \bar{q}^\sigma, t)\dot{\bar{q}}^\chi &= B_{\varphi\chi}(\dot{q}^\sigma, q^\sigma, t)\dot{q}^\chi + B_{\varphi\zeta}(q^\sigma, q^\sigma, t)\dot{x}^\zeta + \dot{\partial}_\xi B_{\varphi\chi}(\dot{q}^\sigma, q^\sigma, t)\dot{q}^\chi x^\xi + \\ &\quad + \partial_\xi B_{\varphi\chi}(\dot{q}^\sigma, q^\sigma, t)\dot{q}^\chi x^\xi, \\ b_\varphi(\dot{\bar{q}}^\sigma, \bar{q}^\sigma, \bar{q}^\eta, t) &= b_\varphi(\dot{q}^\sigma, q^\sigma, q^\eta, t) + \dot{\partial}_\xi b_\varphi(\dot{q}^\sigma, q^\sigma, q^\eta, t)\dot{x}^\xi + \partial_\xi b_\varphi(\dot{q}^\sigma, q^\sigma, q^\eta, t)x^\xi + \\ &\quad + \partial_\zeta b_\varphi(\dot{q}^\sigma, q^\sigma, q^\eta, t)x^\zeta. \end{aligned}$$

Unter Hinzunahme von zusätzlichen kleinen generalisierten Störkräften  $\Phi_\kappa(\dot{q}^\sigma, q^\sigma, q^\eta, t)$  und Störspannungen  $\Phi_\mu(\dot{q}^\sigma, q^\sigma, q^\eta, t)$  folgen damit aus den Bewegungsgleichungen (4.23) die EMS-Störungsgleichungen

$$\begin{aligned}
& g_{\kappa\xi}\ddot{x}^\xi + \left(2\Gamma_{\kappa\lambda\xi}\dot{q}^\lambda - \dot{\partial}_\xi Q_\kappa^{(me)}\right)\dot{x}^\xi + \\
& + \left(\partial_\xi g_{\kappa\lambda}\ddot{q}^\lambda + \partial_\xi\Gamma_{\kappa\lambda\varrho}\dot{q}^\lambda\dot{q}^\varrho - \partial_\xi Q_\kappa^{(me)} - \partial_\xi Q_\kappa^{(el)}\right)x^\xi - \partial_\zeta Q_\kappa^{(el)}x^\zeta = \Phi_\kappa, \quad (4.24) \\
& B_{\varphi\xi}\dot{x}^\xi + \left(\dot{\partial}_\xi B_{\varphi\chi}\dot{q}^\chi - \dot{\partial}_\xi b_\varphi\right)\dot{x}^\xi + \left(\partial_\xi B_{\varphi\chi}\dot{q}^\chi - \partial_\xi b_\varphi\right)x^\xi - \partial_\zeta b_\varphi x^\zeta = \Phi_\mu.
\end{aligned}$$

Diese Gleichungen stellen ein System rheoliner Differentialgleichungen für die Störungen  $x^a$  dar. Bei festgehaltenem Systemzustand  $(\dot{q}^\sigma, q^\sigma, q^\eta)$  können sie verwendet werden, um den Einfluss von verallgemeinerten Störkräften auf das Verhalten des Gesamt-EMS zu untersuchen. Zu diesem Zweck kann bei gegebenen Störkräften  $\Phi_\kappa(\dot{q}^\sigma, q^\sigma, q^\eta, t)$  und Störspannungen  $\Phi_\mu(\dot{q}^\sigma, q^\sigma, q^\eta, t)$  das System (4.24) mittels numerischer Integration gelöst werden. Eine Untersuchung der Störbewegungen um eine Nominaltrajektorie ist durch gleichzeitige numerische Integration der EMS-Bewegungsgleichungen und der EMS-Störungsgleichungen möglich. Dazu können wahlweise die Bewegungsgleichungen nach (3.29) oder – bei vorhandenen strukturellen Singularitäten im ETS – nach (3.29a) und (4.6) verwendet werden. Die aktuelle Lösung der Bewegungsgleichungen wird in jedem Integrationsschritt neu in die Störungsgleichungen eingesetzt.

Die EMS-Störungsgleichungen (4.24) sind im Anhang, Abschnitt B.2.1, nochmals dargestellt. Die dort verwendete Form ergibt sich bei deren Herleitung mittels linearer Approximation aus (3.27). Diese Darstellung hat den Vorteil, dass die Struktur der Bewegungsgleichungen erhalten bleibt. Sie ist allerdings nur bei regulärer Induktormatrix einsetzbar.

### 4.3.1.2 Modalanalyse

Falls sich das EMS in einem statischen Gleichgewichtszustand befindet (vgl. Definition 4.1), können die Untersuchung des Eigenschwingungsverhaltens oder die Ermittlung von Störbewegungen infolge Anfangsstörungen mittels Modalanalyse erfolgen. Dazu werden die Gleichungen (4.24) ohne zusätzliche Störkräfte ( $\Phi_a = 0$ ) verwendet. Wegen (4.18) ist ein statisches Gleichgewicht eines EMS dadurch gekennzeichnet, dass dessen Zustandsvektor konstant bleibt, d.h., dass die zeitlichen Ableitungen aller Zustandsgrößen identisch verschwinden. Deshalb gelten zusätzlich die Vereinfachungen  $\ddot{q}^\lambda \equiv 0$ ,  $\dot{q}^\lambda \equiv 0$  und  $\dot{q}^\chi \equiv 0$  und aus (4.24) folgt

$$\begin{aligned}
g_{\kappa\xi}\ddot{x}^\xi - \dot{\partial}_\xi Q_\kappa^{(me)}\dot{x}^\xi - \left(\partial_\xi Q_\kappa^{(me)} + \partial_\xi Q_\kappa^{(el)}\right)x^\xi - \partial_\zeta Q_\kappa^{(el)}x^\zeta &= 0, \\
B_{\varphi\xi}\dot{x}^\xi - \dot{\partial}_\xi b_\varphi\dot{x}^\xi - \partial_\xi b_\varphi x^\xi - \partial_\zeta b_\varphi x^\zeta &= 0.
\end{aligned} \quad (4.25)$$

Bei festgehaltenem Systemzustand  $(\dot{q}^\sigma, q^\sigma, q^\eta, t)$  lässt sich der schwingungsfähige Teil von (4.25) in der Form

$$g_{ab}(t)\ddot{x}^b + d_{ab}(t)\dot{x}^b + c_{ab}(t)x^b = 0 \quad (4.26)$$

darstellen. Dabei kann  $d_{ab}$  als verallgemeinerte Dämpfungsmatrix und  $c_{ab}$  als verallgemeinerte „Steifigkeitsmatrix“ betrachtet werden. Zur Untersuchung der Gleichungen (4.26)

sei der Vektor der Zustandsvariablen und seine erste Ableitung bezeichnet mit

$$(x^b) = \begin{pmatrix} \dot{x}^\xi \\ x^\xi \\ x^\zeta \end{pmatrix}, \quad (\dot{x}^a) = \begin{pmatrix} \dot{x}^\lambda \\ \dot{x}^\lambda \\ \dot{x}^\eta \end{pmatrix}.$$

Dann lauten die linearisierten Bewegungsgleichungen (4.25)

$$\dot{x}^a = A^a_b x^b, \quad (4.27)$$

wobei für die Systemmatrix  $A^a_b$  gilt

$$(A^a_b) = \begin{pmatrix} g^{\lambda\kappa} \dot{\partial}_\xi Q_\kappa^{(me)} & g^{\lambda\kappa} \left( \partial_\xi Q_\kappa^{(me)} + \partial_\xi Q_\kappa^{(el)} \right) & g^{\lambda\kappa} \partial_\zeta Q_\kappa^{(el)} \\ \delta_\xi^\lambda & 0 & 0 \\ B^{\eta\varphi} \dot{\partial}_\xi b_\varphi & B^{\eta\varphi} \partial_\xi b_\varphi & B^{\eta\varphi} \partial_\zeta b_\varphi \end{pmatrix}. \quad (4.28)$$

In  $A^a_b$  verkörpern die einzelnen Submatrizen ganz bestimmte Systemeigenschaften. Bei einem rein mechanischen System existiert nur die Submatrix  $\begin{pmatrix} (A_{11}) & (A_{12}) \\ (A_{21}) & (A_{22}) \end{pmatrix}$  (mit  $Q_\kappa^{(el)} \equiv 0$ ). Für EMS entspricht diese Submatrix der Systemmatrix des mechanischen Teilsystems ergänzt um die (durch gestörte mechanische Koordinaten beeinflussten) elektrisch erzeugten Kräfte ( $\partial_\xi Q_\kappa^{(el)}$ ). Bei einem rein elektrischen System existiert nur die Submatrix  $(A_{33})$ , wobei in  $B^{\eta\varphi}$  und  $b_\varphi$  keine mechanischen Größen auftreten. Für EMS entspricht diese Submatrix der Systemmatrix des elektrischen Teilsystems unter Einbeziehung der Abhängigkeiten der elektrischen Konstitutivparameter von der Referenzlösung des mechanischen Teilsystems. Die Submatrizen  $\begin{pmatrix} (A_{31}) & (A_{32}) \end{pmatrix}$  und  $(A_{13})$  verkörpern schließlich die elektromechanischen Wechselwirkungen der Eigenschwingungen oder Störungen untereinander. Die Submatrix  $\begin{pmatrix} (A_{31}) & (A_{32}) \end{pmatrix}$  fixiert den Einfluss der Störungen in den mechanischen Koordinaten oder Geschwindigkeiten auf die ersten zeitlichen Ableitungen der elektrischen Zustandsgrößen, wogegen in  $(A_{13})$  die Einwirkung der Störungen von elektrischen Zustandsgrößen auf die Störungen der mechanischen Beschleunigungen zum Ausdruck kommt.

Zum Aufbau der Systemmatrix gemäß (4.28) sind neben der Invertierung der stets positiv definiten verallgemeinerten Massenmatrix des mechanischen Teilmodells und der Invertierung der laut Voraussetzungen ebenfalls positiv definiten Koeffizientenmatrix  $B_{\varphi\zeta}$  der linken Seiten der ETS-Differenzialgleichungen weiterhin diverse partielle Ableitungen der verallgemeinerten mechanischen Kräfte und des Vektors  $b_\varphi$  der rechten Seiten der ETS-DGLn zu bilden. Das kann zweckmäßig mittels numerischer Differenziation erfolgen. Schließlich werden die Eigenwerte der Matrix  $A^a_b$  und die zugehörigen Eigenvektoren bestimmt. Der schwingungsfähige Teil des gesamten EMS erzeugt paarweise konjugiert komplexe Eigenwerte, aus denen sich die Eigenfrequenzen und Abklingkonstanten sofort ablesen lassen (siehe z.B. [84]). Aus dem nicht schwingungsfähigen Teil des gesamten EMS entstehen einzelne reelle Eigenwerte mit jeweils einem Eigenvektor. Aus diesen lassen sich die entsprechenden Zeitkonstanten unmittelbar ablesen.

Die Modalanalyse eines EMS ohne Zwangsbedingungen lässt sich also durch Untersuchung der Systemmatrix  $A^a_b$  nach (4.28) durchführen. Dabei wird von einer einheitlichen



Modellierung unter Berücksichtigung der elektromechanischen Wechselwirkungen ausgegangen. Die so durchgeführte Modalanalyse liefert somit Ergebnisse für das EMS als Gesamtsystem.

Im Anhang, Abschnitt B.2.2 ist die Systemmatrix  $A^a_b$  nochmals dargestellt. Die dort verwendete Form ergibt sich bei der Herleitung aus (3.27) bei regulärer Induktormatrix unter Erhaltung der Struktur der Bewegungsgleichungen.

### 4.3.2 EMS mit Zwangsbedingungen

In diesem Abschnitt werden die linearisierten Gleichungen für EMS mit Zwangsbedingungen hergeleitet. Ausgangspunkt sind die in Abschnitt 3.3 entwickelten Bewegungsgleichungen (3.37) für solche Systeme. Es sollen folgende Indexvereinbarungen gelten:  $\kappa, \lambda, \varrho, \sigma, \xi \in J$  und  $\mu, \nu, \omega, \vartheta \in H^*$ .

#### 4.3.2.1 Bewegungsgleichungen und Bindungen

Es seien holonome rheonome Bindungen gemäß (3.31) innerhalb des MTS zugelassen. Diese sollen unabhängig voneinander sein, d.h.  $\text{rang}(\partial_\kappa h^{\varrho_1}(q^\sigma, t)) = |\{\varrho_1\}| \stackrel{!}{=} r_{mh}$ . Die zugehörigen kinematischen Zwangsbedingungen lauten nach (3.33)

$$f^{\varrho_1}{}_\alpha(q^\sigma, t)\dot{q}^\alpha = 0 \quad (4.29)$$

( $\varrho_1 \in J_{c_h} \cup J_{c_a}$ ,  $\alpha \in J \cup \{0\}$ ). Für das ETS wird die Formulierung in Minimalkoordinaten gewählt. Sollen Störungen von Stromquellen untersucht werden, so können diese gemäß der Maschentransformationen (2.33) bzw. (2.34) zu den Fundamentalkreisströmen bzw. -ladungen hinzuaddiert werden. Solche Störungen werden deshalb aus den folgenden Betrachtungen ausgeschlossen.

Wie bereits in Abschnitt 4.1 festgestellt, können in den „elektrischen Gleichungen“ Terme verschwinden, so dass die ursprünglichen Differenzialgleichungen auch zu algebraischen Gleichungen entarten können. Diese stellen dann weitere Zwangsbedingungen dar, die gesondert behandelt werden müssen. Die Anwendung der Indexmengenzerlegung (4.11) ergibt zunächst eine Kombination der „mechanischen“ Bewegungsgleichungen nach (3.37a) und der „elektrischen“ Bewegungsgleichungen nach (4.12):

$$g_{\kappa\lambda}\ddot{q}^\lambda + \Gamma_{\kappa\lambda\varrho}\dot{q}^\lambda\dot{q}^\varrho - Q_\kappa^{(me)} - Q_\kappa^{(el)} - \lambda_{\varrho_1}f^{\varrho_1}{}_\kappa = 0, \quad (4.30a)$$

$$l_{\mu_L\nu_L}\ddot{q}^{\nu_L} + \tilde{r}_{\mu_L\nu_L}\dot{q}^{\nu_L} + r_{\mu_L\nu_R}\dot{q}^{\nu_R} + c_{\mu_L\nu}q^\nu + \hat{v}_{\mu_L 0} = 0, \quad (4.30b)$$

$$r_{\mu_R\nu_{LR}}\dot{q}^{\nu_{LR}} + c_{\mu_R\nu}q^\nu + \hat{v}_{\mu_R 0} = 0, \quad (4.30c)$$

$$c_{\mu_C\nu}q^\nu + \hat{v}_{\mu_C 0} = 0. \quad (4.30d)$$

Die Gleichungen (4.30a) sind stets Differenzialgleichungen zweiter Ordnung, während (4.30d) immer Zwangsbedingungen für  $q^\mu$  darstellen. Für (4.30b) und (4.30c) sind Entartungen möglich. Mit einer analog zu (4.7) präzisierten Indexmengenzerlegung wird aus (4.30) ein System von Bewegungsgleichungen

$$g_{\kappa\lambda}\ddot{q}^\lambda + \Gamma_{\kappa\lambda\varrho}\dot{q}^\lambda\dot{q}^\varrho - Q_\kappa^{(me)} - Q_\kappa^{(el)} - \lambda_{\varrho_1}f^{\varrho_1}{}_\kappa = 0, \quad (4.31a)$$

$$l_{\mu_L'\nu_L'}\ddot{q}^{\nu_L'} + \tilde{r}_{\mu_L'\nu_L'}\dot{q}^{\nu_L'} + r_{\mu_L'\nu_R}\dot{q}^{\nu_R} + c_{\mu_L'\nu_{C\#}}q^{\nu_{C\#}} + \hat{v}_{\mu_L' 0} = 0, \quad (4.31b)$$

$$r_{\mu_{R1}\nu_{L'R}}\dot{q}^{\nu_{L'R}} + c_{\mu_{R1}\nu_{C\#}}q^{\nu_{C\#}} + \hat{v}_{\mu_{R1} 0} = 0 \quad (4.31c)$$

(mit  $c_{\mu L1\nu C\#} \equiv 0$ ) und ein System von Zwangsbedingungen

$$h^{\varrho_1}(q^\sigma, t) = 0, \quad (4.32a)$$

$$l_{\mu L0\nu L}\ddot{q}^{\nu L} + \hat{v}_{\mu L0} = 0, \quad (4.32b)$$

$$r_{\mu R0\nu L'R}\dot{q}^{\nu L'R} + \hat{v}_{\mu R0} = 0, \quad (4.32c)$$

$$c_{\mu C\nu C\#}q^{\nu C\#} + \hat{v}_{\mu C0} = 0. \quad (4.32d)$$

### 4.3.2.2 Störungsgleichungen

Das Verhalten des Gesamtsystems (4.31), (4.32) soll in der Nähe einer ungestörten Referenzlösung  $q^a(t)$  untersucht werden. Mittels der Transformationen  $q^a \mapsto \bar{q}^a = q^a + x^a$  sowie  $\lambda_{\varrho_1} \mapsto \bar{\lambda}_{\varrho_1} = \lambda_{\varrho_1} + \xi_{\varrho_1}$  lassen sich für kleine Störungen der Koordinaten  $x^a$  und kleine Störungen der Reaktionen  $\xi_{\varrho_1}$  alle Terme in (4.31), (4.32) in bekannter Weise linear approximieren ( $x^\xi$  bzw.  $\dot{x}^\xi$  – Störung einer mechanischen Koordinate bzw. Geschwindigkeit,  $x^\vartheta$  bzw.  $\dot{x}^\vartheta$  – Störung einer elektrischen Ladung bzw. eines elektrischen Stromes)

$$\begin{aligned} g_{\kappa\lambda}(\bar{q}^\sigma, t)\ddot{\bar{q}}^\lambda &= g_{\kappa\lambda}(q^\sigma, t)\ddot{q}^\lambda + g_{\kappa\xi}(q^\sigma, t)\dot{x}^\xi + \partial_\xi g_{\kappa\lambda}(q^\sigma, t)\dot{q}^\lambda x^\xi, \\ \Gamma_{\kappa\lambda\varrho}(\bar{q}^\sigma, t)\dot{\bar{q}}^\lambda \dot{\bar{q}}^{\varrho} &= \Gamma_{\kappa\lambda\varrho}(q^\sigma, t)\dot{q}^\lambda \dot{q}^{\varrho} + 2\Gamma_{\kappa\lambda\xi}(q^\sigma, t)\dot{q}^\lambda \dot{x}^\xi + \partial_\xi \Gamma_{\kappa\lambda\varrho}(q^\sigma, t)\dot{q}^\lambda \dot{q}^{\varrho} x^\xi, \\ Q_\kappa^{(me)}(\bar{q}^\sigma, \bar{q}^\sigma, t) &= Q_\kappa^{(me)}(\dot{q}^\sigma, q^\sigma, t) + \partial_\xi Q_\kappa^{(me)}(\dot{q}^\sigma, q^\sigma, t)\dot{x}^\xi + \partial_\xi Q_\kappa^{(me)}(\dot{q}^\sigma, q^\sigma, t)x^\xi, \\ Q_\kappa^{(el)}(\bar{q}^\sigma, \dot{\bar{q}}^{\omega L}, \bar{q}^\omega, t) &= Q_\kappa^{(el)}(q^\sigma, \dot{q}^{\omega L}, q^\omega, t) + \partial_\xi Q_\kappa^{(el)}(q^\sigma, \dot{q}^{\omega L}, q^\omega, t)x^\xi + \\ &\quad + \partial_{\vartheta L} Q_\kappa^{(el)}(q^\sigma, \dot{q}^{\omega L}, q^\omega, t)\dot{x}^{\vartheta L} + \partial_{\vartheta} Q_\kappa^{(el)}(q^\sigma, \dot{q}^{\omega L}, q^\omega, t)x^\vartheta, \\ \bar{\lambda}_{\varrho_1}(t)f^{\varrho_1}_\kappa(\bar{q}^\sigma, t) &= \lambda_{\varrho_1}(t)f^{\varrho_1}_\kappa(q^\sigma, t) + \xi_{\varrho_1}f^{\varrho_1}_\kappa(q^\sigma, t) + \lambda_{\varrho_1}(t)\partial_\xi f^{\varrho_1}_\kappa(q^\sigma, t)x^\xi, \\ l_{\mu L\nu L}(\bar{q}^\sigma, t)\ddot{\bar{q}}^{\nu L} &= l_{\mu L\nu L}(q^\sigma, t)\ddot{q}^{\nu L} + l_{\mu L\nu L}(q^\sigma, t)\dot{x}^{\vartheta L} + \partial_\xi l_{\mu L\nu L}(q^\sigma, t)\ddot{q}^{\nu L} x^\xi, \\ \tilde{r}_{\mu L'\nu L'}(\dot{\bar{q}}^\sigma, \bar{q}^\sigma, t)\dot{\bar{q}}^{\nu L'} &= \tilde{r}_{\mu L'\nu L'}(\dot{q}^\sigma, q^\sigma, t)\dot{q}^{\nu L'} + \tilde{r}_{\mu L'\vartheta L'}(\dot{q}^\sigma, q^\sigma, t)\dot{x}^{\vartheta L'} + \\ &\quad + \partial_\xi \tilde{r}_{\mu L'\nu L'}(\dot{q}^\sigma, q^\sigma, t)\dot{q}^{\nu L'} x^\xi + \partial_\xi \tilde{r}_{\mu L'\vartheta L'}(\dot{q}^\sigma, q^\sigma, t)\dot{x}^{\vartheta L'} x^\xi, \\ r_{\mu L'\nu R}(\bar{q}^\sigma, t)\dot{\bar{q}}^{\nu R} &= r_{\mu L'\nu R}(q^\sigma, t)\dot{q}^{\nu R} + r_{\mu L'\vartheta R}(q^\sigma, t)\dot{x}^{\vartheta R} + \partial_\xi r_{\mu L'\nu R}(q^\sigma, t)\dot{q}^{\nu R} x^\xi, \\ r_{\mu R\nu L'R}(\bar{q}^\sigma, t)\dot{\bar{q}}^{\nu L'R} &= r_{\mu R\nu L'R}(q^\sigma, t)\dot{q}^{\nu L'R} + r_{\mu R\nu L'R}(q^\sigma, t)\dot{x}^{\vartheta L'R} + \\ &\quad + \partial_\xi r_{\mu R\nu L'R}(q^\sigma, t)\dot{q}^{\nu L'R} x^\xi, \\ c_{\mu\nu C\#}(\bar{q}^\sigma, t)\bar{q}^{\nu C\#} &= c_{\mu\nu C\#}(q^\sigma, t)q^{\nu C\#} + c_{\mu\vartheta C\#}(q^\sigma, t)x^{\vartheta C\#} + \partial_\xi c_{\mu\nu C\#}(q^\sigma, t)q^{\nu C\#} x^\xi, \\ \hat{v}_{\mu L0}(\dot{\bar{q}}^\sigma, \bar{q}^\sigma, t) &= \hat{v}_{\mu L0}(\dot{q}^\sigma, q^\sigma, t) + \partial_\xi \hat{v}_{\mu L0}(\dot{q}^\sigma, q^\sigma, t)\dot{x}^\xi + \partial_\xi \hat{v}_{\mu L0}(\dot{q}^\sigma, q^\sigma, t)x^\xi, \\ \hat{v}_{\mu RC0}(\bar{q}^\sigma, t) &= \hat{v}_{\mu RC0}(q^\sigma, t) + \partial_\xi \hat{v}_{\mu RC0}(q^\sigma, t)x^\xi, \\ h^{\varrho_1}(\bar{q}^\sigma, t) &= h^{\varrho_1}(q^\sigma, t) + \partial_\xi h^{\varrho_1}(q^\sigma, t)x^\xi. \end{aligned}$$

Unter Hinzunahme von zusätzlichen kleinen generalisierten Störkräften  $\Phi_\kappa(\dot{q}^\sigma, q^\sigma, \dot{q}^{\omega L'}, q^{\omega L2}, q^{\omega R1}, t)$  und Störspannungen  $\Phi_\mu(\dot{q}^\sigma, q^\sigma, \dot{q}^{\omega L'}, q^{\omega L2}, q^{\omega R1}, t)$  folgen damit aus den Bewegungsgleichungen (4.31) die Störungsgleichungen

$$\begin{aligned} g_{\kappa\xi}\dot{x}^\xi + \left(2\Gamma_{\kappa\lambda\xi}\dot{q}^\lambda - \partial_\xi Q_\kappa^{(me)}\right)\dot{x}^\xi - \partial_{\vartheta L} Q_\kappa^{(el)}\dot{x}^{\vartheta L} + \\ + \left(\partial_\xi g_{\kappa\lambda}\dot{q}^\lambda + \partial_\xi \Gamma_{\kappa\lambda\varrho}\dot{q}^\lambda \dot{q}^{\varrho} - \partial_\xi Q_\kappa^{(me)} - \partial_\xi Q_\kappa^{(el)}\right)x^\xi - \partial_{\vartheta} Q_\kappa^{(el)}x^\vartheta - \\ - \lambda_{\varrho_1}\partial_\xi f^{\varrho_1}_\kappa x^\xi - \xi_{\varrho_1}f^{\varrho_1}_\kappa = \Phi_\kappa, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& l_{\mu_{L'}\vartheta_L} \ddot{x}^{\vartheta_L} + \left( \dot{\partial}_\xi \tilde{r}_{\mu_{L'}\nu_{L'}} \dot{q}^{\nu_{L'}} + \dot{\partial}_\xi \hat{v}_{\mu_{L'}0} \right) \dot{x}^\xi + \tilde{r}_{\mu_{L'}\vartheta_{L'}} \dot{x}^{\vartheta_{L'}} + r_{\mu_{L'}\vartheta_R} \dot{x}^{\vartheta_R} + \\
& + \left( \partial_\xi l_{\mu_{L'}\nu_L} \ddot{q}^{\nu_L} + \partial_\xi \tilde{r}_{\mu_{L'}\nu_{L'}} \dot{q}^{\nu_{L'}} + \partial_\xi r_{\mu_{L'}\nu_R} \dot{q}^{\nu_R} + \partial_\xi c_{\mu_{L'}\nu_{C\#}} \dot{q}^{\nu_{C\#}} + \partial_\xi \hat{v}_{\mu_{L'}0} \right) x^\xi + \\
& \hspace{20em} + c_{\mu_{L'}\vartheta_{C\#}} x^{\vartheta_{C\#}} = \Phi_{\mu_{L'}}, \\
& r_{\mu_{R1}\vartheta_{L'R}} \dot{x}^{\vartheta_{L'R}} + \left( \partial_\xi r_{\mu_{R1}\nu_{L'R}} \dot{q}^{\nu_{L'R}} + \partial_\xi c_{\mu_{R1}\nu_{C\#}} \dot{q}^{\nu_{C\#}} + \partial_\xi \hat{v}_{\mu_{R1}0} \right) x^\xi + c_{\mu_{R1}\vartheta_{C\#}} x^{\vartheta_{C\#}} = \Phi_{\mu_{R1}}.
\end{aligned}$$

Diese Gleichungen sind noch im kompletten  $(n+m)$ -dimensionalen Konfigurationsraum des EMS formuliert. Zusätzlich ergeben sich aus den Zwangsbedingungen (4.32) die Bindungsgleichungen für die Störungen

$$\begin{aligned}
& \partial_\xi h^{\varrho_1} x^\xi = f^{\varrho_1}_\xi x^\xi = 0, \\
& l_{\mu_{L0}\vartheta_L} \ddot{x}^{\vartheta_L} + \dot{\partial}_\xi \hat{v}_{\mu_{L0}0} \dot{x}^\xi + (\partial_\xi l_{\mu_{L0}\nu_L} \ddot{q}^{\nu_L} + \partial_\xi \hat{v}_{\mu_{L0}0}) x^\xi = 0, \\
& r_{\mu_{R0}\vartheta_{L'R}} \dot{x}^{\vartheta_{L'R}} + (\partial_\xi r_{\mu_{R0}\nu_{L'R}} \dot{q}^{\nu_{L'R}} + \partial_\xi \hat{v}_{\mu_{R0}0}) x^\xi = 0, \\
& c_{\mu_C\vartheta_{C\#}} x^{\vartheta_{C\#}} + \left( \partial_\xi c_{\mu_C\nu_{C\#}} \dot{q}^{\nu_{C\#}} + \partial_\xi \hat{v}_{\mu_C0} \right) x^\xi = 0.
\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Bindungsgleichungen werden jetzt die Störungsgleichungen auf einen Unterraum des EMS-Konfigurationsraumes für die unabhängigen Störungen transformiert. Dieser hat die Dimension  $n - r_{mh} + m - r_{aG} = n - r_{mh} + m^*$ . Für die mechanischen Bindungen gemäß (4.29) gilt wegen ihrer Unabhängigkeit  $|\{\varrho_1\}| = r_{mh} < |\{\kappa\}| = n$  und  $\text{rang}(f^{\varrho_1}_\kappa) = r_{mh}$ . Die Matrix  $f^{\varrho_1}_\kappa$  besitzt deshalb eine Partitionierung

$$f^{\varrho_1}_\kappa = (f^{\varrho_1}_{\kappa_1} \mid f^{\varrho_1}_{\kappa_2})$$

mit  $\text{rang}(f^{\varrho_1}_{\kappa_1}) = r_{mh}$ . Im Weiteren werden die abhängigen mechanischen Koordinaten mit dem Subindex 1 (z.B.  $q^{\kappa_1}$ ) und die unabhängigen mit dem Subindex 2 (z.B.  $q^{\kappa_2}$ ) gekennzeichnet. Für die Bindungsgleichungen der mechanischen Störungen folgt dann

$$f^{\varrho_1}_\xi x^\xi = f^{\varrho_1}_{\xi_1} x^{\xi_1} + f^{\varrho_1}_{\xi_2} x^{\xi_2} = 0$$

und mit der Inversen  $\tilde{f}^{\xi_1}_{\varrho_1}$  gemäß  $\tilde{f}^{\xi_1}_{\varrho_1} f^{\varrho_1}_{\lambda_1} = \delta^{\xi_1}_{\lambda_1}$  lassen sich die abhängigen mechanischen Störungen wie folgt darstellen:

$$x^{\xi_1} = -\tilde{f}^{\xi_1}_{\varrho_1} f^{\varrho_1}_{\xi_2} x^{\xi_2}.$$

Mit

$$(F^\kappa_{\xi_2}) = \left[ \begin{array}{c} -\tilde{f}^{\kappa_1}_{\varrho_1} f^{\varrho_1}_{\xi_2} \\ \delta^{\kappa_2}_{\xi_2} \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} \} \quad \kappa = \kappa_1 \\ \} \quad \kappa = \kappa_2 \end{array} \right\}$$

gilt für die mechanischen Störungen und deren Ableitungen

$$\begin{aligned}
x^\xi &= F^\xi_{\xi_2}(q^\sigma, t) x^{\xi_2}, \\
\dot{x}^\xi &= F^\xi_{\xi_2} \dot{x}^{\xi_2} + (\partial_\kappa F^\xi_{\xi_2} \dot{q}^\kappa + \partial_0 F^\xi_{\xi_2}) x^{\xi_2}, \\
\ddot{x}^\xi &= F^\xi_{\xi_2} \ddot{x}^{\xi_2} + 2(\partial_\kappa F^\xi_{\xi_2} \dot{q}^\kappa + \partial_0 F^\xi_{\xi_2}) \dot{x}^{\xi_2} + \\
&\quad + (\partial_\lambda \partial_\kappa F^\xi_{\xi_2} \dot{q}^\kappa \dot{q}^\lambda + 2\partial_0 \partial_\kappa F^\xi_{\xi_2} \dot{q}^\kappa + \partial_0 \partial_0 F^\xi_{\xi_2}) x^{\xi_2}.
\end{aligned}$$

Die Matrix  $F^{\xi}_{\xi_2}$  ist orthogonales Komplement zu  $f^{\xi_1}_{\xi}$ , d.h., es gilt  $f^{\xi_1}_{\xi} F^{\xi}_{\xi_2} = 0$ . Die „elektrischen“ Bindungsgleichungen (Anzahl  $r_{aG}$ ) lassen sich nach den abhängigen elektrischen Störungen umstellen

$$\begin{aligned}\ddot{x}^{\vartheta_{L0}} &= -l^{\vartheta_{L0}\mu_{L0}} \left[ l_{\mu_{L0}\vartheta_{L'}} \ddot{x}^{\vartheta_{L'}} + \dot{\partial}_{\xi} \hat{v}_{\mu_{L0}0} \dot{x}^{\xi} + (\partial_{\xi} l_{\mu_{L0}\nu_L} \ddot{q}^{\nu_L} + \partial_{\xi} \hat{v}_{\mu_{L0}0}) x^{\xi} \right], \\ \dot{x}^{\vartheta_{R0}} &= -r^{\vartheta_{R0}\mu_{R0}} \left[ r_{\mu_{R0}\vartheta_{L'R1}} \dot{x}^{\vartheta_{L'R1}} + (\partial_{\xi} r_{\mu_{R0}\nu_{L'R}} \dot{q}^{\nu_{L'R}} + \partial_{\xi} \hat{v}_{\mu_{R0}0}) x^{\xi} \right], \\ x^{\vartheta_C} &= -c^{\vartheta_C\mu_C} \left[ c_{\mu_C\vartheta_{\check{C}}} x^{\vartheta_{\check{C}}} + (\partial_{\xi} c_{\mu_C\nu_{C\#}} \dot{q}^{\nu_{C\#}} + \partial_{\xi} \hat{v}_{\mu_C0}) x^{\xi} \right]\end{aligned}$$

( $l_{\mu_{L0}\vartheta_{L0}}$ ,  $r_{\mu_{R0}\vartheta_{R0}}$ ,  $c_{\mu_C\vartheta_C}$  sind invertierbar). Multiplikation der „mechanischen“ Störungsgleichungen mit dem o.g. orthogonalen Komplement und Substitution der  $\ddot{x}^{\xi}$ ,  $\dot{x}^{\xi}$ ,  $x^{\xi}$  sowie Einsetzen der abhängigen „elektrischen“ Störungen in die entsprechenden Störungsgleichungen ergibt ein Differenzialgleichungssystem der Form

$$\begin{aligned}g_{\kappa_2\xi_2} \ddot{x}^{\xi_2} + d_{\kappa_2\xi_2}^{(m,m)} \dot{x}^{\xi_2} + d_{\kappa_2\vartheta_L}^{(m,e)} \dot{x}^{\vartheta_L} + k_{\kappa_2\xi_2}^{(m,m)} x^{\xi_2} + k_{\kappa_2\vartheta_{LR}}^{(m,e)} x^{\vartheta_{LR}} &= \Phi_{\kappa_2}, \\ l_{\mu_{L'}\vartheta_{L'}}^* \ddot{x}^{\vartheta_{L'}} + r_{\mu_{L'}\vartheta_{R1}}^* \dot{x}^{\vartheta_{R1}} + d_{\mu_{L'}\xi_2}^{(e,m)} \dot{x}^{\xi_2} + \tilde{r}_{\mu_{L'}\vartheta_{L'}}^* \dot{x}^{\vartheta_{L'}} + k_{\mu_{L'}\xi_2}^{(e,m)} x^{\xi_2} + c_{\mu_{L'}\vartheta_{\check{C}}}^* x^{\vartheta_{\check{C}}} &= \Phi_{\mu_{L'}}, \\ r_{\mu_{R1}\vartheta_{R1}}^* \dot{x}^{\vartheta_{R1}} + r_{\mu_{R1}\vartheta_{L'}}^* \dot{x}^{\vartheta_{L'}} + p_{\mu_{R1}\xi_2}^{(e,m)} x^{\xi_2} + c_{\mu_{R1}\vartheta_{\check{C}}}^* x^{\vartheta_{\check{C}}} &= \Phi_{\mu_R}.\end{aligned}$$

Die aufgeführten Koeffizienten sind im Anhang, Abschnitt B.3.1, ausführlich dargestellt. Diese Gleichungen stellen ein System rheoliner Differenzialgleichungen für die Störungen  $x^{\xi_2}$ ,  $\dot{x}^{\vartheta_{L1}}$ ,  $x^{\vartheta_{L2}}$ ,  $x^{\vartheta_{R1}}$  dar. Damit sind analog zu Abschnitt 4.3.1.1 Untersuchungen zum Einfluss von generalisierten Störkräften und Störspannungen und die Ermittlung von Störbewegungen um eine Nominaltrajektorie auch für EMS mit Zwangsbedingungen möglich.

### 4.3.2.3 Modalanalyse

Zur Untersuchung des Eigenschwingungsverhaltens und zur Ermittlung von Störbewegungen um einen statischen Gleichgewichtszustand bei vorgegebenen Anfangsstörungen werden die EMS-Störungsgleichungen mit folgenden Vereinfachungen verwendet:  $\Phi_a = 0$ ,  $\ddot{q}^{\lambda} \equiv 0$ ,  $\dot{q}^{\lambda} \equiv 0$ ,  $\ddot{q}^{\nu_{L'}}$   $\equiv 0$ ,  $\dot{q}^{\nu_{L2}} \equiv 0$ ,  $\dot{q}^{\nu_{R1}} \equiv 0$ . Ein Verschwinden der  $\dot{q}^{\nu_{L1}}$  wird nicht verlangt (siehe Definition eines statischen Gleichgewichtszustandes eines EMS in Abschnitt 4.2). Weiterhin gilt bei einer Modalanalyse wegen des festgehaltenen Systemzustandes  $F^{\kappa}_{\kappa_2} = const$ . Dann wird aus den EMS-Störungsgleichungen das folgende System

$$\begin{aligned}g_{\kappa_2\xi_2} \ddot{x}^{\xi_2} + d_{\kappa_2\xi_2}^{(m,m)} \dot{x}^{\xi_2} + d_{\kappa_2\vartheta_L}^{(m,e)} \dot{x}^{\vartheta_L} + k_{\kappa_2\xi_2}^{(m,m)} x^{\xi_2} + k_{\kappa_2\vartheta_{LR}}^{(m,e)} x^{\vartheta_{LR}} &= 0, \\ l_{\mu_{L'}\vartheta_{L'}}^* \ddot{x}^{\vartheta_{L'}} + r_{\mu_{L'}\vartheta_{R1}}^* \dot{x}^{\vartheta_{R1}} + d_{\mu_{L'}\xi_2}^{(e,m)} \dot{x}^{\xi_2} + \tilde{r}_{\mu_{L'}\vartheta_{L'}}^* \dot{x}^{\vartheta_{L'}} + k_{\mu_{L'}\xi_2}^{(e,m)} x^{\xi_2} + c_{\mu_{L'}\vartheta_{\check{C}}}^* x^{\vartheta_{\check{C}}} &= 0, \\ r_{\mu_{R1}\vartheta_{R1}}^* \dot{x}^{\vartheta_{R1}} + r_{\mu_{R1}\vartheta_{L'}}^* \dot{x}^{\vartheta_{L'}} + p_{\mu_{R1}\xi_2}^{(e,m)} x^{\xi_2} + c_{\mu_{R1}\vartheta_{\check{C}}}^* x^{\vartheta_{\check{C}}} &= 0\end{aligned}$$

mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned}g_{\kappa_2\xi_2} &= g_{\kappa\xi} F^{\kappa}_{\kappa_2} F^{\xi}_{\xi_2}, \\ d_{\kappa_2\xi_2}^{(m,m)} &= -\dot{\partial}_{\xi} Q_{\kappa}^{(me)} F^{\kappa}_{\kappa_2} F^{\xi}_{\xi_2}, \\ d_{\kappa_2\vartheta_L}^{(m,e)} &= -\dot{\partial}_{\vartheta_L} Q_{\kappa}^{(el)} F^{\kappa}_{\kappa_2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{\kappa_2 \xi_2}^{(m,m)} &= - \left( \partial_\xi Q_\kappa^{(me)} + \partial_\xi Q_\kappa^{(el)} + \lambda_{\varrho_1} \partial_\xi f^{\varrho_1 \kappa} \right) F^\kappa_{\kappa_2} F^\xi_{\xi_2} + \\
&\quad + \partial_{\vartheta_C} Q_\kappa^{(el)} F^\kappa_{\kappa_2} c^{\vartheta_C \mu C} \left( \partial_\xi c_{\mu C \nu C \#} q^{\nu C \#} + \partial_\xi \hat{v}_{\mu C 0} \right) F^\xi_{\xi_2}, \\
k_{\kappa_2 \vartheta_{LR}}^{(m,e)} &= - \partial_{\vartheta_{LR}} Q_\kappa^{(el)} F^\kappa_{\kappa_2} + \partial_{\vartheta_C} Q_\kappa^{(el)} F^\kappa_{\kappa_2} c^{\vartheta_C \mu C} c_{\mu C \vartheta_{LR}}, \\
d_{\mu_{L'} \xi_2}^{(e,m)} &= \left( \dot{\partial}_\xi \tilde{r}_{\mu_{L'} \nu_{L1}} \dot{q}^{\nu_{L1}} + \dot{\partial}_\xi \hat{v}_{\mu_{L'} 0} - \check{l}_{\mu_{L'}}^{\mu_{L0}} \dot{\partial}_\xi \hat{v}_{\mu_{L0} 0} \right) F^\xi_{\xi_2}, \\
k_{\mu_{L'} \xi_2}^{(e,m)} &= \left[ \partial_\xi \tilde{r}_{\mu_{L'} \nu_{L1}} \dot{q}^{\nu_{L1}} + \partial_\xi c_{\mu_{L'} \nu_{C \#}} q^{\nu_{C \#}} + \partial_\xi \hat{v}_{\mu_{L'} 0} - \check{l}_{\mu_{L'}}^{\mu_{L0}} \partial_\xi \hat{v}_{\mu_{L0} 0} - \right. \\
&\quad \left. - \check{r}_{\mu_{L'}}^{\mu_{R0}} (\partial_\xi r_{\mu_{R0} \nu_{L1}} \dot{q}^{\nu_{L1}} + \partial_\xi \hat{v}_{\mu_{R0} 0}) - \check{c}_{\mu_{L'}}^{\mu_C} (\partial_\xi c_{\mu_C \nu_{C \#}} q^{\nu_{C \#}} + \partial_\xi \hat{v}_{\mu_C 0}) \right] F^\xi_{\xi_2}, \\
p_{\mu_{R1} \xi_2}^{(e,m)} &= \left[ \partial_\xi r_{\mu_{R1} \nu_{L1}} \dot{q}^{\nu_{L1}} + \partial_\xi c_{\mu_{R1} \nu_{C \#}} q^{\nu_{C \#}} + \partial_\xi \hat{v}_{\mu_{R1} 0} - \right. \\
&\quad \left. - \check{r}_{\mu_{R1}}^{\mu_{R0}} (\partial_\xi r_{\mu_{R0} \nu_{L1}} \dot{q}^{\nu_{L1}} + \partial_\xi \hat{v}_{\mu_{R0} 0}) - \check{c}_{\mu_{R1}}^{\mu_C} (\partial_\xi c_{\mu_C \nu_{C \#}} q^{\nu_{C \#}} + \partial_\xi \hat{v}_{\mu_C 0}) \right] F^\xi_{\xi_2}.
\end{aligned}$$

Die Koeffizienten  $l_{\mu_{L'} \vartheta_{L'}}^*$ ,  $r_{\mu_{L'} \vartheta_{R1}}^*$ ,  $\tilde{r}_{\mu_{L'} \vartheta_{L'}}^*$ ,  $c_{\mu_{L'} \vartheta_C}^*$ ,  $r_{\mu_{R1} \vartheta_{R1}}^*$ ,  $r_{\mu_{R1} \vartheta_{L'}}^*$ ,  $c_{\mu_{R1} \vartheta_C}^*$  bleiben gegenüber den Störungsgleichungen unverändert. Sie sind im Anhang, Abschnitt B.3.1, aufgeführt. Dort sind auch die Abkürzungen  $\check{l}_{\mu_{L'}}^{\mu_{L0}}$ ,  $\check{r}_{\mu_{L'}}^{\mu_{R0}}$ ,  $\check{r}_{\mu_{R1}}^{\mu_{R0}}$ ,  $\check{c}_{\mu_{L'}}^{\mu_C}$  und  $\check{c}_{\mu_{R1}}^{\mu_C}$  definiert. Der Vektor der Zustandsvariablen und seine erste Ableitung lauten jetzt

$$(x^b) = \begin{pmatrix} \dot{x}^{\xi_2} \\ x^{\xi_2} \\ \dot{x}^{\vartheta_{L1}} \\ \dot{x}^{\vartheta_{L2}} \\ x^{\vartheta_{L2}} \\ \dot{x}^{\vartheta_{R1}} \end{pmatrix}, \quad (\dot{x}^a) = \begin{pmatrix} \ddot{x}^{\lambda_2} \\ \dot{x}^{\lambda_2} \\ \ddot{x}^{\mu_{L1}} \\ \ddot{x}^{\mu_{L2}} \\ \dot{x}^{\mu_{L2}} \\ \dot{x}^{\mu_{R1}} \end{pmatrix}.$$

Für die linearisierten Bewegungsgleichungen der Form (4.27) ergibt sich folgende Struktur der Systemmatrix

$$(A^a_b) = \begin{pmatrix} (A_{11}) & (A_{12}) & (A_{13}) & (A_{14}) & (A_{15}) & (A_{16}) \\ (\delta_{\xi_2}^{\lambda_2}) & (0) & (0) & (0) & (0) & (0) \\ (A_{31}) & (A_{32}) & (A_{33}) & (A_{34}) & (A_{35}) & (A_{36}) \\ (A_{41}) & (A_{42}) & (A_{43}) & (A_{44}) & (A_{45}) & (A_{46}) \\ (0) & (0) & (0) & (\delta_{\vartheta_{L2}}^{\mu_{L2}}) & (0) & (0) \\ (A_{61}) & (A_{62}) & (A_{63}) & (A_{64}) & (A_{65}) & (A_{66}) \end{pmatrix}$$

mit den Submatrizen

$$A_{11} : -g^{\lambda_2 \kappa_2} d_{\kappa_2 \xi_2}^{(m,m)},$$

$$A_{12} : -g^{\lambda_2 \kappa_2} k_{\kappa_2 \xi_2}^{(m,m)},$$

$$A_{13} : -g^{\lambda_2 \kappa_2} d_{\kappa_2 \vartheta_{L1}}^{(m,e)},$$

$$A_{14} : -g^{\lambda_2 \kappa_2} d_{\kappa_2 \vartheta_{L2}}^{(m,e)},$$

$$A_{15} : -g^{\lambda_2 \kappa_2} k_{\kappa_2 \vartheta_{L2}}^{(m,e)},$$

$$\begin{aligned}
A_{16} &: -g^{\lambda_2 \kappa_2} k_{\kappa_2 \vartheta_{R1}}^{(m,e)}, \\
A_{31} &: -l^{*\omega_{L1}\mu_{L'}} d_{\mu_{L'}\xi_2}^{(e,m)}, \\
A_{32} &: -l^{*\omega_{L1}\mu_{L'}} k_{\mu_{L'}\xi_2}^{(e,m)} + l^{\#\omega_{L1}\mu_{R1}} p_{\mu_{R1}\xi_2}^{(e,m)}, \\
A_{33} &: -l^{*\omega_{L1}\mu_{L'}} \tilde{r}_{\mu_{L'}\vartheta_{L1}}^* + l^{\#\omega_{L1}\mu_{R1}} r_{\mu_{R1}\vartheta_{L1}}^*, \\
A_{34} &: -l^{*\omega_{L1}\mu_{L'}} \tilde{r}_{\mu_{L'}\vartheta_{L2}}^* + l^{\#\omega_{L1}\mu_{R1}} r_{\mu_{R1}\vartheta_{L2}}^*, \\
A_{35} &: -l^{*\omega_{L1}\mu_{L'}} c_{\mu_{L'}\vartheta_{L2}}^* + l^{\#\omega_{L1}\mu_{R1}} c_{\mu_{R1}\vartheta_{L2}}^*, \\
A_{36} &: -l^{*\omega_{L1}\mu_{L'}} c_{\mu_{L'}\vartheta_{R1}}^* + l^{\#\omega_{L1}\mu_{R1}} c_{\mu_{R1}\vartheta_{R1}}^*, \\
A_{41} &: -l^{*\omega_{L2}\mu_{L'}} d_{\mu_{L'}\xi_2}^{(e,m)}, \\
A_{42} &: -l^{*\omega_{L2}\mu_{L'}} k_{\mu_{L'}\xi_2}^{(e,m)} + l^{\#\omega_{L2}\mu_{R1}} p_{\mu_{R1}\xi_2}^{(e,m)}, \\
A_{43} &: -l^{*\omega_{L2}\mu_{L'}} \tilde{r}_{\mu_{L'}\vartheta_{L1}}^* + l^{\#\omega_{L2}\mu_{R1}} r_{\mu_{R1}\vartheta_{L1}}^*, \\
A_{44} &: -l^{*\omega_{L2}\mu_{L'}} \tilde{r}_{\mu_{L'}\vartheta_{L2}}^* + l^{\#\omega_{L2}\mu_{R1}} r_{\mu_{R1}\vartheta_{L2}}^*, \\
A_{45} &: -l^{*\omega_{L2}\mu_{L'}} c_{\mu_{L'}\vartheta_{L2}}^* + l^{\#\omega_{L2}\mu_{R1}} c_{\mu_{R1}\vartheta_{L2}}^*, \\
A_{46} &: -l^{*\omega_{L2}\mu_{L'}} c_{\mu_{L'}\vartheta_{R1}}^* + l^{\#\omega_{L2}\mu_{R1}} c_{\mu_{R1}\vartheta_{R1}}^*, \\
A_{61} &: 0, \\
A_{62} &: -r^{*\omega_{R1}\mu_{R1}} p_{\mu_{R1}\xi_2}^{(e,m)}, \\
A_{63} &: -r^{*\omega_{R1}\mu_{R1}} r_{\mu_{R1}\vartheta_{L1}}^*, \\
A_{64} &: -r^{*\omega_{R1}\mu_{R1}} r_{\mu_{R1}\vartheta_{L2}}^*, \\
A_{65} &: -r^{*\omega_{R1}\mu_{R1}} c_{\mu_{R1}\vartheta_{L2}}^*, \\
A_{66} &: -r^{*\omega_{R1}\mu_{R1}} c_{\mu_{R1}\vartheta_{R1}}^*,
\end{aligned}$$

wobei  $l^{\#\omega_{L'}\mu_{R1}} = l^{*\omega_{L'}\mu_{L'}} r_{\mu_{L'}\vartheta_{R1}}^* r^{*\vartheta_{R1}\mu_{R1}}$  ist. Nach dem Aufstellen der Systemmatrix  $A^a_b$  können deren Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren bestimmt werden. Der schwingungsfähige Teil des gesamten EMS erzeugt paarweise konjugiert komplexe Eigenwerte. Alle Differenzialgleichungen erster Ordnung (Indexmengen  $H_{L1}$  und  $H_{R1}$ ) liefern einzelne reelle Eigenwerte mit jeweils einem Eigenvektor. Sie gehören zum nicht schwingungsfähigen Teil des EMS.

Die *Modalanalyse eines EMS mit Zwangsbedingungen* lässt sich also durch Untersuchung der dargestellten Systemmatrix  $A^a_b$  durchführen. Infolge der einheitlichen Modellierung unter Berücksichtigung der elektromechanischen Wechselwirkungen sind die Ergebnisse für das EMS als Gesamtsystem gültig.

# Kapitel 5

## Analyse elektromechanischer Systeme bei variabler Struktur

Elektromechanische Systeme mit *variabler Struktur* sind heterogene Systeme, deren Topologie oder Kinematik einer gewissen Veränderlichkeit unterliegen. Diese Strukturvariabilität kann im mechanischen und/oder im elektrischen Teilsystem auftreten. Deshalb wird in diesem Kapitel ein Zugang zur Modellierung solcher Systeme erläutert, der gleichermaßen für beide Domänen und somit auch für domänenübergreifende Phänomene geeignet ist. Dieser Zugang basiert einerseits auf dem in den Kapiteln 2 und 3 dargestellten Lagrange-Formalismus für elektrische bzw. elektromechanische Systeme und andererseits auf dem linearen Komplementaritätsproblem (LCP). Zu Definition und Lösungsmöglichkeiten des LCP in Kurzform sei auf den Anhang C verwiesen. Ausführliche Informationen finden sich z.B. in [26] und [161].

Damit wird die in der vorliegenden Arbeit verfolgte einheitliche mathematische Modellierung von EMS auch auf Systeme mit variabler Struktur ausgedehnt.

### 5.1 Strukturvariabilität und unilaterale Bindungen

Die Bewegung eines EMS (siehe Festlegung in Abschnitt 3.1) ist ein stetiger Vorgang, der durch hinreichend glatte Funktionen  $q(t)$  beschrieben werden kann. Die Struktur des EMS bleibt dabei konstant (und natürlich auch der Freiheitsgrad). Unter einer Strukturveränderung soll dagegen stets ein unstetiger Vorgang verstanden werden, der zu einem bestimmten Zeitpunkt erfolgt. Vor und nach diesem Zeitpunkt liegen stetige Bewegungsvorgänge, die für ein mindestens endliches Zeitintervall andauern. Die Strukturveränderung selbst soll in einem unendlich kurzen Zeitintervall erfolgen. Diese Idealisierung der realen physikalischen Vorgänge ist in vielen Fällen gerechtfertigt. Im Allgemeinen wird ein solcher unstetiger Vorgang mit einer Änderung des Freiheitsgrades verbunden sein. Im Weiteren wird deshalb auch der Begriff „momentaner Freiheitsgrad“ verwendet.

Eine innerhalb eines EMS auftretende *unilaterale Bindung* ist gekennzeichnet durch eine Einschränkung des Konfigurationsraumes  $\mathbb{R}^{n+m}$  auf einen Halbraum. Sie wird durch eine entsprechende Zulässigkeitsbedingung  $f(q^a) \geq 0$  definiert. Solange  $f(q^a) > 0$  gilt, ist die Einschränkung nicht aktiv. Der Freiheitsgrad eines EMS ohne Zwangsbedingungen ist  $(n + m)$ . Wenn die Grenzbedingung  $f(q^a) = 0$  erreicht wird, wird die Einschränkung

aktiviert. Falls darüber hinaus gleichzeitig die Funktionalableitung  $f'(q^a) < 0$  wird, treten entsprechende Reaktionen (mechanische Kräfte/Momente oder elektrische Spannungen) auf. Der Freiheitsgrad verringert sich um (mindestens) Eins. Die dann gültige Einschränkung des Konfigurationsraumes kann nur unter Einhaltung der Zulässigkeitsbedingung wieder aufgehoben werden. In diesem Fall erhöht sich der Freiheitsgrad wieder auf  $(n + m)$ .

Typische strukturvariable Mehrkörpersysteme (MKS) sind z.B. durch das Aktivieren/Deaktivieren von mechanischen Anschlüssen, den Übergang zwischen Haft- und Gleitreibung oder durch Aufeinandertreffen/Separieren von Kontaktflächen charakterisiert. Solche Phänomene sind interpretierbar entweder als Veränderung des Freiheitsgrades eines Gelenks und damit der Kinematik des MKS oder als Veränderung seiner Topologie. Der letztere Fall entspricht einer zeitweiligen Entartung eines Gelenks zum „freien“ Gelenk mit dem Freiheitsgrad sechs. Beide Phänomene können als unilaterale Bindungen beschrieben werden. Jeder der genannten unstetigen Vorgänge entspricht einem Aktivieren bzw. Deaktivieren der zugehörigen Einschränkung.

Strukturvariable elektrische Systeme (ES) sind durch das Auftreten von Schaltbauelementen gekennzeichnet. Solche Bauelemente sind durch zwei Zustände (auch Schaltzustände) – Schalter „geöffnet“ und Schalter „geschlossen“ – charakterisiert. Im Hinblick auf die beabsichtigte Verwendung eines *einheitlichen Zugangs zur Modellierung von Strukturvariabilität in mechanischer und elektrischer Domäne* bietet sich eine Verhaltensbeschreibung auch der elektrischen Schaltbauelemente als unilaterale Bindungen an. Der Übergang von einem zum anderen Schaltzustand eines solchen Bauelementes bedeutet zunächst das Entfernen/Hinzufügen eines Zweiges und damit eine *Veränderung der Topologie des elektrischen Netzwerkes* (siehe Abschnitt 2.3.1). Dieser Übergang ist aber ebenso durch Hinzufügen/Entfernen einer Stromquelle mit dem Wert Null beschreibbar, wobei die Topologie erhalten bleibt (Hinzufügen bedeutet Schalter öffnen, Entfernen heißt Schalter schließen). Das entspricht dem Hinzufügen/Entfernen von rheonomen Bindungen und damit einer *Veränderung der Kinematik des ES* (siehe Abschnitt 2.3.2). Diese Phänomene sind ebenfalls durch unilaterale Bindungen beschreibbar. Das Hinzufügen bzw. Entfernen einer Nullstrom-Quelle entspricht dem Aktivieren bzw. Deaktivieren der zugehörigen Einschränkung.

Die Beschreibung und Untersuchung strukturvariabler Systeme mittels unilateraler Bindungen lässt sich in folgende Teilprobleme gliedern:

- Beschreibung der unilateralen Bindungen,
- Herleitung der Bewegungsgleichungen und Zwangsbedingungen,
- Formulierung der Indikatoren zur Ermittlung des Schaltzeitpunktes,
- Auswahl einer neuen erlaubten Struktur unter Berücksichtigung der entsprechenden Erhaltungssätze zum Schaltzeitpunkt.

## 5.2 Strukturvariabilität bei mechanischen Systemen

In der vorliegenden Arbeit soll auf die Beschreibung von strukturvariablen mechanischen Systemen nur sehr kurz eingegangen werden. Eine sehr ausführliche Darstellung



der Behandlung solcher Systeme findet sich z.B. bei GLOCKER [67]. Dort werden sowohl das Aufeinandertreffen (Stoß) und Separieren von Körperkontaktflächen als auch Haft-/Gleitreibungsaufgaben behandelt. Zur Beschreibung dieser Schaltphänomene werden neben anderen Möglichkeiten (variationelle Ungleichungen, Inklusionen) auch Komplementaritätsbedingungen verwendet. Diese führen im Weiteren auf die Anwendung des LCP zur Strukturauswahl.

Bei Kontaktproblemen erfolgt die Beschreibung der unilateralen Bindungen über eine geschlossene Definition der Körperkonturen und deren Einsatz zur Bestimmung der jeweils aktuellen Kontaktpunkte. Als *Indikatorfunktionen* werden die aktuellen Abstände der potenziellen Körperkontaktpunkte (bei getrennten Körpern) bzw. die Kontaktkräfte in Normalenrichtung (bei kontaktierenden Körpern) eingesetzt. Zur Aufstellung eines LCP sind neben den Kontaktkräften sämtliche Relativbeschleunigungen in Normalenrichtung zu formulieren.

Bei Haft-/Gleitreibungsaufgaben werden die unilateralen Bindungen nach dem Coulomb'schen Reibgesetz definiert. Als Indikatorfunktionen dienen die (tangentialen) Relativgeschwindigkeiten bzw. die Haftkraftreserven. Zur Aufstellung eines LCP sind neben den Haftkraftreserven die (tangentialen) Relativbeschleunigungen zu ermitteln. Dies gelingt über eine Zerlegung der auf Beschleunigungsebene formulierten Reibkennlinie in zwei Teilkennlinien.

Oftmals treten bei MKS auch kombinierte Kontakt-/Reibprobleme (auch als kombinierte Normal-/Tangentialprobleme bezeichnet) auf. Diese sollen hier nicht näher betrachtet werden. Sie werden ebenfalls ausführlich in [67] behandelt.

### 5.2.1 Das Kontaktproblem

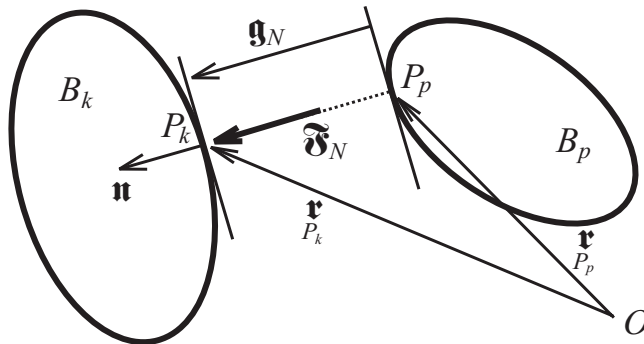


Bild 5.1: Kontakt zweier Körper

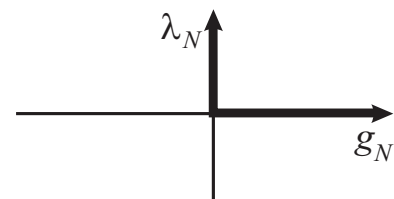


Bild 5.2: Kontakt als unilaterale Bindung

Als Kontakt wird die Berührung der Oberflächen zweier Körper bezeichnet. In dieser Arbeit sollen beispielhaft die beiden Zustandsübergänge des Abhebens (d.h. von Kontakt zu Separation) und des Aufeinandertreffens (d.h. von Separation zu Kontakt) betrachtet werden. Für letzteren Zustandsübergang ist allerdings nur ein sanftes Aufsetzen bei stetig bleibenden Geschwindigkeiten erlaubt. Ein Aufsetzen mit Geschwindigkeitssprüngen führt auf Stoßprobleme, die in der Literatur ausführlich behandelt werden aber über den

Rahmen dieser Arbeit hinausgehen würden. GLOCKER zeigt in [67], dass solche Probleme durch eine Formulierung mittels unilateraler Bindungen und die LCP-Aufstellung zur Strukturfindung ebenfalls lösbar sind.

Wenn zwischen zwei Körpern ein Kontakt möglich ist, dann sei der Vektor des kürzesten Abstandes zwischen beiden Körpern mit  $\mathbf{g}_N$  bezeichnet und  $g_N$  sei dessen skalarer Wert (siehe Bild 5.1). Bei glatten Oberflächen (keine Ecken, keine Kanten) steht  $\mathbf{g}_N$  stets senkrecht auf beiden Oberflächenkonturen. Der Einheitsvektor in Normalenrichtung  $\mathbf{n}$  sei senkrecht auf der Oberfläche des Körpers  $B_k$  in Richtung dessen Körperinneren definiert. Deshalb gilt mit den gemäß (2.5) beschriebenen Ortsvektoren

$$\mathbf{g}_N = \mathbf{r}_{P_k} - \mathbf{r}_{P_p} = g_N \mathbf{n}.$$

Unter der idealisierenden Starrkörperannahme können beide Körper nicht ineinander eindringen. Deshalb muss stets

$$g_N \geq 0$$

gelten. Für  $g_N = 0$  kontaktieren beide Körper. Durch diese zusätzliche Bindung im mechanischen System kann in Normalenrichtung eine zusätzliche Kraft (Kontaktkraft) auftreten. Die auf den Körper  $B_k$  wirkende Kraft sei  $\mathfrak{F}_N$  (siehe Bild 5.1) und  $\lambda_N$  ihr skalarer Wert. Dann ist

$$\mathfrak{F}_N = \lambda_N \mathbf{n}.$$

Der Kraftskalar  $\lambda_N$  sei als positiv vereinbart, wenn  $\mathfrak{F}_N$  als Druckkraft wirkt. Die entsprechende Gegenkraft nach dem Prinzip *actio* gleich *reactio* soll am Körper  $B_p$  angreifen. Bei fehlender Adhäsion zwischen den kontaktierenden Körpern muss dann stets

$$\lambda_N \geq 0$$

gelten. Bei separierten Körpern kann keine Kontaktkraft auftreten. Damit kann das Kontaktproblem als unilaterale Bindung mittels zweier Ungleichungen und einer Komplementaritätsbedingung gemäß

$$g_N \geq 0, \quad \lambda_N \geq 0, \quad g_N \lambda_N = 0$$

beschrieben werden (vgl. Bild 5.2).

Sei  $I_K$  die Indexmenge aller möglichen Kontakte eines MKS und es gelte  $i \in I_K$ . Dann lassen sich alle Kontaktgesetze des MKS durch

$$g_N^i \geq 0, \quad \lambda_{N_i} \geq 0, \quad g_N^i \lambda_{N_i} = 0 \quad (\text{Z!}), \quad i \in I_K, \quad (5.1)$$

beschreiben. Mit (5.1) sind gleichzeitig die Zustandsbedingungen definiert, d.h. die Bedingungen, die zur Erhaltung des jeweils aktuellen Schaltzustandes des MKS eingehalten werden müssen. Eine eventuelle Verletzung einer dieser Bedingungen kann mittels Indikatorfunktionen detektiert werden. Beim  $i$ -ten Kontaktproblem werden bei separierten Körpern der Normalenabstand  $g_N^i$  bzw. bei kontaktierenden Körpern die Kontaktkraft  $\lambda_{N_i}$  als Indikatorfunktionen verwendet. Ein Nulldurchgang einer solchen Größe zeigt einen potenziellen Strukturwechsel an. Zur Ermittlung der neuen erlaubten Struktur muss dann

ein LCP aufgestellt werden. Dabei sind *alle* (potenziellen) Kontakte zu berücksichtigen, deren Normalenabstand momentan verschwindet ( $g_N^i = 0$ ). Diese Kontakte seien in der Indexmenge  $I_{KS}$  zusammengefasst und werden als „schaltbar“ bezeichnet. Es gilt  $I_{KS} \subseteq I_K$ . Zur LCP-Aufstellung muss wegen der in den Bewegungsgleichungen (2.18) auftretenden Beschleunigungen das Kontaktgesetz (5.1) von der Lageebene auf die Beschleunigungsebene überführt werden. Ein bestehender Kontakt  $i$  kann nur bei verschwindender Relativbeschleunigung in Normalenrichtung ( $\ddot{g}_N^i = 0$ ) erhalten bleiben. Andererseits ist ein Abheben nur bei verschwindender (resultierender) Kontaktkraft ( $\lambda_{Ni} = 0$ ) möglich. Aus (5.1) folgt deshalb

$$\ddot{g}_N^i \geq 0, \quad \lambda_{Ni} \geq 0, \quad \ddot{g}_N^i \lambda_{Ni} = 0 \quad (\text{Z!}), \quad i \in I_{KS}. \quad (5.2)$$

Mit (5.2) sind die Zulässigkeitsbedingungen festgelegt, unter denen die neue erlaubte Struktur gefunden werden muss. Die Variablen  $\ddot{g}_N^i$  und  $\lambda_{Ni}$  heißen dann  $i$ -tes Paar komplementärer Variablen.

Der skalare Wert des Normalenabstandes der beiden (potenziellen) Kontaktpunkte eines Kontaktes  $i$  lasse sich als Funktion der generalisierten Koordinaten ausdrücken als

$$g_N^i = h_N^i(q^\sigma).$$

Daraus folgt mit

$$w_{N\kappa}^i(q^\sigma) = \partial_\kappa h_N^i(q^\sigma), \quad \kappa \in J, \quad (5.3)$$

zunächst für die Relativgeschwindigkeit in Normalenrichtung  $\dot{g}_N^i = w_{N\kappa}^i(q^\sigma) \dot{q}^\kappa$  und daraus für die Relativbeschleunigung in Normalenrichtung

$$\ddot{g}_N^i = w_{N\kappa}^i(q^\sigma) \ddot{q}^\kappa + \tilde{w}_N^i(\dot{q}^\sigma, q^\sigma). \quad (5.4)$$

Im Fall von kontaktierenden Körpern gilt

$$g_N^i = h_N^i(q^\sigma) = 0.$$

Diese geometrischen skleronomen Bindungen können als zusätzliche Zwangsbedingungen gemäß Abschnitt 2.2.4 verstanden werden. Die Kontaktkräfte sind dann gerade die den Bindungen entsprechenden Reaktionen. Infolge dieser Kontaktkräfte wirken in den Gelenken des MKS gewisse generalisierte Reaktionen. Diese lauten wegen (5.3)

$$R_\kappa = w_{N\kappa}^i \lambda_{Ni}.$$

Deshalb können die Bewegungsgleichungen analog zu (2.28a) dargestellt werden in der Form

$$g_{\kappa\lambda} \ddot{q}^\lambda - w_{N\kappa}^i \lambda_{Ni} = Q_\kappa^{(S)} - \Gamma_{\kappa\alpha\beta} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta - s_{\kappa\alpha} \dot{q}^\alpha \stackrel{!}{=} \tilde{Q}_\kappa. \quad (5.5)$$

Aus (5.4) und (5.5) lassen sich die unbekannt generalisierten Beschleunigungen eliminieren. Schließlich lauten die Relativbeschleunigungen in Normalenrichtung für alle schaltbaren Kontakte

$$\begin{aligned} \ddot{g}_N^i &= w_{N\lambda}^i g^{\lambda\kappa} w_{N\kappa}^j \lambda_{Nj} + \tilde{w}_N^i + w_{N\lambda}^i g^{\lambda\kappa} \tilde{Q}_\kappa \\ &= W_N^{ij} \lambda_{Nj} + \tilde{w}_N^i, \end{aligned} \quad i, j \in I_{KS}. \quad (5.6)$$

Die Objekte  $W_N^{ij}$  und  $\bar{w}_N^i$  sind aus dem Zustand des MKS bekannt. Deshalb stellen die Gleichungen (5.6) zusammen mit den Bedingungen (5.2) ein *LCP mit den komplementären Variablen*  $\ddot{g}_N^i$  und  $\lambda_{Ni}$  dar. Für unabhängige Kontaktprobleme ist  $W_N^{ij}$  positiv definit und das LCP hat eine eindeutige Lösung. Voneinander abhängige Kontakte werden z.B. in [67], [72] und [212] behandelt und sollen hier nicht betrachtet werden.

## 5.2.2 Das Reibproblem

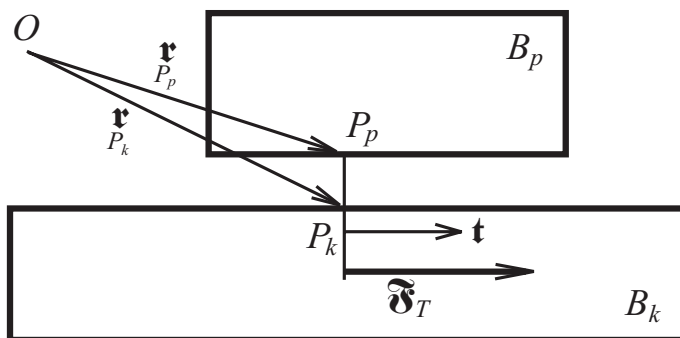


Bild 5.3: Coulomb'sche Reibung

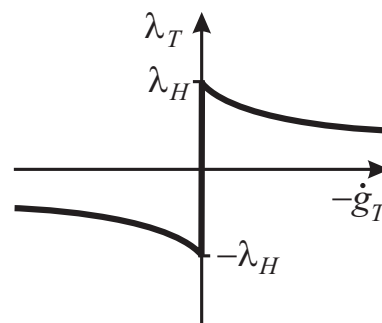


Bild 5.4: Reibkennlinie

Bei MKS kann Reibung in Gelenken oder bei momentan kontaktierenden Körpern in Erscheinung treten. Bei einem konkreten Reibproblem sind stets zwei Körper beteiligt (siehe Bild 5.3), die sich zu einer Reibpaarung zusammenfinden. Infolge der verschiedenen geometrischen Formen von Gelenken und Körpern sind verschiedene Reibpaarungen denkbar (Reibfläche, Reiblinie, Reibpunkt). Im Weiteren ist die Abhängigkeit der Reibkraft von der Relativgeschwindigkeit in Tangentialrichtung der beiden (die Paarung bildenden) Oberflächenteile von Interesse. Durch Betrachtung je eines körperfesten zur Reibpaarung gehörenden Punktes kann diese Geschwindigkeit ermittelt werden zu

$$\dot{\mathbf{g}}_T = \dot{\mathbf{r}}_{P_k} - \dot{\mathbf{r}}_{P_p} = \dot{g}_T \mathbf{t}$$

( $\mathbf{t}$  – Einheitsvektor in Richtung der Relativbewegung des Körpers  $B_k$  in Bezug auf Körper  $B_p$ ,  $\dot{g}_T$  – skalarer Wert der Relativgeschwindigkeit). Die auf den Körper  $B_k$  wirkende Reibkraft  $\mathfrak{F}_T$  habe den skalaren Wert  $\lambda_T$ , d.h., es gilt

$$\mathfrak{F}_T = \lambda_T \mathbf{t}.$$

Die entsprechende Gegenkraft nach dem Prinzip *actio gleich reactio* soll am Körper  $B_p$  angreifen.

Die oft getroffene Annahme von trockener Reibung führt auf die Reibkennlinie aus Bild 5.4. Diese stellt das Reibproblem auf Geschwindigkeitsebene dar und ist durch drei Bereiche gekennzeichnet: Gleiten in negative Richtung, Haften und Gleiten in positive Richtung. Der Zustand Haften zeichnet sich durch eine verschwindende Relativgeschwindigkeit in Tangentialrichtung  $\dot{g}_T = 0$  aus. Dabei können Tangentialkräfte  $\lambda_T$  übertragen werden, die betragsmäßig nicht größer als die Haftkraft  $\lambda_H$  (siehe Bild 5.4) sind

( $|\lambda_T| \leq \lambda_H$ ). Die Haftkraft selbst ergibt sich aus der zwischen den Reibflächen wirkenden Normalkraft (als Gelenkreaktion in Normalenrichtung oder als Kontaktkraft) mit dem Haftreibungskoeffizienten  $\mu_0$  zu

$$\lambda_H = \mu_0 \lambda_N.$$

Im Zustand Gleiten gilt  $\dot{g}_T \neq 0$  und die Tangentialkraft wirkt entgegengesetzt zur Gleitrichtung (Bild 5.4). Das Reibgesetz kann damit zunächst durch die zwei Zustände

$$\begin{aligned} \dot{g}_T = 0 \quad \wedge \quad |\lambda_T| \leq \lambda_H & \quad \text{bzw.} \\ \dot{g}_T \neq 0 \quad \wedge \quad \lambda_T = \lambda_T(\dot{g}_T) \end{aligned}$$

dargestellt werden. Ein potenzieller Übergang von Gleiten nach Haften wird durch einen Nulldurchgang der Relativgeschwindigkeit  $\dot{g}_T$  detektiert. Mittels Überwachung der „Haftkraftreserve“  $\lambda_H - |\lambda_T|$  kann ein potenzieller Übergang von Haften nach Gleiten erkannt werden. In beiden Fällen gilt für die Ermittlung des neuen Reibzustandes  $\dot{g}_T = 0$ . Deshalb muss eine Überführung des Reibgesetzes auf die Beschleunigungsebene vorgenommen werden. Der Zustand Haften kann nur bei verschwindender Relativbeschleunigung aufrechterhalten werden. Beim Übergang nach Gleiten müssen Geschwindigkeit und Beschleunigung das gleiche Vorzeichen aufweisen. Daraus folgt die Darstellung (siehe Bild 5.5)

$$\begin{aligned} \dot{g}_T = 0 \quad \wedge \quad |\lambda_T| < \lambda_H & \quad \Longrightarrow \quad \ddot{g}_T = 0, \\ \dot{g}_T = 0 \quad \wedge \quad \lambda_T = \lambda_H > 0 & \quad \Longrightarrow \quad \ddot{g}_T \leq 0, \\ \dot{g}_T = 0 \quad \wedge \quad \lambda_T = -\lambda_H < 0 & \quad \Longrightarrow \quad \ddot{g}_T \geq 0. \end{aligned}$$

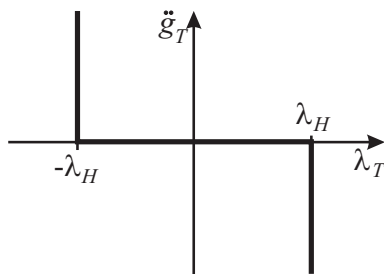


Bild 5.5: Reibkennlinie auf Beschleunigungsebene

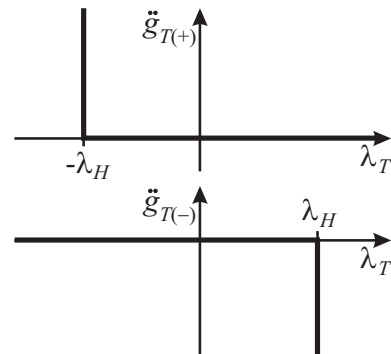


Bild 5.6: Reibung als unilaterale Bindungen

Zur Formulierung von komplementären Bedingungen ist eine Zerlegung der Reibkennlinie aus Bild 5.5 notwendig. Im Weiteren sei  $\ddot{g}_T$  dargestellt durch seinen positiven Teil gemäß  $\ddot{g}_{T(+)} = \frac{1}{2}(\ddot{g}_T + |\ddot{g}_T|)$  und seinen negativen Teil gemäß  $\ddot{g}_{T(-)} = \frac{1}{2}(\ddot{g}_T - |\ddot{g}_T|)$ . Somit gilt stets  $\ddot{g}_{T(+)} \geq 0$  und  $\ddot{g}_{T(-)} \leq 0$  sowie  $\ddot{g}_{T(+)}\ddot{g}_{T(-)} = 0$ . Dann kann die Relativbeschleunigung als

$$\ddot{g}_T = \ddot{g}_{T(+)} + \ddot{g}_{T(-)} \tag{5.7}$$

ausgedrückt werden und die Reibkennlinie nach Bild 5.5 zerfällt in zwei Kennlinien gemäß Bild 5.6. Jetzt lassen sich beide Teilreibkennlinien als unilaterale Bindungen beschreiben. Dazu werden die gerichteten Haftkraftreserven in positive Richtung (obere Kennlinie in Bild 5.6) und in negative Richtung (untere Kennlinie in Bild 5.6) definiert:

$$\begin{aligned}\lambda_{Tp} &= \lambda_T - (-\mu_0\lambda_N) = \mu_0\lambda_N + \lambda_T, \\ \lambda_{Tn} &= -(\lambda_T - \mu_0\lambda_N) = \mu_0\lambda_N - \lambda_T.\end{aligned}\quad (5.8)$$

Dann lassen sich die beiden Reibkennlinien in Bild 5.6 durch folgende Bedingungen beschreiben

$$\begin{aligned}\ddot{g}_{T(+)} &\geq 0, & \lambda_{Tp} &\geq 0, & \ddot{g}_{T(+)}\lambda_{Tp} &= 0, \\ \ddot{g}_{T(-)} &\leq 0, & \lambda_{Tn} &\geq 0, & \ddot{g}_{T(-)}\lambda_{Tn} &= 0.\end{aligned}$$

Die Variablen  $\ddot{g}_{T(+)}$  und  $\lambda_{Tp}$  bzw.  $\ddot{g}_{T(-)}$  und  $\lambda_{Tn}$  heißen dann Paare komplementärer Variablen.

Sei  $I_R$  die Indexmenge aller möglichen Reibpaarungen eines MKS und es gelte  $i \in I_R$ . Dann lassen sich alle Reibgesetze des MKS auf Beschleunigungsebene durch

$$\begin{aligned}\ddot{g}_{T(+)}^i &\geq 0, & \lambda_{Tpi} &\geq 0, & \ddot{g}_{T(+)}^i\lambda_{Tpi} &= 0 \quad (\nexists!), \\ \ddot{g}_{T(-)}^i &\leq 0, & \lambda_{Tni} &\geq 0, & \ddot{g}_{T(-)}^i\lambda_{Tni} &= 0 \quad (\nexists!)\end{aligned}\quad (5.9)$$

beschreiben. Die Relativgeschwindigkeit in Tangentialrichtung eines Reibpaares  $i$  lasse sich als Funktion der generalisierten Koordinaten und Geschwindigkeiten ausdrücken als

$$\dot{g}_T^i = w_{T\kappa}^i(q^\sigma)\dot{q}^\kappa, \quad \kappa \in J.$$

Für die Relativbeschleunigung in Tangentialrichtung bzw. deren Anteile gilt dann

$$\ddot{g}_T^i = w_{T\kappa}^i(q^\sigma)\ddot{q}^\kappa + \tilde{w}_T^i(\dot{q}^\sigma, q^\sigma).\quad (5.10)$$

Wie weiter oben erwähnt, sind für das Auffinden einer neuen erlaubten Struktur alle „potenziell haftenden“ Reibpaare ( $\dot{g}_T^i = 0$ ) zu berücksichtigen. Diese werden im Weiteren als „schaltbar“ bezeichnet. Die entsprechende Indexmenge sei  $I_{RS}$ . Dann gilt  $I_{RS} \subseteq I_R$ . Die für diese Reibpaare geltenden kinematischen skleronomen Bindungen  $\dot{g}_T^i = w_{T\kappa}^i\dot{q}^\kappa = 0$  können als zusätzliche Zwangsbedingungen gemäß Abschnitt 2.2.4 verstanden werden. Dann sind die Tangentialkräfte gerade die den Bindungen entsprechenden Reaktionen und die in den (nicht haftenden) Gelenken wirkenden generalisierten Reaktionen lauten

$$R_\kappa = w_{T\kappa}^i\lambda_{Ti}, \quad i \in I_{RS}.$$

Analog zu den Bewegungsgleichungen (2.28a) gilt somit

$$g_{\kappa\lambda}\ddot{q}^\lambda - w_{T\kappa}^i\lambda_{Ti} = Q_\kappa^{(S)} - \Gamma_{\kappa\alpha\beta}\dot{q}^\alpha\dot{q}^\beta - s_{\kappa\alpha}\dot{q}^\alpha \stackrel{!}{=} \tilde{Q}_\kappa.\quad (5.11)$$

Aus (5.10) und (5.11) lassen sich die unbekannt generalisierten Beschleunigungen eliminieren und für die Relativbeschleunigungen in Tangentialrichtung aller schaltbaren Reibpaare ergibt sich

$$\begin{aligned}\ddot{g}_T^i &= w_{T\lambda}^i g^{\lambda\kappa} w_{T\kappa}^j \lambda_{Tj} + \tilde{w}_T^i + w_{T\lambda}^i g^{\lambda\kappa} \tilde{Q}_\kappa, \\ &= W_T^{ij} \lambda_{Tj} + \tilde{w}_T^i, & i, j &\in I_{RS}.\end{aligned}\quad (5.12)$$

Falls  $W_T^{ij}$  regulär ist, liefert schließlich Umstellen von (5.12) nach  $\lambda_{Tj}$  (mit  $W_T^{ij}W_{Tjk} = \delta_k^i$ ) und Anwendung von (5.7) und (5.8) für jedes  $I_{RS}$ -Reibpaar

$$\begin{aligned}\lambda_{Tpj} &= \mu_0\lambda_{Nj} + W_{Tji}(\ddot{g}_T^i - \bar{w}_T^i) \\ &= W_{Tji}(\ddot{g}_{T(+)}^i + \ddot{g}_{T(-)}^i) + \hat{w}_{Tpj},\end{aligned}\tag{5.13a}$$

$$\begin{aligned}\lambda_{Tnj} &= \mu_0\lambda_{Nj} - W_{Tji}(\ddot{g}_T^i - \bar{w}_T^i) \\ &= -W_{Tji}(\ddot{g}_{T(+)}^i + \ddot{g}_{T(-)}^i) + \hat{w}_{Tnj},\end{aligned}\tag{5.13b}$$

wobei  $\hat{w}_{Tpj} = \mu_0\lambda_{Nj} - W_{Tji}\bar{w}_T^i$  und  $\hat{w}_{Tnj} = \mu_0\lambda_{Nj} + W_{Tji}\bar{w}_T^i$  gilt. Die Objekte  $W_{Tji}$ ,  $\hat{w}_{Tpj}$  und  $\hat{w}_{Tnj}$  sind aus dem Zustand des MKS bekannt. Deshalb stellen die Gleichungen (5.13) zusammen mit den Bedingungen (5.9) ein LCP mit den komplementären Variablen  $\lambda_{Tpi}$ ,  $\lambda_{Tni}$  und  $\ddot{g}_{T(+)}^i, \ddot{g}_{T(-)}^i$  dar.

Für unabhängige Reibprobleme ist  $W_T^{ij}$  in (5.12) von vollem Rang, somit invertierbar und die Gleichungen (5.13) existieren. Für abhängige Reibpaare ist ein LCP in dieser Form im Allgemeinen nicht möglich. Eine für solche Reibpaare geeignete Darstellung mittels weiterer Zerlegung der Reibkennlinie wird z.B. in [67], [72] und [212] angegeben.

## 5.3 Strukturvariabilität bei elektrischen Systemen

In der Elektrotechnik sind Schaltbauelemente weit verbreitet. Zu diesen Bauelementen gehören einerseits alle Arten von hand- oder fernbetätigten Schaltern (z.B. Handschalter, Taster, Relais) aber andererseits auch solche Bauelemente, deren Verhalten bei idealisierter Betrachtung dem eines Schalters entspricht – im Weiteren als „idealisierte Schalter“ bezeichnet. Besonders in der Leistungselektronik werden solche „idealisierten Schalter“ sehr oft verwendet. Dazu gehören z.B. Leistungsdioden, Leistungstransistoren (bipolare, FET, IGBT), Thyristoren, GTO usw. Eine Idealisierung solcher Bauelemente ist immer dann gerechtfertigt, wenn während des Betriebes hauptsächlich gewisse Arbeitspunkte eingenommen werden und der Übergang zwischen diesen für das Gesamtverhalten der elektrischen Schaltung keinen oder nur einen sehr geringen Einfluss hat. Sehr oft liegen diese Arbeitspunkte derart, dass entweder die Spannung über dem Bauelement oder der Strom durch dieses nahezu verschwindet und somit in erster Näherung Null gesetzt werden kann.

Im Weiteren wird für die „idealisierten Schalter“ zwischen *selbststeuerndem* und *fremdgesteuertem* Schaltverhalten unterschieden. Dabei soll ein selbststeuernder Schalter dadurch charakterisiert sein, dass Schaltzustandsübergänge sich in Abhängigkeit von den die jeweilige unilaterale Bindung definierenden physikalischen Größen (Zweigstrom durch den Schalter, Zweigspannung über dem Schalter) ereignen. Bei fremdgesteuertem Schaltverhalten liegt keine solche Abhängigkeit vor, sondern der Schaltvorgang wird durch andere (äußere) Ströme oder Spannungen oder andere physikalische Größen (möglicherweise auch in expliziter Abhängigkeit von der Zeit  $t$ ) initiiert. In diesem Sinne zeigt eine Diode stets ein selbststeuerndes Schaltverhalten, während ein Schalttransistor immer einer Fremdsteuerung unterliegt. Der Thyristor ist ein Beispiel für ein Bauelement, dass beide Phänomene in sich vereinigt. Die oben erwähnten hand- oder fernbetätigten Schalter sind stets fremdgesteuert. In der Mechanik treten fremdgesteuerte unilaterale Bindungen z.B.

bei wahlweise einschaltbaren Arretierungen oder Anschlägen auf. Beispiele für selbststeuernde unetwichtige Vorgänge sind Körperkontakte oder der Übergang zwischen Haft- und Gleitreibung.

Im Folgenden wird die Modellierung von elektrischen Schaltbauelementen durch Ausnutzung der bauelementeigenen Komplementaritätseigenschaften erläutert. Das ermöglicht eine Beschreibung mittels unilateraler Bindungen. Dabei wird das Verhalten des Schalters in beiden Arbeitspunkten durch entsprechende Ersatz-Bauelemente nachgebildet. Im Fall eines Schaltzustandsübergangs wird unter Beachtung der aktuellen Lage des ES vor dem Schalten durch Aufstellen und Lösen eines LCP für alle selbststeuernden Schalter ein neuer erlaubter Schaltzustand für das gesamte ES ermittelt. Dieser Schaltzustand bestimmt die nach dem Schaltzeitpunkt zu verwendenden Ersatz-Bauelemente.

Analog zu Abschnitt 4.1.3 wird auch im Folgenden vorausgesetzt, dass in jedem Fundamentalkreis zumindest ein Induktor oder ein Resistor oder ein Kondensator auftritt. Elektrische Teilsysteme mit anderen Fundamentalkreisen werden hier nicht betrachtet.

### 5.3.1 Komplementäre Schaltzustände

Jedes elektrische Schaltbauelement hat zwei (idealisierte) Schalt- oder Betriebszustände (siehe Bild 5.7):

- Schalter geöffnet (verschwindender Strom, beliebiger Spannungsabfall), Bauelement entspricht einem Isolator,
- Schalter geschlossen (verschwindender Spannungsabfall, beliebiger Strom), Bauelement entspricht einem Kurzschluss.

Deshalb können die in Bild 5.8 vereinbarten elektrischen Größen, die Spannung  $V_s$  über dem Schalter und der Strom  $\dot{q}^s$  durch den Schalter, als komplementäre Variablen aufgefasst werden und es gilt

$$V_s \dot{q}^s = 0 \quad (\mathcal{Z}).$$



Bild 5.7: Schaltzustände eines elektrischen Schalters

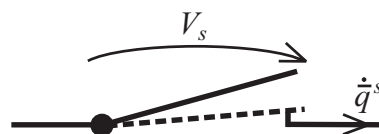


Bild 5.8: Elektrische Größen am elektrischen Schalter

Eine Möglichkeit zur Einbeziehung von Schaltbauelementen in die in Abschnitt 2.3 zusammengefasste Lagrange-basierte ES-Theorie besteht darin, die Schalter je nach aktuellem Schaltzustand entweder durch einen Kurzschluss oder einen Isolator zu ersetzen. In beiden Fällen wird der Schalter aus dem elektrischen Netzwerk herausgelöst und entweder werden seine Klemmen kurzgeschlossen oder der komplette Zweig wird aus dem Modell entfernt. Der Nachteil dieser Methode ist, dass die Topologie des elektrischen Teilsystems



vom jeweils aktuellen Schaltzustand abhängt. Bei jeder Schaltzustandsänderung müsste somit die komplette Topologieanalyse ausgeführt, die neuen Bewegungsgleichungen aufgestellt und die Zustandsvariablen des ES konsistent von der alten auf die neue Struktur überführt werden (Energieerhaltung).

Ein andere Möglichkeit zur Behandlung von Schaltbauelementen innerhalb der Lagrange-basierten ES-Theorie ist die Beschreibung der Schaltzustände mittels *unilateraler Bindungen*. Wegen der hier verwendeten Ladungsformulierung für ES entspricht ein *geöffneter* Schalter einer *aktiven* Einschränkung des Konfigurationsraumes  $\mathbb{R}^m$  (Zweigstrom verschwindet) und ein *geschlossener* Schalter einer *inaktiven* Einschränkung (Zweigstrom beliebig). Eine unilaterale Bindung mit aktiver Einschränkung wird durch den Einsatz einer *fiktiven* Stromquelle mit dem Wert Null (Nullstrom-Quelle) umgesetzt. Dieses Bauelement wirkt wie ein Isolator und der Zweig muss nicht aus dem elektrischen Netzwerk entfernt werden. Ein geschlossener Schalter wird auch hier durch einen Kurzschluss modelliert. Somit bleibt die Topologie des elektrischen Netzwerkes erhalten. Weil Existenz und Verteilung der Stromquellen als kinematische (rheonome) Zwangsbedingungen (im Sinne der Kinematik von Mehrkörpersystemen) betrachtet werden können, muss also nur die „Kinematik“ des elektrischen Teilsystems in Abhängigkeit von dem jeweils aktuellen Schaltzustand verändert werden. Das hat den Vorteil, dass alle Kirchhoff'schen Maschengleichungen des elektrischen Teilsystems erhalten bleiben. Jede Umschaltung eines Schalters resultiert in einer Aktivierung/Deaktivierung der unilateralen Bindung (d.h. der zugehörigen Einschränkung) und somit einem Wechsel zum entsprechenden Schalter-Ersatzmodell.

Im Weiteren wird die Indexmenge aller Kanten mit Schaltern des elektrischen Netzwerkes mit  $\Gamma_S$  bezeichnet. Es sei  $r_S := |\Gamma_S|$ . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann festgelegt werden, dass stets maximal ein Schaltbauelement auf einer Kante liegt. Dann ist  $r_S$  gleichzeitig die Anzahl der Schalter im elektrischen Netzwerk. Unter Berücksichtigung der komplementären Schaltzustände zerfällt die Menge  $\Gamma_S$  in folgende zwei Teilmengen

$$\Gamma_S = \Gamma_{S\times} \cup \Gamma_{S0}, \quad (5.14)$$

$\Gamma_{S\times}$  : Kanten mit geschlossenen (stromführenden) Schaltern ( $V_s = 0$ ),

$\Gamma_{S0}$  : Kanten mit geöffneten (stromlosen) Schaltern ( $\dot{q}^s = 0$ ).

Jedes Element aus  $\Gamma_S$  gehört somit – abhängig von seinem aktuellen Schaltzustand – entweder zu  $\Gamma_{S\times}$  oder zu  $\Gamma_{S0}$ , weshalb beide Teilmengen disjunkt sind ( $\Gamma_{S\times} \cap \Gamma_{S0} = \emptyset$ ). Im Fall  $V_s = \dot{q}^s = 0$  kann der Schalter beliebig entweder  $\Gamma_{S\times}$  oder  $\Gamma_{S0}$  zugeordnet werden. Weiterhin gilt  $|\Gamma_{S\times}| + |\Gamma_{S0}| = |\Gamma_S| = r_S$ , d.h., die Mächtigkeiten der Teilmengen (auch die leere Menge ist möglich) hängen zwar vom aktuellen Zustand des elektrischen Systems ab, aber ihre Summe bleibt stets konstant gleich der Anzahl der vorhandenen Schaltbauelemente.

### 5.3.2 Fremdgesteuerte/selbststeuernde Schalter

Fremdsteuerung eines Schaltbauelementes heißt, dass dessen Schaltzustand abhängig ist von äußeren Einflüssen. Bei ES können das zweigfremde elektrische Größen sein. Es ist aber auch eine beliebige Zeitabhängigkeit und damit eine Steuerung durch beliebige (nicht

durch das Modell erfasste) Ereignisse denkbar. In jedem Fall wird der aktuelle Schaltzustand eines solchen Schalters unabhängig von Zweigstrom oder Zweigspannung des durch ihn „geschalteten“ Zweiges eingenommen.

Die aktuelle Struktur (d.h. insbesondere die aktuelle „Kinematik“) des durch fremdgesteuerte Schalter gebildeten elektrischen Teilnetzwerkes ist somit stets eindeutig bestimmt. Bei Verwendung des Modellierungsansatzes mit Nicht-Minimalkoordinaten (vgl. Abschnitt 5.3.6) lassen sich stets die entsprechenden Bewegungsgleichungen aufstellen und die Schalter-Observablen bestimmen. Falls die Zweigströme durch fremdgesteuerte Schalter nicht linear abhängig sind, ist auch eine Modellierung mittels Minimalkoordinaten (vgl. Abschnitt 5.3.5) möglich.

Unter einem selbststeuernden Schalter wird ein Schaltbauelement verstanden, das seinen aktuellen Schaltzustand in Abhängigkeit von den zum „geschalteten“ Zweig gehörenden elektrischen Größen einnimmt. Die Beibehaltung des jeweils aktuellen Schaltzustandes ist somit an gewisse Bedingungen – die Schaltzustandsbedingungen – geknüpft. Umgekehrt wird eine Verletzung dieser Zustandsbedingungen unweigerlich zu einem Wechsel des aktuellen Schaltzustandes führen. Die dann notwendige Auswahl einer neuen erlaubten Struktur muss für alle selbststeuernden Schaltbauelemente gleichzeitig erfolgen. Dabei ist die simultane Gültigkeit der Bedingungen aller im elektrischen Netzwerk vorhandenen unilateralen Bindungen zu beachten.

Der Wechsel des Schaltzustandes eines fremdgesteuerten Schalters hat keinen direkten (d.h. unmittelbaren) Einfluss auf die Schaltzustände der anderen eventuell im elektrischen Netzwerk vorhandenen fremdgesteuerten Schalter. Ein solcher Einfluss kann nur mittelbar erfolgen und zwar genau dann, wenn das Umschalten eines Schalters elektrische Größen derart verändert, dass diese wiederum Schaltzustandswechsel bei fremdgesteuerten Schaltern bewirken. Wenn jedoch in einer Komponente des elektrischen Netzwerkes sowohl fremdgesteuerte als auch selbststeuernde Schaltbauelemente vorhanden sind, kann das Umschalten eines fremdgesteuerten Schalters die aktuellen Schaltzustände der selbststeuernden Schalter beeinflussen. Ein entsprechender Schaltzustandswechsel eines selbststeuernden Schalters kann zeitgleich mit dem Umschalten des fremdgesteuerten Schalters oder auch zu einem späteren Zeitpunkt erfolgen. Eine solche Kausalkette entsteht immer dann, wenn fremdgesteuerte Schalter die Zweiggrößen von selbststeuernden Schaltern entsprechend beeinflussen.

Für fremdgesteuerte Schalter sind neben der Aufstellung der Bewegungsgleichungen und der Ermittlung der Schalter-Observablen keine weitergehenden Betrachtungen (z.B. bezüglich Strukturauswahl zu einem Schaltzeitpunkt) notwendig. Die Existenz von selbststeuernden Schaltbauelementen in einem elektrischen Netzwerk erfordert jedoch darüber hinaus weiteren Aufwand bei deren Modellierung. Das betrifft sowohl die Überprüfung der Einhaltung der gerade aktuellen Schaltzustandsbedingungen als auch die Aufstellung und vollständige Berücksichtigung der Zulässigkeitskriterien für die Strukturauswahl. Während einer numerischen Integration deutet eine Verletzung einer der gerade aktuellen Schaltzustandsbedingungen das Erreichen eines potenziellen Schaltzeitpunktes an. Ein solches Ereignis kann über so genannte Indikatorfunktionen detektiert werden. Dazu bietet sich z.B. die Verwendung eines Integrationscodes mit zusätzlich eingebautem Rootfinder an ([17, 86, 179, 214]). Ein solcher Integrationscode ermöglicht das Anhalten der numerischen Integration innerhalb einer bestimmten  $\varepsilon$ -Umgebung um den Nulldurch-

gang einer solchen Indikatorfunktion. Dann können die erforderlichen Maßnahmen zur Sicherung eines konsistenten Überganges vom aktuellen Schaltzustand zu einem neuen erlaubten Schaltzustand des gesamten elektrischen Netzwerkes erfolgen (siehe Abschnitte 5.3.5.4 und 5.3.6.4).

### 5.3.3 Die Diode als selbststeuernder Schalter

#### 5.3.3.1 Zustandsbedingungen/Indikatorfunktionen

Das Schaltsymbol einer Diode mit der Richtungsvereinbarung der Zweiggrößen zeigt Bild 5.9. Die (idealisierte) Schaltkennlinie einer Diode ist in Bild 5.10 enthalten. Eine solche „Schaltdiode“ verkörpert ein selbststeuerndes Schaltbauelement. Aus der Schaltkenn-

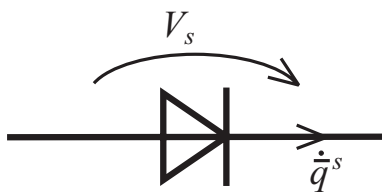


Bild 5.9: Schaltsymbol einer Diode

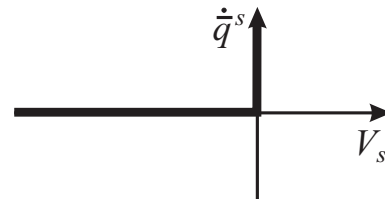


Bild 5.10: Kennlinie einer Schaltdiode

linie lässt sich ableiten, dass die beiden Zweiggrößen (Zweigspannung  $V_s$  und Zweigstrom  $\dot{q}^s$ ) als komplementäre Variablen aufgefasst werden können, denn es gilt immer

$$V_s \dot{q}^s = 0 \quad (\forall). \quad (5.15)$$

Aus Bild 5.10 folgt, dass der Strom durch die Diode niemals negativ und die Spannung über der Diode niemals positiv wird. Somit lassen sich die Zustandsbedingungen unter Verwendung komplementärer Variablen formulieren. Zusätzlich zu (5.15) gilt

$$V_s \leq 0, \quad \dot{q}^s \geq 0. \quad (5.16)$$

Dabei steht die Zustandsbedingung  $\dot{q}^s > 0$  (mit gleichzeitig  $V_s = 0$ ) für eine stromführende Diode (d.h. „Schalter geschlossen“) und  $V_s < 0$  (mit gleichzeitig  $\dot{q}^s = 0$ ) bedeutet eine gesperrte Diode (d.h. „Schalter geöffnet“). Mit der Teilmengenzerlegung (5.14) können für alle im Netzwerk enthaltenen Dioden die beiden Indikatorfunktionen angegeben werden:

- Diode in  $\Gamma_{S_x}$ : Indikatorfunktion lautet  $f_{S_x} = \dot{q}^s$ ,
- Diode in  $\Gamma_{S_0}$ : Indikatorfunktion lautet  $f_{S_0} = -V_s$ .

Während einer numerischen Integration muss – abhängig vom jeweils aktuellen Schaltzustand – eine der beiden Indikatorfunktionen für die Ermittlung eines potenziellen Schaltzeitpunktes überwacht werden. Die Ermittlung der dazu notwendigen Schalter-Observablen ist in den Abschnitten 5.3.5.3 bzw. 5.3.6.3 angegeben. Beide Indikatorfunktionen sind bei Einhaltung der jeweils gültigen Zustandsbedingung positiv. Ein Nulldurchgang zu negativen Werten hin zeigt eine Verletzung der entsprechenden Bedingung an.

**Bemerkung:**

In den Indexmengenzerlegungen (4.5) bzw. (4.11) sind jeweils  $H_C$ -Fundamentalkreise enthalten. Die zugehörigen „Bewegungsgleichungen“ (4.6c) bzw. (4.12c) sind algebraische Gleichungen für die Ladungen. Ein Maschenstrom für einen solchen Fundamentalkreis kann nur unter bestimmten Voraussetzungen ermittelt werden (z.B. durch totale Zeitableitung von (4.6c)). Für diodenbehaftete Zweige, die mit solchen Fundamentalkreisen inzident sind, kann deshalb ein Zweigstrom als Indikatorfunktion im Allgemeinen nicht beobachtet werden. Trotzdem ist natürlich durch diese Dioden ein Ladungstransport nur in positive „Strom“richtung möglich. Von Interesse ist deshalb das Vorzeichen des „Stromes“. Dieses kann über eine Differenzbildung der Ladungen zweier aufeinander folgender Integrationszeitpunkte  $\tau_{i-1}$  und  $\tau_i$  unter Berücksichtigung der Integrationsrichtung erfolgen gemäß

$$\Delta \bar{q}^s = [\bar{q}^s(\tau_i) - \bar{q}^s(\tau_{i-1})] \operatorname{sgn}(\tau_i - \tau_{i-1}). \quad (5.17)$$

Für eine entsprechende  $\Gamma_{S \times}$ -Diode wird dann die Indikatorfunktion ersetzt durch  $f_{S \times} = \Delta \bar{q}^s$ .

**5.3.3.2 Zulässigkeitskriterien/Schaltbarkeit**

Zur Ermittlung einer erlaubten Struktur müssen folgende Bedingungen für sämtliche Dioden gleichzeitig erfüllt sein:

$$-V_s \geq 0, \quad \dot{q}^s \geq 0, \quad V_s \dot{q}^s = 0. \quad (5.18)$$

Diese Bedingungen sind als Zulässigkeitskriterien für die Strukturauswahl zu verstehen. Dabei sind alle diejenigen selbststeuernden Schalter zu berücksichtigen, für die unter Beachtung von Stetigkeitsbedingungen ein Zustandswechsel möglich ist. Solche Schaltbauelemente werden im Folgenden abkürzend als „schaltbar“ bezeichnet. Da sich bestimmte Zulässigkeitskriterien verschiedener selbststeuernden Schalter durchaus auch widersprechen können, liefert das Auffinden einer erlaubten Struktur ein kombinatorisches Problem. Dieses Problem kann als ein LCP in Standardform ([26], [161]) formuliert werden. Dazu müssen die Bedingungen (5.18) für alle schaltbaren Dioden in die Formulierung aufgenommen werden. Die Lösung des LCP bestimmt dann für genau diese Dioden die neuen Schaltzustände.

Zur Bestimmung der Schaltbarkeit einer Diode ist die Existenz und Verteilung von Induktoren im elektrischen Netzwerk von Bedeutung. In der vorliegenden Arbeit sollen nur stetige Änderungen der Ströme durch Induktoren zugelassen werden. ES mit sprungförmigen Stromänderungen in Induktoren werden hier nicht betrachtet. Damit muss die Erhaltung der magnetischen Energie in einem Induktor auch bei sich ereignenden Schaltzustandsübergängen stets gegeben sein. Für die Schaltbarkeit von Dioden ergeben sich daraus folgende Aussagen:

- Eine Diode, deren Zweigstrom  $\dot{q}^s$  vollständig durch Induktoren fließt (sämtliche Fundamentalkreise, die die Kante der Diode enthalten, sind induktorbehaftet), ist genau dann schaltbar, wenn  $\dot{q}^s = 0$  gilt.

- Eine Diode, deren Zweigstrom nicht vollständig durch Induktoren fließt (mindestens ein Fundamentalkreis der die Kante der Diode enthaltenden Maschen ist induktorfrei), ist immer schaltbar.

Mit der Teilmengenzerlegung (5.14) lassen sich die komplementären Bedingungen (5.18) zunächst folgendermaßen formulieren:

$$\begin{aligned} V_s = 0 \quad \wedge \quad \dot{q}^s \geq 0 \quad \forall s \in \Gamma_{S\times}, \\ -V_s \geq 0 \quad \wedge \quad \dot{q}^s = 0 \quad \forall s \in \Gamma_{S0}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Daraus können entsprechende Zulässigkeitskriterien für die Strukturauswahl abgeleitet werden. Eine  $\Gamma_{S\times}$ -Diode im Zweig  $s$  wird bei einer LCP-Lösung mit  $\dot{q}^s \geq 0$  im stromführenden Schaltzustand (Schalter geschlossen) verbleiben, während sie bei einer LCP-Lösung mit  $-V_s > 0$  in den blockierenden Modus (Schalter geöffnet) wechselt. Umgekehrt wird eine  $\Gamma_{S0}$ -Diode für  $-V_s \geq 0$  weiterhin blockieren, während sie für  $\dot{q}^s > 0$  in den stromführenden Schaltzustand wechselt. Falls das LCP für eine Diode die Lösung  $V_s = \dot{q}^s = 0$  ermittelt, so sind beide Schaltzustände gleichberechtigt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann diese Diode im alten Schaltzustand verbleiben (oder im Fall des Integrationsstarts einem beliebigen Schaltzustand zugeordnet werden). Zum nächstmöglichen Zeitpunkt ist allerdings erneut zu prüfen, ob ein Wechsel im weiteren Verlauf der numerischen Integration erfolgt. Die Zulässigkeitskriterien lauten schließlich

$$\begin{aligned} s \in \Gamma_{S\times} \quad \wedge \quad -V_s > 0 \quad \wedge \quad \dot{q}^s = 0 \quad \implies \quad s \mapsto \Gamma_{S0}, \\ s \in \Gamma_{S0} \quad \wedge \quad V_s = 0 \quad \wedge \quad \dot{q}^s > 0 \quad \implies \quad s \mapsto \Gamma_{S\times}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Die Variablen  $-V_s$  und  $\dot{q}^s$  bilden für jedes  $s$  ein Paar komplementärer Variablen.

Da in den Bewegungsgleichungen (4.6) bzw. (4.12) bei Existenz von Induktoren auch „Beschleunigungsterme“ ( $\ddot{q}^s$ ) auftreten, müssen die komplementären Bedingungen (5.19) noch von der „Geschwindigkeitsebene“ (Stromniveau) auf die „Beschleunigungsebene“ (Stromableitungsniveau) transformiert werden. In diesen Fällen müssen die Stetigkeitsbedingungen infolge der vorhandenen Induktoren beachtet werden. Bei Induktorenpräsenz kann erstens eine Diode im Zweig  $s$  nur dann vom blockierenden zum leitenden Zustand übergehen („Schalter schließen“), wenn bei verschwindendem Spannungsabfall  $V_s$  der Strom  $\dot{q}^s$  von Null aus nur zu positiven Werten hin anwachsen kann. Somit muss für einen solchen Schaltzustandwechsel neben  $\dot{q}^s = 0$  gleichzeitig  $\ddot{q}^s > 0$  gelten. Zweitens ist ein Übergang vom leitenden zum Blockiermodus („Schalter öffnen“) nur bei verschwindendem Strom möglich (Stetigkeitsbedingung) und wenn gleichzeitig die Spannung über der Diode von Null aus nur zu negativen Werten hin fallen kann. Deshalb muss für einen solchen Schaltzustandwechsel  $\dot{q}^s = 0$ ,  $\ddot{q}^s = 0$  und  $V_s < 0$  gefordert werden. Damit folgen aus (5.19) die komplementären Bedingungen auf Stromableitungsniveau

$$\begin{aligned} V_s = 0 \quad \wedge \quad \dot{q}^s = 0 \quad \wedge \quad \ddot{q}^s \geq 0 \quad \forall s \in \Gamma_{S\times}, \\ -V_s \geq 0 \quad \wedge \quad \dot{q}^s = 0 \quad \wedge \quad \ddot{q}^s = 0 \quad \forall s \in \Gamma_{S0}. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Die zugehörigen Zulässigkeitskriterien für die Strukturauswahl lauten dann

$$\begin{aligned} s \in \Gamma_{S\times} \quad \wedge \quad -V_s > 0 \quad \wedge \quad \dot{q}^s = 0 \quad \wedge \quad \ddot{q}^s = 0 \quad \implies \quad s \mapsto \Gamma_{S0}, \\ s \in \Gamma_{S0} \quad \wedge \quad V_s = 0 \quad \wedge \quad \dot{q}^s = 0 \quad \wedge \quad \ddot{q}^s > 0 \quad \implies \quad s \mapsto \Gamma_{S\times}. \end{aligned} \quad (5.22)$$

In diesem Fall bilden die Variablen  $-V_s$  und  $\ddot{q}^s$  Paare komplementärer Variabler.

**Bemerkung:**

Analog zur Bemerkung im vorhergehenden Abschnitt sind für Dioden in  $H_C$ -Fundamentalkreisen auch entsprechende komplementäre Bedingungen zu definieren. Diese lassen sich mit der Differenzbildung gemäß (5.17) auf Ladungsniveau formulieren:

$$\begin{aligned} V_s = 0 \quad \wedge \quad \Delta \bar{q}^s \geq 0 \quad \forall s \in \Gamma_{S\times}, \\ -V_s \geq 0 \quad \wedge \quad \Delta \bar{q}^s = 0 \quad \forall s \in \Gamma_{S0}. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Die zugehörigen Zulässigkeitskriterien für die Strukturauswahl lauten dann

$$\begin{aligned} s \in \Gamma_{S\times} \quad \wedge \quad -V_s > 0 \quad \wedge \quad \Delta \bar{q}^s = 0 \quad \implies \quad s \mapsto \Gamma_{S0}, \\ s \in \Gamma_{S0} \quad \wedge \quad V_s = 0 \quad \wedge \quad \Delta \bar{q}^s > 0 \quad \implies \quad s \mapsto \Gamma_{S\times} \end{aligned} \quad (5.24)$$

und die Paare komplementärer Variablen bestehen aus  $-V_s$  und  $\Delta \bar{q}^s$ .

### 5.3.4 Andere selbststeuernde Schaltbauelemente

In diesem Abschnitt soll kurz auf die Modellierung anderer selbststeuernder Schalter (außer der Diode) eingegangen werden. Zunächst wird eine um den Durchbruchbereich erweiterte Diodenmodellierung präsentiert. Eine solche Darstellung ist bei der Betrachtung von Zener- oder Z-Dioden notwendig. Weiterhin wird der Thyristor als ein in der Leistungselektronik oft verwendetes Bauelement vorgestellt. Er stellt eine Kombination von selbststeuerndem und fremdgesteuertem Schalter dar.

Bauelemente wie Schalttransistoren (bipolare, FET, IGBT) gehören zur Klasse der fremdgesteuerten Schalter. Sie werden hier nicht näher betrachtet, weil für solche Bauelemente weder die Formulierung von Indikatorfunktionen noch eine Berücksichtigung bei der Aufstellung eines LCP zur Strukturfindung notwendig ist.

#### 5.3.4.1 Die Zenerdiode

Das Schaltsymbol einer Zener- oder Z-Diode mit der Richtungsvereinbarung der Zweiggrößen zeigt Bild 5.11. Eine solche Diode hat drei Schaltzustände: den Durchlassbereich (Leiten in positive Richtung), den Sperrbereich und den Durchbruchbereich (Leiten in negative Richtung). Die drei Bereiche sind im Zustandsdiagramm in Bild 5.12 wiedergegeben. In der idealisierten Kennlinie in Bild 5.13 verkörpert jedes Geradenstück einen Schaltzustand. Der Übergang zwischen jeweils zwei Schaltzuständen (an den „Schaltpunkten“  $V_s = 0$  und  $V_s = V_{zs}$ ) erfolgt in Abhängigkeit von den Zweiggrößen Spannung und Strom. Deshalb ist eine Z-Diode ein selbststeuerndes Schaltbauelement.

Zur Formulierung von komplementären Bedingungen (und damit unilateralen Bindungen) ist eine Zerlegung der Schaltkennlinie aus Bild 5.13 notwendig. Dazu werden zwei Hilfsvariable eingeführt. Im Weiteren sei  $\dot{q}^s$  dargestellt durch seinen positiven Teil gemäß  $\dot{q}_{(+)}^s = \frac{1}{2}(\dot{q}^s + |\dot{q}^s|)$  und seinen negativen Teil gemäß  $\dot{q}_{(-)}^s = \frac{1}{2}(\dot{q}^s - |\dot{q}^s|)$ . Somit gilt stets  $\dot{q}_{(+)}^s \geq 0$  und  $\dot{q}_{(-)}^s \leq 0$  sowie  $\dot{q}_{(+)}^s \dot{q}_{(-)}^s = 0$ . Dann kann der Zweigstrom als

$$\dot{q}^s = \dot{q}_{(+)}^s + \dot{q}_{(-)}^s \quad (5.25)$$

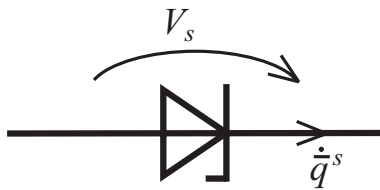


Bild 5.11: Schaltsymbol einer Zenerdiode

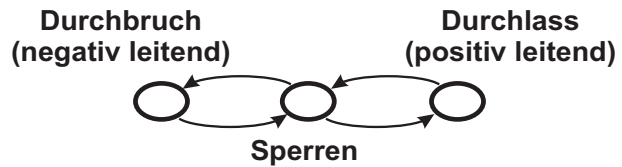


Bild 5.12: Schaltzustände einer Zenerdiode

ausgedrückt werden und die Schaltkennlinie nach Bild 5.13 zerfällt in zwei Teilkennlinien gemäß Bild 5.14. Beide Teilkennlinien besitzen dann jeweils einen „Schaltpunkt“ und

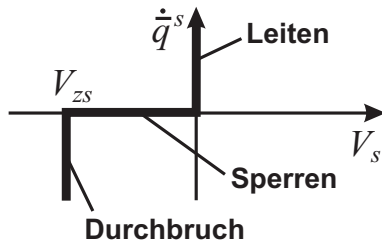


Bild 5.13: Kennlinie einer Zenerdiode

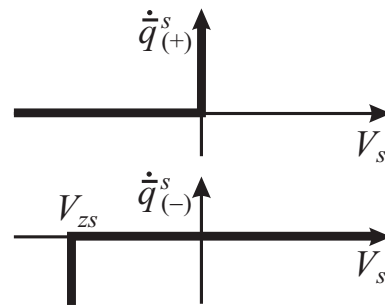


Bild 5.14: Zenerdiode als unilaterale Bindungen

sind somit durch unilaterale Bindungen beschreibbar. Die obere Kennlinie in Bild 5.14 (Schaltpunkt bei  $V_s = 0$ ) ist identisch mit der einer Schaltodiode (siehe Abschnitt 5.3.3). Der Schaltpunkt der unteren Kennlinie liegt bei  $V_s = V_{zs}$ . Damit lassen sich die beiden Teilkennlinien einer Z-Diode durch folgende Bedingungen beschreiben

$$\begin{aligned} \dot{q}^s_{(+)} &\geq 0, & V_s &\leq 0, & \dot{q}^s_{(+)} V_s &= 0 \quad (\text{Z!}), \\ \dot{q}^s_{(-)} &\leq 0, & V_s - V_{zs} &\geq 0, & \dot{q}^s_{(-)} (V_s - V_{zs}) &= 0 \quad (\text{Z!}). \end{aligned}$$

Mit Einführung der „Spannungsreserven“ (Beträge der Differenzen zu beiden Schaltpunkten)

$$\begin{aligned} V_{ps} &= -V_s, \\ V_{ns} &= V_s - V_{zs} \end{aligned}$$

lauten die komplementären Bedingungen für die Z-Diode schließlich

$$\begin{aligned} \dot{q}^s_{(+)} &\geq 0, & V_{ps} &\geq 0, & \dot{q}^s_{(+)} V_{ps} &= 0 \quad (\text{Z!}), \\ \dot{q}^s_{(-)} &\leq 0, & V_{ns} &\geq 0, & \dot{q}^s_{(-)} V_{ns} &= 0 \quad (\text{Z!}). \end{aligned}$$

Diese sind gleichzeitig die Zustandsbedingungen, die mittels Indikatorfunktionen überprüft werden müssen.

Bei der Strukturfindung mittels LCP sind für jede schaltbare Z-Diode stets zwei Paare komplementärer Variablen als Zulässigkeitskriterien zu berücksichtigen. In Abhängigkeit

von der Zugehörigkeit des Zweiges zu den verschiedenen Fundamentalkreisklassen nach (4.5) bzw. (4.11) wird das erste Paar von  $V_{ps}$  und einer der Variablen  $\ddot{q}_{(+)}^s$ ,  $\dot{q}_{(+)}^s$  oder  $\Delta\bar{q}_{(+)}^s$  gebildet, während das zweite Paar aus  $V_{ns}$  und einer der Variablen  $\ddot{q}_{(-)}^s$ ,  $\dot{q}_{(-)}^s$  oder  $\Delta\bar{q}_{(-)}^s$  besteht (vgl. hierzu die entsprechenden Erläuterungen zur Diode im Abschnitt 5.3.3).

### 5.3.4.2 Der Thyristor

In Bild 5.15 ist das Schaltsymbol eines Thyristors mit den zugehörigen Zweiggrößen dargestellt. Ein solches Bauelement besitzt drei Klemmen und wird deshalb durch zwei fiktive Zweipole modelliert (vgl. Abschnitt 2.3). Bild 5.16 zeigt den repräsentierenden Netzwerkgraphen mit den entsprechenden Zweiggrößen. In der Leistungselektronik kann in guter Näherung der Zweigstrom  $\dot{q}^g \equiv 0$  gesetzt werden. Der Durchbruchbereich wird (im Gegensatz zur Z-Diode im vorhergehenden Abschnitt) hier nicht betrachtet.

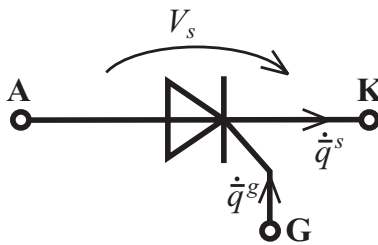


Bild 5.15: Schaltsymbol eines Thyristors

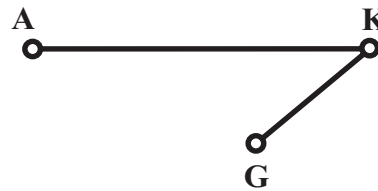


Bild 5.16: Repräsentierender Graph eines Thyristors

Ein Thyristor besitzt drei Kennlinienbereiche: den Durchlassbereich, den Sperrbereich und den Blockierbereich. Seine idealisierte Kennlinie zeigt Bild 5.17. Die einzelnen Kennlinienbereiche sind durch Geradenstücke charakterisiert. Die verschiedenen Möglichkeiten des Übergangs zwischen jeweils zwei Bereichen sind im Zustandsdiagramm in Bild 5.18 wiedergegeben. Im Sperr- und im Blockierbereich gilt jeweils für den Zweigstrom zwischen

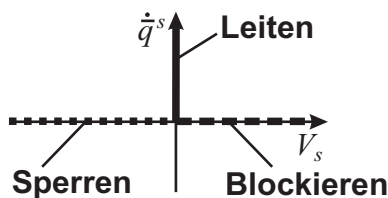


Bild 5.17: Kennlinie eines Thyristors

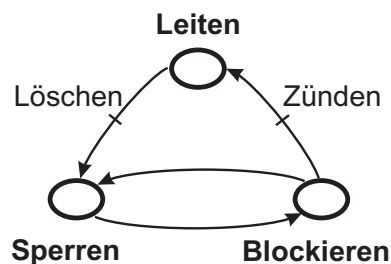


Bild 5.18: Schaltzustände eines Thyristors

den Klemmen A und K  $\dot{q}^s \equiv 0$ . Beide Bereiche entsprechen deshalb dem Schaltzustand „Sperrbereich“. Ein Übergang zwischen beiden Bereichen ist in beide Richtungen möglich. Dieser wird bei einem Nulldurchgang der Zweigspannung  $V_s$  vollzogen. Da sich aber hierbei



der Schaltzustand des Thyristors nicht ändert, hat ein solches Ereignis keine Konsequenzen für den Schaltzustand des Gesamtsystems. Im Durchlassbereich gilt für die Zweigspannung zwischen den Klemmen A und K stets  $V_s \equiv 0$ . Dieser Bereich entspricht somit dem Schaltzustand „Leiten“. Laut Bild 5.18 ist der Durchlassbereich nur aus dem Blockierbereich heraus erreichbar. Ein solcher Bereichsübergang wird als Zünden des Thyristors bezeichnet und ist mit einem Wechsel des Schaltzustandes (von Sperren nach Leiten) verbunden. Das Zünden erfolgt durch eine positive Spannung zwischen den Klemmen G und K des Thyristors. Diese Spannung  $V_g$  ist keine Zweigspannung des „geschalteten“ Zweiges zwischen den Klemmen A und K. Deshalb ist dieser Schaltzustandswechsel ein fremdgesteuerter. Wie schon in Abschnitt 5.3.2 erläutert, kann ein Zustandswechsel eines fremdgesteuerten Schaltbauelementes bei Existenz von selbststeuernden schaltbaren Schaltern im Netzwerk Konsequenzen für deren Schaltzustände haben. Deshalb ist in diesem Fall die Aufstellung und Lösung eines LCP für alle schaltbaren Schalter erforderlich.

Der entgegengesetzte Schaltzustandsübergang (von Leiten nach Sperren) erfolgt dann, wenn der Zweigstrom  $\dot{q}^s$  einen gewissen Haltestrom  $\dot{q}_H^s$  unterschreitet. Dieser Schaltzustandswechsel passiert somit in Abhängigkeit von einer Zweiggröße, d.h., ein leitender Thyristor ist (nur in diesem Schaltzustand!) ein selbststeuerndes Schaltbauelement. Die entsprechende Zustandsbedingung (für den Erhalt des Zustandes Leiten) heißt  $\dot{q}^s \geq \dot{q}_H^s$ . Somit kann für einen leitenden Thyristor ein potenzieller Schaltzeitpunkt mittels Nulldurchgang der Indikatorfunktion

$$f_{s \times} = \dot{q}^s - \dot{q}_H^s$$

detektiert werden.

Da der Zustandswechsel von Leiten nach Sperren bei Unterschreitung des Haltestromes unabhängig von der Zweigspannung  $V_s$  erfolgt, ist eine Formulierung von komplementären Bedingungen für den Thyristor nicht möglich. Falls im Gesamtnetzwerk andere schaltbare Schalter vorhanden sind, so muss zu einem potenziellen Schaltzeitpunkt für diese ein LCP aufgestellt und gelöst werden. Eine Berücksichtigung des Thyristorstromes  $\dot{q}^s$  in diesem LCP ist jedoch nicht notwendig, weil die entsprechende Komplementärbedingung für die Spannung  $V_s$  nicht existiert.

#### **Bemerkung:**

Ein GTO (Gate-turn-off-Thyristor) ist ein Thyristor mit einer zusätzlichen speziellen Eigenschaft. Ein solcher Thyristor kann über einen negativen Steuerstrom an der Klemme G abgeschaltet (gelöscht) werden. Zu den in Bild 5.18 gezeigten grundsätzlich möglichen Schaltzustandsübergängen eines Thyristors kommt somit beim GTO noch ein möglicher Übergang von „Leiten“ nach „Blockieren“ unter der Bezeichnung „aktives Löschen“ hinzu. Alle anderen Ausführungen zur Modellierung eines Thyristors mittels unilateraler Bindungen sind unverändert gültig.

### **5.3.5 Modellierung in Minimalkoordinaten**

In diesem Abschnitt wird die Modellierung unilateraler Bindungen infolge Schaltbauelemente bei Verwendung von Minimalkoordinaten durch eine schaltzustandsabhängige Charakterisierung der Fundamentalkreise, die entsprechende Aufstellung der Bewegungsgleichungen und die Bestimmung der Schalter-Observablen erläutert. Schließlich wird im

Abschnitt 5.3.5.4 für selbststeuernde Schalter die Aufstellung des LCP zur Bestimmung der neuen Struktur dargestellt.

Im Folgenden wird vorausgesetzt, dass alle Zweigströme durch Schalter und Stromquellen nicht linear abhängig sind. Dann ist eine Problemformulierung in Minimalkoordinaten (siehe Abschnitt 2.3.3) möglich. Der Fall der Nichterfüllbarkeit dieser Voraussetzung wird im Abschnitt 5.3.6 behandelt.

### 5.3.5.1 Charakterisierung der Fundamentalkreise

Sei  $r_0$  die Anzahl der im Netzwerk existierenden Stromquellen und  $r_S$  die Anzahl der im Netzwerk vorhandenen Schaltbauelemente. Die Anzahl der Cogerüstkanten  $|H|$  ist gleichbedeutend mit der Anzahl der im Netzwerkgraphen vorhandenen unabhängigen Maschen (siehe Abschnitt 2.3). Dann gilt  $r_0 + r_S \leq |H|$ . Unter der genannten Voraussetzung ist es somit immer möglich, ein Gerüst  $G$  auf dem repräsentierenden Graphen  $\Gamma$  des elektrischen Netzwerkes zu wählen, das weder Stromquellen noch Schalter enthält. Alle Stromquellen und Schalter liegen dann im Cogerüst  $H$  und die Menge der Cogerüstkanten zerfällt in drei paarweise disjunkte Teilmengen:

$$H = H^* \cup H_0 \cup H_S, \quad (5.26)$$

$H^*$  : Cogerüstkanten ohne Stromquellen und ohne Schalter,

$H_0$  : Cogerüstkanten mit Stromquellen, ohne Schalter,

$H_S$  : Cogerüstkanten mit Schaltern, ohne Stromquellen

mit  $|H_0| = r_0$  und  $|H_S| = r_S$ . Wegen der zwei möglichen Schaltzustände eines Schalters kann die Indexmenge  $H_S$  wiederum in zwei disjunkte Teilmengen zerlegt werden:

$$H_S = H_{S\times} \cup H_{S0}, \quad (5.27)$$

$H_{S\times}$  : Cogerüstkanten mit geschlossenen (stromführenden) Schaltern,

$H_{S0}$  : Cogerüstkanten mit geöffneten (stromlosen) Schaltern.

Bei der Modellierung in Minimalkoordinaten gelten somit infolge des stromquellen- und schalterfreien Gerüstes für die Indexmengen aus (5.14) folgende Identitäten:  $\Gamma_S \equiv H_S$ ,  $\Gamma_{S\times} \equiv H_{S\times}$  und  $\Gamma_{S0} \equiv H_{S0}$ .

### 5.3.5.2 Bewegungsgleichungen

Die Indexmenge der generalisierten Koordinaten  $q^\mu$  eines strukturvariablen ES setzt sich zusammen aus den Indexmengen der Cogerüstkanten ohne Stromquellen und ohne Schalter  $H^*$  und der Cogerüstkanten mit geschlossenen Schaltern (d.h. ohne fiktive Stromquellen)  $H_{S\times}$ . Mit (5.26) und (5.27) folgt deshalb aus der Maschentransformation (2.33)

$$\dot{q}^j = A^j_\mu \dot{q}^\mu + A^j_{\mu_0} \dot{q}^{\mu_0}(t), \quad j \in \Gamma, \quad \mu \in H^* \cup H_{S\times}, \quad \mu_0 \in H_0 \cup H_{S0}. \quad (5.28)$$

Die Mächtigkeit  $m_t := |H^*| + |H_{S\times}|$  ist dann der *momentane Freiheitsgrad* des ES. Sie entspricht der zum Zeitpunkt  $t$  aktuell gültigen (weil schaltzustandsabhängigen) Anzahl der Bewegungsgleichungen.

Die elektrischen Konstitutivgleichungen (2.39) enthalten so genannte „sonstige“ Spannungsanteile  $V_i^{(S)}$ . In diesen Anteilen können die Spannungen über den Schaltbauelementen ( $V_s = V_i^{(SBE)}$ ,  $s = i$ ) untergebracht werden. Aus (2.39) wird demzufolge

$$V_i = V_i^{(L)} + V_i^{(R)} + V_i^{(C)} + V_{i0} + V_i^{(SBE)}. \quad (5.29)$$

In den Lagrange'schen Bewegungsgleichungen (2.41) erscheinen somit auf der rechten Seite in den  $Q_\mu^{(S)}$  zunächst ebenfalls Spannungsanteile infolge von Schaltbauelementen

$$-v_\mu^{(SBE)} = -A^i{}_\mu V_i^{(SBE)}. \quad (5.30)$$

Weil über geschlossenen Schaltern kein Spannungsabfall zugelassen wird (ideale Schalter), gilt in (5.29) allerdings  $V_i^{(SBE)} = 0$  für alle  $i \in H_{S \times}$ . Die  $Q_\mu^{(S)}$ -Spannungsanteile verschwinden somit für alle  $H_{S \times}$ -Fundamentalkreise ebenso wie für die  $H^*$ -Fundamentalkreise und damit gerade für alle Bewegungsgleichungen. Deshalb gelten für die jeweils aktuelle Kinematik (d.h. für den aktuellen Schaltzustand des ES) die Bewegungsgleichungen des Lagrange-Modells  $\{\Lambda, D\}$  eines elektrisch linearen ES. Bei nicht strukturell singulärer Induktormatrix ergibt sich z.B. für alle Fundamentalkreise ohne (reale oder fiktive) Stromquellen analog zu (2.50)

$$l_{\mu\nu} \ddot{q}^\nu + \tilde{r}_{\mu\nu} \dot{q}^\nu + c_{\mu\nu} q^\nu + \tilde{v}_{\mu 0} = 0, \quad \mu, \nu \in H^* \cup H_{S \times}. \quad (5.31)$$

Falls in  $l_{\mu\nu}$  – bzw. in  $l_{\mu\nu}$  und gleichzeitig in  $\tilde{r}_{\mu\nu}$  – strukturelle Rangabfälle auftreten, muss für die Bewegungsgleichungen (5.31) die in Abschnitt 4.1.3.1 eingeführte Klasseneinteilung verwendet werden. Analog zu (4.5) sei dann

$$H^* \cup H_{S \times} = H_L \cup H_R \cup H_C. \quad (5.32)$$

Bei sinngemäßer Verwendung der Indexbezeichnungen ( $\mu_L, \nu_L \in H_L$ ,  $\mu_R, \nu_R \in H_R$  und  $\mu_C \in H_C$ ) lauten die Bewegungsgleichungen (4.6):

$$l_{\mu_L \nu_L} \ddot{q}^{\nu_L} + \tilde{r}_{\mu_L \nu_L} \dot{q}^{\nu_L} + r_{\mu_L \nu_R} \dot{q}^{\nu_R} + c_{\mu_L \nu} q^\nu + \tilde{v}_{\mu_L 0} = 0, \quad (5.33a)$$

$$r_{\mu_R \nu_L} \dot{q}^{\nu_L} + r_{\mu_R \nu_R} \dot{q}^{\nu_R} + c_{\mu_R \nu} q^\nu + \tilde{v}_{\mu_R 0} = 0, \quad (5.33b)$$

$$c_{\mu_C \nu} q^\nu + \tilde{v}_{\mu_C 0} = 0. \quad (5.33c)$$

### 5.3.5.3 Schalter-Observable

Die Schalter-Observablen für geschlossene Schalter sind die Zweigströme  $\dot{q}^{i_S}$  in den entsprechenden Kanten  $i_S$ . Da alle Schalter sich im Cogerüst befinden, gilt

$$A^i{}_\mu = \delta_\mu^{i_S}, \quad i_S, \mu \in H_S,$$

und wegen (5.26) auch

$$A^i{}_{\mu_0} = 0, \quad i_S \in H_S, \quad \mu_0 \in H_0.$$

Gemäß der Maschentransformation (5.28) wird somit für alle geschlossenen Schalter

$$\dot{q}^{i_S} = \dot{q}^\mu, \quad i_S = \mu \in H_{S \times}. \quad (5.34)$$

In allen  $H_L$ - und  $H_R$ -Fundamentalkreisen gemäß (5.32) können somit die Zweigströme durch geschlossene Schalter bei Lösung von (5.33) mittels numerischer Integration leicht berechnet werden. In  $H_C$ -Fundamentalkreisen werden bei geschlossenen Schaltern statt der Zweigströme die Stromvorzeichen aus Ladungsdifferenzen gemäß (5.17) ermittelt und als Schalter-Observable verwendet.

Für geöffnete Schalter sind die Schalter-Observablen die Zweigspannungen  $V_{i_S}^{(SBE)}$  der entsprechenden Kanten  $i_S$ . Mit (5.29) und (5.30) liefert der Kirchhoff'sche Maschensatz für die  $H_S$ -Fundamentalkreise

$$l_{\mu\nu}\ddot{q}^\nu + \tilde{r}_{\mu\nu}\dot{q}^\nu + c_{\mu\nu}q^\nu + \tilde{v}_{\mu 0} = -v_\mu^{(SBE)}, \quad \mu \in H_S, \quad \nu \in H^* \cup H_{S\times}. \quad (5.35)$$

(Die konstitutiven Maschenparameter  $l_{\mu\nu}$ ,  $\tilde{r}_{\mu\nu}$ ,  $c_{\mu\nu}$ ,  $\tilde{v}_{\mu 0}$  wurden bei (2.50) angegeben.) Da alle Schalter im Cogerüst liegen, gilt

$$v_\mu^{(SBE)} = A^{i_S}{}_\mu V_{i_S}^{(SBE)} = \delta_\mu^{i_S} V_{i_S}^{(SBE)} = V_{i_S}^{(SBE)}, \quad \mu, i_S \in H_S, \quad (5.36)$$

und weiter für alle geöffneten Schalter

$$v_\mu^{(SBE)} = V_{i_S}^{(SBE)}, \quad \mu = i_S \in H_{S0} \quad (5.37)$$

(für geschlossene Schalter gilt  $v_\mu^{(SBE)} \equiv 0$  wegen  $V_{i_S}^{(SBE)} \equiv 0$ ). Die Maschenspannungen  $\tilde{v}_{\mu 0} = \tilde{v}_{\mu 0}(t)$  in (5.35) umfassen (neben anderen auch) alle Spannungsanteile, die aufgrund der realen Stromquellen im elektrischen Netzwerk in den anderen Bauelementen auftreten. Die fiktiven Nullstrom-Quellen liefern keine derartigen Spannungsanteile. Somit können aus (5.35) mit (5.37) die Spannungsabfälle  $V_{i_S}^{(SBE)}$ ,  $i_S \in H_{S0}$ , über den geöffneten Schaltern ermittelt werden.

### Bemerkung:

Die Modellierung eines strukturvariablen ES mittels Minimalkoordinaten führt zu einer variablen Indexmenge der generalisierten Koordinaten. Alle Maschenladungen der  $H^*$ -Fundamentalkreise gehören permanent zu den generalisierten Koordinaten. Die Zugehörigkeit der Maschenladungen der  $H_S$ -Fundamentalkreise zu den generalisierten Koordinaten ist abhängig vom jeweiligen Schaltzustand der entsprechenden Schaltbauelemente. Die Ladungen der  $H_{S\times}$ -Fundamentalkreise stellen „zeitweilige“ generalisierte Koordinaten dar, die der  $H_{S0}$ -Fundamentalkreise jedoch gerade nicht.

#### 5.3.5.4 Strukturauswahl mittels LCP

In diesem Abschnitt wird die Aufstellung des linearen Komplementaritätsproblems bei Modellierung mittels Minimalkoordinaten erläutert. Ein solches LCP muss bei Existenz von selbststeuernden Schaltern zu jedem potenziellen Schaltzeitpunkt für alle zu diesem Zeitpunkt schaltbaren Schalter generiert werden. Ein potenzieller Schaltzeitpunkt liegt bei jedem Nulldurchgang einer Indikatorfunktion vor. Ob und welche Schalter ihren aktuellen Schaltzustand wechseln, ergibt sich aus der Lösung des LCP. Grundlegende Informationen zur Definition eines LCP und zu Existenz und Eindeutigkeit der LCP-Lösung sind im Anhang C enthalten.

Die Strukturauswahl erfolgt unter Beachtung der in Abschnitt 4.1.3.1 eingeführten Zerlegung der Indexmengen der permanenten generalisierten Koordinaten  $H^*$  gemäß (4.5).

Unter Hinzunahme aller schalterbehafteten Fundamentalkreise  $H_S$  ist dann folgende Indexmengenzerlegung möglich

$$H^* \cup H_S = H_L \cup H_R \cup H_C. \quad (5.38)$$

Im Folgenden werden die sinngemäßen Indexbezeichnungen ( $\mu_L, \nu_L \in H_L$ ,  $\mu_R, \nu_R \in H_R$  und  $\mu_C, \nu_C \in H_C$  sowie  $\nu_{LR} \in H_L \cup H_R$ ) verwendet. Die Auswahl aller  $H^*$ -Fundamentalkreise aus (5.33) und die Zerlegung des Kirchhoff'schen Maschensatzes für die  $H_S$ -Maschen (5.35) gemäß (5.38) liefern dann

$$l_{\mu_L \nu_L}(t) \ddot{q}^{\nu_L} + \tilde{r}_{\mu_L \nu_{LR}}(t) \dot{q}^{\nu} + c_{\mu_L \nu}(t) q^{\nu} + \tilde{v}_{\mu_L 0}(t) = -v_{\mu_L}^{(SBE)}, \quad (5.39a)$$

$$r_{\mu_R \nu_{LR}}(t) \dot{q}^{\nu} + c_{\mu_R \nu}(t) q^{\nu} + \tilde{v}_{\mu_R 0}(t) = -v_{\mu_R}^{(SBE)}, \quad (5.39b)$$

$$c_{\mu_C \nu}(t) q^{\nu} + \tilde{v}_{\mu_C 0}(t) = -v_{\mu_C}^{(SBE)} \quad (5.39c)$$

mit  $v_{\mu}^{(SBE)} \equiv 0$  für alle  $\mu \in H^*$ . Auflösung nach den höchsten auftretenden Ableitungen  $\ddot{q}^{\nu_L}$ ,  $\dot{q}^{\nu_R}$  bzw. nach den Maschenladungen  $q^{\nu_C}$  ergibt

$$l_{\mu_L \nu_L} \ddot{q}^{\nu_L} + r_{\mu_L \nu_R} \dot{q}^{\nu_R} + c_{\mu_L \nu_C} q^{\nu_C} = -v_{\mu_L}^{(SBE)} - (\tilde{r}_{\mu_L \nu_L} \dot{q}^{\nu_L} + c_{\mu_L \nu_{LR}} q^{\nu_{LR}} + \tilde{v}_{\mu_L 0}), \quad (5.40a)$$

$$r_{\mu_R \nu_R} \dot{q}^{\nu_R} + c_{\mu_R \nu_C} q^{\nu_C} = -v_{\mu_R}^{(SBE)} - (r_{\mu_R \nu_L} \dot{q}^{\nu_L} + c_{\mu_R \nu_{LR}} q^{\nu_{LR}} + \tilde{v}_{\mu_R 0}), \quad (5.40b)$$

$$c_{\mu_C \nu_C} q^{\nu_C} = -v_{\mu_C}^{(SBE)} - (c_{\mu_C \nu_{LR}} q^{\nu_{LR}} + \tilde{v}_{\mu_C 0}). \quad (5.40c)$$

Wie bereits in Abschnitt 4.1.3.1 festgestellt wurde, ist die Gesamtkoeffizientenmatrix der linken Seite in (5.40) invertierbar. Im Weiteren können die Komplementaritätseigenschaften der Schalter in  $H_C$ -Fundamentalkreisen ausgenutzt werden. Für geschlossene Schalter in diesen Fundamentalkreisen (Indexmenge  $H_{C \times}$ ) und für  $H_C$ -Maschen ohne Stromquellen und ohne Schaltbauelemente (Indexmenge  $H_C^*$ ) ergibt (5.40c) mit  $\mu_{C*} \in H_{C \times} \cup H_C^*$  wegen  $v_{\mu_{C*}}^{(SBE)} \equiv 0$  stets Zwangsbedingungen für die Ladungen. Mit  $c_{\mu_{C*} \nu_C} q^{\nu_C} = c_{\mu_{C*} \nu_{C*}} q^{\nu_{C*}} + c_{\mu_{C*} \nu_{C0}} q^{\nu_{C0}}$  folgt aus (5.40c) für diese Ladungen

$$q^{\nu_{C*}} = -c^{\nu_{C*} \mu_{C*}} (c_{\mu_{C*} \nu_{LR}} q^{\nu_{LR}} + c_{\mu_{C*} \nu_{C0}} q^{\nu_{C0}} + \tilde{v}_{\mu_{C*} 0}). \quad (5.41)$$

Bei geöffneten Schaltern in  $H_C$ -Fundamentalkreisen (Indexmenge  $H_{C0}$ ) kann kein Strom fließen und es gilt  $q^{\nu_{C0}} = const.$  Die  $H_{C0}$ -Ladungen ergeben sich somit aus den entsprechenden, zum aktuell letzten Schaltzeitpunkt  $t_{sl}$  ermittelten  $H_{C*}$ -Ladungen gemäß

$$q^{\nu_{C0}}|_{t \geq t_{sl}+0} = q^{\nu_{C*}}|_{t_{sl}-0} = const. \quad (5.42)$$

Während einer numerischen Integration sind deshalb stets alle  $q^{\nu_C}$  aus der Zeitevolution des ES bekannt. Damit lassen sich aus (5.39c) die  $H_{C0}$ -Maschenspannungen  $v_{\mu_{C0}}^{(SBE)}$  infolge geöffneter Schaltbauelemente zu

$$v_{\mu_{C0}}^{(SBE)} = -(c_{\mu_{C0} \nu} q^{\nu} + \tilde{v}_{\mu_{C0} 0}) \quad (5.43)$$

und daraus mit (5.36) die Zweigspannungen  $V_{i_S}^{(SBE)}$  über den geöffneten Schaltern leicht bestimmen. Zu einem potenziellen Schaltzeitpunkt sind alle Schalter in  $H_C$ -Fundamentalkreisen infolge der Abwesenheit von Induktoren stets schaltbar. Wegen (5.41) und (5.43) sind jedoch die neuen Schaltzustände der Schalter in  $H_C$ -Fundamentalkreisen aus dem Systemzustand vor dem potenziellen Schaltzeitpunkt immer bekannt. Für die

$H_L$ - und  $H_R$ -Maschen kann (5.40) unter Beachtung von (5.41) und (5.42) (d.h., alle  $q^{\nu C}$  sind bekannt) folgendermaßen dargestellt werden

$$l_{\mu_L\nu_L}\ddot{q}^{\nu L} + r_{\mu_L\nu_R}\dot{q}^{\nu R} = -v_{\mu_L}^{(SBE)} - (\tilde{r}_{\mu_L\nu_L}\dot{q}^{\nu L} + c_{\mu_L\nu_{LR}}q^{\nu_{LR}} + c_{\mu_L\nu_C}q^{\nu C} + \tilde{v}_{\mu_L 0}), \quad (5.44a)$$

$$r_{\mu_R\nu_R}\dot{q}^{\nu R} = -v_{\mu_R}^{(SBE)} - (r_{\mu_R\nu_L}\dot{q}^{\nu L} + c_{\mu_R\nu_{LR}}q^{\nu_{LR}} + c_{\mu_R\nu_C}q^{\nu C} + \tilde{v}_{\mu_R 0}). \quad (5.44b)$$

Die auf den linken Seiten dieses Systems erscheinenden jeweils höchsten auftretenden Zeitableitungen der elektrischen generalisierten Koordinaten seien in einem Vektor  $(g^\nu) = (\dot{q}^{\nu L}, \dot{q}^{\nu R})^T$  zusammengefasst. Weiterhin sei  $(v_\mu^{(SBE)}) = (v_{\mu_L}^{(SBE)}, v_{\mu_R}^{(SBE)})^T$  der Vektor der negativen Maschenspannungen über den Schaltbauelementen. Unter Verwendung von

$$(B^{\nu\mu}) = \begin{pmatrix} (l_{\mu_L\nu_L}) & (r_{\mu_L\nu_R}) \\ (0) & (r_{\mu_R\nu_R}) \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} (l^{\nu L\mu L}) & (-l^{\nu L\mu L}r_{\mu_L\nu_R}r^{\nu R\mu R}) \\ (0) & (r^{\nu R\mu R}) \end{pmatrix}$$

und

$$(b^\nu) = -(B^{\nu\mu}) \begin{pmatrix} (\tilde{r}_{\mu_L\omega_L}\dot{q}^{\omega L} + c_{\mu_L\omega}q^\omega + \tilde{v}_{\mu_L 0}) \\ (r_{\mu_R\omega_L}\dot{q}^{\omega L} + c_{\mu_R\omega}q^\omega + \tilde{v}_{\mu_R 0}) \end{pmatrix}$$

kann (5.44) als ein LCP-geeignetes Gleichungssystem der Form (C.1) (siehe Anhang C) gemäß

$$g^\nu = -B^{\nu\mu}v_\mu^{(SBE)} + b^\nu, \quad \nu, \mu \in H_L \cup H_R, \quad (5.45)$$

dargestellt werden. In (5.45) sind sowohl  $B^{\nu\mu}$  als auch  $b^\nu$  aus dem Zustand des ES bekannt. Da alle Schalter sich im Cogerüst befinden, gilt weiterhin für die zeitliche Ableitung der Ströme durch Schalter in  $H_L$ -Fundamentalkreisen bzw. für die Ströme durch Schalter in  $H_R$ -Maschen

$$\begin{aligned} \ddot{q}^{j_{SL}} &= A^{j_{SL}}{}_{\nu_L}\dot{q}^{\nu L} = \delta_{\nu_L}^{j_{SL}}\dot{q}^{\nu L}, & j_{SL} \in H_S \cap H_L, & \text{ und} \\ \dot{q}^{j_{SR}} &= A^{j_{SR}}{}_{\nu_R}\dot{q}^{\nu R} = \delta_{\nu_R}^{j_{SR}}\dot{q}^{\nu R}, & j_{SR} \in H_S \cap H_R. \end{aligned} \quad (5.46)$$

Damit und mit  $\bar{g}^{j_S} = (\ddot{q}^{j_{SL}}, \dot{q}^{j_{SR}})^T$  und (5.36) folgt aus (5.45) schließlich

$$\begin{aligned} \bar{g}^{j_S} &= -A^{j_S}{}_{\nu}B^{\nu\mu}A^{i_S}{}_{\mu}V_{i_S}^{(SBE)} + A^{j_S}{}_{\nu}b^\nu \\ &= -\delta_{\nu}^{j_S}B^{\nu\mu}\delta_{\mu}^{i_S}V_{i_S}^{(SBE)} + \delta_{\nu}^{j_S}b^\nu \\ &= -\tilde{B}^{j_S i_S}V_{i_S}^{(SBE)} + \tilde{b}^{j_S}. \end{aligned} \quad (5.47)$$

Ein potenzieller Schaltzeitpunkt sei mit  $t_s$  bezeichnet. Die Indexmenge aller Cogerüstkanten mit zu diesem Zeitpunkt schaltbaren Schaltern sei mit  $H_S^s(t_s)$  bezeichnet. Dann gilt  $H_S^s(t_s) \subseteq H_S$ . Zu einem potenziellen Schaltzeitpunkt muss die Menge  $H_S^s(t_s)$  unter Beachtung der Indexmengen-Zerlegung (5.38) ermittelt werden. Aus der Menge der Fundamentalkreise mit Schaltern und Induktoren  $H_{SL} = H_S \cap H_L$  gehören aus Stetigkeitsgründen nur jene Maschen mit  $\dot{q}^\nu = 0$  zu  $H_S^s(t_s)$ , nicht jedoch jene Maschen mit  $\dot{q}^\nu > 0$ . Die Fundamentalkreise mit Schaltern aber ohne Induktoren (jedoch mit Resistoren)  $H_{SR} = H_S \cap H_R$  gehören ohne Ausnahme zu  $H_S^s(t_s)$ , weil die  $\dot{q}^{\nu R}$  die höchsten

auftretenden Zeitableitungen in (5.44b) sind. Damit gilt  $H_{SR} \subseteq H_S^s(t_s) \subseteq H_S$ . Für alle Fundamentalkreise mit bei  $t_s$  nicht schaltbaren Schaltern verschwinden die Maschenspannungen infolge Schalter, d.h.  $v_\mu^{(SBE)} = 0$  für alle  $\mu \in H_S \setminus H_S^s(t_s)$ . Somit liefert (5.47) zusammen mit den komplementären Bedingungen der jeweiligen Schaltbauelemente (z.B. gemäß (5.19) und (5.21) bei Dioden) für alle schaltbaren Schalter

$$\bar{g}^{js} = -\tilde{B}^{jsis} V_{i_s}^{(SBE)} + \tilde{b}^{js} \quad (5.48)$$

mit

$$\bar{g}^{js} \geq 0, \quad -V_{j_s}^{(SBE)} \geq 0, \quad \bar{g}^{js} V_{j_s}^{(SBE)} = 0 \quad (\text{Z!}), \quad \forall j_s \in H_S^s(t_s). \quad (5.49)$$

Die Gleichungen (5.48) zusammen mit den Bedingungen (5.49) stellen ein LCP mit den komplementären Variablen  $\bar{g}^{js}$  und  $-V_{j_s}^{(SBE)}$  dar. Wegen der positiven Definitheit von  $l^{\nu L \mu L}$  und  $r^{\nu R \mu R}$  sind  $B^{\nu \mu}$  und damit schließlich auch  $\tilde{B}^{jsis}$  ebenfalls positiv definit. Sie sind somit so genannte P-Matrizen und das LCP besitzt genau eine Lösung (vgl. Anhang C). Diese Lösung bestimmt die neue kinematische Struktur (den neuen Schaltzustand) des ES ab dem Zeitpunkt  $t_s + 0$ . Die Indexmenge aller Schaltbauelemente  $H_{SL} \cup H_{SR}$  wird gemäß der Zulässigkeitskriterien (z.B. (5.20) und (5.22) für Dioden) neu zerlegt in die der geschlossenen Schalter ( $H_{S \times}(t_s + 0)$ ) und die der geöffneten ( $H_{S0}(t_s + 0)$ ). Falls die LCP-Lösung für ein Schaltbauelement  $\bar{g}^{js} = -V_{j_s}^{(SBE)} = 0$  liefert, sind beide Teilmengen gleichberechtigt und es kann zum Zeitpunkt  $t_s$  nicht entschieden werden, ob der Schaltzustand gewechselt wird oder nicht. In diesem Fall kann die numerische Integration zunächst mit dem noch aktuellen Schaltzustand weitergeführt werden. Allerdings muss zum endgültigen Auffinden der neuen Struktur zum nächstmöglichen Zeitpunkt  $t_s + \Delta t$  wiederum ein LCP für alle Schalter, die zum Zeitpunkt  $t_s$  schaltbar waren und somit zur Indexmenge  $H_S^s(t_s)$  gehörten, aufgestellt und gelöst werden.

Schließlich ist  $H^* \cup H_{S \times}$  die vollständige Indexmenge der zur neuen Struktur gehörenden generalisierten elektrischen Koordinaten. Der Satz der Bewegungsgleichungen (5.33) muss entsprechend neu aufgestellt werden. Die (fiktiven) Stromquellen liefern (außer den Spannungen über den Schaltern) keinen Beitrag zu den Zweigspannungen wegen  $\dot{q}_0^{js}(t) \equiv 0$  für alle  $j_s \in H_{S0}$ . Die zu beobachtenden Indikatorfunktionen ergeben sich aus der neuen Struktur in Abhängigkeit der vorhandenen Schaltbauelemente, wobei die Schalter-Stromobservablen aus den Maschenströmen gemäß (5.34) und die Schalter-Spannungsobservablen aus Maschen-Spannungsbilanzen gemäß (5.35) mit (5.36) ermittelt werden können.

### 5.3.5.5 Spezialfälle

#### Reguläre Induktormatrix

Wenn die Matrix der Zweiginduktivitäten  $L_{ij}$  regulär ist, dann ist die Matrix der generalisierten Induktivitäten  $l_{\mu\nu}$  ebenfalls regulär und sogar positiv definit (siehe Abschnitt 2.3.3.6). In (5.38) gilt dann  $H_R = H_C = \emptyset$ , d.h., es ist  $\{\mu\} = \{\mu_L\}$ . Die Gleichungen (5.39) reduzieren sich auf (5.39a) und (5.44) wird zu

$$l_{\mu\nu} \ddot{q}^\nu = -v_\mu^{(SBE)} - (\tilde{r}_{\mu\nu} \dot{q}^\nu + c_{\mu\nu} q^\nu + \tilde{v}_{\mu 0}).$$

Mit  $\tilde{L}^{jsis} = \delta_{\nu}^{js} l^{\nu\mu} \delta_{\mu}^{is}$  sowie  $\tilde{b}^{js} = -\delta_{\nu}^{js} l^{\nu\mu} (\tilde{r}_{\mu\omega} \dot{q}^{\omega} + c_{\mu\omega} q^{\omega} + \tilde{v}_{\mu 0})$  ( $l^{\nu\mu}$  jeweils gemäß  $l_{\mu\nu} l^{\nu\omega} = \delta_{\mu}^{\omega}$ ) lautet das LCP (5.48, 5.49) schließlich

$$\ddot{q}^{js} = -\tilde{L}^{jsis} V_{is}^{(SBE)} + \tilde{b}^{js}, \quad \ddot{q}^{js}, -V_{js}^{(SBE)} \geq 0, \quad \ddot{q}^{js} V_{js}^{(SBE)} = 0 \quad (\text{Z}).$$

### Keine Induktoren, reguläre Resistormatrix

Im Fall vollständiger Abwesenheit von Induktoren gilt in (5.38)  $H_L = \emptyset$ . Bei voll besetzter Matrix der Zweigresistoren  $R_{ij}$  und ausschließlicher Verwendung von reziproken Resistoren ist  $R_{ij}$  und somit auch  $r_{\mu\nu}$  regulär und sogar positiv definit (siehe Abschnitt 2.3.3.6). Dann gilt  $H_C = \emptyset$  und es ist  $\{\mu\} = \{\mu_R\}$ . Die Gleichungen (5.39) reduzieren sich auf (5.39b) und (5.44) wird zu

$$r_{\mu\nu} \dot{q}^{\nu} = -v_{\mu}^{(SBE)} - (c_{\mu\nu} q^{\nu} + \tilde{v}_{\mu 0}).$$

Mit  $\tilde{R}^{jsis} = \delta_{\nu}^{js} r^{\nu\mu} \delta_{\mu}^{is}$  sowie  $\tilde{b}^{js} = -\delta_{\nu}^{js} r^{\nu\mu} (c_{\mu\omega} q^{\omega} + \tilde{v}_{\mu 0})$  ( $r^{\nu\mu}$  jeweils gemäß  $r_{\mu\nu} r^{\nu\omega} = \delta_{\mu}^{\omega}$ ) lautet das LCP (5.48, 5.49) schließlich

$$\ddot{q}^{js} = -\tilde{R}^{jsis} V_{is}^{(SBE)} + \tilde{b}^{js}, \quad \ddot{q}^{js}, -V_{js}^{(SBE)} \geq 0, \quad \ddot{q}^{js} V_{js}^{(SBE)} = 0 \quad (\text{Z}).$$

### 5.3.6 Modellierung in Nicht-Minimalkoordinaten

Alternativ zur Problemformulierung in Minimalkoordinaten ist stets eine Beschreibung in Nicht-Minimalkoordinaten möglich. Im Unterschied zur Formulierung in Minimalkoordinaten (Abschnitt 5.3.5) wird hier die Voraussetzung, dass alle Schaltbauelemente im Co-gerüst liegen, nicht benötigt. Vielmehr sind alle Kanten des elektrischen Netzwerkgraphen für Schaltbauelemente zugelassen. Gelegentlich ist die in 5.3.5 genannte Voraussetzung nicht linear abhängiger Zweigströme durch Stromquellen und Schaltbauelemente nicht erfüllbar. In einem solchen Fall ist eine Problemformulierung in Nicht-Minimalkoordinaten unumgänglich. Insbesondere lassen sich mit diesem Zugang elektrische Schaltungen beschreiben, die mehr Schaltbauelemente als Fundamentalkreise enthalten, für deren Schalterströme somit stets lineare Abhängigkeiten existieren. Ein Beispiel dafür ist der bekannte Graetz-Gleichrichter (siehe Bild 5.19). Hier sind die Zweigströme durch die vier Dioden nicht unabhängig voneinander. Die Formulierung in Nicht-Minimalkoordinaten hat gleichzeitig den Vorteil, dass kein Wechsel zwischen generalisierten Koordinaten und Zwangsbedingungen mehr auftritt.

In diesem Abschnitt wird deshalb die Modellierung der unilateralen Bindungen infolge Schaltbauelemente bei Verwendung von Nicht-Minimalkoordinaten erläutert. Dazu erfolgt die schaltzustandsabhängige Charakterisierung der Zweige, die entsprechende Aufstellung der Bewegungsgleichungen und die Bestimmung der Schalter-Observablen. Schließlich wird im Abschnitt 5.3.6.4 für selbststeuernde Schalter die Aufstellung des LCP zur Bestimmung der neuen Struktur dargestellt.

#### Bemerkung:

Der Verzicht auf den Wechsel zwischen generalisierten Koordinaten und Zwangsbedingungen in der Formulierung in Nicht-Minimalkoordinaten entspricht in der Mechanik dem Verzicht auf Kartenwechsel bei der Auswahl unabhängiger Koordinaten.



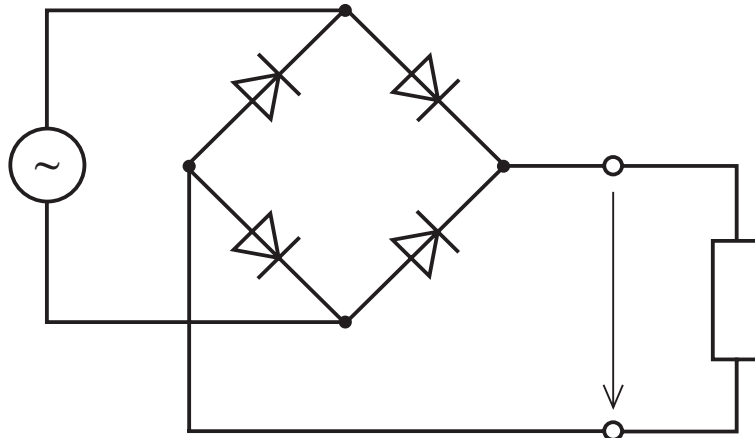


Bild 5.19: Gleichrichterschaltung nach Graetz

### 5.3.6.1 Charakterisierung der Zweige

Wie bereits in Abschnitt 2.3.4 erläutert, werden bei der Modellierung eines ES in Nicht-Minimalkoordinaten alle Ladungen  $q^\mu$ ,  $\mu \in H$ , als generalisierte Koordinaten verwendet. Diese müssen bei Existenz von Stromquellen noch gewissen rheonomen Bindungen genügen. Sei  $\Gamma_0$  die Indexmenge der (Gerüst- oder Cogerüst-)Kanten mit Stromquellen ( $r_0 := |\Gamma_0|$ ) und  $\Gamma_S$  die Indexmenge der (Gerüst- oder Cogerüst-)Kanten mit Schaltbauelementen ( $r_S := |\Gamma_S|$ ). Dann zerfällt die Menge der Kanten des Netzwerkgraphen  $\Gamma$  in drei paarweise disjunkte Teilmengen:

$$\Gamma = \Gamma^\# \cup \Gamma_0 \cup \Gamma_S, \quad (5.50)$$

$\Gamma^\#$  : Kanten ohne Stromquellen und ohne Schalter,

$\Gamma_0$  : Kanten mit Stromquellen, ohne Schalter,

$\Gamma_S$  : Kanten mit Schaltern, ohne Stromquellen.

Wegen der zwei möglichen Schaltzustände eines Schalters kann die Indexmenge  $\Gamma_S$  – wie bereits in Abschnitt 5.3.1 mit (5.14) eingeführt – wiederum in zwei disjunkte Teilmengen zerlegt werden:

$$\Gamma_S = \Gamma_{S\times} \cup \Gamma_{S0}, \quad (5.51)$$

$\Gamma_{S\times}$  : Kanten mit geschlossenen (stromführenden) Schaltern,

$\Gamma_{S0}$  : Kanten mit geöffneten Schaltern.

Es gilt  $\Gamma_{S\times} \cap \Gamma_{S0} = \emptyset$  und die Summe der Mächtigkeiten der Teilmengen bleibt stets konstant  $|\Gamma_{S\times}| + |\Gamma_{S0}| = |\Gamma_S| = r_S$ .

Neben den bisher eingeführten Indexmengen sei im Folgenden  $\bar{H}_S$  die Indexmenge der Cogerüstkanten, deren zugeordnete Fundamentalkreise mindestens eine (Gerüst- oder Cogerüst-)Kante mit einem Schaltbauelement aufweisen (d.h.  $A^{j_S \mu} = 0$  für gleichzeitig  $j_S \in \Gamma_S$  und  $\mu \in H \setminus \bar{H}_S$ ).

### 5.3.6.2 Bewegungsgleichungen mit Zwangsbedingungen

Die rheonomen Bindungen infolge realer Stromquellen sind durch (2.53) definiert. Analog dazu ergeben sich die zeitweiligen rheonomen Bindungen infolge geöffneter Schalter – und damit fiktiver Nullstrom-Quellen ( $\dot{\bar{q}}_0^{jS}(t) \equiv 0$ ,  $\bar{q}_0^{jS}(t) \equiv \text{const.}$ ) – gemäß

$$h^{jS}(\bar{q}) \equiv \bar{q}^{jS} - \bar{q}_0^{jS} = 0, \quad j_S \in \Gamma_{S0}, \quad (5.52)$$

bzw. unter Verwendung generalisierter Koordinaten

$$h^{jS}(q) \equiv A^{jS}{}_{\mu} q^{\mu} - \bar{q}_0^{jS} = 0, \quad j_S \in \Gamma_{S0}, \quad \mu \in H. \quad (5.53)$$

Die für geöffnete Schalter gültigen Zweigladungen  $\bar{q}_0^{jS}$  werden zum aktuell letzten Schaltzeitpunkt  $t_{sl}$  gemäß  $\bar{q}_0^{jS}|_{t \geq t_{sl}+0} = \bar{q}_0^{jS}|_{t_{sl}-0} = \text{const.}$  ermittelt. Aus (5.53) folgen die dynamischen Zwangsbedingungen

$$\ddot{h}^{jS}(q) \equiv A^{jS}{}_{\mu} \ddot{q}^{\mu} = 0. \quad (5.54)$$

Nach dem Lagrange'schen Befreiungsprinzip entsprechen den Bindungen (5.53) gewisse Reaktionsspannungen  $R_{\mu}^S$ . Damit lauten die Lagrange'schen Bewegungsgleichungen (2.57) unter Beachtung von realen und fiktiven Stromquellen

$$\left( \dot{\partial}_{\mu} \Lambda \right) - \partial_{\mu} \Lambda + \dot{\partial}_{\mu} D = Q_{\mu}^{(S)} + R_{\mu} + R_{\mu}^S, \quad \mu \in H. \quad (5.55)$$

Bei idealen Bindungen lassen sich die generalisierten Reaktionsspannungen  $R_{\mu}^S$  mit Hilfe von Lagrange-Multiplikatoren darstellen. Einem geöffneten Schalter auf dem Zweig  $i_S$  wird der Lagrange-Multiplikator  $\lambda_{i_S}$  zugeordnet. Bei nicht linear abhängigen Schaltern verkörpert er gerade die über dem Schalter messbare Spannung  $V_{i_S}^{(SBE)} = -\lambda_{i_S}$ , die quasi eine Reaktion auf den von der Nullstrom-Quelle erzwungenen Nullstrom darstellt (vgl. Abschnitt 2.3.4.3). Die generalisierten Reaktionsspannungen ergeben sich zu

$$R_{\mu}^S = \lambda_{i_S} A^{i_S}{}_{\mu}, \quad i_S \in \Gamma_{S0}. \quad (5.56)$$

(Für geschlossene Schalter verschwinden die Reaktionsspannungen, d.h.  $\lambda_{i_S} \equiv 0$  für alle  $i_S \in \Gamma_{S \times}$ .) Die Gleichungen (5.55) lauten schließlich in expliziter Form

$$g_{\mu\nu} \ddot{q}^{\nu} + \Gamma_{\mu\alpha\beta} \dot{q}^{\alpha} \dot{q}^{\beta} + r_{(\mu\nu)} \dot{q}^{\nu} + r_{\mu} = Q_{\mu}^{(S)} + \lambda_{i_0} A^{i_0}{}_{\mu} + \lambda_{i_S} A^{i_S}{}_{\mu} \quad (5.57)$$

( $i_0 \in \Gamma_0$ ,  $i_S \in \Gamma_{S0}$ ) oder in der zu (2.60) analogen Darstellung (jetzt ohne „sonstige“ Spannungsanteile)

$$l_{\mu\nu} \ddot{q}^{\nu} + \tilde{r}_{\mu\nu} \dot{q}^{\nu} + c_{\mu\nu} q^{\nu} + \hat{v}_{\mu 0} = \lambda_{i_0} A^{i_0}{}_{\mu} + \lambda_{i_S} A^{i_S}{}_{\mu}. \quad (5.58)$$

Bei nicht strukturell singulärer Matrix der generalisierten Induktivitäten  $l_{\mu\nu}$  lassen sich damit analog zu (2.61) bei bekanntem Bewegungszustand  $(\dot{q}, q)$  des ES die zweiten zeitlichen Ableitungen der Maschenladungen  $\ddot{q}^{\mu}(t)$  und die Lagrange-Multiplikatoren für reale und fiktive Stromquellen  $\lambda_{i_0}(t)$ ,  $\lambda_{i_S}(t)$  gemäß

$$\begin{aligned} l_{\mu\nu} \ddot{q}^{\nu} - \lambda_{i_0} A^{i_0}{}_{\mu} - \lambda_{i_S} A^{i_S}{}_{\mu} &= -\tilde{r}_{\mu\nu} \dot{q}^{\nu} - c_{\mu\nu} q^{\nu} - \hat{v}_{\mu 0}, \\ A^{j_0}{}_{\nu} \ddot{q}^{\nu} &= \ddot{\bar{q}}_0^{j_0}(t), \\ A^{j_S}{}_{\nu} \ddot{q}^{\nu} &= 0 \end{aligned} \quad (5.59)$$

bestimmen. Wenn  $A^{i_0}_\mu$  und  $A^{i_S}_\mu$  jeweils vollen Rang aufweisen, ist die Koeffizientenmatrix auf der linken Seite von (5.59) regulär und folglich invertierbar. Für die realen Stromquellen wurde Unabhängigkeit vorausgesetzt, d.h.,  $A^{i_0}_\mu$  ist stets von vollem Rang. Für die Zweigströme durch die im ES vorhandenen Schaltbauelemente ist eine lineare Abhängigkeit durchaus zugelassen. Das gilt zunächst auch für die Kantenmenge  $\Gamma_{S_0}$  aller in einem bestimmten Schaltzustand des ES geöffneten Schalter. Falls allerdings tatsächlich die Ströme durch zwei oder mehr geöffnete Schalter linear abhängig sind, existiert mindestens ein Fundamentalschnitt  $S$  mit  $S \subseteq \Gamma_{S_0}$ . Somit zerfällt die entsprechende Komponente eines solchen ES zwangsläufig in mindestens zwei Subkomponenten. Nun ist jedoch eine Spannungsmessung zwischen zwei verschiedenen Komponenten eines ES physikalisch nicht sinnvoll (eine Potenzialdifferenz zwischen galvanisch getrennten Knoten ist nicht definiert). Deshalb sollen ES mit *selbststeuernden, linear abhängigen*  $\Gamma_{S_0}$ -Schaltern (d.h. mit linear abhängigen Schaltern, die alle gleichzeitig geöffnet sind) hier *nicht zugelassen* werden. Für fremdgesteuerte Schalter ist eine lineare Abhängigkeit weiterhin uneingeschränkt möglich. Der im letzteren Fall auftretende Rangabfall in  $A^{i_S}_\mu$  wird kompensiert durch Wegfall einer entsprechenden Anzahl von generalisierten Koordinaten infolge des Zerfalls der entsprechenden Netzwerkkomponente in mehrere Subkomponenten. Dadurch wird in (5.59) die Anzahl der Gleichungen entsprechend verringert und die reduzierte Koeffizientenmatrix ist schließlich regulär.

Falls in  $l_{\mu\nu}$  – bzw. in  $l_{\mu\nu}$  und gleichzeitig in  $\tilde{r}_{\mu\nu}$  – strukturelle Rangabfälle auftreten, müssen die in Abschnitt 4.1.3.2 eingeführte Klasseneinteilung (4.11) für die Fundamentalkreise und die ebenfalls dort eingeführte Klasseneinteilung (4.13) für die (realen) Stromquellen verwendet werden. Weiterhin wird für die Indexmenge der schalterbehafteten Kanten des Netzwerkgraphen folgende Klasseneinteilung eingeführt

$$\Gamma_S = \Gamma_{SL} \cup \Gamma_{SR} \cup \Gamma_{SC}, \quad (5.60)$$

$\Gamma_{SL}$  : Kanten, die ausschließlich mit induktorbehafteten Fundamentalkreisen inzident sind,

$\Gamma_{SR}$  : Kanten, die mit mindestens einem induktorfreen aber gleichzeitig resistorbehafteten Fundamentalkreis inzident sind,

$\Gamma_{SC}$  : Kanten, die mit mindestens einem induktor- und gleichzeitig resistorfreien Fundamentalkreis inzident sind.

Die Teilmengen sind paarweise disjunkt und es sei  $j_{SL} \in \Gamma_{SL}$ ,  $j_{SR} \in \Gamma_{SR}$  und  $j_{SC} \in \Gamma_{SC}$ . Mit dieser Indizierung kann (4.15) um die Zwangsbedingungen infolge Schaltbauelemente erweitert werden:

$$\begin{aligned} l_{\mu_L\nu_L}\ddot{q}^{\nu_L} + r_{\mu_L\nu_R}\dot{q}^{\nu_R} + c_{\mu_L\nu_C}q^{\nu_C} - \lambda_{i_0}A^{i_0}_{\mu_L} - \lambda_{i_S}A^{i_S}_{\mu_L} &= -\hat{v}_{\mu_L0} - \tilde{r}_{\mu_L\nu_L}\dot{q}^{\nu_L} - c_{\mu_L\nu_{LR}}q^{\nu_{LR}}, \\ r_{\mu_R\nu_R}\dot{q}^{\nu_R} + c_{\mu_R\nu_C}q^{\nu_C} - \lambda_{i_0}A^{i_0}_{\mu_R} - \lambda_{i_S}A^{i_S}_{\mu_R} &= -\hat{v}_{\mu_R0} - r_{\mu_R\nu_L}\dot{q}^{\nu_L} - c_{\mu_R\nu_{LR}}q^{\nu_{LR}}, \\ c_{\mu_C\nu_C}q^{\nu_C} - \lambda_{i_0}A^{i_0}_{\mu_C} - \lambda_{i_S}A^{i_S}_{\mu_C} &= -\hat{v}_{\mu_C0} - c_{\mu_C\nu_{LR}}q^{\nu_{LR}}, \end{aligned} \quad (5.61a)$$

$$\begin{aligned} A^{j_{0L}}_{\nu_L}\ddot{q}^{\nu_L} &= \ddot{q}_0^{j_{0L}}, \\ A^{j_{0R}}_{\nu_R}\dot{q}^{\nu_R} &= \dot{q}_0^{j_{0R}} - A^{j_{0R}}_{\nu_L}\dot{q}^{\nu_L}, \\ A^{j_{0C}}_{\nu_C}q^{\nu_C} &= q_0^{j_{0C}} - A^{j_{0C}}_{\nu_L}q^{\nu_L} - A^{j_{0C}}_{\nu_R}q^{\nu_R}, \end{aligned} \quad (5.61b)$$

$$\begin{aligned}
A^{j_{SL}}{}_{\nu_L} \ddot{q}^{\nu_L} &= 0, \\
A^{j_{SR}}{}_{\nu_R} \dot{q}^{\nu_R} &= -A^{j_{SR}}{}_{\nu_L} \dot{q}^{\nu_L}, \\
A^{j_{SC}}{}_{\nu_C} q^{\nu_C} &= \bar{q}_0^{j_{SC}} - A^{j_{SC}}{}_{\nu_L} q^{\nu_L} - A^{j_{SC}}{}_{\nu_R} q^{\nu_R}.
\end{aligned} \tag{5.61c}$$

### 5.3.6.3 Schalter-Observable

Die Schalterobservablen für geschlossene Schalter sind die Zweigströme  $\dot{q}^{i_S}$  in den entsprechenden Kanten  $i_S$ . Diese ergeben sich nach der Maschentransformation (2.30) zu

$$\dot{q}^{i_S} = A^{i_S}{}_{\mu} \dot{q}^{\mu}, \quad i_S \in \Gamma_{S \times}, \quad \mu \in \bar{H}_S. \tag{5.62}$$

In allen  $H_L$ - und  $H_R$ -Fundamentalkreisen gemäß (4.11) können somit die Zweigströme durch geschlossene Schalter bei Lösung von (5.61) mittels numerischer Integration leicht berechnet werden. In  $H_C$ -Fundamentalkreisen werden bei geschlossenen Schaltern statt der Zweigströme die Stromvorzeichen aus Ladungsdifferenzen gemäß (5.17) ermittelt und als Schalter-Observable verwendet.

Für geöffnete Schalter sind die Schalter-Observablen die Zweigspannungen  $V_{i_S}^{(SBE)}$  der entsprechenden Kanten  $i_S$ . Die Maschenspannungen infolge von Schaltbauelementen sind eine Linearkombination der Zweigspannungen über den geöffneten Schaltern:

$$v_{\mu}^{(SBE)} = A^{i_S}{}_{\mu} V_{i_S}^{(SBE)}, \quad i_S \in \Gamma_{S0}, \quad \mu \in \bar{H}_S.$$

Deshalb gilt

$$R_{\mu}^S = \lambda_{i_S} A^{i_S}{}_{\mu} = -v_{\mu}^{(SBE)} = -A^{i_S}{}_{\mu} V_{i_S}^{(SBE)}.$$

Wegen der im vorhergehenden Abschnitt postulierten Einschränkung bezüglich der linearen Abhängigkeiten der Schaltbauelemente ist  $A^{i_S}{}_{\mu}$  von vollem Rang und es gilt für die Schalter-Zweigspannungen

$$V_{i_S}^{(SBE)} = -\lambda_{i_S}. \tag{5.63}$$

### 5.3.6.4 Strukturauswahl mittels LCP

In diesem Abschnitt wird die Aufstellung des linearen Komplementaritätsproblems bei Modellierung mittels Nicht-Minimalkoordinaten erläutert. Ein solches LCP muss bei Existenz von selbststeuernden Schaltern zu jedem potenziellen Schaltzeitpunkt für alle zu diesem Zeitpunkt schaltbaren Schalter generiert werden. Ein potenzieller Schaltzeitpunkt liegt bei jedem Nulldurchgang einer Indikatorfunktion vor. Ob und welche Schalter ihren aktuellen Schaltzustand wechseln, ergibt sich aus der Lösung des LCP. Grundlegende Informationen zur Definition eines LCP und zu Existenz und Eindeutigkeit der LCP-Lösung sind im Anhang C enthalten.

Die Strukturauswahl erfolgt unter Beachtung der in Abschnitt 4.1.3.2 eingeführten Zerlegung der Indexmengen der generalisierten Koordinaten  $H$  gemäß (4.11), der stromquellenbehafteten Zweige  $\Gamma_0$  gemäß (4.13) und der schalterbehafteten Zweige  $\Gamma_S$  gemäß (5.60). Ausgangspunkt sind die Bewegungsgleichungen des CES (5.61a). Deren Auflösung

nach den höchsten auftretenden Ableitungen  $\ddot{q}^{\nu L}$ ,  $\dot{q}^{\nu R}$  bzw. nach den Maschenladungen  $q^{\nu C}$  liefert die Darstellung

$$l_{\mu_L\nu_L}\ddot{q}^{\nu L} + r_{\mu_L\nu_R}\dot{q}^{\nu R} + c_{\mu_L\nu_C}q^{\nu C} = \lambda_{i_S}A^{i_S}_{\mu_L} - (\tilde{r}_{\mu_L\nu_L}\dot{q}^{\nu L} + c_{\mu_L\nu_{LR}}q^{\nu_{LR}} + \hat{v}_{\mu_L 0} - \lambda_{i_0}A^{i_0}_{\mu_L}), \quad (5.64a)$$

$$r_{\mu_R\nu_R}\dot{q}^{\nu R} + c_{\mu_R\nu_C}q^{\nu C} = \lambda_{i_S}A^{i_S}_{\mu_R} - (r_{\mu_R\nu_L}\dot{q}^{\nu L} + c_{\mu_R\nu_{LR}}q^{\nu_{LR}} + \hat{v}_{\mu_R 0} - \lambda_{i_0}A^{i_0}_{\mu_R}), \quad (5.64b)$$

$$c_{\mu_C\nu_C}q^{\nu C} = \lambda_{i_S}A^{i_S}_{\mu_C} - (c_{\mu_C\nu_{LR}}q^{\nu_{LR}} + \hat{v}_{\mu_C 0} - \lambda_{i_0}A^{i_0}_{\mu_C}). \quad (5.64c)$$

Wie bereits in Abschnitt 4.1.3.2 festgestellt, ist die Gesamtkoeffizientenmatrix der linken Seite in (5.64) invertierbar. Mit

$$\begin{aligned} (B^{\nu\mu}) &= \begin{pmatrix} (l_{\mu_L\nu_L}) & (r_{\mu_L\nu_R}) & (c_{\mu_L\nu_C}) \\ (0) & (r_{\mu_R\nu_R}) & (c_{\mu_R\nu_C}) \\ (0) & (0) & (c_{\mu_C\nu_C}) \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} (l^{\nu L\mu_L}) & (-l^{\nu L\mu_L}r_{\mu_L\nu_R}r^{\nu R\mu_R}) & (l^{\nu L\mu_L}(r_{\mu_L\nu_R}r^{\nu R\mu_R}c_{\mu_R\nu_C} - c_{\mu_L\nu_C})c^{\nu C\mu_C}) \\ (0) & (r^{\nu R\mu_R}) & (-r^{\nu R\mu_R}c_{\mu_R\nu_C}c^{\nu C\mu_C}) \\ (0) & (0) & (c^{\nu C\mu_C}) \end{pmatrix} \\ &\stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} (l^{\nu L\mu_L}) & (B^{\nu L\mu_R}) & (B^{\nu L\mu_C}) \\ (0) & (r^{\nu R\mu_R}) & (B^{\nu R\mu_C}) \\ (0) & (0) & (c^{\nu C\mu_C}) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.65)$$

und

$$\begin{pmatrix} (b^{\nu L}) \\ (b^{\nu R}) \\ (b^{\nu C}) \end{pmatrix} = -(B^{\nu\mu}) \begin{pmatrix} (\tilde{r}_{\mu_L\nu_L}\dot{q}^{\nu L} + c_{\mu_L\nu_{LR}}q^{\nu_{LR}} + \hat{v}_{\mu_L 0} - \lambda_{i_0}A^{i_0}_{\mu_L}) \\ (r_{\mu_R\nu_L}\dot{q}^{\nu L} + c_{\mu_R\nu_{LR}}q^{\nu_{LR}} + \hat{v}_{\mu_R 0} - \lambda_{i_0}A^{i_0}_{\mu_R}) \\ (c_{\mu_C\nu_{LR}}q^{\nu_{LR}} + \hat{v}_{\mu_C 0} - \lambda_{i_0}A^{i_0}_{\mu_C}) \end{pmatrix}$$

kann (5.64) in der Form

$$\ddot{q}^{\nu L} = (l^{\nu L\mu_L}A^{i_S}_{\mu_L} + B^{\nu L\mu_R}A^{i_S}_{\mu_R} + B^{\nu L\mu_C}A^{i_S}_{\mu_C})\lambda_{i_S} + b^{\nu L}, \quad (5.66a)$$

$$\dot{q}^{\nu R} = (r^{\nu R\mu_R}A^{i_S}_{\mu_R} + B^{\nu R\mu_C}A^{i_S}_{\mu_C})\lambda_{i_S} + b^{\nu R}, \quad (5.66b)$$

$$q^{\nu C} = c^{\nu C\mu_C}A^{i_S}_{\mu_C}\lambda_{i_S} + b^{\nu C} \quad (5.66c)$$

geschrieben werden. Wegen (5.60) gilt zunächst mit  $i_S \in \Gamma_S$ ,  $i_{SL} \in \Gamma_{SL}$ ,  $i_{SR} \in \Gamma_{SR}$ ,  $i_{SC} \in \Gamma_{SC}$

$$A^{i_S}_{\mu}\lambda_{i_S} = A^{i_{SL}}_{\mu}\lambda_{i_{SL}} + A^{i_{SR}}_{\mu}\lambda_{i_{SR}} + A^{i_{SC}}_{\mu}\lambda_{i_{SC}},$$

woraus sich bei gleichzeitiger Beachtung von (4.11) ergibt

$$\begin{aligned} A^{i_S}_{\mu_L}\lambda_{i_S} &= A^{i_{SL}}_{\mu_L}\lambda_{i_{SL}} + A^{i_{SR}}_{\mu_L}\lambda_{i_{SR}} + A^{i_{SC}}_{\mu_L}\lambda_{i_{SC}}, & \mu_L \in H_L, \\ A^{i_S}_{\mu_R}\lambda_{i_S} &= A^{i_{SR}}_{\mu_R}\lambda_{i_{SR}} + A^{i_{SC}}_{\mu_R}\lambda_{i_{SC}}, & \mu_R \in H_R, \\ A^{i_S}_{\mu_C}\lambda_{i_S} &= A^{i_{SC}}_{\mu_C}\lambda_{i_{SC}}, & \mu_C \in H_C. \end{aligned} \quad (5.67)$$

Weiterhin folgt mit der Klasseneinteilung (5.60) aus (2.30) (bzw. deren zeitlicher Ableitung) und (2.31) für alle schalterbehafteten Zweige

$$\begin{aligned}\ddot{q}^{j_{SL}} &= A^{j_{SL}}{}_{\nu_L} \ddot{q}^{\nu_L}, \\ \dot{q}^{j_{SR}} &= A^{j_{SR}}{}_{\nu_L} \dot{q}^{\nu_L} + A^{j_{SR}}{}_{\nu_R} \dot{q}^{\nu_R}, \\ \bar{q}^{j_{SC}} &= A^{j_{SC}}{}_{\nu_L} q^{\nu_L} + A^{j_{SC}}{}_{\nu_R} q^{\nu_R} + A^{j_{SC}}{}_{\nu_C} q^{\nu_C}.\end{aligned}\quad (5.68)$$

Mit (5.67) lässt sich (5.66) darstellen in der Form

$$\begin{aligned}\dot{q}^{\nu_L} &= l^{\nu_L \mu_L} A^{i_{SL}}{}_{\mu_L} \lambda_{i_{SL}} + (l^{\nu_L \mu_L} A^{i_{SR}}{}_{\mu_L} + B^{\nu_L \mu_R} A^{i_{SR}}{}_{\mu_R}) \lambda_{i_{SR}} + \\ &\quad + (l^{\nu_L \mu_L} A^{i_{SC}}{}_{\mu_L} + B^{\nu_L \mu_R} A^{i_{SC}}{}_{\mu_R} + B^{\nu_L \mu_C} A^{i_{SC}}{}_{\mu_C}) \lambda_{i_{SC}} + b^{\nu_L},\end{aligned}\quad (5.69a)$$

$$\dot{q}^{\nu_R} = r^{\nu_R \mu_R} A^{i_{SR}}{}_{\mu_R} \lambda_{i_{SR}} + (r^{\nu_R \mu_R} A^{i_{SC}}{}_{\mu_R} + B^{\nu_R \mu_C} A^{i_{SC}}{}_{\mu_C}) \lambda_{i_{SC}} + b^{\nu_R}, \quad (5.69b)$$

$$q^{\nu_C} = c^{\nu_C \mu_C} A^{i_{SC}}{}_{\mu_C} \lambda_{i_{SC}} + b^{\nu_C}. \quad (5.69c)$$

Ersetzen der Maschengrößen auf der linken Seite des Systems (5.69) durch die entsprechenden Zweiggrößen gemäß (5.68) ergibt

$$\begin{aligned}\ddot{q}^{j_{SL}} &= A^{j_{SL}}{}_{\nu_L} l^{\nu_L \mu_L} A^{i_{SL}}{}_{\mu_L} \lambda_{i_{SL}} + \\ &\quad + A^{j_{SL}}{}_{\nu_L} (l^{\nu_L \mu_L} A^{i_{SR}}{}_{\mu_L} + B^{\nu_L \mu_R} A^{i_{SR}}{}_{\mu_R}) \lambda_{i_{SR}} + \\ &\quad + A^{j_{SL}}{}_{\nu_L} (l^{\nu_L \mu_L} A^{i_{SC}}{}_{\mu_L} + B^{\nu_L \mu_R} A^{i_{SC}}{}_{\mu_R} + B^{\nu_L \mu_C} A^{i_{SC}}{}_{\mu_C}) \lambda_{i_{SC}} + \\ &\quad + A^{j_{SL}}{}_{\nu_L} b^{\nu_L}, \\ \dot{q}^{j_{SR}} &= A^{j_{SR}}{}_{\nu_R} r^{\nu_R \mu_R} A^{i_{SR}}{}_{\mu_R} \lambda_{i_{SR}} + \\ &\quad + A^{j_{SR}}{}_{\nu_R} (r^{\nu_R \mu_R} A^{i_{SC}}{}_{\mu_R} + B^{\nu_R \mu_C} A^{i_{SC}}{}_{\mu_C}) \lambda_{i_{SC}} + \\ &\quad + A^{j_{SR}}{}_{\nu_R} b^{\nu_R} + A^{j_{SR}}{}_{\nu_L} \dot{q}^{\nu_L}, \\ \bar{q}^{j_{SC}} &= A^{j_{SC}}{}_{\nu_C} c^{\nu_C \mu_C} A^{i_{SC}}{}_{\mu_C} \lambda_{i_{SC}} + A^{j_{SC}}{}_{\nu_C} b^{\nu_C} + A^{j_{SC}}{}_{\nu_R} q^{\nu_R} + A^{j_{SC}}{}_{\nu_L} q^{\nu_L}\end{aligned}$$

und mit entsprechend einzuführenden Abkürzungen folgt daraus schließlich

$$\ddot{q}^{j_{SL}} = \hat{L}^{j_{SL} i_{SL}} \lambda_{i_{SL}} + \hat{B}^{j_{SL} i_{SR}} \lambda_{i_{SR}} + \hat{B}^{j_{SL} i_{SC}} \lambda_{i_{SC}} + \hat{b}^{j_{SL}}, \quad (5.70a)$$

$$\dot{q}^{j_{SR}} = \hat{R}^{j_{SR} i_{SR}} \lambda_{i_{SR}} + \hat{B}^{j_{SR} i_{SC}} \lambda_{i_{SC}} + \hat{b}^{j_{SR}}, \quad (5.70b)$$

$$\bar{q}^{j_{SC}} = \hat{C}^{j_{SC} i_{SC}} \lambda_{i_{SC}} + \hat{b}^{j_{SC}}. \quad (5.70c)$$

In (5.70) sind alle  $\hat{L}$ ,  $\hat{R}$ ,  $\hat{C}$ ,  $\hat{B}$ ,  $\hat{b}$  und zusätzlich wegen der algebraischen Gleichungen (5.64c) noch die  $\bar{q}^{j_{SC}}$  aus dem Zustand des ES bekannt. Bei der Aufstellung eines LCP zu einem potenziellen Schaltzeitpunkt  $t_s$  muss in  $\Gamma_{SC}$ -Schaltern das Vorzeichen des Zweigstromes statt des Stromes selbst verwendet werden. Dieses Vorzeichen wird wieder über Differenzbildung gemäß (5.17) ermittelt. Aus (5.70) folgt dann (mit  $\tau_i = t_s$ )

$$\ddot{q}^{j_{SL}} = \hat{L}^{j_{SL} i_{SL}} \lambda_{i_{SL}} + \hat{B}^{j_{SL} i_{SR}} \lambda_{i_{SR}} + \hat{B}^{j_{SL} i_{SC}} \lambda_{i_{SC}} + \hat{b}^{j_{SL}}, \quad (5.71a)$$

$$\dot{q}^{j_{SR}} = \hat{R}^{j_{SR} i_{SR}} \lambda_{i_{SR}} + \hat{B}^{j_{SR} i_{SC}} \lambda_{i_{SC}} + \hat{b}^{j_{SR}}, \quad (5.71b)$$

$$\Delta \bar{q}^{j_{SC}}(\tau_i) = \hat{C}^{j_{SC} i_{SC}} \lambda_{i_{SC}} + \hat{b}^{j_{SC}} - \bar{q}^{j_{SC}}(\tau_{i-1}). \quad (5.71c)$$

Die Indexmenge aller zu einem potenziellen Schaltzeitpunkt  $t_s$  schaltbaren Schalter sei  $\Gamma_S^s(t_s)$ . Dann gilt  $\Gamma_S^s(t_s) \subseteq \Gamma_S$ . Zu einem potenziellen Schaltzeitpunkt muss die Menge

$\Gamma_S^s(t_s)$  unter Beachtung der Indexmengen-Zerlegung (4.11) ermittelt werden. Sie setzt sich zunächst aus allen Schaltbauelementen auf  $\Gamma_{SL}$ -Kanten mit  $\dot{q}^{j_{SL}} = 0$  (Stetigkeitsbedingung) und allen Schaltern auf  $\Gamma_{SR}$ -Kanten zusammen. Weiterhin gehören formal alle Schalter auf  $\Gamma_{SC}$ -Kanten dazu. Das bedeutet gleichzeitig, dass alle nicht schaltbaren Schaltbauelemente auf  $\Gamma_{SL}$ -Kanten liegen. Für diese Schalter verschwinden somit stets die Zweigspannungen und deshalb auch alle entsprechenden zweigbezogenen Reaktionsspannungen ( $V_{i_S}^{(SBE)} = -\lambda_{i_S} = 0$  für alle  $i_S \in \Gamma_S \setminus \Gamma_S^s(t_s)$ ). Falls in einem  $H_{SC}$ -Fundamentalkreis nur ein selbststeuernder Schalter existiert, so ist dessen neuer Schaltzustand bereits aus dem Systemzustand heraus festgelegt. Bei Hinzunahme dieses Schalters bei der LCP-Aufstellung wird der schon bekannte Schaltzustand eben noch einmal ermittelt. Bei mehreren selbststeuernden Schaltern in einem  $H_{SC}$ -Fundamentalkreis ist deren Berücksichtigung bei Aufstellung des LCP unumgänglich. Mit

$$\bar{g}^{j_S} = \begin{pmatrix} (\ddot{q}^{j_{SL}}) \\ (\dot{q}^{j_{SR}}) \\ (\Delta \bar{q}^{j_{SC}}) \end{pmatrix}, \quad \lambda_{i_S} = \begin{pmatrix} (\lambda_{i_{SL}}) \\ (\lambda_{i_{SR}}) \\ (\lambda_{i_{SC}}) \end{pmatrix}$$

und

$$\hat{B}^{j_S i_S} = \begin{pmatrix} (\hat{L}^{j_{SL} i_{SL}}) & (\hat{B}^{j_{SL} i_{SR}}) & (\hat{B}^{j_{SL} i_{SC}}) \\ (0) & (\hat{R}^{j_{SR} i_{SR}}) & (\hat{B}^{j_{SR} i_{SC}}) \\ (0) & (0) & (\hat{C}^{j_{SC} i_{SC}}) \end{pmatrix}, \quad \hat{b}^{j_S} = \begin{pmatrix} (\hat{b}^{j_{SL}}) \\ (\hat{b}^{j_{SR}}) \\ (\hat{b}^{j_{SC}}) \end{pmatrix}$$

liefert somit (5.71) zusammen mit den komplementären Bedingungen der jeweiligen Schaltbauelemente (z.B. gemäß (5.19), (5.21) und (5.23) bei Dioden) für alle schaltbaren Schalter

$$\bar{g}^{j_S} = \hat{B}^{j_S i_S} \lambda_{i_S} + \hat{b}^{j_S} \quad (5.72)$$

mit

$$\bar{g}^{j_S} \geq 0, \quad \lambda_{j_S} \geq 0, \quad \bar{g}^{j_S} \lambda_{j_S} = 0 \quad (\nexists), \quad j_S \in \Gamma_S^s(t_s). \quad (5.73)$$

Die Gleichungen (5.72) und die Bedingungen (5.73) stellen ein LCP mit den komplementären Variablen  $\bar{g}^{j_S}$  und  $\lambda_{j_S}$  dar. Wegen der getroffenen Voraussetzungen sind  $l^{\nu_L \mu_L}$ ,  $r^{\nu_R \mu_R}$  und  $c^{\nu_C \mu_C}$  in (5.65) positiv definit. Falls die Zweigströme durch die schaltbaren Schalter nicht linear abhängig sind, ist  $A^{j_S \nu}$ ,  $j_S \in \Gamma_S$ ,  $\nu \in \bar{H}_S$ , von vollem Rang (und somit auch die entsprechenden Submatrizen in (5.67) und (5.68)). Dann sind  $\hat{L}^{j_{SL} i_{SL}}$ ,  $\hat{R}^{j_{SR} i_{SR}}$  und  $\hat{C}^{j_{SC} i_{SC}}$  in (5.70) ebenfalls positiv definit, somit auch die Matrix  $\hat{B}^{j_S i_S}$  und das LCP besitzt genau eine Lösung. Falls  $A^{j_S \nu}$  nicht vollen Rang hat, tritt in  $\hat{B}^{j_S i_S}$  ein Rangabfall auf. Die Lösung des entsprechenden LCP ist dann, wenn sie existiert, eindeutig bezüglich  $\bar{g}^{j_S}$  nicht aber bezüglich  $\lambda_{j_S}$ . In beiden Fällen bestimmt eine Lösung des LCP die neue kinematische Struktur (den neuen Schaltzustand) des ES ab dem Zeitpunkt  $t_s + 0$ . Die Indexmenge aller Schaltbauelemente  $\Gamma_S$  wird gemäß den Zulässigkeitskriterien (z.B. (5.20), (5.22) und (5.24) für Dioden) neu zerlegt in die der geschlossenen Schalter ( $\Gamma_{S \times}(t_s + 0)$ ) und die der geöffneten ( $\Gamma_{S 0}(t_s + 0)$ ). Falls die LCP-Lösung für ein Schaltbauelement  $\bar{g}^{j_S} = \lambda_{j_S} = 0$  liefert, sind für diesen Schalter beide Teilmengen gleichberechtigt

und es kann zum Zeitpunkt  $t_s$  nicht entschieden werden, ob der Schaltzustand gewechselt wird oder nicht. In diesem Fall kann die numerische Integration zunächst mit dem noch aktuellen Schaltzustand weitergeführt werden. Allerdings muss zum endgültigen Auffinden der neuen Struktur zum nächstmöglichen Zeitpunkt  $t_s + \Delta t$  wiederum ein LCP für alle Schalter, die zum Zeitpunkt  $t_s$  schaltbar waren (und somit Elemente der Indexmenge  $\Gamma_S^s(t_s)$  waren), aufgestellt und gelöst werden. Die zu beobachtenden Indikatorfunktionen ergeben sich aus der neuen Struktur in Abhängigkeit der vorhandenen Schaltbauelemente. Für  $\Gamma_{SL}$ - und  $\Gamma_{SR}$ -Schalter errechnen sich die Schalter-Stromobservablen aus den Maschenströmen gemäß (5.62). Für  $\Gamma_{SC}$ -Schalter lassen sich die Schalter-Stromvorzeichen (als „Strom“-Observable) aus der Differenzbildung gemäß (5.17) ermitteln. Die Schalter-Spannungsobservablen schließlich ergeben sich für alle Schalterklassen aus den Reaktionsspannungen gemäß (5.63).

### 5.3.6.5 Spezialfälle

#### Reguläre Induktormatrix

Die Matrix der Zweiginduktivitäten  $L_{ij}$  sei regulär. Dann ist  $l_{\mu\nu}$  ebenfalls regulär und sogar positiv definit. In (4.11) gilt dann  $H_R = H_C = \emptyset$  und somit  $\{\mu\} = \{\mu_L\}$ . Weiterhin gilt in (4.13)  $\Gamma_{0R} = \Gamma_{0C} = \emptyset$  und in (5.60)  $\Gamma_{SR} = \Gamma_{SC} = \emptyset$  (und damit  $\{i_S\} = \{i_{SL}\}$ ). Die Gleichungen (5.61) reduzieren sich auf (5.59) und (5.64) wird zu

$$l_{\mu\nu}\ddot{q}^\nu = \lambda_{i_S} A^{i_S}{}_\mu - (\tilde{r}_{\mu\nu}\dot{q}^\nu + c_{\mu\nu}q^\nu + \hat{v}_{\mu 0} - \lambda_{i_0} A^{i_0}{}_\mu).$$

Mit  $\hat{L}^{j_S i_S} = A^{j_S}{}_\nu l^{\nu\mu} A^{i_S}{}_\mu$  sowie  $\hat{b}^{j_S} = -A^{j_S}{}_\nu l^{\nu\mu} (\tilde{r}_{\mu\omega}\dot{q}^\omega + c_{\mu\omega}q^\omega + \tilde{v}_{\mu 0} - \lambda_{i_0} A^{i_0}{}_\mu)$  ( $l^{\nu\mu}$  jeweils gemäß  $l_{\mu\nu} l^{\nu\omega} = \delta_\mu^\omega$ ) lautet das LCP (5.72, 5.73) schließlich

$$\ddot{q}^{j_S} = \hat{L}^{j_S i_S} \lambda_{i_S} + \hat{b}^{j_S}, \quad \ddot{q}^{j_S}, \lambda_{j_S} \geq 0, \quad \ddot{q}^{j_S} \lambda_{j_S} = 0 \quad (\text{Z}).$$

#### Keine Induktoren, reguläre Resistormatrix

Im Fall der vollständigen Abwesenheit von Induktoren gilt in (4.11)  $H_L = \emptyset$ . Weiterhin sei  $r_{\mu\nu}$  regulär und positiv definit. Dann ist  $H_C = \emptyset$  und  $\{\mu\} = \{\mu_R\}$ . Die Gleichungen (5.61) reduzieren sich auf

$$\begin{aligned} r_{\mu\nu}\dot{q}^\nu - \lambda_{i_0} A^{i_0}{}_\mu - \lambda_{i_S} A^{i_S}{}_\mu &= -c_{\mu\nu}q^\nu - \hat{v}_{\mu 0}, \\ A^{j_0}{}_\nu \dot{q}^\nu &= \dot{\tilde{q}}_0^{j_0}, \\ A^{j_S}{}_\nu \dot{q}^\nu &= 0 \end{aligned}$$

und (5.64) wird zu

$$r_{\mu\nu}\dot{q}^\nu = \lambda_{i_S} A^{i_S}{}_\mu - (c_{\mu\nu}q^\nu + \hat{v}_{\mu 0} - \lambda_{i_0} A^{i_0}{}_\mu).$$

Mit  $\hat{R}^{j_S i_S} = A^{j_S}{}_\nu r^{\nu\mu} A^{i_S}{}_\mu$  sowie  $\hat{b}^{j_S} = -A^{j_S}{}_\nu r^{\nu\mu} (c_{\mu\omega}q^\omega + \hat{v}_{\mu 0} - \lambda_{i_0} A^{i_0}{}_\mu)$  ( $r^{\nu\mu}$  jeweils gemäß  $r_{\mu\nu} r^{\nu\omega} = \delta_\mu^\omega$ ) lautet das LCP (5.72, 5.73) schließlich

$$\dot{q}^{j_S} = \hat{R}^{j_S i_S} \lambda_{i_S} + \hat{b}^{j_S}, \quad \dot{q}^{j_S}, \lambda_{j_S} \geq 0, \quad \dot{q}^{j_S} \lambda_{j_S} = 0 \quad (\text{Z}).$$



## 5.4 Strukturvariabilität bei EMS

Nachdem die Behandlung von Strukturvariabilität mittels unilateraler Bindungen für MKS für wichtige Fälle kurz wiederholt und für ES ausführlich dargestellt wurde, sind alle notwendigen Methoden und Verfahren zur Beschreibung von *strukturvariablen EMS* bereitgestellt. Im Unterschied zu den Ausführungen der Abschnitte 5.2 und 5.3 müssen bei EMS die kompletten Bewegungsgleichungen inklusive aller elektromechanischen Wechselwirkungen zur Betrachtung herangezogen werden. Im Weiteren sollen sowohl „domänenspezifische“ als auch „domänenübergreifende“ Schaltphänomene zugelassen werden. Domänenspezifische unstetige Vorgänge sind durch physikalische Größen einer Domäne charakterisiert. Der Begriff domänenübergreifend bedeutet bei EMS, dass eine Beschreibung die Verwendung von mechanischen *und* elektrischen Größen erfordert. Insgesamt sind somit drei Systemklassen denkbar:

- EMS mit Strukturvariabilität im mechanischen Teilsystem (MTS),
- EMS mit Strukturvariabilität im elektrischen Teilsystem (ETS),
- EMS mit Strukturvariabilität in beiden Teilsystemen.

Die erste Klasse lässt sich mit den Methoden aus Abschnitt 5.2 behandeln. Eine unilaterale Bindung wird durch zwei mechanische Größen beschrieben. Als Indikatorfunktionen dienen ebenfalls zwei physikalische Größen des MTS. Für die Aufstellung des LCP sind die Bewegungsgleichungen des ETS infolge der rein mechanischen Zwangsbedingungen nicht von Interesse. In den MTS-Bewegungsgleichungen gemäß (5.5) bzw. (5.11) (und damit später in den  $\bar{w}_N^i$ ) treten zusätzlich generalisierte Kräfte elektrischen Ursprungs auf. Diese sind aber trotz einer eventuell notwendigen Zerlegung der Fundamentalkreis-Indexmengen gemäß (4.5) oder (4.11) aus dem Zustand des ETS bekannt (siehe (4.2)). Auf die aus den Bindungen abgeleiteten Relativbeschleunigungen in Normalenrichtung (5.4) bzw. (5.10) hat das ETS keinen Einfluss. Deshalb sind (5.6) mit (5.2) bzw. (5.13) mit (5.9) auch hier jeweils LCP mit den (mechanischen) komplementären Variablen als einzig unbekannte Größen.

Für die zweite Klasse sind die erforderlichen Methoden in Abschnitt 5.3 bereitgestellt. Die Beschreibung einer unilateralen Bindung erfolgt durch zwei elektrische Größen. Als Indikatorfunktionen werden ebenfalls zwei physikalische Größen des ETS verwendet. Die MTS-Bewegungsgleichungen (d.h. deren Struktur, mechanische Konstitutivparameter) spielen bei der Aufstellung des LCP keine Rolle. Allerdings geht der aktuelle Zustand des MTS in die ETS-Bewegungsgleichungen ein (vgl. Kapitel 3). Deshalb sind in (5.48) die Objekte  $\tilde{B}^{jsis}$  und  $\tilde{b}^{js}$  bzw. in (5.72) die Objekte  $\hat{B}^{jsis}$  und  $\hat{b}^{js}$  vom Zustand des Gesamt-EMS abhängig. Bei Lösung der EMS-Bewegungsgleichungen über numerische Integration ist dieser zu jedem Zeitpunkt bekannt. Beide Formulierungen (d.h. (5.48) mit (5.49) bzw. (5.72) mit (5.73)) bilden deshalb jeweils LCP mit (jetzt elektrischen) komplementären Variablen als einzig unbekannte Größen. Die in Abschnitt 5.3 getroffenen Feststellungen zur Lösbarkeit sind dadurch nicht betroffen. Zwei Anwendungsbeispiele zum Thema Strukturvariabilität im ETS finden sich im Abschnitt 7.1.

In der dritten Klasse treten unstetige Vorgänge sowohl im MTS als auch im ETS auf. Diese können unabhängig voneinander sein oder auch in direktem Zusammenhang mit-

einander stehen z.B. dann, wenn ein mechanischer Kontakt gleichzeitig einen elektrischen Kontakt auslöst (fremdgesteuerter elektrischer Schalter). Letztere Phänomene können allerdings durch jeweils (mindestens) eine unilaterale Bindung im MTS und im ETS beschrieben werden. Damit entstammen beide Größen eines Paares komplementärer Variablen stets derselben Domäne. *Die Gesamtheit aller Bindungsgleichungen zerfällt in rein mechanische und rein elektrische.* Damit ist die dritte Klasse unstetiger Vorgänge durch eine Kombination der Methoden aus den Abschnitten 5.2 und 5.3 behandelbar. Infolge der auftretenden Wechselwirkungen kann allerdings jede Änderung der MTS-Struktur oder des ETS-Schaltzustandes auch eine „domänenübergreifende“ Wirkung haben. Diese kann zeitlich verzögert oder auch sofort (d.h. zeitgleich mit dem ursprünglichen unstetigen Vorgang) eintreten. Deshalb muss bei einem potenziellen Schaltzeitpunkt  $t_s$  stets *ein gemeinsames LCP* des Gesamt-EMS aufgestellt werden. Dabei ist es unerheblich, ob eine Verletzung der Zustandsbedingungen durch eine mechanische oder eine elektrische Indikatorfunktion detektiert wurde. Dieses LCP enthält die komplementären Variablen aller zum Zeitpunkt  $t_s$  schaltbaren (mechanischen und elektrischen) Schaltphänomene. Ein Anwendungsbeispiel zum Thema Strukturvariabilität in EMS (in beiden Teilsystemen) findet sich im Abschnitt 7.3.2.

# Kapitel 6

## Inverse Problemstellungen

### 6.1 Einleitung

Nach der Vorstellung der Modellierung und verschiedener Methoden zur Analyse von mechatronischen Systemen werden nun einige Aspekte der Synthese (d.h. des Entwurfs) solcher Systeme betrachtet. Das Hauptaugenmerk liegt dabei wieder auf der einheitlichen mathematischen Modellierung elektromechanischer Systeme und den sich daraus ergebenden Möglichkeiten bezüglich einer Synthese. Die bei der Konzeption der Struktur, der Parameter und des dynamischen Verhaltens von EMS hauptsächlich zu bearbeitenden Aufgabenstellungen werden deshalb als *inverse Probleme* verstanden.

#### 6.1.1 Begriffe

Die folgenden Ausführungen zur Synthese von EMS stützen sich im Wesentlichen auf Begriffe aus der analytischen Mechanik. Deshalb werden hier einige Begriffe wiederholt bzw. neu eingeführt.

Die Begriffe Topologie und Kinematik (und damit die Struktur) eines EMS – bzw. seiner beiden Teilsysteme MTS und ETS – wurden in den Kapiteln 2 und 3 ausführlich erläutert. Alle anderen Eigenschaften des MTS (z.B. geometrische Abmessungen der Körper, verwendete Materialien, Dämpfungseffekte, Kennlinien der Kraftkoppellemente) werden als dessen konstitutive Parameter bezeichnet. Die konstitutiven Parameter des ETS sind die Eigenschaften und Parameter der elektrischen Bauelemente, die sich letztlich ebenfalls aus geometrischen Abmessungen und Materialeigenschaften ergeben. Struktur und Konstitutivparameter zusammen werden *Layout* eines EMS genannt. Sie bestimmen eine gewisse Auslegung (eine Instanz) eines solchen Systems. Damit gehören zum Layout eines EMS die Gesamtheit aller topologischen, kinematischen und konstitutiven Parameter seiner beiden Teilsysteme.

Die aus der klassischen Mechanik bekannte inverse Aufgabe der Dynamik, d.h. die Berechnung eingepprägter Kräfte bei bekanntem Bewegungsgesetz und fester Struktur, wird kurz mit *inverser Dynamik* bezeichnet. Im Fall elektromechanischer Systeme handelt es sich dabei um die Ermittlung von eingepprägten Kräften/Momenten bzw. elektrischen Spannungen, unter deren Einfluss mechanische und elektrische Koordinaten eine vorgegebene Zeitgeschichte durchlaufen. Die inverse Dynamik ist eine wichtige Teilaufgabe der weit umfangreicheren Klasse der *inversen Problemstellungen der Dynamik*. Unter inver-

sen Problemstellungen wird die Wahl eines bestimmten Layouts (oder einer Teilmenge der Layout-Parameter) zur Erfüllung bestimmter Systemeigenschaften verstanden. Gesucht sind somit Konfigurationen eines Systems derart, dass dessen Bewegungsgleichungen Lösungen mit bestimmten qualitativen und/oder quantitativen Eigenschaften zulassen (Systemsynthese). Diese Aufgaben lassen sich in drei Kategorien einteilen:

- Entwurf einer Struktur (Topologie und Kinematik),
- Bestimmung der Konstitutivparameter,
- Steuerung des EMS.

Der Strukturentwurf soll in dieser Arbeit nicht näher betrachtet werden. Im folgenden Kapitel werden lediglich einige grundsätzliche Gedanken geäußert, die die Einordnung der nachfolgend aufgeführten Methoden erleichtern. Diese Methoden gehen von einer fest gegebenen (oder per Entwurf gefundenen) Struktur aus und gehören zur zweiten bzw. dritten Kategorie. Sie werden in den Kapiteln 6.2 und 6.3 behandelt.

### 6.1.2 Strukturentwurf

Der Strukturentwurf kann als inverse Problemstellung bei variabler Struktur aufgefasst werden. Solche Fragestellungen treten auf, wenn verschiedene Optionen bezüglich Topologie und/oder Kinematik eines Systems untersucht werden sollen, um das finale Layout optimal zu gestalten. Ein solches Vorgehen soll hier unter Topologiesynthese bzw. Kinematiksynthese verstanden werden. Demgegenüber wird in der Literatur unter Topologie- oder Strukturoptimierung die FEM-gestützte Berechnung der Form eines starren oder elastischen Körpers zur Minimierung der mechanischen Spannungen innerhalb des Körpers verstanden, und mit Optimierung der Kinematik (manchmal auch als Kinematiksynthese bezeichnet!) ist oft nichts anderes als die Optimierung von geometrischen Parametern zur Realisierung bestimmter statischer Eigenschaften gemeint. Beide Aufgaben gehören nach der in dieser Arbeit bevorzugten Begriffswelt zum *Entwurf bei gegebener Struktur* (siehe Abschnitt 6.2).

Die Veranschaulichung der Struktur eines EMS erfolgt zweckmäßigerweise mittels zweier repräsentierender Graphen (jeweils für MTS und ETS). Ein Graph  $\Xi$ , der ein MTS mit  $K$  Körpern (inklusive Fundament) repräsentiert, besteht dabei aus ebenfalls  $K$  Knoten. Jedes zwischen zwei Körpern existierende Gelenk wird durch eine entsprechende Kante dargestellt (Anzahl sei  $g$ ). Unter der Voraussetzung, dass die Bindungen der Gelenke unabhängig voneinander sind (Jacobi-Matrix habe vollen Rang) und redundante Bewegungen ausgeschlossen werden, ergibt sich der Freiheitsgrad des MTS nach der so genannten Grübler-Formel

$$F_{me} = n = 6(K - 1) - \sum_{j=1}^g (6 - f_j) = 6(K - g - 1) + \sum_{j=1}^g f_j,$$

wobei mit  $f_j$  der Gelenkfreiheitsgrad des  $j$ -ten Gelenks bezeichnet wird. Mit der Summe aller Gelenkfreiheitsgrade  $F_g$  und der Anzahl der unabhängigen kinematischen Schleifen  $L$  (es gilt  $L = g - K + 1$ ) wird dann  $n = F_g - 6L$ . Ein Graph  $\Gamma$ , der ein ETS mit  $B$  Zweigen,

$N$  Potenzialknoten und  $p$  Komponenten repräsentiert, besteht aus  $B$  Kanten,  $N$  Knoten und  $p$  Komponenten. Er besitzt  $l = B - N + p$  voneinander unabhängige Kreise. Mit der Anzahl  $S$  der im ETS existierenden Stromquellen ergibt sich der Quasifreiheitsgrad des ETS zu

$$F_{el} = m = l - S = B - N + p - S.$$

Die (abstrakte) Synthese der Topologie und Kinematik wurde in der Literatur bisher nur selten untersucht. Anfänge für mechanische Systeme (z.B. in der Mechanismen-theorie) sind etwa in [150, 151, 236, 244] zu finden. Sie behandeln Gesetzmäßigkeiten und Darstellungsmöglichkeiten bei variabler Struktur. Ausgehend von wenigen Vorgaben (z.B. Freiheitsgrad und Anzahl der kinematischen Schleifen) werden unter Nutzung von Werkzeugen der Graphentheorie (vollständige Aufzählung unter gewissen Bedingungen, Isomorphiebetrachtungen) alle denkbaren Strukturen bestimmt, um eine systematische Vorgehensweise beim Mechanismendesign zu ermöglichen (siehe auch [23, 49, 187, 232]). Eine Anwendung solcher Algorithmen zunächst auf elektrische und dann auf elektromechanische Systeme erscheint denkbar, soll aber in der vorliegenden Arbeit nicht untersucht werden.

## 6.2 Nichtlineare Optimierung

In diesem Abschnitt werden inverse Problemstellungen unter der Voraussetzung einer festen Struktur betrachtet. Feste Struktur bedeutet dabei, dass Topologie und Kinematik sowohl des MTS und als auch des ETS gegeben sind und nicht mehr verändert werden sollen. Für das finale Layout sind somit noch die Konstitutivparameter des Systems zu bestimmen. Meistens handelt es sich dabei um einen gewissen Teil der geometrischen und materialtechnischen Eigenschaften. Theoretisch können aber auch sämtliche Konstitutivparameter noch unbekannt sein. Solche Problemstellungen führen auf die (evtl. mehrkriterielle) *nichtlineare Parameteroptimierung* als ein Entwurfswerkzeug.

Ziel einer Parameteroptimierung ist die optimale Anpassung der geometrischen und/oder Materialparameter an statische und/oder dynamische Eigenschaften des Gesamtsystems. Die vorzugebenden Systemeigenschaften werden üblicherweise entweder als zu minimierende (zeitunabhängige) Zielfunktionen

$$J(r_k) \longrightarrow \min$$

( $r_k$  – statische und dynamische Kennwerte) oder als zu minimierende (von der Systemdynamik abhängige) Zielfunktionale (z.B. Integralkriterien)

$$J[\ddot{q}^a(t), \dot{q}^a(t), q^a(t), r_k] \longrightarrow \min$$

formuliert. Dabei müssen die Optimierungsvariablen, d.h. die zu bestimmenden geometrischen und/oder konstitutiven Systemparameter  $s_p$ ,  $p = 1, \dots, P$ , nicht unbedingt explizit im Zielfunktional auftreten. Sie können ebenso implizit enthalten sein (z.B.  $q^a = q^a(s_p, t)$ ,  $r_k = r_k(s_p, t)$ ). Eventuell zu beachtende Einschränkungen (z.B. erlaubter Arbeitsbereich, zulässige Konstruktionsparameter, maximale Kräfte oder Ströme) können als Gleichungs- und/oder Ungleichungsnebenbedingungen (GNB, UNB) in die Optimierung einfließen. Die

Parameteroptimierung selbst wird dann je nach Optimierungskriterium mit der entsprechenden Simulationsaufgabe (vgl. Kapitel 4) gekoppelt. Das heißt, im Entwurfswerkzeug wird während der Parameteroptimierung für jede notwendige Berechnung des Zielfunktional ein Simulationslauf (entweder die numerische Integration der Bewegungsgleichungen, die Ermittlung eines statischen Gleichgewichtszustandes oder die Modalanalyse der linearisierten Gleichungen) gestartet und aufgrund des ermittelten Wertes des Zielfunktional mit Hilfe der zugrunde liegenden Optimierungsstrategie der nächste Satz der Optimierungsvariablen gewählt. Der Iterationszyklus wird solange durchgeführt, bis das Zielfunktional ein lokales Minimum erreicht. Durch die Behandlung des EMS als ein einheitliches System (siehe Kapitel 3 und 4) wird stets der Einfluss der Optimierungsparameter auf beide Teilsysteme berücksichtigt. Damit werden automatisch alle Probleme ausgeschaltet, die durch eine (sonst übliche) iterative Optimierung der separierten Teilsysteme entstehen.

Eine sichere Methode, das üblicherweise interessierende globale Minimum zu erreichen, existiert bekanntermaßen nicht. Algorithmen, die das globale Minimum mit großer Wahrscheinlichkeit treffen (Evolutionstrategien, Simulated Annealing), benötigen eine drastisch höhere Anzahl von Zielfunktionalberechnungen als klassische Optimierungsverfahren. Deshalb sind solche Strategien für eine Parameteroptimierung auf der Basis der numerischen Integration oder der Gleichgewichtsermittlung nur schwer einsetzbar. Sie sind allerdings denkbar, falls die Zielfunktionalberechnung mittels Modalanalyse erfolgt, weil diese im Allgemeinen deutlich weniger Zeit benötigt als die anderen Simulationsaufgaben. Welches lokale Minimum von dem Optimierungsalgorithmus gefunden wird, hängt in starkem Maße von der Anfangskonfiguration der Optimierungsvariablen ab. Durch geeignete Wahl dieser Initialisierung „in der Nähe“ des vermuteten globalen Minimums kann somit ein gewisser Einfluss auf das Optimierungsergebnis ausgeübt werden. Dazu ist allerdings entweder a priori-Wissen über das Verhalten des untersuchten Systems nötig, oder es werden vor der eigentlichen Optimierung Parametervariationen durchgeführt, die den zulässigen Bereich rasterartig abtasten und somit eine grobe Vorstellung vom Zielfunktionalgebirge vermitteln.

In der Literatur ist eine Vielzahl von Optimierungsmethoden zu finden. Sie können nach verschiedenen Merkmalen klassifiziert werden, z.B.

- nach der Art der Anwendung in statische, dynamische und stochastische Verfahren,
- nach der Anzahl der Zielfunktionale (oder Zielfunktionen) in einkriterielle und multikriterielle Methoden,
- nach der Anzahl der Optimierungsparameter in eindimensionale und mehrdimensionale Suchstrategien,
- oder nach der Möglichkeit der Vorgabe von GNB und/oder UNB.

Für Optimierung von Konstitutivparametern sind vor allem statische Verfahren von Bedeutung. Ob ein- oder multikriterielle bzw. ein- oder mehrdimensionale Methoden zum Einsatz kommen, hängt von der konkreten Problemstellung ab. Wichtig ist allerdings, dass GNB und UNB vorgegeben werden können, weil beim Systementwurf oft gewisse Beschränkungen von geometrischen Parametern oder Materialeigenschaften beachtet werden

müssen. Weiterhin können bei ungünstigen Parameterkonstellationen extrem lange Simulationszeiten oder gar unsinnige Ergebnisse auftreten. Deshalb führt in manchen Fällen das oft verwendete Verfahren der GNB- und UNB-Formulierung mittels Straffunktionen zu einem ungünstigen Konvergenzverhalten.

Auf die einzelnen Methoden soll hier nicht eingegangen werden. Sie werden in der Literatur ausführlich besprochen (z.B. [51, 173, 217]). Für die Behandlung der in der vorliegenden Arbeit angeführten Testbeispiele (siehe Abschnitt 7.3.3) wurden ein Gradienten- und ein Variable-Metrik-Verfahren implementiert. Letzteres basiert auf der Approximation der inversen Hesse-Matrix nach Davidon, Fletcher und Powell [52]. Zur Minimierung entlang der jeweiligen Suchrichtung (eindimensionale Minimumsuche) kommt der bekannte Algorithmus des Goldenen Schnittes zum Einsatz. Beide Verfahren der mehrdimensionalen Suche erlauben allerdings keine direkte Formulierung von beliebigen GNB oder UNB. Deshalb erfolgte die Berücksichtigung von Nebenbedingungen über die Formulierung von Straffunktionen. Diese Methode hat den Vorteil, dass der Startvektor nicht notwendigerweise im zulässigen Bereich liegen muss. Alternative Möglichkeiten wären einerseits eine Formulierung der Optimalitätsbedingung durch Erweiterung des Zielfunktionsals mit Lagrange-Multiplikatoren für die GNB und mit Kuhn-Tucker-Multiplikatoren für die UNB (z.B. in [173]) oder andererseits die Verwendung eines gedämpften Gauß-Newton-Verfahrens (z.B. in [217]). Diese Methoden wurden allerdings nicht näher untersucht.

## 6.3 Nichtlineare dynamische Steuerung

In diesem Abschnitt wird die Thematik der inversen Problemstellungen bei festem Layout (d.h. bei vollständig vorgegebenem System) behandelt. Hier werden neben der Struktur auch die Konstitutivparameter (mit Ausnahme gewisser eingepprägter Kräfte/Momente und elektrischer Spannungen) als fixe Vorgaben betrachtet. Diese Herangehensweise führt auf Fragen der geeigneten Ansteuerung des Gesamtsystems zur Einhaltung gewisser Vorgaben für dessen Bewegung. Dabei kommen im Allgemeinen sowohl Vorgaben für die zeitliche Abfolge von mechanischen und/oder elektrischen Koordinaten als auch gewisse Abhängigkeiten der Koordinaten untereinander in Betracht. In der vorliegenden Arbeit werden nur solche Vorgaben zugelassen, die sich als explizit zeitabhängige Sollwerte für die generalisierten Koordinaten darstellen lassen. Die Ansteuerung des Systems erfolgt unter Verwendung einer *Lyapunov-stabilen Regelstrategie*.

### 6.3.1 Bewegungsgleichungen

Die hier dargestellte Vorgehensweise für eine nichtlineare dynamische Steuerung von EMS baut auf einer z.B. in [136, 138, 140, 141, 160] vorgestellten Methode für MKS auf. Diese ist nur für Systeme ohne zusätzliche Bindungen geeignet. Deshalb wird im Folgenden für das ETS die Formulierung in Minimalkoordinaten verwendet. Da das MTS ebenfalls keine zusätzlichen Zwangsbedingungen aufweisen darf, muss es entweder eine Baumstruktur besitzen oder alle kinematischen Schleifen müssen bei der Aufstellung der MTS-Bewegungsgleichungen eliminierbar sein. Falls doch nicht eliminierbare Zwangsbedingungen auftreten, kann eine Regelstrategie eingesetzt werden, die der hier vorgestellten

ähnlich ist. Diese soll allerdings in der vorliegenden Arbeit nicht näher betrachtet werden. Für MKS wurde ein solcher Regler z.B. in [90, 139, 160] angegeben.

Ausgangspunkt für die Herleitung einer *Lyapunov-stabilen nichtlinearen dynamischen Steuerung* ist das mathematische Modell  $\{\Lambda, D, Q_a^{(S)}\}$  eines EMS. Die „sonstigen“ verallgemeinerten Kräfte  $Q_a^{(S)}$  können ohne Einschränkung für die weitere Vorgehensweise auf den rechten Seiten der Lagrange'schen Bewegungsgleichungen zugelassen werden. Weiterhin werden wieder die im Kapitel 3 eingeführten Indexbezeichnungen für bestimmte Indexmengen verwendet:  $\kappa, \lambda, \varrho, \sigma \in J$ ;  $i, j \in \Gamma$ ;  $\mu, \nu, \omega \in H^*$ ;  $a, b, c \in J \cup H^*$ ,  $\alpha, \beta, \gamma \in J \cup H^* \cup \{0\}$  ( $q^0 \equiv t$ ). Die Bewegungsgleichungen (3.24) lauten dann

$$g_{ab}(q^\sigma, t)\ddot{q}^b + \Gamma_{a\beta\gamma}(q^c, t)\dot{q}^\beta\dot{q}^\gamma + s_{a\beta}(q^\sigma, t)\dot{q}^\beta = Q_a^{(S)}(\dot{q}^c, q^c, t)$$

bzw. mit der Abkürzung  $\check{Q}_a := Q_a^{(S)} - s_{a\beta}\dot{q}^\beta$

$$g_{ab}\ddot{q}^b + \Gamma_{a\beta\gamma}\dot{q}^\beta\dot{q}^\gamma = \check{Q}_a. \quad (6.1)$$

Die in [138], [140], [141] für MKS vorausgesetzte Nichtexistenz rheonomer Zwangsbedingungen wird hier für das Gesamt-EMS fallen gelassen. Somit sind für die kinetische Energie des MTS auch nicht quadratische Terme (d.h. Linear- und Absolutterme) in den generalisierten Geschwindigkeiten zugelassen und im ETS dürfen auch Stromquellen auftreten. Aus (6.1) folgt dann wegen  $g_{ab} = g_{\kappa\lambda} \oplus g_{\mu\nu}$  sowie  $\Gamma_{\kappa\lambda\nu} = \Gamma_{\kappa\nu\lambda} \equiv 0$ ,  $\Gamma_{\mu\lambda\varrho} \equiv 0$  und  $\Gamma_{\mu\nu\omega} \equiv 0$  (mit  $\Gamma_{\mu\lambda\omega} = \Gamma_{\mu\omega\lambda}$ )

$$g_{\kappa\lambda}\ddot{q}^\lambda + \Gamma_{\kappa\lambda\varrho}\dot{q}^\lambda\dot{q}^\varrho + \Gamma_{\kappa\nu\omega}\dot{q}^\nu\dot{q}^\omega + 2\Gamma_{\kappa b0}\dot{q}^b + \Gamma_{\kappa 00} = \check{Q}_\kappa, \quad (6.2a)$$

$$g_{\mu\nu}\ddot{q}^\nu + 2\Gamma_{\mu\lambda\omega}\dot{q}^\lambda\dot{q}^\omega + 2\Gamma_{\mu b0}\dot{q}^b + \Gamma_{\mu 00} = \check{Q}_\mu. \quad (6.2b)$$

Aus diesen Gleichungen lassen sich durch Ersetzen von  $\Gamma_{\kappa\nu\omega}$  und  $\Gamma_{\mu\lambda\omega}$  gemäß (3.26) (sowie bei verschwindenden „sonstigen“ verallgemeinerten Kräften) die in (3.27) dargestellten Lagrange'schen Gleichungen des EMS folgern. Im Weiteren wird allerdings die kürzere Schreibweise nach (6.2) verwendet. Für das ETS kommt die Formulierung in Minimalkoordinaten zur Anwendung.

### 6.3.2 Voronetz-Gleichungen

Bei Betrachtung der inversen Dynamik von EMS können Sollvorgaben sowohl für mechanische als auch für elektrische Koordinaten vorliegen. Dann sind verallgemeinerte Kräfte (d.h. mechanische Gelenkkräfte und -momente sowie elektrische Maschenspannungen) zu errechnen, die die tatsächliche Bewegung des repräsentierenden Punktes  $q = (q^a)$  im Konfigurationenraum  $\mathbb{R}^{n+m}$  des EMS auf einem durch gewisse vorgegebene Bedingungen festgelegten Unterraum steuern.

Sei  $J_1$  die Indexmenge derjenigen generalisierten mechanischen Koordinaten, mit deren Hilfe eine rheonome Untermannigfaltigkeit definiert wird, auf der sich das EMS durch dynamische Steuerung aufhalten soll. Sei analog  $H_1^*$  die Indexmenge derjenigen generalisierten elektrischen Koordinaten, die dynamisch gesteuert werden sollen. Weiterhin sei  $n_1 := |J_1|$  ( $n_1 \leq n$ ) und  $m_1 := |H_1^*|$  ( $m_1 \leq m$ ). Dann gilt  $J_1 \subseteq J$  und  $H_1^* \subseteq H^*$ . Der Unterraum des  $\mathbb{R}^{n+m}$  sei definiert durch

$$f^{a_1} := q^{a_1} - q_0^{a_1}(t) = 0, \quad a_1 \in J_1 \cup H_1^*. \quad (6.3)$$



Dabei ist  $q_0^{a_1}(t)$  der Sollzeitverlauf der generalisierten Koordinate  $q^{a_1}$ . Die Gleichungen (6.3) stellen somit lineare entkoppelte rheonome Gleichungen dar. Mit  $n_2 := n - n_1$  und  $m_2 := m - m_1$  definiert (6.3) eine  $(n_2 + m_2)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit  $\mathbb{R}^{n_2+m_2}$  des EMS-Konfigurationsraumes. Sei  $J_2 = J \setminus J_1$  und  $H_2^* = H^* \setminus H_1^*$ . Im Weiteren deutet der Subindex 1 stets auf eine dynamisch zu steuernde generalisierte Koordinate und der Subindex 2 steht für eine generalisierte Koordinate, die durch die Steuerung nicht beeinflusst werden soll (gelegentlich auch verkürzend unabhängige Koordinate genannt). Seien  $R_a = \lambda_{a_1} f^{a_1}_a$ ,  $f^{a_1}_a = \partial_a f^{a_1}$ , die zusätzlichen verallgemeinerten Kräfte/Spannungen, die als Reaktionen auf die Bindungen (6.3) auftreten. Dann gilt  $R_{a_2} \equiv 0$  und die Bewegungsgleichungen (6.1) zerfallen in zwei Teilsysteme

$$\begin{aligned} g_{a_1 b} \ddot{q}^b + \Gamma_{a_1 \beta \gamma} \dot{q}^\beta \dot{q}^\gamma &= \check{Q}_{a_1} + R_{a_1}, \\ g_{a_2 b} \ddot{q}^b + \Gamma_{a_2 \beta \gamma} \dot{q}^\beta \dot{q}^\gamma &= \check{Q}_{a_2}. \end{aligned}$$

Umgekehrt können die  $R_{a_1}$  auch als Steuerkräfte für das EMS aufgefasst werden derart, dass sich das EMS auf dem durch (6.3) definierten Unterraum aufhalten soll. Die Zerlegung in dynamisch zu steuernde und unabhängige Koordinaten ergibt für (6.2a) und (6.2b)

$$g_{\kappa_1 \lambda} \ddot{q}^\lambda + \Gamma_{\kappa_1 \lambda \rho} \dot{q}^\lambda \dot{q}^\rho + \Gamma_{\kappa_1 \nu \omega} \dot{q}^\nu \dot{q}^\omega + 2\Gamma_{\kappa_1 b 0} \dot{q}^b + \Gamma_{\kappa_1 0 0} = \check{Q}_{\kappa_1} + R_{\kappa_1}, \quad (6.4a)$$

$$g_{\kappa_2 \lambda} \ddot{q}^\lambda + \Gamma_{\kappa_2 \lambda \rho} \dot{q}^\lambda \dot{q}^\rho + \Gamma_{\kappa_2 \nu \omega} \dot{q}^\nu \dot{q}^\omega + 2\Gamma_{\kappa_2 b 0} \dot{q}^b + \Gamma_{\kappa_2 0 0} = \check{Q}_{\kappa_2}, \quad (6.4b)$$

$$g_{\mu_1 \nu} \ddot{q}^\nu + 2\Gamma_{\mu_1 \lambda \omega} \dot{q}^\lambda \dot{q}^\omega + 2\Gamma_{\mu_1 b 0} \dot{q}^b + \Gamma_{\mu_1 0 0} = \check{Q}_{\mu_1} + R_{\mu_1}, \quad (6.4c)$$

$$g_{\mu_2 \nu} \ddot{q}^\nu + 2\Gamma_{\mu_2 \lambda \omega} \dot{q}^\lambda \dot{q}^\omega + 2\Gamma_{\mu_2 b 0} \dot{q}^b + \Gamma_{\mu_2 0 0} = \check{Q}_{\mu_2}. \quad (6.4d)$$

Hier sind  $R_{\kappa_1}$  zusätzliche generalisierte mechanische Kräfte, die genau in den Gelenken der dynamisch zu steuernden mechanischen Koordinaten  $q^{\kappa_1}$  eingepreßt werden. Analog bezeichnen  $R_{\mu_1}$  zusätzliche generalisierte elektrische Spannungen (Maschenspannungen), die genau in den Fundamentalkreisen der dynamisch zu steuernden elektrischen Koordinaten  $q^{\mu_1}$  eingespeist werden. Bei einer *kinematischen* Steuerung des Gesamt-EMS gemäß (6.3) sind die  $R_{a_1}$  gerade die verallgemeinerten Reaktionen. Sie können deshalb aus (6.4) ermittelt werden. Dazu werden gleichzeitig für alle in  $J_1$  enthaltenen generalisierten mechanischen Koordinaten die Zeitverläufe gemäß  $q^{\kappa_1} = q_0^{\kappa_1}(t)$  und für alle in  $H_1^*$  enthaltenen generalisierten elektrischen Koordinaten die Zeitverläufe gemäß  $q^{\mu_1} = q_0^{\mu_1}(t)$  vorgegeben. Der Vektor der EMS-Koordinaten wird ersetzt durch  $(q^a) = (q_0^{a_1}(t), q^{a_2})$  und die Dynamik der vorherigen „ $\mathbb{R}^{n+m}$ -Maschine“ reduziert sich auf die Dynamik einer „ $\mathbb{R}^{n_2+m_2}$ -Maschine“ (underactuated system). Wegen  $g_{a_2 b} \ddot{q}^b = g_{a_2 b_1} \ddot{q}_0^{b_1}(t) + g_{a_2 b_2} \ddot{q}^{b_2}$  folgen aus (6.4b) und (6.4d) die Bewegungsgleichungen unter kinematischer Steuerung

$$g_{\kappa_2 \lambda_2} \ddot{q}^{\lambda_2} + \Gamma_{\kappa_2 \lambda \rho} \dot{q}^\lambda \dot{q}^\rho + \Gamma_{\kappa_2 \nu \omega} \dot{q}^\nu \dot{q}^\omega + 2\Gamma_{\kappa_2 b 0} \dot{q}^b + \Gamma_{\kappa_2 0 0} = \check{Q}_{\kappa_2} - g_{\kappa_2 \lambda_1} \ddot{q}_0^{\lambda_1}(t), \quad (6.5a)$$

$$g_{\mu_2 \nu_2} \ddot{q}^{\nu_2} + 2\Gamma_{\mu_2 \lambda \omega} \dot{q}^\lambda \dot{q}^\omega + 2\Gamma_{\mu_2 b 0} \dot{q}^b + \Gamma_{\mu_2 0 0} = \check{Q}_{\mu_2} - g_{\mu_2 \nu_1} \ddot{q}_0^{\nu_1}(t) \quad (6.5b)$$

(mit  $(q^\kappa) = (q_0^{\kappa_1}(t), q^{\kappa_2})$  und  $(q^\mu) = (q_0^{\mu_1}(t), q^{\mu_2})$ ). Die Gleichungen (6.5) können in Anlehnung an die bekannten Gleichungen der analytischen Mechanik als „Voronetz-Gleichungen“ der „elektromechanischen  $\mathbb{R}^{n_2+m_2}$ -Maschine“ bezeichnet werden. Die Matrix  $g_{\kappa \lambda}$  ist stets symmetrisch und positiv definit. Damit gelten beide Eigenschaften auch für  $g_{\kappa_2 \lambda_2}$  (siehe Anhang D.1.1). Weiterhin wird hier vorausgesetzt, dass die Matrix der generalisierten Induktivitäten  $g_{\mu \nu} = l_{\mu \nu}$  regulär und somit positiv definit ist (vgl.

Bemerkungen in Abschnitt 2.3.3.6). Der Fall einer singulären Induktormatrix wird in Abschnitt 6.3.5 behandelt. Wegen ihrer Symmetrie ist bei regulärem  $l_{\mu\nu}$  auch  $g_{\mu_2\nu_2} = l_{\mu_2\nu_2}$  regulär und positiv definit (siehe Anhang D.1.1) und (6.5) kann nach den zweiten zeitlichen Ableitungen der unabhängigen EMS-Koordinaten aufgelöst werden. Mit  $g^{b_2a_2}$  als der Inversen von  $g_{a_2b_2}$  lassen sich die verallgemeinerten Reaktionen mittels (6.4a), (6.4c) und (6.5) wegen  $g_{a_1b}\ddot{q}^b = g_{a_1b_1}\ddot{q}_0^{b_1}(t) + g_{a_1b_2}\ddot{q}^{b_2}$  ermitteln zu

$$\begin{aligned} R_{\kappa_1} &= R_{\kappa_1}(\dot{q}^{c_2}, q^{c_2}, t) \\ &= g_{\kappa_1\lambda_1}\ddot{q}_0^{\lambda_1}(t) + \Gamma_{\kappa_1\lambda_0}\dot{q}^\lambda\dot{q}^0 + \Gamma_{\kappa_1\nu_0}\dot{q}^\nu\dot{q}^\omega + 2\Gamma_{\kappa_1b_0}\dot{q}^b + \Gamma_{\kappa_100} - \check{Q}_{\kappa_1} + \\ &\quad + g_{\kappa_1\lambda_2}g^{\lambda_2\kappa_2} \left[ \check{Q}_{\kappa_2} - \Gamma_{\kappa_2\lambda_0}\dot{q}^\lambda\dot{q}^0 - \Gamma_{\kappa_2\nu_0}\dot{q}^\nu\dot{q}^\omega - 2\Gamma_{\kappa_2b_0}\dot{q}^b - \Gamma_{\kappa_200} - \right. \\ &\quad \left. - g_{\kappa_2\lambda_1}\ddot{q}_0^{\lambda_1}(t) \right], \end{aligned} \quad (6.6a)$$

$$\begin{aligned} R_{\mu_1} &= R_{\mu_1}(\dot{q}^{c_2}, q^{c_2}, t) \\ &= g_{\mu_1\nu_1}\ddot{q}_0^{\nu_1}(t) + 2\Gamma_{\mu_1\lambda_0}\dot{q}^\lambda\dot{q}^\omega + 2\Gamma_{\mu_1b_0}\dot{q}^b + \Gamma_{\mu_100} - \check{Q}_{\mu_1} + \\ &\quad + g_{\mu_1\nu_2}g^{\nu_2\mu_2} \left[ \check{Q}_{\mu_2} - 2\Gamma_{\mu_2\lambda_0}\dot{q}^\lambda\dot{q}^\omega - 2\Gamma_{\mu_2b_0}\dot{q}^b - \Gamma_{\mu_200} - g_{\mu_2\nu_1}\ddot{q}_0^{\nu_1}(t) \right]. \end{aligned} \quad (6.6b)$$

Wegen der hier verwendeten Ersetzung  $(q^a) = (q_0^{a_1}(t), q^{a_2})$  repräsentiert (6.6) die inverse Dynamik einer „ $\mathbb{R}^{n_2+m_2}$ -Maschine“.

### 6.3.3 Erweiterter PD-Regler

Die gemäß (6.6) ermittelten generalisierten Kräfte  $R_{\kappa_1}$  und Spannungen  $R_{\mu_1}$  werden jetzt für eine *dynamische Steuerung* des Gesamt-EMS verwendet. Wenn alle berechneten Kräfte und Spannungen gleichzeitig in den entsprechenden Gelenken eingepreßt bzw. in die betreffenden Maschen eingespeist werden, sollte (bei geeigneten Startwerten) der repräsentierende Punkt  $q^a$  der  $\mathbb{R}^{n+m}$ -Maschine auf der mittels (6.3) definierten  $\mathbb{R}^{n_2+m_2}$ -Untermannigfaltigkeit verbleiben. Das gilt allerdings nur zu Beginn des Steuervorgangs. Mit zeitlichem Fortschritt wird  $q^a$  in zunehmendem Maße den  $\mathbb{R}^{n_2+m_2}$ -Raum verlassen. Bei einer dynamischen Simulation sind die Gründe dafür numerische Integrationsfehler und Instabilitäten. Bei der dynamischen Steuerung eines realen Systems können a priori unbekannte Störungen auftreten. Ebenso sind die Parameter des realen Systems nur mit gewissen Fehlern messbar, weshalb das Modell zur Berechnung der verallgemeinerten Reaktionen mit nur näherungsweise bekannten Konstitutivparametern auskommen muss. Beide Tatsachen führen unweigerlich zum Wegdriften des repräsentierenden Punktes von der Sollmannigfaltigkeit. Bei ungeeigneten Startwerten, d.h., falls sich das System etwa schon zu Beginn des Steuervorgangs nicht auf der Untermannigfaltigkeit befindet, ist eine Steuerung mit den gemäß (6.6) ermittelten verallgemeinerten Kräfte  $R_{a_1}$  gänzlich ungeeignet. Aus diesen Gründen müssen die  $R_{a_1}$  für eine sinnvolle dynamische Steuerung des EMS geeignet modifiziert werden. Diese Modifikation muss eine Stabilisierung der Steuerung zur Folge haben.

Einfache Stabilisierungsmaßnahmen, die aus der Theorie der Regelungstechnik bekannt sind, sind so genannte P- oder PD-Regler (Regler mit Proportionalrückführung der Regelabweichung oder mit kombinierter proportionaler/differenzieller Rückführung). Die-

se sind sehr gut für lineare Systeme geeignet. Für nichtlineare Systeme sind sie in einem durch Linearisierung festgelegten Arbeitspunkt ebenfalls gut anwendbar. Sei die Abweichung zwischen tatsächlichem und vorgegebenem Wert der Koordinate  $q^{a_1}$  bezeichnet mit

$$e^{a_1} := q^{a_1} - q_0^{a_1}(t) \quad (6.7)$$

und deren erste zeitliche Ableitung mit

$$\dot{e}^{a_1} := \dot{q}^{a_1} - \dot{q}_0^{a_1}(t). \quad (6.8)$$

Dann lautet z.B. ein PD-Regler

$$R_{a_1}^{PD} = -K_{a_1 b_1} \dot{e}^{b_1} - C_{a_1 b_1} e^{b_1} \quad (6.9)$$

mit frei wählbaren Matrizen  $K_{a_1 b_1}$ ,  $C_{a_1 b_1}$  (symmetrisch und positiv definit) der Verstärkungsfaktoren (so genannte Gain-Matrizen). *Das komplette nichtlineare System ist dann in der Nähe des Arbeitspunktes lokal stabil.*

In der nichtlinearen Regelungstheorie werden Stabilitätsuntersuchungen oft an Hand von Lyapunov-Funktionen durchgeführt. Solche Funktionen sind verallgemeinerte Energiefunktionen mit bestimmten Eigenschaften. Eine Definition wird im folgenden Abschnitt angegeben. Gelingt die explizite Konstruktion einer solchen Lyapunov-Funktion, so ist die globale Stabilität des geregelten Systems nachgewiesen. In (6.9) ist kein so genannter „feed forward“-Term zur nichtlinearen Kompensation enthalten. Für nichttriviale Trajektorien bei nichtlinearen Systemen ist somit ein solcher Regler ungeeignet. Eine Entwurfsmöglichkeit für einen global stabilen Regler besteht in der Kombination von verallgemeinerten Kräften auf der Grundlage der inversen Systemdynamik mit einem PD-Regler gemäß (6.9). Diese Vorgehensweise – als *erweiterter PD-Regler* bezeichnet – ist für MKS aus der Robotersteuerung (z.B. [160]) bekannt. Die nichtlineare „feed forward“-Komponente approximiert die generalisierten Reaktionen, während die lineare Rückkopplung die Abweichungen der MKS-Lage von der Sollmannigfaltigkeit korrigiert. Ein solches Regelgesetz soll hier für EMS vorgestellt werden. Wie sich zeigen wird, ist infolge der elektromechanischen Wechselwirkungen ein einfaches „Kopieren“ des mechanischen Reglers auf das ETS und die Anwendung zweier entkoppelter Regler zur dynamischen Steuerung des EMS nicht ausreichend! Das in der vorliegenden Arbeit entworfene Regelgesetz stellt vielmehr eine Verallgemeinerung des bisher für MKS verwendeten erweiterten PD-Reglers dar.

Für eine dynamische Steuerung muss die in (6.6) enthaltene *inverse Systemdynamik aus dem Zustand des Gesamt-EMS* ermittelt werden. Deshalb wird zunächst in (6.6) die teilweise Ersetzung des Vektors der EMS-Koordinaten zurück genommen, d.h., im Weiteren wird (6.6) mit  $(q^a) = (q^{a_1}, q^{a_2})$  verwendet. Die Sollvorgabe als Zeitfunktion wird nur dort eingesetzt, wo ausdrücklich  $q_0^{a_1}(t)$  verwendet wird. Aus Gründen der späteren Konstruierbarkeit einer Lyapunov-Funktion werden darüber hinaus folgende leichte Modifikationen verwendet (mit  $\Gamma_{\mu\lambda\omega} = \Gamma_{\mu\omega\lambda}$ ):

$$\begin{aligned} \Gamma_{\kappa_1 \lambda \varrho} \dot{q}^\lambda \dot{q}^\varrho &\mapsto \Gamma_{\kappa_1 \lambda_1 \varrho} \dot{q}^\varrho \dot{q}_0^{\lambda_1}(t) + \Gamma_{\kappa_1 \lambda_2 \varrho} \dot{q}^\varrho \dot{q}^{\lambda_2}, \\ \Gamma_{\kappa_1 \nu \omega} \dot{q}^\nu \dot{q}^\omega &\mapsto \Gamma_{\kappa_1 \nu_1 \omega} \dot{q}^\omega \dot{q}_0^{\nu_1}(t) + \Gamma_{\kappa_1 \nu_2 \omega} \dot{q}^\omega \dot{q}^{\nu_2}, \\ 2\Gamma_{\kappa_1 b_0} \dot{q}^b &\mapsto \Gamma_{\kappa_1 \lambda_1 0} (\dot{q}_0^{\lambda_1}(t) + \dot{q}^{\lambda_1}) + 2\Gamma_{\kappa_1 \lambda_2 0} \dot{q}^{\lambda_2} + 2\Gamma_{\kappa_1 \nu 0} \dot{q}^\nu, \\ 2\Gamma_{\mu_1 \lambda \omega} \dot{q}^\lambda \dot{q}^\omega &\mapsto \Gamma_{\mu_1 \lambda_1 \omega} \dot{q}^\omega \dot{q}_0^{\lambda_1}(t) + \Gamma_{\mu_1 \lambda_2 \omega} \dot{q}^\omega \dot{q}^{\lambda_2} + \Gamma_{\mu_1 \nu_1 \varrho} \dot{q}^\varrho \dot{q}_0^{\nu_1}(t) + \Gamma_{\mu_1 \nu_2 \varrho} \dot{q}^\varrho \dot{q}^{\nu_2}, \\ 2\Gamma_{\mu_1 b_0} \dot{q}^b &\mapsto 2\Gamma_{\mu_1 \lambda_0} \dot{q}^\lambda + \Gamma_{\mu_1 \nu_1 0} (\dot{q}_0^{\nu_1}(t) + \dot{q}^{\nu_1}) + 2\Gamma_{\mu_1 \nu_2 0} \dot{q}^{\nu_2}. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Durch diese Modifikationen fließen teilweise die zeitlichen Ableitungen  $\dot{q}_0^{a_1}(t)$  der Sollvorgaben für die dynamisch zu steuernden Koordinaten statt der Geschwindigkeiten  $\dot{q}^{a_1}$  der gesteuerten Koordinaten selbst in die inverse Dynamik des EMS ein. Da die Sollvorgaben als Zeitverlauf bekannt sind, sind diese Ersetzungen stets durchführbar. Mit (6.10) ergeben sich aus der (additiven) Kombination von (6.6) und (6.9) modifizierte verallgemeinerte Kräfte, die als Steuerkräfte Verwendung finden sollen. Diese lauten

$$\begin{aligned}
\bar{R}_{\kappa_1} &= \bar{R}_{\kappa_1}(\dot{q}^c, q^c, t) \\
&= g_{\kappa_1 \lambda_1}(q^\sigma, t) \ddot{q}_0^{\lambda_1}(t) + \underline{\Gamma_{\kappa_1 \lambda_1 \varrho}(q^\sigma, t) \dot{q}^\varrho \dot{q}_0^{\lambda_1}(t)} + \Gamma_{\kappa_1 \lambda_2 \varrho}(q^\sigma, t) \dot{q}^\varrho \dot{q}^{\lambda_2} + \\
&\quad + \underline{\Gamma_{\kappa_1 \nu_1 \omega}(q^\sigma, t) \dot{q}^\omega \dot{q}_0^{\nu_1}(t)} + \Gamma_{\kappa_1 \nu_2 \omega}(q^\sigma, t) \dot{q}^\omega \dot{q}^{\nu_2} + \underline{\Gamma_{\kappa_1 \lambda_1 0}(q^\sigma, t) \left( \dot{q}_0^{\lambda_1}(t) + \dot{q}^{\lambda_1} \right)} + \\
&\quad + 2\Gamma_{\kappa_1 \lambda_2 0}(q^\sigma, t) \dot{q}^{\lambda_2} + 2\Gamma_{\kappa_1 \nu 0}(q^\sigma, t) \dot{q}^\nu + \Gamma_{\kappa_1 00}(q^c, t) - \check{Q}_{\kappa_1}(\dot{q}^c, q^c, t) + \tag{6.11a} \\
&\quad + g_{\kappa_1 \lambda_2}(q^\sigma, t) g^{\lambda_2 \kappa_2}(q^\sigma, t) \left[ \check{Q}_{\kappa_2}(\dot{q}^c, q^c, t) - \Gamma_{\kappa_2 \lambda \varrho}(q^\sigma, t) \dot{q}^\lambda \dot{q}^\varrho - \right. \\
&\quad \quad \left. - \Gamma_{\kappa_2 \nu \omega}(q^\sigma, t) \dot{q}^\nu \dot{q}^\omega - 2\Gamma_{\kappa_2 b 0}(q^\sigma, t) \dot{q}^b - \Gamma_{\kappa_2 00}(q^c, t) - g_{\kappa_2 \lambda_1}(q^\sigma, t) \ddot{q}_0^{\lambda_1}(t) \right] - \\
&\quad \underline{\underline{K_{\kappa_1 \lambda_1} \dot{e}^{\lambda_1} - C_{\kappa_1 \lambda_1} e^{\lambda_1}}}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\bar{R}_{\mu_1} &= \bar{R}_{\mu_1}(\dot{q}^c, q^c, t) \\
&= g_{\mu_1 \nu_1}(q^\sigma, t) \ddot{q}_0^{\nu_1}(t) + \underline{\Gamma_{\mu_1 \lambda_1 \omega}(q^\sigma, t) \dot{q}^\omega \dot{q}_0^{\lambda_1}(t)} + \Gamma_{\mu_1 \lambda_2 \omega}(q^\sigma, t) \dot{q}^\omega \dot{q}^{\lambda_2} + \\
&\quad + \underline{\Gamma_{\mu_1 \nu_1 \varrho}(q^\sigma, t) \dot{q}^\varrho \dot{q}_0^{\nu_1}(t)} + \Gamma_{\mu_1 \nu_2 \varrho}(q^\sigma, t) \dot{q}^\varrho \dot{q}^{\nu_2} + 2\Gamma_{\mu_1 \lambda 0}(q^\sigma, t) \dot{q}^\lambda + \\
&\quad + \underline{\Gamma_{\mu_1 \nu_1 0}(q^\sigma, t) \left( \dot{q}_0^{\nu_1}(t) + \dot{q}^{\nu_1} \right)} + 2\Gamma_{\mu_1 \nu_2 0}(q^\sigma, t) \dot{q}^{\nu_2} + \Gamma_{\mu_1 00}(q^c, t) - \\
&\quad - \check{Q}_{\mu_1}(\dot{q}^c, q^c, t) + \tag{6.11b} \\
&\quad + g_{\mu_1 \nu_2}(q^\sigma, t) g^{\nu_2 \mu_2}(q^\sigma, t) \left[ \check{Q}_{\mu_2}(\dot{q}^c, q^c, t) - 2\Gamma_{\mu_2 \lambda \omega}(q^\sigma, t) \dot{q}^\lambda \dot{q}^\omega - \right. \\
&\quad \quad \left. - 2\Gamma_{\mu_2 b 0}(q^\sigma, t) \dot{q}^b - \Gamma_{\mu_2 00}(q^c, t) - g_{\mu_2 \nu_1}(q^\sigma, t) \ddot{q}_0^{\nu_1}(t) \right] - \\
&\quad \underline{\underline{K_{\mu_1 \nu_1} \dot{e}^{\nu_1} - C_{\mu_1 \nu_1} e^{\nu_1}}}.
\end{aligned}$$

Beide Teilregler bestehen aus einer nichtlinearen „feed forward“-Kompensation (das sind alle nicht dreifach unterstrichenen Terme) und einer linearen PD-Rückkopplung (alle dreifach unterstrichenen Terme). Die einfach und doppelt unterstrichenen Terme verdeutlichen die durch (6.10) erfolgten Modifikationen zur Berechnung der Steuerkräfte gegenüber den nach (6.6) ermittelten Reaktionskräften.

Die Vorwärtskompensation in (6.11) basiert auf der inversen Dynamik des Gesamt-EMS als einheitliches System und *beinhaltet deshalb alle elektromechanischen Wechselwirkungen*. Durch diese Vorwärtssteuerung bewegt sich das System auf oder in der Nähe der Sollmannigfaltigkeit. Die lineare Rückführung in (6.11) ist durch die beiden Gain-Matrizen  $K_{a_1 b_1}$  für den Geschwindigkeitsfehler und  $C_{a_1 b_1}$  für die Lageabweichung charakterisiert. Beide Matrizen seien direkte Summen der entsprechenden Rückkopplungen der beiden Teilregler, d.h., es gelte  $(K_{a_1 b_1}) = (K_{\kappa_1 \lambda_1}) \oplus (K_{\mu_1 \nu_1})$  und  $(C_{a_1 b_1}) = (C_{\kappa_1 \lambda_1}) \oplus (C_{\mu_1 \nu_1})$ . Bei

geeigneter Wahl der Verstärkungsfaktoren (d.h. der Matrixelemente) kann die Abweichung des repräsentierenden Punktes  $q^a$  von der  $\mathbb{R}^{n_2+m_2}$ -Untermannigfaltigkeit reduziert werden.

Aus (6.11) geht hervor, dass beide Teilregler die Kenntnis des kompletten Zustandes des EMS (d.h.  $(q^a) = (q^{a_1}, q^{a_2})$  und  $(\dot{q}^a) = (\dot{q}^{a_1}, \dot{q}^{a_2})$ ) erfordern. Sie sind damit bezüglich der Istwerte nicht entkoppelbar. Darüber hinaus ist es notwendig, die Sollzeitverläufe mit den jeweils ersten beiden Zeitableitungen (d.h.  $q_0^{a_1}(t)$ ,  $\dot{q}_0^{a_1}(t)$  und  $\ddot{q}_0^{a_1}(t)$ ) einzubeziehen. Dabei fällt auf, dass der mechanische Teilregler nicht nur die mechanischen Sollwerte sondern zumindest – falls  $\Gamma_{\kappa_1\nu_1\omega}$  nicht identisch verschwindet – auch die elektrischen Sollströme  $\dot{q}_0^{\nu_1}(t)$  benötigt (doppelt unterstrichener Term in (6.11a)). Umgekehrt müssen beim elektrischen Teilregler nicht nur die elektrischen Sollwerte sondern zumindest – falls  $\Gamma_{\mu_1\lambda_1\omega}$  nicht identisch verschwindet – auch die mechanischen Sollgeschwindigkeiten  $\dot{q}_0^{\lambda_1}(t)$  einbezogen werden (doppelt unterstrichener Term in (6.11b)). Wenn also die generalisierte Induktivität einer zu steuernden elektrischen Koordinate (Mascheninduktivität) eine Funktion einer ebenfalls zu steuernden mechanischen Koordinate ist (d.h.  $\Gamma_{\kappa_1\nu_1\omega} = -\partial_{\kappa_1} l_{\nu_1\omega} \neq 0$  bzw. gleichbedeutend  $\Gamma_{\mu_1\lambda_1\omega} = \partial_{\lambda_1} l_{\mu_1\omega} \neq 0$ ), so sind beide Teilregler auch bezüglich der Sollwerte miteinander verkoppelt. Das bedeutet, dass die elektromechanischen Wechselwirkungen des EMS sich in einer „Wechselwirkung der Sollwerte“ widerspiegeln. In jedem Fall ist eine domänenspezifische Regelung des kompletten EMS nicht erfolgreich. In dieser Erkenntnis wird wieder der Vorteil der einheitlichen mathematischen EMS-Modellierung deutlich. Ohne ein solches Modell wäre die hier vorgestellte Regelstrategie undenkbar.

Ein Anwendungsbeispiel zu dem hier vorgestellten erweiterten PD-Regler findet sich in Abschnitt 7.2.

### 6.3.4 Lyapunov-Funktion

Der Nachweis der globalen Stabilität des hier vorgeschlagenen erweiterten PD-Reglers ist durch explizite Konstruktion einer Lyapunov-Funktion möglich (siehe z.B. [80, 129, 130, 160]). Eine solche soll in diesem Abschnitt angegeben werden. Dazu wird die Fehlerdynamik des geregelten Systems ermittelt. Zunächst werden die Ersetzungen

$$\check{g}_{\kappa_1\lambda_1} := g_{\kappa_1\lambda_1} - g_{\kappa_1\lambda_2} g^{\lambda_2\kappa_2} g_{\kappa_2\lambda_1}, \quad (6.12a)$$

$$\check{g}_{\mu_1\nu_1} := g_{\mu_1\nu_1} - g_{\mu_1\nu_2} g^{\nu_2\mu_2} g_{\mu_2\nu_1} \quad (6.12b)$$

eingeführt. Beide Matrizen sind symmetrisch und positiv definit (siehe Anhang D.1.1). Ersetzen der Reaktionen  $R_{a_1}$  in den Bewegungsgleichungen (6.4) durch die Steuerkräfte  $\bar{R}_{a_1}$  nach (6.11) liefert unter Beachtung von (6.5) sowie (6.7), (6.8) und den daraus abgeleiteten Beschleunigungsfehlern  $\check{e}^{a_1} := \check{q}^{a_1} - \check{q}_0^{a_1}(t)$  schließlich

$$\check{g}_{\kappa_1\lambda_1} \check{e}^{\lambda_1} + (\Gamma_{\kappa_1\lambda_1\varrho} \dot{q}^\varrho + \Gamma_{\kappa_1\lambda_1 0} + K_{\kappa_1\lambda_1}) \dot{e}^{\lambda_1} + \Gamma_{\kappa_1\nu_1\omega} \dot{q}^\omega \dot{e}^{\nu_1} + C_{\kappa_1\lambda_1} e^{\lambda_1} = 0, \quad (6.13a)$$

$$\check{g}_{\mu_1\nu_1} \check{e}^{\nu_1} + (\Gamma_{\mu_1\nu_1\varrho} \dot{q}^\varrho + \Gamma_{\mu_1\nu_1 0} + K_{\mu_1\nu_1}) \dot{e}^{\nu_1} + \Gamma_{\mu_1\lambda_1\omega} \dot{q}^\omega \dot{e}^{\lambda_1} + C_{\mu_1\nu_1} e^{\nu_1} = 0. \quad (6.13b)$$

Die Gleichungen (6.13) legen das dynamische Verhalten der Regelabweichungen  $(e^{a_1}) = (e^{\kappa_1}, e^{\mu_1})$  fest. Sie beschreiben somit die Fehlertrajektorie des Systems (6.4) bei Steuerung mit den Kräften (6.11). Die Matrix  $\check{g}_{a_1 b_1}$  repräsentiert eine Metrik der durch die dynamische Steuerung erreichbaren Untermannigfaltigkeit des EMS-Konfigurationenraumes.

**Definition 6.1** Sei  $\dot{y}^a = f^a(y, t)$  ein Differenzialgleichungssystem (o.B.d.A. mit  $f^a(0, t) = 0$ ), für das eine nichttriviale Lösung  $y(t) = y^a(t)$  existiert. Diese Lösung heißt stabil (im Sinne von Lyapunov) an der Stelle  $t_0$ , wenn für alle  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta(t_0, \varepsilon) > 0$  existiert, so dass gilt

$$\|y(t_0)\| < \delta \implies \|y(t)\| < \varepsilon \quad \forall t > t_0.$$

Die Lösung heißt gleichmäßig stabil, wenn  $\delta = \delta(\varepsilon)$  unabhängig von  $t_0$  ist. Die Lösung heißt asymptotisch stabil, wenn ein  $\delta(t_0) > 0$  existiert, so dass gilt

$$\|y(t_0)\| < \delta(t_0) \implies \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0.$$

**Definition 6.2** Sei  $\dot{y}^a = f^a(y, t)$  ein Differenzialgleichungssystem (o.B.d.A. mit  $f^a(0, t) = 0$ ), für das eine nichttriviale Lösung  $y(t) = y^a(t)$  existiert. Eine skalare stetig differenzierbare Funktion  $V(y, t)$  heißt Lyapunov-Funktion, wenn sie entlang der Trajektorie folgende Eigenschaften erfüllt:

- $V(0, t) = 0$ ,
- $V(y, t) > 0 \quad \forall y \neq 0$ ,
- $\dot{V}(y, t) \leq 0 \quad \forall y \neq 0$ .

Eine Lyapunov-Funktion ist – mit Blick auf die Leistungsbilanz  $H \geq 0$ ,  $\dot{H} \leq 0$  ( $H$  – Hamilton-Funktion) – eine verallgemeinerte Energiefunktion mit gewissen Eigenschaften. Sie kann zur Entscheidung bezüglich Stabilität eines dynamischen Systems herangezogen werden. Es gilt folgender Satz (direkte Methode von Lyapunov, siehe auch [53, 99, 177, 242]):

**Satz 6.3** Wenn zu einem gegebenen dynamischen System  $\dot{y}^a = f^a(y, t)$  eine Lyapunov-Funktion gemäß Definition 6.2 konstruiert werden kann, so ist das System stabil (im Sinne von Lyapunov, siehe Definition 6.1) mit der Ruhelage  $y_R = 0$ . Falls zusätzlich  $\dot{V}(y, t) < 0$  für alle  $y \neq 0$  gilt, so ist das System asymptotisch stabil.

Ein Beweis dieses Satzes ist z.B. in [193] gegeben. Übertragen auf das Differenzialgleichungssystem (6.13) bedeutet der Satz 6.3, dass ein Stabilitätsnachweis durch Konstruktion einer Fehlerzustandsfunktion  $V(\dot{e}, e, t)$  als Lyapunov-Funktion erfolgen kann. Die gesuchte Funktion ist die Summe der Hamilton-Funktionen beider Gleichungen in (6.13) ergänzt um zwei so genannte Cross-Terme:

$$\begin{aligned} V &= V(\dot{e}^{c_1}, e^{c_1}, t) \\ &= \frac{1}{2} \check{g}_{\kappa_1 \lambda_1} \dot{e}^{\kappa_1} \dot{e}^{\lambda_1} + \frac{1}{2} C_{\kappa_1 \lambda_1} e^{\kappa_1} e^{\lambda_1} + \frac{1}{2} \check{g}_{\mu_1 \nu_1} \dot{e}^{\mu_1} \dot{e}^{\nu_1} + \frac{1}{2} C_{\mu_1 \nu_1} e^{\mu_1} e^{\nu_1} + \\ &\quad + \varepsilon_m \check{g}_{\kappa_1 \lambda_1} e^{\kappa_1} \dot{e}^{\lambda_1} + \varepsilon_e \check{g}_{\mu_1 \nu_1} e^{\mu_1} \dot{e}^{\nu_1}. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Die Cross-Terme sind durch kleine positive Ergänzungsfaktoren  $\varepsilon_m$  und  $\varepsilon_e$  charakterisiert. Offensichtlich bleibt die Fehlerzustandsfunktion stets positiv, solange nicht alle  $\dot{e}^{a_1}$  und  $e^{a_1}$  gleichzeitig verschwinden und die Elemente der Gain-Matrizen  $C_{\kappa_1 \lambda_1}$ ,  $C_{\mu_1 \nu_1}$  genügend

groß sind. Deshalb sind die erste und zweite Eigenschaft aus Definition 6.2 erfüllt. Zur Überprüfung der dritten dort genannten Eigenschaft muss die totale Zeitableitung von (6.14) *entlang der Fehlertrajektorie* gebildet werden. Die ausführliche Herleitung von  $\dot{V}$  unter Verwendung von (6.13) ist in Anhang D.2 enthalten. Mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} G_{\kappa_1\lambda_1} &= g_{\kappa_1\lambda_2} g^{\lambda_2\kappa_2} g_{\kappa_2\lambda_1}, \\ G_{\mu_1\nu_1} &= g_{\mu_1\nu_2} g^{\nu_2\mu_2} g_{\mu_2\nu_1} \end{aligned} \quad (6.15)$$

ergibt sich unter Ausnutzung einiger Schiefsymmetrie-Eigenschaften schließlich

$$\begin{aligned} \dot{V} &= - \left( K_{\kappa_1\lambda_1} + \frac{1}{2} \dot{G}_{\kappa_1\lambda_1} - \varepsilon_m \check{g}_{\kappa_1\lambda_1} \right) \dot{e}^{\kappa_1} \dot{e}^{\lambda_1} - \left( K_{\mu_1\nu_1} + \frac{1}{2} \dot{G}_{\mu_1\nu_1} - \varepsilon_e \check{g}_{\mu_1\nu_1} \right) \dot{e}^{\mu_1} \dot{e}^{\nu_1} - \\ &\quad - \varepsilon_m C_{\kappa_1\lambda_1} e^{\kappa_1} e^{\lambda_1} - \varepsilon_e C_{\mu_1\nu_1} e^{\mu_1} e^{\nu_1} + \\ &\quad + \varepsilon_m \left[ \left( \check{g}_{\kappa_1\lambda_1} - \Gamma_{\kappa_1\lambda_1\varrho} \dot{q}^\varrho - \Gamma_{\kappa_1\lambda_1 0} - K_{\kappa_1\lambda_1} \right) e^{\kappa_1} \dot{e}^{\lambda_1} - \Gamma_{\kappa_1\nu_1\omega} \dot{q}^\omega e^{\kappa_1} \dot{e}^{\nu_1} \right] + \\ &\quad + \varepsilon_e \left[ \left( \check{g}_{\mu_1\nu_1} - \Gamma_{\mu_1\nu_1\varrho} \dot{q}^\varrho - \Gamma_{\mu_1\nu_1 0} - K_{\mu_1\nu_1} \right) e^{\mu_1} \dot{e}^{\nu_1} - \Gamma_{\mu_1\lambda_1\omega} \dot{q}^\omega e^{\mu_1} \dot{e}^{\lambda_1} \right]. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Die Koeffizientenmatrizen bei  $\dot{e}^{\kappa_1} \dot{e}^{\lambda_1}$  und  $\dot{e}^{\mu_1} \dot{e}^{\nu_1}$  sind symmetrisch. Sie sind gleichzeitig negativ definit, wenn die Elemente der Gain-Matrizen  $K_{\kappa_1\lambda_1}$  und  $K_{\mu_1\nu_1}$  genügend groß gewählt werden. Die Darstellung (6.16) ist eine quadratische Form in den  $\dot{e}^{\alpha_1}$  und  $e^{\alpha_1}$ . Wie in Anhang D.1.2 dargelegt, lässt sich die negative Semidefinitheit von (6.16) für genügend große Elemente der Gain-Matrizen  $C_{\kappa_1\lambda_1}$  und  $C_{\mu_1\nu_1}$  mittels quadratischer Ergänzung nachweisen. Damit wird also die Zeitableitung der Fehlerzustandsfunktion für geeignet gewählte Gain-Matrizen (und Ergänzungsfaktoren) stets nicht positiv. Deshalb ist für die Fehlerzustandsfunktion nach (6.14) auch die dritte Eigenschaft aus Definition 6.2 erfüllt. Sie ist damit eine Lyapunov-Funktion für die Fehlerdynamik (6.13) und die globale Stabilität des Regelgesetzes (6.11) ist für geeignete Gain-Matrizen nachgewiesen.

### 6.3.5 Dynamische Steuerung bei strukturellen Singularitäten

Wie in Kapitel 4.1 bereits ausführlich dargestellt, können z.B. infolge der möglichen Abwesenheit von Bauelementen *strukturelle Singularitäten* in der Induktor- und/oder der Resistormatrix auftreten. Deshalb soll in diesem Abschnitt ein erweiterter PD-Regler unter Beachtung der entsprechend notwendigen Klasseneinteilung der Fundamentalkreise gemäß (4.5) angegeben werden. Zur Unterscheidung der dort eingeführten Indexmengen werden wieder die schon bekannten Subindizes verwendet, d.h., es gilt  $\mu_L \in H_L$ ,  $\mu_R \in H_R$ ,  $\mu_C \in H_C$  usw. Gelegentlich wird auch eine Darstellung verwendet, die auf eine Vereinigung zweier Indexmengen verweist (z.B.  $\mu_{LR} \in H_L \cup H_R$  usw.). Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird im Folgenden zur Unterscheidung der dynamisch zu steuernden und der unabhängigen generalisierten Koordinaten der bisher verwendete untere Subindex ohne weitere Konsequenzen durch einen oberen Subindex ersetzt, d.h., es gilt jetzt  $\kappa^1 \in J_1$  und  $\mu^1 \in H_1^*$  bzw.  $\kappa^2 \in J_2$  und  $\mu^2 \in H_2^*$ .

Ausgangspunkt für die Herleitung einer Lyapunov-stabilen Regelstrategie ist wiederum das mathematische Modell  $\{\Lambda, D, Q_a^{(S)}\}$  eines EMS. Für die „sonstigen“ ver-

allgemeinerten Kräfte  $Q_a^{(S)}$  gelten jetzt gewisse Einschränkungen. Sie dürfen nur vom Zustand des EMS unter Beachtung der Indextmengen  $H_L$ ,  $H_R$  und  $H_C$  abhängig sein ( $Q_a^{(S)} = Q_a^{(S)}(\dot{q}^\kappa, q^\kappa, \dot{q}^{\mu L}, q^{\mu L}, q^{\mu R}, t)$ ). Weiterhin werde verkürzend  $b_L \in J \cup H_L^*$  sowie  $b_{LR} \in J \cup H_L^* \cup H_R^*$  verwendet. Dann wird aus den Bewegungsgleichungen (6.2) unter Beachtung von  $g_{\mu RC\nu} \equiv 0$ ,  $\Gamma_{\kappa\nu RC\omega} \equiv 0$ ,  $\Gamma_{\kappa\nu RC0} \equiv 0$ ,  $\Gamma_{\mu RC\lambda\omega} \equiv 0$ ,  $\Gamma_{\mu\lambda\omega RC} \equiv 0$ ,  $\Gamma_{\mu\nu C0} \equiv 0$ ,  $\Gamma_{\mu RC\lambda 0} \equiv 0$ ,  $\Gamma_{\mu C\nu 0} \equiv 0$  zunächst rein formal

$$\begin{aligned} g_{\kappa\lambda}\ddot{q}^\lambda + \Gamma_{\kappa\lambda\rho}\dot{q}^\lambda\dot{q}^\rho + \Gamma_{\kappa\nu L\omega L}\dot{q}^{\nu L}\dot{q}^{\omega L} + 2\Gamma_{\kappa b_L 0}\dot{q}^{b_L} + \Gamma_{\kappa 00} &= \check{Q}_\kappa, \\ g_{\mu L\nu L}\ddot{q}^{\nu L} + 2\Gamma_{\mu L\lambda\omega L}\dot{q}^\lambda\dot{q}^{\omega L} + 2\Gamma_{\mu L b_{LR} 0}\dot{q}^{b_{LR}} + \Gamma_{\mu L 00} &= \check{Q}_{\mu L}, \\ 2\Gamma_{\mu R\nu LR 0}\dot{q}^{\nu LR} + \Gamma_{\mu R 00} &= \check{Q}_{\mu R}, \\ \Gamma_{\mu C 00} &= \check{Q}_{\mu C}. \end{aligned}$$

Sei  $\hat{Q}_{\mu R} := \check{Q}_{\mu R} + s_{\mu R\nu}\dot{q}^\nu = Q_{\mu R}^{(S)} - s_{\mu R 0}$  (vgl. Definition von  $\check{Q}_a$  bei (6.1)). Dann folgt daraus wegen  $s_{\mu R\nu C} \equiv 0$  und  $\check{Q}_{\mu C} = Q_{\mu C}^{(S)}$

$$g_{\kappa\lambda}\ddot{q}^\lambda + \Gamma_{\kappa\lambda\rho}\dot{q}^\lambda\dot{q}^\rho + \Gamma_{\kappa\nu L\omega L}\dot{q}^{\nu L}\dot{q}^{\omega L} + 2\Gamma_{\kappa b_L 0}\dot{q}^{b_L} + \Gamma_{\kappa 00} = \check{Q}_\kappa, \quad (6.17a)$$

$$g_{\mu L\nu L}\ddot{q}^{\nu L} + 2\Gamma_{\mu L\lambda\omega L}\dot{q}^\lambda\dot{q}^{\omega L} + 2\Gamma_{\mu L b_{LR} 0}\dot{q}^{b_{LR}} + \Gamma_{\mu L 00} = \check{Q}_{\mu L}, \quad (6.17b)$$

$$s_{\mu R\nu LR}\dot{q}^{\nu LR} + 2\Gamma_{\mu R\nu LR 0}\dot{q}^{\nu LR} + \Gamma_{\mu R 00} = \hat{Q}_{\mu R}, \quad (6.17c)$$

$$\Gamma_{\mu C 00} = Q_{\mu C}^{(S)}. \quad (6.17d)$$

Gemäß (4.3) gilt in den  $H_R$ -Fundamentalkreisen wegen der vorausgesetzten Nichtexistenz von Induktoren  $\Gamma_{\mu R\nu LR 0} = \frac{1}{2}w_{\mu R\nu LR}$ . Deshalb kann in (6.17c) wegen (3.16b)  $s_{\mu R\nu LR} + 2\Gamma_{\mu R\nu LR 0} = r_{\mu R\nu LR}$  gesetzt werden. In den  $H_C$ -Maschen gilt gemäß (4.3)  $\Gamma_{\mu C 00} = c_{\mu C\nu}q^\nu + \zeta_{\mu C 0} + v_{\mu C 0}$ . Mit  $\bar{Q}_{\mu C} := Q_{\mu C}^{(S)} - \zeta_{\mu C 0} - v_{\mu C 0}$  stellt (6.17d) deshalb *Zwangsbedingungen für die Ladungen* dar:

$$c_{\mu C\nu}q^\nu = \bar{Q}_{\mu C}.$$

Die Zerlegung gemäß (6.3) in dynamisch zu steuernde und unabhängige generalisierte Koordinaten – hier allerdings mit oberen Subindizes – liefert dann

$$g_{\kappa^1\lambda}\ddot{q}^\lambda + \Gamma_{\kappa^1\lambda\rho}\dot{q}^\lambda\dot{q}^\rho + \Gamma_{\kappa^1\nu L\omega L}\dot{q}^{\nu L}\dot{q}^{\omega L} + 2\Gamma_{\kappa^1 b_L 0}\dot{q}^{b_L} + \Gamma_{\kappa^1 00} = \check{Q}_{\kappa^1} + R_{\kappa^1}, \quad (6.18a)$$

$$g_{\kappa^2\lambda}\ddot{q}^\lambda + \Gamma_{\kappa^2\lambda\rho}\dot{q}^\lambda\dot{q}^\rho + \Gamma_{\kappa^2\nu L\omega L}\dot{q}^{\nu L}\dot{q}^{\omega L} + 2\Gamma_{\kappa^2 b_L 0}\dot{q}^{b_L} + \Gamma_{\kappa^2 00} = \check{Q}_{\kappa^2}, \quad (6.18b)$$

$$g_{\mu_L^1\nu L}\ddot{q}^{\nu L} + 2\Gamma_{\mu_L^1\lambda\omega L}\dot{q}^\lambda\dot{q}^{\omega L} + 2\Gamma_{\mu_L^1 b_{LR} 0}\dot{q}^{b_{LR}} + \Gamma_{\mu_L^1 00} = \check{Q}_{\mu_L^1} + R_{\mu_L^1}, \quad (6.18c)$$

$$g_{\mu_L^2\nu L}\ddot{q}^{\nu L} + 2\Gamma_{\mu_L^2\lambda\omega L}\dot{q}^\lambda\dot{q}^{\omega L} + 2\Gamma_{\mu_L^2 b_{LR} 0}\dot{q}^{b_{LR}} + \Gamma_{\mu_L^2 00} = \check{Q}_{\mu_L^2}, \quad (6.18d)$$

$$r_{\mu_R^1\nu LR}\dot{q}^{\nu LR} + \Gamma_{\mu_R^1 00} = \hat{Q}_{\mu_R^1} + R_{\mu_R^1}, \quad (6.18e)$$

$$r_{\mu_R^2\nu LR}\dot{q}^{\nu LR} + \Gamma_{\mu_R^2 00} = \hat{Q}_{\mu_R^2}, \quad (6.18f)$$

$$c_{\mu_C^1\nu}q^\nu = \bar{Q}_{\mu_C^1} + R_{\mu_C^1}, \quad (6.18g)$$

$$c_{\mu_C^2\nu}q^\nu = \bar{Q}_{\mu_C^2}. \quad (6.18h)$$

Bei einer kinematischen Steuerung gemäß (6.3) gilt  $g_{\kappa^2\lambda}\ddot{q}^\lambda = g_{\kappa^2\lambda^1}\ddot{q}_0^{\lambda^1}(t) + g_{\kappa^2\lambda^2}\ddot{q}^{\lambda^2}$  und  $g_{\mu_L^2\nu L}\ddot{q}^{\nu L} = g_{\mu_L^2\nu_L^1}\ddot{q}_0^{\nu_L^1}(t) + g_{\mu_L^2\nu_L^2}\ddot{q}^{\nu_L^2}$  sowie  $r_{\mu_R^2\nu R}\dot{q}^{\nu R} = r_{\mu_R^2\nu_R^1}\dot{q}_0^{\nu_R^1}(t) + r_{\mu_R^2\nu_R^2}\dot{q}^{\nu_R^2}$  und schließlich  $c_{\mu_C^2\nu C}q^{\nu C} = c_{\mu_C^2\nu_C^1}q_0^{\nu_C^1}(t) + c_{\mu_C^2\nu_C^2}q^{\nu_C^2}$ . Aus (6.18b), (6.18d), (6.18f) und (6.18h) folgen dann



die Voronetz-Gleichungen des EMS unter Berücksichtigung von strukturellen Singularitäten

$$\begin{aligned}
g_{\kappa^2\lambda^2}\ddot{q}^{\lambda^2} + \Gamma_{\kappa^2\lambda^0}\dot{q}^\lambda\dot{q}^\rho + \Gamma_{\kappa^2\nu_L\omega_L}\dot{q}^{\nu_L}\dot{q}^{\omega_L} + 2\Gamma_{\kappa^2b_L0}\dot{q}^{b_L} + \Gamma_{\kappa^200} &= \check{Q}_{\kappa^2} - g_{\kappa^2\lambda^1}\ddot{q}_0^{\lambda^1}(t), \\
g_{\mu_L^2\nu_L^2}\ddot{q}^{\nu_L^2} + 2\Gamma_{\mu_L^2\lambda\omega_L}\dot{q}^\lambda\dot{q}^{\omega_L} + 2\Gamma_{\mu_L^2b_{LR}0}\dot{q}^{b_{LR}} + \Gamma_{\mu_L^200} &= \check{Q}_{\mu_L^2} - g_{\mu_L^2\nu_L^1}\ddot{q}_0^{\nu_L^1}(t), \\
r_{\mu_R^2\nu_R^2}\dot{q}^{\nu_R^2} + r_{\mu_R^2\nu_L}\dot{q}^{\nu_L} + \Gamma_{\mu_R^200} &= \hat{Q}_{\mu_R^2} - r_{\mu_R^2\nu_R^1}\dot{q}_0^{\nu_R^1}(t), \\
c_{\mu_C^2\nu_C^2}q^{\nu_C^2} + c_{\mu_C^2\nu_{LR}}q^{\nu_{LR}} &= \bar{Q}_{\mu_C^2} - c_{\mu_C^2\nu_C^1}q_0^{\nu_C^1}(t)
\end{aligned}$$

(mit  $(q^\kappa) = (q_0^{\kappa^1}(t), q^{\kappa^2})$  und  $(q^\mu) = (q_0^{\mu^1}(t), q^{\mu^2})$ ). Die Koeffizientenmatrizen bei den  $\ddot{q}^{\lambda^2}$ ,  $\ddot{q}^{\nu_L^2}$  und  $q^{\nu_C^2}$  sind jeweils regulär und positiv definit (vgl. dazu die Bemerkungen in Abschnitt 2.3.3.6 sowie Anhang D.1.1). Gleiches werde für die Koeffizientenmatrix  $r_{\mu_R^2\nu_R^2}$  bei  $\dot{q}^{\nu_R^2}$  vorausgesetzt. Mit den entsprechenden Inversen  $g^{\lambda^2\kappa^2}$ ,  $g^{\nu_L^2\mu_L^2}$ ,  $r^{\nu_R^2\mu_R^2}$  und  $c^{\nu_C^2\mu_C^2}$  sowie mit  $g_{a^1b}\ddot{q}^b = g_{a^1b^1}\ddot{q}_0^{b^1}(t) + g_{a^1b^2}\ddot{q}^{b^2}$ ,  $r_{\mu_R^1\nu_R}\dot{q}^{\nu_R} = r_{\mu_R^1\nu_R^1}\dot{q}_0^{\nu_R^1}(t) + r_{\mu_R^1\nu_R^2}\dot{q}^{\nu_R^2}$  und  $c_{\mu_C^1\nu_C}q^{\nu_C} = c_{\mu_C^1\nu_C^1}q_0^{\nu_C^1}(t) + c_{\mu_C^1\nu_C^2}q^{\nu_C^2}$  lassen sich die generalisierten Reaktionen der kinematischen Steuerung ermitteln zu

$$\begin{aligned}
R_{\kappa^1} &= g_{\kappa^1\lambda^1}\ddot{q}_0^{\lambda^1}(t) + \Gamma_{\kappa^1\lambda^0}\dot{q}^\lambda\dot{q}^\rho + \Gamma_{\kappa^1\nu_L\omega_L}\dot{q}^{\nu_L}\dot{q}^{\omega_L} + 2\Gamma_{\kappa^1b_L0}\dot{q}^{b_L} + \Gamma_{\kappa^100} - \check{Q}_{\kappa^1} + \\
&\quad + g_{\kappa^1\lambda^2}g^{\lambda^2\kappa^2} \left[ \check{Q}_{\kappa^2} - \Gamma_{\kappa^2\lambda^0}\dot{q}^\lambda\dot{q}^\rho - \Gamma_{\kappa^2\nu_L\omega_L}\dot{q}^{\nu_L}\dot{q}^{\omega_L} - 2\Gamma_{\kappa^2b_L0}\dot{q}^{b_L} - \right. \\
&\quad \left. - \Gamma_{\kappa^200} - g_{\kappa^2\lambda^1}\ddot{q}_0^{\lambda^1}(t) \right], \tag{6.20a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{\mu_L^1} &= g_{\mu_L^1\nu_L^1}\ddot{q}_0^{\nu_L^1}(t) + 2\Gamma_{\mu_L^1\lambda\omega_L}\dot{q}^\lambda\dot{q}^{\omega_L} + 2\Gamma_{\mu_L^1b_{LR}0}\dot{q}^{b_{LR}} + \Gamma_{\mu_L^100} - \check{Q}_{\mu_L^1} + \\
&\quad + g_{\mu_L^1\nu_L^2}g^{\nu_L^2\mu_L^2} \left[ \check{Q}_{\mu_L^2} - 2\Gamma_{\mu_L^2\lambda\omega_L}\dot{q}^\lambda\dot{q}^{\omega_L} - 2\Gamma_{\mu_L^2b_{LR}0}\dot{q}^{b_{LR}} - \right. \\
&\quad \left. - \Gamma_{\mu_L^200} - g_{\mu_L^2\nu_L^1}\ddot{q}_0^{\nu_L^1}(t) \right], \tag{6.20b}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{\mu_R^1} &= r_{\mu_R^1\nu_R^1}\dot{q}_0^{\nu_R^1}(t) + r_{\mu_R^1\nu_L}\dot{q}^{\nu_L} + \Gamma_{\mu_R^100} - \hat{Q}_{\mu_R^1} + \\
&\quad + r_{\mu_R^1\nu_R^2}r^{\nu_R^2\mu_R^2} \left[ \hat{Q}_{\mu_R^2} - r_{\mu_R^2\nu_L}\dot{q}^{\nu_L} - \Gamma_{\mu_R^200} - r_{\mu_R^2\nu_R^1}\dot{q}_0^{\nu_R^1}(t) \right], \tag{6.20c}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{\mu_C^1} &= c_{\mu_C^1\nu_C^1}q_0^{\nu_C^1}(t) + c_{\mu_C^1\nu_{LR}}q^{\nu_{LR}} - \bar{Q}_{\mu_C^1} + \\
&\quad + c_{\mu_C^1\nu_C^2}c^{\nu_C^2\mu_C^2} \left[ \bar{Q}_{\mu_C^2} - c_{\mu_C^2\nu_{LR}}q^{\nu_{LR}} - c_{\mu_C^2\nu_C^1}q_0^{\nu_C^1}(t) \right]. \tag{6.20d}
\end{aligned}$$

Unter Beachtung von (6.7) und (6.8) wird für die Koordinaten  $q^{\kappa^1}$  und  $q^{\mu_L^1}$  in bewährter Weise eine lineare PD-Rückführung nach (6.9) vorgesehen. Für die  $q^{\mu_R^1}$ -Koordinaten ist ein reiner Proportional-Regler gemäß

$$R_{\mu_R^1}^P = -C_{\mu_R^1\nu_R^1}e^{\nu_R^1}$$

ausreichend. Für die  $H_C$ -Fundamentalkreise ist keine Rückführung notwendig, da (6.18g) und (6.18h) Zwangsbedingungen für die Ladungen darstellen. Der erweiterte PD-Regler für das Gesamt-EMS ist wieder eine Kombination von nichtlinearer Vorsteuerung und linearer Rückführung. Aus Gründen der späteren Konstruierbarkeit einer Lyapunov-Funktion werden jetzt folgende Modifikationen verwendet:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\kappa^1 \lambda \varrho} \dot{q}^\lambda \dot{q}^\varrho &\mapsto \Gamma_{\kappa^1 \lambda^1 \varrho} \dot{q}^\varrho \dot{q}_0^{\lambda^1}(t) + \Gamma_{\kappa^1 \lambda^2 \varrho} \dot{q}^\varrho \dot{q}^{\lambda^2}, \\
\Gamma_{\kappa^1 \nu_L \omega_L} \dot{q}^{\nu_L} \dot{q}^{\omega_L} &\mapsto \Gamma_{\kappa^1 \nu_L^1 \omega_L} \dot{q}^{\omega_L} \dot{q}_0^{\nu_L^1}(t) + \Gamma_{\kappa^1 \nu_L^2 \omega_L} \dot{q}^{\omega_L} \dot{q}^{\nu_L^2}, \\
2\Gamma_{\kappa^1 b_L 0} \dot{q}^{b_L} &\mapsto \Gamma_{\kappa^1 \lambda^1 0} \left( \dot{q}_0^{\lambda^1}(t) + \dot{q}^{\lambda^1} \right) + 2\Gamma_{\kappa^1 \lambda^2 0} \dot{q}^{\lambda^2} + 2\Gamma_{\kappa^1 \nu_L 0} \dot{q}^{\nu_L}, \\
2\Gamma_{\mu_L^1 \lambda \omega_L} \dot{q}^\lambda \dot{q}^{\omega_L} &\mapsto \Gamma_{\mu_L^1 \lambda^1 \omega_L} \dot{q}^{\omega_L} \dot{q}_0^{\lambda^1}(t) + \Gamma_{\mu_L^1 \lambda^2 \omega_L} \dot{q}^{\omega_L} \dot{q}^{\lambda^2} + \Gamma_{\mu_L^1 \nu_L^1 \varrho} \dot{q}^\varrho \dot{q}_0^{\nu_L^1}(t) + \Gamma_{\mu_L^1 \nu_L^2 \varrho} \dot{q}^\varrho \dot{q}^{\nu_L^2}, \\
2\Gamma_{\mu_L^1 b_{LR} 0} \dot{q}^{b_{LR}} &\mapsto 2\Gamma_{\mu_L^1 \lambda 0} \dot{q}^\lambda + \Gamma_{\mu_L^1 \nu_L^1 0} \left( \dot{q}_0^{\nu_L^1}(t) + \dot{q}^{\nu_L^1} \right) + 2\Gamma_{\mu_L^1 \nu_L^2 0} \dot{q}^{\nu_L^2} + 2\Gamma_{\mu_L^1 \nu_R 0} \dot{q}^{\nu_R}.
\end{aligned} \tag{6.21}$$

Dann lautet das Regelgesetz

$$\begin{aligned}
\bar{R}_{\kappa^1} &= g_{\kappa^1 \lambda^1} \ddot{q}_0^{\lambda^1}(t) + \underline{\Gamma_{\kappa^1 \lambda^1 \varrho} \dot{q}^\varrho \dot{q}_0^{\lambda^1}(t)} + \Gamma_{\kappa^1 \lambda^2 \varrho} \dot{q}^\varrho \dot{q}^{\lambda^2} + \underline{\underline{\Gamma_{\kappa^1 \nu_L^1 \omega_L} \dot{q}^{\omega_L} \dot{q}_0^{\nu_L^1}(t)}} + \\
&+ \Gamma_{\kappa^1 \nu_L^2 \omega_L} \dot{q}^{\omega_L} \dot{q}^{\nu_L^2} + \underline{\Gamma_{\kappa^1 \lambda^1 0} \left( \dot{q}_0^{\lambda^1}(t) + \dot{q}^{\lambda^1} \right)} + 2\Gamma_{\kappa^1 \lambda^2 0} \dot{q}^{\lambda^2} + 2\Gamma_{\kappa^1 \nu_L 0} \dot{q}^{\nu_L} + \\
&+ \Gamma_{\kappa^1 0 0} - \check{Q}_{\kappa^1} + g_{\kappa^1 \lambda^2} g^{\lambda^2 \kappa^2} \left[ \check{Q}_{\kappa^2} - \Gamma_{\kappa^2 \lambda \varrho} \dot{q}^\lambda \dot{q}^\varrho - \Gamma_{\kappa^2 \nu_L \omega_L} \dot{q}^{\nu_L} \dot{q}^{\omega_L} - \right. \\
&\quad \left. - 2\Gamma_{\kappa^2 b_L 0} \dot{q}^{b_L} - \Gamma_{\kappa^2 0 0} - g_{\kappa^2 \lambda^1} \ddot{q}_0^{\lambda^1}(t) \right] - \\
&\underline{\underline{- K_{\kappa^1 \lambda^1} \dot{e}^{\lambda^1} - C_{\kappa^1 \lambda^1} e^{\lambda^1}}},
\end{aligned} \tag{6.22a}$$

$$\begin{aligned}
\bar{R}_{\mu_L^1} &= g_{\mu_L^1 \nu_L^1} \ddot{q}_0^{\nu_L^1}(t) + \underline{\underline{\Gamma_{\mu_L^1 \lambda^1 \omega_L} \dot{q}^{\omega_L} \dot{q}_0^{\lambda^1}(t)}} + \Gamma_{\mu_L^1 \lambda^2 \omega_L} \dot{q}^{\omega_L} \dot{q}^{\lambda^2} + \underline{\underline{\Gamma_{\mu_L^1 \nu_L^1 \varrho} \dot{q}^\varrho \dot{q}_0^{\nu_L^1}(t)}} + \\
&+ \Gamma_{\mu_L^1 \nu_L^2 \varrho} \dot{q}^\varrho \dot{q}^{\nu_L^2} + 2\Gamma_{\mu_L^1 \lambda 0} \dot{q}^\lambda + \underline{\underline{\Gamma_{\mu_L^1 \nu_L^1 0} \left( \dot{q}_0^{\nu_L^1}(t) + \dot{q}^{\nu_L^1} \right)}} + 2\Gamma_{\mu_L^1 \nu_L^2 0} \dot{q}^{\nu_L^2} + \\
&+ 2\Gamma_{\mu_L^1 \nu_R 0} \dot{q}^{\nu_R} + \Gamma_{\mu_L^1 0 0} - \check{Q}_{\mu_L^1} + \\
&+ g_{\mu_L^1 \nu_L^2} g^{\nu_L^2 \mu_L^2} \left[ \check{Q}_{\mu_L^2} - 2\Gamma_{\mu_L^2 \lambda \omega_L} \dot{q}^\lambda \dot{q}^{\omega_L} - 2\Gamma_{\mu_L^2 b_{LR} 0} \dot{q}^{b_{LR}} - \right. \\
&\quad \left. - \Gamma_{\mu_L^2 0 0} - g_{\mu_L^2 \nu_L^1} \ddot{q}_0^{\nu_L^1}(t) \right] - \\
&\underline{\underline{- K_{\mu_L^1 \nu_L^1} \dot{e}^{\nu_L^1} - C_{\mu_L^1 \nu_L^1} e^{\nu_L^1}}},
\end{aligned} \tag{6.22b}$$

$$\begin{aligned}
\bar{R}_{\mu_R^1} &= r_{\mu_R^1 \nu_R^1} \dot{q}_0^{\nu_R^1}(t) + r_{\mu_R^1 \nu_L} \dot{q}^{\nu_L} + \Gamma_{\mu_R^1 0 0} - \hat{Q}_{\mu_R^1} + \\
&+ r_{\mu_R^1 \nu_R^2} r^{\nu_R^2 \mu_R^2} \left[ \hat{Q}_{\mu_R^2} - r_{\mu_R^2 \nu_L} \dot{q}^{\nu_L} - \Gamma_{\mu_R^2 0 0} - r_{\mu_R^2 \nu_R^1} \dot{q}_0^{\nu_R^1}(t) \right] - \underline{\underline{C_{\mu_R^1 \nu_R^1} e^{\nu_R^1}}},
\end{aligned} \tag{6.22c}$$

$$\begin{aligned}
\bar{R}_{\mu_C^1} &= c_{\mu_C^1 \nu_C^1} \dot{q}_0^{\nu_C^1}(t) + c_{\mu_C^1 \nu_{LR}} \dot{q}^{\nu_{LR}} - \bar{Q}_{\mu_C^1} + \\
&+ c_{\mu_C^1 \nu_C^2} c^{\nu_C^2 \mu_C^2} \left[ \bar{Q}_{\mu_C^2} - c_{\mu_C^2 \nu_{LR}} \dot{q}^{\nu_{LR}} - c_{\mu_C^2 \nu_C^1} \dot{q}_0^{\nu_C^1}(t) \right].
\end{aligned} \tag{6.22d}$$

Alle vier Teilregler beinhalten eine nichtlineare „feed forward“-Kompensation und in Abhängigkeit von der Klassenzugehörigkeit der jeweiligen dynamisch zu steuern den Koordinate eine lineare PD- oder P-Rückführung oder keine Rückkopplung. Die einfach und doppelt unterstrichenen Terme verdeutlichen die durch (6.21) erfolgten Modifikationen zur Berechnung der Steuerkräfte gegenüber den nach (6.20) ermittelten Reaktionskräften. Doppelte Unterstreichungen kennzeichnen wieder domänenübergrei-

fende Einflüsse der Sollwerte. Bei der Ermittlung der Fehlerdynamik aus (6.22) werden folgende Ersetzungen verwendet

$$\check{g}_{\kappa^1 \lambda^1} := g_{\kappa^1 \lambda^1} - g_{\kappa^1 \lambda^2} g^{\lambda^2 \kappa^2} g_{\kappa^2 \lambda^1}, \quad (6.23a)$$

$$\check{g}_{\mu_L^1 \nu_L^1} := g_{\mu_L^1 \nu_L^1} - g_{\mu_L^1 \nu_L^2} g^{\nu_L^2 \mu_L^2} g_{\mu_L^2 \nu_L^1}, \quad (6.23b)$$

$$\check{r}_{\mu_R^1 \nu_R^1} := r_{\mu_R^1 \nu_R^1} - r_{\mu_R^1 \nu_R^2} r^{\nu_R^2 \mu_R^2} r_{\mu_R^2 \nu_R^1}, \quad (6.23c)$$

$$\check{c}_{\mu_C^1 \nu_C^1} := c_{\mu_C^1 \nu_C^1} - c_{\mu_C^1 \nu_C^2} c^{\nu_C^2 \mu_C^2} c_{\mu_C^2 \nu_C^1}. \quad (6.23d)$$

Die Matrizen  $\check{g}_{\kappa^1 \lambda^1}$ ,  $\check{g}_{\mu_L^1 \nu_L^1}$  und  $\check{c}_{\mu_C^1 \nu_C^1}$  sind positiv definit, weil  $g_{\kappa \lambda}$ ,  $g_{\mu \nu}$  und  $c_{\mu \nu}$  symmetrisch und positiv definit sind (siehe Anhang D.1.1). Falls  $r_{\mu \nu}$  symmetrisch ist, ist  $\check{r}_{\mu_R^1 \nu_R^1}$  ebenfalls symmetrisch und positiv definit, falls nicht, so muss für  $\check{r}_{\mu_R^1 \nu_R^1}$  positive Definitheit hier verlangt werden. Ersetzen der Reaktionen  $R_{a^1}$  in den Bewegungsgleichungen (6.18) durch die Steuerkräfte  $\bar{R}_{a^1}$  nach (6.22) liefert mit (6.7), (6.8) und den Beschleunigungsfehlern  $\check{e}^{a^1} := \check{q}^{a^1} - \check{q}_0^{a^1}(t)$  für die Fehlerdynamik

$$\check{g}_{\kappa^1 \lambda^1} \check{e}^{\lambda^1} + (\Gamma_{\kappa^1 \lambda^1 \varrho} \dot{q}^\varrho + \Gamma_{\kappa^1 \lambda^1 0} + K_{\kappa^1 \lambda^1}) \dot{e}^{\lambda^1} + \Gamma_{\kappa^1 \nu_L^1 \omega_L} \dot{q}^{\omega_L} \dot{e}^{\nu_L^1} + C_{\kappa^1 \lambda^1} e^{\lambda^1} = 0, \quad (6.24a)$$

$$\check{g}_{\mu_L^1 \nu_L^1} \ddot{e}^{\nu_L^1} + \left( \Gamma_{\mu_L^1 \nu_L^1 \varrho} \dot{q}^\varrho + \Gamma_{\mu_L^1 \nu_L^1 0} + K_{\mu_L^1 \nu_L^1} \right) \dot{e}^{\nu_L^1} + \Gamma_{\mu_L^1 \lambda^1 \omega_L} \dot{q}^{\omega_L} \dot{e}^{\lambda^1} + C_{\mu_L^1 \nu_L^1} e^{\nu_L^1} = 0, \quad (6.24b)$$

$$\check{r}_{\mu_R^1 \nu_R^1} \dot{e}^{\nu_R^1} + C_{\mu_R^1 \nu_R^1} e^{\nu_R^1} = 0, \quad (6.24c)$$

$$\check{c}_{\mu_C^1 \nu_C^1} e^{\nu_C^1} = 0. \quad (6.24d)$$

Beziehung (6.24d) zeigt, dass für  $H_C$ -Fundamentalkreise keine Rückkopplung notwendig ist. Zum Nachweis der globalen Stabilität des dynamischen Systems (6.24a)–(6.24c) wird wieder eine Fehlerzustandsfunktion konstruiert. Diese kann analog zu (6.14) unter Beachtung der Zustandsgrößen des Gesamt-EMS ( $\dot{q}^\kappa$ ,  $q^\kappa$ ,  $\dot{q}^{\mu_L}$ ,  $q^{\mu_L}$ ,  $q^{\mu_R}$ ) aufgestellt werden:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \check{g}_{\kappa^1 \lambda^1} \dot{e}^{\kappa^1} \dot{e}^{\lambda^1} + \frac{1}{2} C_{\kappa^1 \lambda^1} e^{\kappa^1} e^{\lambda^1} + \frac{1}{2} \check{g}_{\mu_L^1 \nu_L^1} \dot{e}^{\mu_L^1} \dot{e}^{\nu_L^1} + \frac{1}{2} C_{\mu_L^1 \nu_L^1} e^{\mu_L^1} e^{\nu_L^1} + \\ &+ \vartheta \frac{1}{2} \check{r}_{\mu_R^1 \nu_R^1} e^{\mu_R^1} e^{\nu_R^1} + \varepsilon_m \check{g}_{\kappa^1 \lambda^1} e^{\kappa^1} \dot{e}^{\lambda^1} + \varepsilon_e \check{g}_{\mu_L^1 \nu_L^1} e^{\mu_L^1} \dot{e}^{\nu_L^1} \end{aligned} \quad (6.25)$$

( $\vartheta > 0$ ). Offensichtlich bleibt die Fehlerzustandsfunktion infolge der Voraussetzungen ( $\check{g}_{a^1 b^1}$ ,  $\check{r}_{\mu_R^1 \nu_R^1}$ ,  $C_{a^1 b^1}$  positiv definit) positiv, solange nicht alle  $\dot{e}^{a^1}$  und  $e^{a^1}$  gleichzeitig verschwinden und die Elemente der Gain-Matrizen  $C_{\kappa^1 \lambda^1}$ ,  $C_{\mu_L^1 \nu_L^1}$  genügend groß sind. Deshalb sind die erste und zweite Eigenschaft aus Definition 6.2 erfüllt. Zur Untersuchung der dritten dort genannten Eigenschaft wird die totale Zeitableitung von (6.25) entlang der Fehlertrajektorie gebildet (siehe Anhang D.3 für eine ausführliche Darstellung). Mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} G_{\kappa^1 \lambda^1} &= g_{\kappa^1 \lambda^2} g^{\lambda^2 \kappa^2} g_{\kappa^2 \lambda^1}, \\ G_{\mu_L^1 \nu_L^1} &= g_{\mu_L^1 \nu_L^2} g^{\nu_L^2 \mu_L^2} g_{\mu_L^2 \nu_L^1}, \\ G_{\mu_R^1 \nu_R^1} &= r_{\mu_R^1 \nu_R^2} r^{\nu_R^2 \mu_R^2} r_{\mu_R^2 \nu_R^1} \end{aligned} \quad (6.26)$$

ergibt sich aus (6.25) mit (6.24) wiederum unter Ausnutzung einiger Schiefsymmetrieeigenschaften schließlich

$$\begin{aligned}
\dot{V} = & - \left( K_{\kappa^1 \lambda^1} + \frac{1}{2} \dot{G}_{\kappa^1 \lambda^1} - \varepsilon_m \check{g}_{\kappa^1 \lambda^1} \right) \dot{e}^{\kappa^1} \dot{e}^{\lambda^1} - \\
& - \left( K_{\mu_L^1 \nu_L^1} + \frac{1}{2} \dot{G}_{\mu_L^1 \nu_L^1} - \varepsilon_e \check{g}_{\mu_L^1 \nu_L^1} \right) \dot{e}^{\mu_L^1} \dot{e}^{\nu_L^1} - \\
& - \vartheta \left( C_{\mu_R^1 \nu_R^1} - \frac{1}{2} \dot{s}_{\mu_R^1 \nu_R^1} + \frac{1}{2} \dot{G}_{\mu_R^1 \nu_R^1} \right) e^{\mu_R^1} e^{\nu_R^1} - \\
& - \varepsilon_m C_{\kappa^1 \lambda^1} e^{\kappa^1} e^{\lambda^1} - \varepsilon_e C_{\mu_L^1 \nu_L^1} e^{\mu_L^1} e^{\nu_L^1} + \\
& + \varepsilon_m \left[ \left( \dot{g}_{\kappa^1 \lambda^1} - \Gamma_{\kappa^1 \lambda^1 \varrho} \dot{q}^\varrho - \Gamma_{\kappa^1 \lambda^1 0} - K_{\kappa^1 \lambda^1} \right) e^{\kappa^1} \dot{e}^{\lambda^1} - \Gamma_{\kappa^1 \nu_L^1 \omega_L} \dot{q}^{\omega_L} e^{\kappa^1} \dot{e}^{\nu_L^1} \right] + \\
& + \varepsilon_e \left[ \left( \dot{g}_{\mu_L^1 \nu_L^1} - \Gamma_{\mu_L^1 \nu_L^1 \varrho} \dot{q}^\varrho - \Gamma_{\mu_L^1 \nu_L^1 0} - K_{\mu_L^1 \nu_L^1} \right) e^{\mu_L^1} \dot{e}^{\nu_L^1} - \Gamma_{\mu_L^1 \lambda^1 \omega_L} \dot{q}^{\omega_L} e^{\mu_L^1} \dot{e}^{\lambda^1} \right].
\end{aligned} \tag{6.27}$$

Mit der analogen Argumentation wie in Abschnitt 6.3.4 lässt sich für die Fehlerzustandsfunktion nach (6.25) die dritte Eigenschaft einer Lyapunov-Funktion gemäß Definition 6.2 und damit die globale Stabilität des Regelgesetzes (6.22) für geeignete Gain-Matrizen nachweisen.

### 6.3.6 Grenzfälle

Die vorgestellte Lyapunov-stabile Regelstrategie für EMS ist eine Verallgemeinerung des für MKS bekannten erweiterten PD-Reglers ([160]). Sie ist deshalb natürlich auch für die beiden Grenzfälle eines EMS – ein MKS oder ein ES – einsetzbar. Für MKS ergibt sich dann ein erweiterter PD-Regler gemäß (6.11a) bei komplettem Wegfall aller elektrisch erzeugten Kräfte

$$\begin{aligned}
\bar{R}_{\kappa_1} = & g_{\kappa_1 \lambda_1}(q^\sigma, t) \ddot{q}_0^{\lambda_1}(t) + \Gamma_{\kappa_1 \lambda_1 \varrho}(q^\sigma, t) \dot{q}^\varrho \dot{q}_0^{\lambda_1}(t) + \Gamma_{\kappa_1 \lambda_2 \varrho}(q^\sigma, t) \dot{q}^\varrho \dot{q}^{\lambda_2} + \\
& + \Gamma_{\kappa_1 \lambda_1 0}(q^\sigma, t) (\dot{q}_0^{\lambda_1}(t) + \dot{q}^{\lambda_1}) + 2\Gamma_{\kappa_1 \lambda_2 0}(q^\sigma, t) \dot{q}^{\lambda_2} + \Gamma_{\kappa_1 00}^{(me)}(q^\sigma, t) - \\
& - \check{Q}_{\kappa_1}(\dot{q}^\sigma, q^\sigma, t) + \\
& + g_{\kappa_1 \lambda_2}(q^\sigma, t) g^{\lambda_2 \kappa_2}(q^\sigma, t) \left[ \check{Q}_{\kappa_2}(\dot{q}^\sigma, q^\sigma, t) - \Gamma_{\kappa_2 \lambda \varrho}(q^\sigma, t) \dot{q}^\lambda \dot{q}^\varrho - \right. \\
& \quad \left. - 2\Gamma_{\kappa_2 \lambda 0}(q^\sigma, t) \dot{q}^\lambda - \Gamma_{\kappa_2 00}^{(me)}(q^\sigma, t) - g_{\kappa_2 \lambda_1}(q^\sigma, t) \ddot{q}_0^{\lambda_1}(t) \right] - \\
& - K_{\kappa_1 \lambda_1} \dot{e}^{\lambda_1} - C_{\kappa_1 \lambda_1} e^{\lambda_1}.
\end{aligned} \tag{6.28}$$

Für ES mit regulärer Induktormatrix lautet das Regelgesetz gemäß (6.11b) ohne MTS-Abhängigkeiten

$$\begin{aligned}
\bar{R}_{\mu_1} = & g_{\mu_1 \nu_1}(t) \ddot{q}_0^{\nu_1}(t) + \Gamma_{\mu_1 \nu_1 0}(t) (\dot{q}_0^{\nu_1}(t) + \dot{q}^{\nu_1}) + 2\Gamma_{\mu_1 \nu_2 0}(t) \dot{q}^{\nu_2} + \Gamma_{\mu_1 00}^{(el)}(q^\omega, t) - \\
& - \check{Q}_{\mu_1}(\dot{q}^\omega, q^\omega, t) + g_{\mu_1 \nu_2}(t) g^{\nu_2 \mu_2}(t) \left[ \check{Q}_{\mu_2}(\dot{q}^\omega, q^\omega, t) - \right. \\
& \quad \left. - 2\Gamma_{\mu_2 \nu 0}(t) \dot{q}^\nu - \Gamma_{\mu_2 00}^{(el)}(q^\omega, t) - g_{\mu_2 \nu_1}(t) \ddot{q}_0^{\nu_1}(t) \right] - \\
& - K_{\mu_1 \nu_1} \dot{e}^{\nu_1} - C_{\mu_1 \nu_1} e^{\nu_1},
\end{aligned}$$

während ES mit strukturellen Singularitäten gemäß (6.22b)–(6.22d) ebenfalls ohne MTS-Abhängigkeiten dynamisch gesteuert werden können über

$$\begin{aligned}
\bar{R}_{\mu_L^1} &= g_{\mu_L^1 \nu_L^1}(t) \ddot{q}_0^{\nu_L^1}(t) + \Gamma_{\mu_L^1 \nu_L^1 0}(t) \left( \dot{q}_0^{\nu_L^1}(t) + \dot{q}^{\nu_L^1} \right) + 2\Gamma_{\mu_L^1 \nu_L^2 0}(t) \dot{q}^{\nu_L^2} + \\
&\quad + 2\Gamma_{\mu_L^1 \nu_R 0}(t) \dot{q}^{\nu_R} + \Gamma_{\mu_L^1 00}^{(el)}(q^\omega, t) - \check{Q}_{\mu_L^1}(\dot{q}^{\omega_L}, q^{\omega_{LR}}, t) + \\
&\quad + g_{\mu_L^1 \nu_L^2}(t) g^{\nu_L^2 \mu_L^2}(t) \left[ \check{Q}_{\mu_L^2}(\dot{q}^{\omega_L}, q^{\omega_{LR}}, t) - 2\Gamma_{\mu_L^2 \nu_{LR} 0}(t) \dot{q}^{\nu_{LR}} - \right. \\
&\quad \quad \left. - \Gamma_{\mu_L^2 00}^{(el)}(q^\omega, t) - g_{\mu_L^2 \nu_L^1}(t) \dot{q}_0^{\nu_L^1}(t) \right] - \\
&\quad - K_{\mu_L^1 \nu_L^1} \dot{e}^{\nu_L^1} - C_{\mu_L^1 \nu_L^1} e^{\nu_L^1}, \\
\bar{R}_{\mu_R^1} &= r_{\mu_R^1 \nu_R^1} \dot{q}_0^{\nu_R^1}(t) + r_{\mu_R^1 \nu_L}(t) \dot{q}^{\nu_L} + \Gamma_{\mu_R^1 00}^{(el)}(q^\omega, t) - \hat{Q}_{\mu_R^1}(\dot{q}^{\omega_L}, q^{\omega_{LR}}, t) + \\
&\quad + r_{\mu_R^1 \nu_R^2}(t) r^{\nu_R^2 \mu_R^2}(t) \left[ \hat{Q}_{\mu_R^2}(\dot{q}^{\omega_L}, q^{\omega_{LR}}, t) - r_{\mu_R^2 \nu_L}(t) \dot{q}^{\nu_L} - \right. \\
&\quad \quad \left. - \Gamma_{\mu_R^2 00}^{(el)}(q^\omega, t) - r_{\mu_R^2 \nu_R^1}(t) \dot{q}_0^{\nu_R^1}(t) \right] - C_{\mu_R^1 \nu_R^1} e^{\nu_R^1}, \\
\bar{R}_{\mu_C^1} &= c_{\mu_C^1 \nu_C^1}(t) \dot{q}_0^{\nu_C^1}(t) + c_{\mu_C^1 \nu_{LR}}(t) q^{\nu_{LR}} - \bar{Q}_{\mu_C^1}(\dot{q}^{\omega_L}, q^{\omega_{LR}}, t) + \\
&\quad + c_{\mu_C^1 \nu_C^2}(t) c^{\nu_C^2 \mu_C^2}(t) \left[ \bar{Q}_{\mu_C^2}(\dot{q}^{\omega_L}, q^{\omega_{LR}}, t) - c_{\mu_C^2 \nu_{LR}}(t) q^{\nu_{LR}} - c_{\mu_C^2 \nu_C^1}(t) \dot{q}_0^{\nu_C^1}(t) \right].
\end{aligned}$$

### 6.3.7 Sonderfall: Steuerung des MTS mittels ETS

Die Regelgesetze (6.11) bzw. (6.22) haben ein charakteristisches Merkmal. Steuerwunsch und Eingriffsmöglichkeit liegen stets innerhalb einer Domäne, d.h. um z.B. eine mechanische Koordinate dynamisch zu steuern, muss ein regelnder Eingriff auch mittels (zusätzlich eingepprägten) mechanischen Kräften erfolgen. Umgekehrt ist die Steuerung einer elektrischen Koordinate nur durch (zusätzlich eingespeiste) elektrische Spannungen möglich. Die elektromechanischen Wechselwirkungen werden zwar vollständig berücksichtigt, aber es ist mit den dargestellten Reglern nicht möglich, z.B. eine mechanische Koordinate ausschließlich mittels elektrischer Spannungen dynamisch zu steuern. Ein Grund dafür ist aus der Metrik  $g_{ab}$  des EMS nach (3.25) ersichtlich. Sie ist direkte Summe der beiden Teilsystem-Metriken  $g_{\kappa\lambda}$  und  $g_{\mu\nu}$ . Wegen der Nichtexistenz von Koppeltermen ist eine domänenübergreifende Beeinflussung mit Regelgesetzen, wie sie in den Abschnitten 6.3.3 bzw. 6.3.5 vorgestellt wurden, nicht möglich.

In diesem Abschnitt soll deshalb – ergänzend zu den vorhergehenden Ausführungen – in kurzer Form eine Methode dargestellt werden, die es ermöglicht, das mechanische Teilsystem eines EMS unter bestimmten Voraussetzungen ausschließlich mittels elektrisch erzeugten Kräften dynamisch zu steuern. Diese Methode wurde u.a. bereits in [42, 43, 44] vorgestellt. Sie ist in bestimmten Fällen – z.B. für starre (evtl. rotierende) magnetisch gelagerte Körper oder für elektrostatisch angetriebene Mikrospiegel – gut geeignet. (Ihre Anwendung bei Mikrospiegeln wird in Abschnitt 7.3.4 beispielhaft gezeigt.) Es wird von folgenden Annahmen ausgegangen:

- Die Sollvorgaben werden nur für mechanische Koordinaten angegeben, d.h., elektrische Koordinaten sind nicht an der Definition der Sollbewegungen beteiligt.

- Die verallgemeinerte Massenmatrix  $g_{\kappa\lambda}$  des MTS habe Diagonalform. Diese einschränkende Voraussetzung ist notwendig für die hier vorgestellte dreistufige inverse Dynamik.
- Alle für die dynamische Steuerung des MTS eingepprägten Kräfte/Momente werden ausschließlich elektrisch erzeugt. Dazu können sowohl elektrostatische als auch elektrodynamische (magnetostatische) Prinzipien eingesetzt werden.
- Alle elektrisch erzeugten Kräfte in einem bestimmten Gelenk (einer verallgemeinerten Koordinate) werden zu dessen dynamischer Steuerung genutzt.
- Die Zeitkonstanten des MTS sollen gegenüber denen des ETS einen dominierenden Einfluss haben. Das ist bei den meisten mechatronischen Systemen gegeben.

Dann lässt sich eine spezielle Methode der inversen Dynamik bestehend aus drei sequenziellen Stufen realisieren:

1. inverse Dynamik des MTS, d.h. Berechnung der einzuprägenden generalisierten mechanischen Kräfte aus der vorgegebenen Sollbewegung,
2. Ermittlung von Sollverläufen der generalisierten elektrischen Koordinaten aus den generalisierten mechanischen Kräften,
3. inverse Dynamik des ETS, d.h. Berechnung der einzuspeisenden Maschenspannungen aus den Sollverläufen der generalisierten elektrischen Koordinaten.

### 6.3.7.1 Inverse Dynamik des MTS

Die erste der drei Teilaufgaben entspricht der inversen Dynamik eines MKS als dem ersten in Abschnitt 6.3.6 genannten Grenzfall eines EMS. Da die elektrisch erzeugten Kräfte, die auf die zu regelnden Koordinaten wirken, komplett zur dynamischen Steuerung genutzt werden sollen, existieren wegen der vorausgesetzten Diagonalform der MTS-Metrik keine „störenden“ elektrisch erzeugten Kräfte und der ETS-Einfluss auf das MTS kann in diesem Schritt ignoriert werden. Das Regelgesetz (6.28) wird wegen  $g_{\kappa_1\lambda_2} \equiv 0$  entsprechend vereinfacht. Die Zeitverläufe der generalisierten mechanischen Kräfte  $\bar{R}_{\kappa_1}(t)$  werden ermittelt gemäß

$$\begin{aligned} \bar{R}_{\kappa_1} = & g_{\kappa_1\lambda_1}(q^\sigma, t)\ddot{q}_0^{\lambda_1}(t) + \Gamma_{\kappa_1\lambda_1\varrho}(q^\sigma, t)\dot{q}^\varrho\dot{q}_0^{\lambda_1}(t) + \Gamma_{\kappa_1\lambda_2\varrho}(q^\sigma, t)\dot{q}^\varrho\dot{q}^{\lambda_2} + \\ & + \Gamma_{\kappa_1\lambda_1 0}(q^\sigma, t)(\dot{q}_0^{\lambda_1}(t) + \dot{q}^{\lambda_1}) + 2\Gamma_{\kappa_1\lambda_2 0}(q^\sigma, t)\dot{q}^{\lambda_2} + \Gamma_{\kappa_1 0 0}^{(me)}(q^\sigma, t) - \\ & - \check{Q}_{\kappa_1}(\dot{q}^\sigma, q^\sigma, t) - K_{\kappa_1\lambda_1}\dot{e}^{\lambda_1} - C_{\kappa_1\lambda_1}e^{\lambda_1}. \end{aligned} \quad (6.29)$$

Diese Kräfte sind notwendig, damit das MKS sich stabil auf seiner Sollmannigfaltigkeit bewegt.

### 6.3.7.2 Ermittlung der elektrischen Koordinaten

Genau die Kräfte (6.29) sollen laut Voraussetzung ausschließlich mittels ETS erzeugt werden. Deshalb wird im zweiten Schritt zu jedem Zeitpunkt  $t$  ein Zustand des ETS

gesucht, der unter Berücksichtigung der jeweils aktuellen Lage des MTS gerade die (eben ermittelten) erforderlichen Kräfte  $\bar{R}_{\kappa_1}(t)$  realisiert. Es soll somit gelten:

$$Q_{\kappa_1}^{(el)} \stackrel{!}{=} \bar{R}_{\kappa_1}(t).$$

Wegen (4.2) ist dann

$$\frac{1}{2}\partial_{\kappa_1}l_{\mu\nu}\dot{q}^\mu\dot{q}^\nu + \partial_{\kappa_1}\psi_{\mu 0}\dot{q}^\mu - \frac{1}{2}\partial_{\kappa_1}c_{\mu\nu}q^\mu q^\nu - \partial_{\kappa_1}\zeta_{\mu 0}q^\mu = \bar{R}_{\kappa_1}(t) - \frac{1}{2}\partial_{\kappa_1}g_0 \quad (6.30)$$

mit den Unbekannten  $\dot{q}^\mu$  und  $q^\mu$ . In (6.30) sind alle elektrisch erzeugbaren Kräfte enthalten. Sie zerfallen in elektrostatische (Terme mit  $q^\mu$ ) und elektrodynamische Anteile (Terme mit  $\dot{q}^\mu$ ). In Abhängigkeit von den verwendeten Antriebsprinzipien wird eine Klasseneinteilung der Indexmenge  $J_1$  der zu regelnden Koordinaten vorgenommen:

- a) nur elektrostatischer Antrieb: Indexmenge  $J_1^s$ ,
- b) nur elektrodynamischer Antrieb: Indexmenge  $J_1^d$ ,
- c) beide Antriebsprinzipien: Indexmenge  $J_1^b$ .

Die drei Indexmengen sind paarweise disjunkt. Für jede verallgemeinerte Koordinate  $\kappa_1$  gilt im Fall a)

$$-\frac{1}{2}\partial_{\kappa_1}c_{\mu\nu}q^\mu q^\nu - \partial_{\kappa_1}\zeta_{\mu 0}q^\mu = \bar{R}_{\kappa_1}(t) - \frac{1}{2}\partial_{\kappa_1}g_0$$

und im Fall b)

$$\frac{1}{2}\partial_{\kappa_1}l_{\mu\nu}\dot{q}^\mu\dot{q}^\nu + \partial_{\kappa_1}\psi_{\mu 0}\dot{q}^\mu = \bar{R}_{\kappa_1}(t) - \frac{1}{2}\partial_{\kappa_1}g_0,$$

was für jeden Index  $\kappa_1$  in Matrixschreibweise jeweils einer Gleichung der Form

$$y^T A y + b^T y = r \quad (6.31)$$

( $A$  – bekannte symmetrische Matrix,  $b$  – bekannter Vektor,  $r$  – bekannter Skalar,  $y$  – unbekannter Vektor) entspricht. Falls der lineare Term auftritt, wird daraus mittels quadratischer Ergänzung

$$z^T A z - \frac{1}{4}b^T A^{-1}b = r \quad (6.32)$$

mit  $z = y + \frac{1}{2}A^{-1}b$ . Somit lassen sich die zur Steuerung notwendigen Kräfte jeweils als quadratische Funktionen – im Fall a) der Maschenladungen  $q^\mu$  und im Fall b) der Maschenströme  $\dot{q}^\mu$  – darstellen. Bei Bedarf kann (6.32) durch eine Hauptachsentransformation  $z = T\bar{z}$  in eine rein quadratische Form bzgl. des unbekanntenen Vektors  $z$  überführt werden. Dann gilt

$$\bar{z}^T T^T A T \bar{z} = \bar{z} \operatorname{diag}(\bar{A}) \bar{z} = r + \frac{1}{4}b^T A^{-1}b.$$

Mit

$$\bar{z}_\mu = (\tilde{q}^\mu)^2 \quad \text{bzw.} \quad \bar{z}_\mu = \left(\dot{\tilde{q}}^\mu\right)^2 \quad (6.33)$$

ergibt sich dann ein (evtl. unterbestimmtes) lineares System aus Gleichungen für die unbekannten Maschenladungen und -ströme, dessen Lösung wegen (6.33) die Nebenbedingung  $\bar{z} \geq 0$  erfüllen muss. Aus dieser Lösung lassen sich die zur Erzeugung der Steuerkräfte notwendigen generalisierten elektrischen Koordinaten (die Maschenladungen  $q^\mu$ ) bzw. deren zeitliche Ableitungen (die Maschenströme  $\dot{q}^\mu$ ) mittels (6.33) und der Hauptachsentransformationsmatrix  $T$  errechnen. Im Fall c) ( $\kappa_1 \in J_1^b$ ) entfallen in (6.30) keine wesentlichen Terme. Aus Stetigkeitsgründen muss dann der Zusammenhang zwischen generalisierter Koordinate und deren zeitlicher Ableitung einbezogen werden. Das geschieht am einfachsten durch Ersetzung der Maschenströme zum Zeitpunkt  $t_i$  durch eine Näherung für die Ableitung aus den Maschenladungen

$$\dot{q}^\mu = [q^\mu(t_i) - q^\mu(t_{i-1})] / \tau_i = (q^\mu - q_\tau^\mu) / \tau_i. \quad (6.34)$$

Als Zeitbasis  $\tau_i$  wird bei einer Simulation die aktuelle Integrationsschrittweite und bei der Steuerung eines realen Systems die Taktzeit der Messwerte verwendet. Dann ergibt sich für die elektrisch erzeugten Kräfte zum Zeitpunkt  $t_i$  ( $q_\tau^\mu$  ist bekannt)

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{2\tau_i^2} \partial_{\kappa_1} l_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \partial_{\kappa_1} c_{\mu\nu} \right) q^\mu q^\nu - \left( \frac{1}{\tau_i^2} \partial_{\kappa_1} l_{\mu\nu} q_\tau^\mu - \frac{1}{\tau_i} \partial_{\kappa_1} \psi_{\mu 0} + \partial_{\kappa_1} \zeta_{\mu 0} \right) q^\mu + \\ + \frac{1}{2\tau_i^2} \partial_{\kappa_1} l_{\mu\nu} q_\tau^\mu q_\tau^\nu - \frac{1}{\tau_i} \partial_{\kappa_1} \psi_{\mu 0} q_\tau^\mu = \bar{R}_{\kappa_1}(t) - \frac{1}{2} \partial_{\kappa_1} g_0, \end{aligned}$$

was wiederum eine Gleichung der Form (6.31) ist und sich somit wie oben beschrieben lösen lässt. Das Ergebnis sind Zeitverläufe der Ladungen, die sowohl die elektrostatischen Steuerkräfte als auch – wegen (6.34) – die elektrodynamischen Steuerkräfte in der notwendigen Weise generieren.

### 6.3.7.3 Inverse Dynamik des ETS

Die dritte Teilaufgabe schließlich beinhaltet die inverse Dynamik des ETS. Zunächst wird für das EMS sinnvollerweise vorausgesetzt, dass die Anzahl der elektrischen verallgemeinerten Koordinaten  $m$  (und damit die der Fundamentalkreise) größer oder gleich der Anzahl der zu regelnden mechanischen Antriebe  $n_1$  sei, d.h., das EMS wird als ein „underactuated system“ betrachtet. Weiterhin sollen Bauelemente, die zu ein und derselben Kante des kontrahierten Graphen (vgl. Abschnitt 2.1) des elektrischen Netzwerkes gehören, nicht gleichzeitig elektrostatische und elektrodynamische Kräfte für zu regelnde Koordinaten erzeugen. Andernfalls ist die inverse Dynamik in der hier beschriebenen Form nicht realisierbar. Für  $m > n_1$  ist diese Bedingung unter den genannten Voraussetzungen durch geeignete Gerüstwahl für das ETS immer erfüllbar. Für  $m = n_1$  hilft bei Bedarf wieder eine Approximation des Stromes aus den Maschenladungen gemäß (6.34).

Die oben berechneten Ströme (Fall b)) und Ladungen (Fälle a) und c)) dienen als Sollmaschenströme  $\dot{q}_0^\mu(t)$  und Sollmaschenladungen  $q_0^\mu(t)$  zur Vorgabe für das ETS. Im Fall b) wird aus jedem Stromzeitverlauf der entsprechende Ladungszeitverlauf mittels Integration oder Multiplikation mit der Zeitbasis  $\tau_i$  ermittelt. Alle Fundamentalkreise, für deren Maschenladungen Sollzeitverläufe vorliegen, definieren die Indexmenge der zu regelnden verallgemeinerten Koordinaten  $H_1^*$  des ETS. Ihre Anzahl sei  $|H_1^*| = m_1$ .



Unter den eingangs genannten Voraussetzungen (MTS habe dominierende Dynamik gegenüber dem ETS) kann die inverse Dynamik des ETS bei „eingefrorenem“ mechanischem Zustand betrachtet werden, was einer *quasistatischen Näherung der elektromechanischen Wechselwirkungen entspricht*. Die Sollvorgaben für das MTS sind jetzt nicht von Bedeutung. In den ETS-Regelgesetzen nach (6.11b) bzw. (6.22b–6.22d) kann deshalb die Indexmenge  $J_1$  als leer gesetzt werden. Weiterhin wird  $\ddot{q}_0^{\nu_L}(t) = 0$  angenommen. Für (6.22b–6.22d) gilt dann z.B.

$$\begin{aligned}
\bar{R}_{\mu_L^1} &= \Gamma_{\mu_L^1 \lambda \omega_L} \dot{q}^{\omega_L} \dot{q}^\lambda + \Gamma_{\mu_L^1 \nu_L^1 \varrho} \dot{q}^\varrho \dot{q}_0^{\nu_L}(t) + \Gamma_{\mu_L^1 \nu_L^2 \varrho} \dot{q}^\varrho \dot{q}^{\nu_L^2} + 2\Gamma_{\mu_L^1 \lambda 0} \dot{q}^\lambda + \\
&+ \Gamma_{\mu_L^1 \nu_L^1 0} \left( \dot{q}_0^{\nu_L}(t) + \dot{q}^{\nu_L^1} \right) + 2\Gamma_{\mu_L^1 \nu_L^2 0} \dot{q}^{\nu_L^2} + 2\Gamma_{\mu_L^1 \nu_R 0} \dot{q}^{\nu_R} + \Gamma_{\mu_L^1 00} - \check{Q}_{\mu_L^1} + \\
&+ g_{\mu_L^1 \nu_L^2} g^{\nu_L^2 \mu_L^2} \left[ \check{Q}_{\mu_L^2} - 2\Gamma_{\mu_L^2 \lambda \omega_L} \dot{q}^\lambda \dot{q}^{\omega_L} - 2\Gamma_{\mu_L^2 b_{LR} 0} \dot{q}^{b_{LR}} - \Gamma_{\mu_L^2 00} - g_{\mu_L^2 \nu_L^1} \ddot{q}_0^{\nu_L}(t) \right] - \\
&- K_{\mu_L^1 \nu_L^1} \dot{e}^{\nu_L^1} - C_{\mu_L^1 \nu_L^1} e^{\nu_L^1}, \\
\bar{R}_{\mu_R^1} &= r_{\mu_R^1 \nu_R^1} \dot{q}_0^{\nu_R}(t) + r_{\mu_R^1 \nu_L} \dot{q}^{\nu_L} + \Gamma_{\mu_R^1 00} - \hat{Q}_{\mu_R^1} + \\
&+ r_{\mu_R^1 \nu_R^2} r^{\nu_R^2 \mu_R^2} \left[ \hat{Q}_{\mu_R^2} - r_{\mu_R^2 \nu_L} \dot{q}^{\nu_L} - \Gamma_{\mu_R^2 00} - r_{\mu_R^2 \nu_R^1} \dot{q}_0^{\nu_R}(t) \right] - C_{\mu_R^1 \nu_R^1} e^{\nu_R^1}, \\
\bar{R}_{\mu_C^1} &= c_{\mu_C^1 \nu_C^1} \dot{q}_0^{\nu_C}(t) + c_{\mu_C^1 \nu_{LR}} q^{\nu_{LR}} - \bar{Q}_{\mu_C^1} + \\
&+ c_{\mu_C^1 \nu_C^2} c^{\nu_C^2 \mu_C^2} \left[ \bar{Q}_{\mu_C^2} - c_{\mu_C^2 \nu_{LR}} q^{\nu_{LR}} - c_{\mu_C^2 \nu_C^1} \dot{q}_0^{\nu_C}(t) \right].
\end{aligned}$$

Falls nicht alle Fundamentalkreise zur Krafterzeugung benötigt werden ( $m_1 < m$ ), dann existiert noch eine Indexmenge  $H_2^*$  der nicht zu regelnden elektrischen verallgemeinerten Koordinaten.

Die Einspeisung der ermittelten Maschenspannungen  $\bar{R}_{\mu_L^1}$ ,  $\bar{R}_{\mu_R^1}$ ,  $\bar{R}_{\mu_C^1}$  als Steuerspannungen in das ETS bewirkt, dass die zu regelnden Ladungen und Ströme sich den im Abschnitt 6.3.7.2 berechneten Sollzeitverläufen asymptotisch annähern. Die Dynamik dieses Prozesses wird durch die elektrischen Zeitkonstanten und die Koeffizienten der Gain-Matrizen für das ETS bestimmt. Dadurch werden die elektrisch erzeugten Kräfte sich ebenfalls asymptotisch denjenigen Sollkräften annähern, die im Abschnitt 6.3.7.1 errechnet wurden. Diese Kräfte schließlich bewirken, dass das MTS die ihm vorgegebene Sollbewegung erreicht und einhält. Dabei sind dann die mechanischen Zeitkonstanten und die Koeffizienten der Gain-Matrizen des MTS ausschlaggebend.

Wenn ein reales mechatronisches System auf diese Weise gesteuert werden soll, ist zu prüfen, ob die Implementierung der Regelgesetze (Hard- und/oder Software) in Verbindung mit den notwendigen in Abschnitt 6.3.7.2 beschriebenen Berechnungen die dynamischen Anforderungen erfüllt. Ist das nicht der Fall, bleibt die Möglichkeit, die Maschenspannungen a priori zu berechnen und dann die kompletten Zeitverläufe am realen System einzuprägen. Dann kann allerdings keine Reaktion auf unbekannte Störungen erwartet werden. Dieses Verfahren ist aber z.B. dann anwendbar, wenn bekannte Initialstörungen ausgegletzt werden sollen (vgl. das Anwendungsbeispiel „Panoramaprojektion“ in Abschnitt 7.3.4).



# Kapitel 7

## Anwendungsbeispiele

Dieses Kapitel enthält Anwendungsbeispiele zu den beiden ausführlich in der Arbeit vorgestellten Methoden der Analyse bzw. Synthese von elektromechanischen Systemen. Das sind zum einen die Modellierung von EMS mit strukturvariablem elektrischen Teilsystem und zum anderen die dynamische Steuerung von EMS mittels inverser Dynamik. Darüber hinaus wird noch exemplarisch die Optimierung von Parametern eines EMS gezeigt. Alle Anwendungen wurden mit dem Entwicklungs- und Simulationswerkzeug für mechatronische Systeme **alaska** [3] umgesetzt.

### 7.1 Elektromechanische Systeme mit strukturvariablem elektrischen Teilsystem

Einige Anwendungsbeispiele zur Strukturvariabilität bei ES und EMS werden in [34, 35, 39, 41] angegeben. Hier werden zwei elektromechanische Beispiele ausführlich vorgestellt.

#### 7.1.1 Einweggleichrichter mit kapazitiver Impedanzlast

In diesem Abschnitt wird ein einfacher Einweggleichrichter mit einer resistiv-kapazitiven Last betrachtet (siehe Bild 7.1). Der Gleichrichter besteht aus einer Wechselspannungsquelle  $V_0(t)$ , einem Ohm'schen Widerstand  $R_0$ , einer Diode  $D$  und einem Glättungskondensator  $C_0$ . Der Lastkondensator  $C(x)$  sei ein Plattenkondensator mit zwei parallel zueinander angeordneten Elektroden (siehe Bild 7.2). Eine Platte ist raumfest angeordnet, die andere kann senkrecht zu den Plattenoberflächen bewegt werden. Sie ist über eine Feder-Dämpfer-Anordnung aufgehängt. Das mechanische Teilmodell besteht damit aus einem gedämpften Feder-Masse-System (Masse  $m$ , Dämpfungskonstante  $d$ , Federsteifigkeit  $c$ ) unter Gravitationseinfluss (Gravitationskonstante  $g$ ). Die Kapazität des Lastkondensators ist eine Funktion der Lagekoordinate  $x$  (Plattenabstand) des MTS:

$$C(x) = \frac{\varepsilon_0 A}{x} \tag{7.1}$$

( $\varepsilon_0$  – Dielektrizitätskonstante,  $A$  – wirksame Plattenfläche). Der Plattenabstand bei entspannter Feder sei  $x_F$ . Der Zweig mit  $C_0$  soll zum gewählten Gerüst gehören. Dann seien der Maschenstrom im linken Fundamentalkreis (siehe Bild 7.1) mit  $\dot{q}^1$  und der im rechten

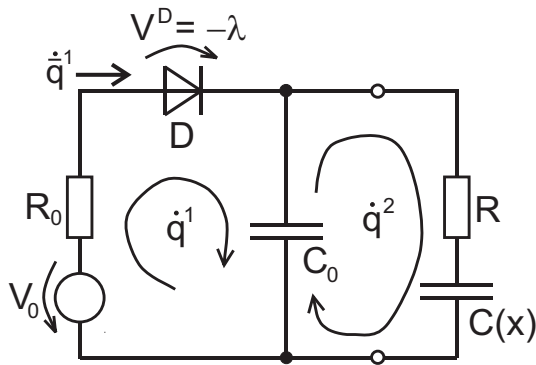


Bild 7.1: Einweggleichrichter mit Last

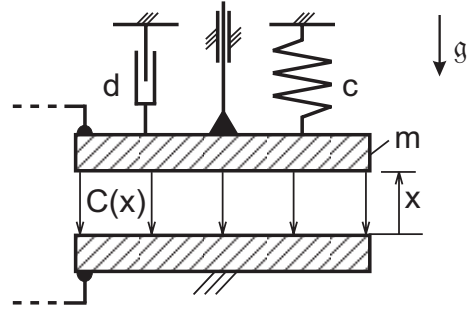


Bild 7.2: Lastkondensator mit mechanischem Teilsystem

Kreis mit  $\dot{q}^2$  bezeichnet. Die Maschenladungen heißen demzufolge  $q^1$  und  $q^2$ . Die MTS-Bewegungsgleichung lautet dann

$$m\ddot{x} + d\dot{x} + c(x - x_F) + mg + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{C(x)} \right) (q^2)^2 = 0$$

bzw. mit (7.1)

$$m\ddot{x} + d\dot{x} + c(x - x_F) + mg + \frac{1}{2} \frac{(q^2)^2}{\varepsilon_0 A} = 0.$$

Eine über der Diode  $D$  abfallende Spannung werde mit  $V^D = -\lambda$  bezeichnet. Mit (7.1) liefert dann der Kirchhoff'sche Maschensatz

$$R_0 \dot{q}^1 + (q^1 - q^2)/C_0 - V_0(t) = \lambda, \quad (7.2a)$$

$$R \dot{q}^2 - q^1/C_0 + q^2 \left( \frac{1}{C_0} + \frac{x}{\varepsilon_0 A} \right) = 0. \quad (7.2b)$$

Aus diesen Gleichungen lässt sich ein LCP aufstellen, mit dessen Hilfe zu jedem Zeitpunkt eine gültige Struktur ermittelt werden kann. Aus der Maschentransformation (2.30) folgt für den Zweigstrom durch die Diode  $\dot{q}^1 = \dot{q}^1$ . Damit ergibt sich das LCP nach (5.72) aus (7.2a) zu (siehe auch den zweiten Spezialfall in Abschnitt 5.3.6.5)

$$\dot{q}^1 = \frac{\lambda}{R_0} - \frac{1}{R_0} \left( \frac{q^1 - q^2}{C_0} - V_0 \right),$$

wobei die Bedingungen

$$\dot{q}^1 \geq 0, \quad \lambda \geq 0$$

gleichzeitig erfüllt sein müssen. Der jeweils gültige Schaltzustand wird zu Beginn einer numerischen Integration und zu jedem potenziellen Schaltzeitpunkt neu bestimmt. Bei leitender Diode lauten die ETS-Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} R_0 \dot{q}^1 + (q^1 - q^2)/C_0 - V_0(t) &= 0, \\ R \dot{q}^2 - q^1/C_0 + q^2 \left( \frac{1}{C_0} + \frac{x}{\varepsilon_0 A} \right) &= 0. \end{aligned}$$

In diesem Schaltzustand muss die Zustandsbedingung  $\dot{q}^1 \geq 0$  als Indikatorfunktion überwacht werden. Eine blockierende Diode erzwingt wegen  $\dot{q}^1 = \dot{q}^1 = 0$  eine konstante Maschenladung  $q^1$ . Die zum Fundamentalkreis 1 gehörende Gleichung (7.2a) ist dann nicht mehr Bestandteil der ETS-Bewegungsgleichungen. Mit  $t_{sl}$  als dem aktuell letzten Schaltzeitpunkt (d.h. dem Zeitpunkt des jüngsten Übergangs von einer leitenden zu einer blockierenden Diode) sei  $q^1|_{t \geq t_{sl}+0} = q^1|_{t_{sl}-0} \stackrel{!}{=} q_{sl}^1 = const.$  Die verbleibende Bewegungsgleichung (7.2b) lautet dann

$$R\dot{q}^2 - q_{sl}^1/C_0 + q^2 \left( \frac{1}{C_0} + \frac{x}{\varepsilon_0 A} \right) = 0,$$

wobei jetzt die Zustandsbedingung  $\lambda \geq 0$  einzuhalten ist. Die entsprechende Indikatorfunktion lässt sich aus (7.2a) ermitteln:

$$\lambda = (q_{sl}^1 - q^2)/C_0 - V_0(t).$$

In den Bildern 7.3–7.5 sind einige Resultate dargestellt, die mit dem Simulationssystem **alaska** erzielt wurden. Zunächst enthält Bild 7.3 die Zeitgeschichten der mechanischen

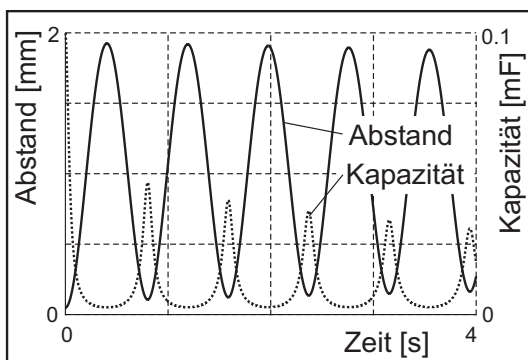


Bild 7.3: Mechanische Koordinate (Abstand  $x$ ) und Kapazität  $C(x)$

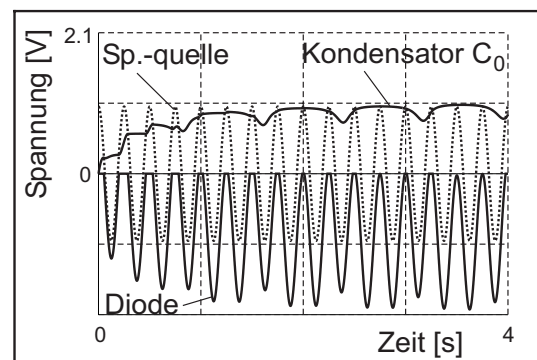


Bild 7.4: Spannungen über verschiedenen Bauelementen

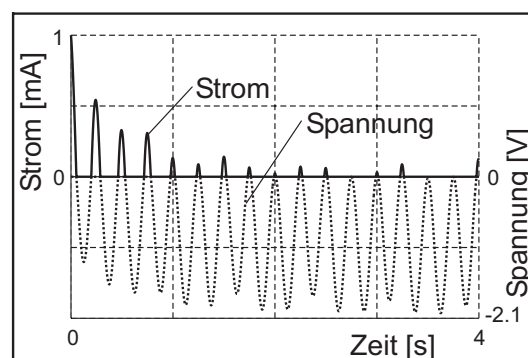


Bild 7.5: Elektrische Größen der Diode

Koordinate (Plattenabstand) und der sich daraus ergebenden Kapazität des Lastkondensators. Beide Ergebnisse resultieren aus einer angenommenen schwachen Dämpfung des

MTS. Den sinusförmigen Verlauf der mittels Quelle in das ETS eingespeisten Spannung zeigt Bild 7.4. Hier sind auch die Zeitgeschichte des Spannungsabfalls über der Diode und der Verlauf der Spannung über dem Glättungskondensator dargestellt. Die „Einbrüche“ in der Kondensatorspannung sind auf den Einfluss des Lastkondensators mit seiner Abstandsabhängigkeit zurückzuführen. Schließlich gibt Bild 7.5 die Kurven von Diodenstrom und Diodenspannung wieder. Hier zeigt sich zum einen die *Komplementarität dieser beiden physikalischen Größen*. Darüber hinaus ist der Einfluss des Plattenabstandes auf deren Zeitgeschichte und damit natürlich auch auf die Zeitpunkte des Leiten/Sperren-Zustandüberganges der Diode erkennbar. Diese Schaltzeitpunkte hängen somit von der Bewegung des gesamten EMS (MTS *und* ETS) ab.

### 7.1.2 Eintaktspannungsverdoppler mit induktiver Impedanzlast

In diesem Abschnitt wird ein Eintaktspannungsverdoppler mit einer resistiv-induktiven Last betrachtet (siehe Bild 7.6). Der Spannungsverdoppler besteht aus der Wechselspannungsquelle  $V_0(t)$  (mit ihrem Innenwiderstand  $R_0$ ), den beiden Dioden  $D_1$  und  $D_2$  (mit deren Durchlasswiderständen  $R_1$  und  $R_2$ ) sowie den beiden Kondensatoren  $C_1$  und  $C_2$ . Im Fall des Leerlaufs (keine oder zumindest geringe Last durch einen sehr hohen Widerstand  $R_3$ ) ist über dem Kondensator  $C_2$  eine Ausgangsspannung ( $V_{out}$ ) in Höhe der doppelten Amplitude von  $V_0(t)$  abgreifbar. Durch die mittels Resistor und Induktor angekoppelte Belastung wird diese Amplitude jedoch verringert.

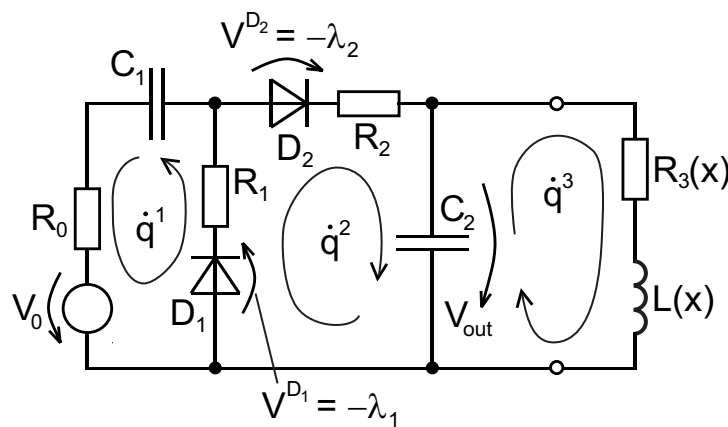


Bild 7.6: Eintaktspannungsverdoppler mit Last

Der Lastwiderstand  $R_3$  sei ein Potentiometer, dessen Widerstand mit einem Schleifkontakt linear zwischen einem minimalen Wert  $R_{min}$  und einem maximalen Wert  $R_{max}$  gewählt werden kann. Dann gilt

$$R_3(x) = R_{min} + \frac{x - x_u}{x_o - x_u} (R_{max} - R_{min})$$

( $x_u$  – Schleifkontaktweg bei minimalem Widerstand,  $x_o$  – Schleifkontaktweg bei maximalem Widerstand). Der Lastinduktor habe eine variable Induktivität, die durch die aktuelle Position eines Eisenkerns beeinflusst wird. Dieser Eisenkern ist an einer Feder befestigt und der Gravitation sowie einer Reibung ausgesetzt. Er ist gleichzeitig starr mit

dem Schleifkontakt des Potentiometers verbunden. Das MTS besteht somit aus einem gedämpften Feder-Masse-System. Die Lagekoordinate ist die Position des Eisenkerns. Sie sei gleich Null, wenn der Kern zentriert zum Induktor steht. Die Lastinduktivität lässt sich dann etwa darstellen als

$$L(x) = \frac{L_0}{1 + (x/x_h)^2},$$

wobei die Konstanten  $L_0$  (maximale Induktivität) und  $x_h$  (Eisenkernposition bei halber Induktivität) sich aus den geometrischen Verhältnissen ergeben (Sättigung und Hysterese werden vernachlässigt). Die Zweige mit  $R_1$  und  $C_2$  sollen zum gewählten Gerüst gehören. Die Bezeichnung der sich dann ergebenden Maschenströme in den drei Fundamentalkreisen ist in Bild 7.6 dargestellt. Insbesondere ist der Strom durch den Induktor gleich dem Maschenstrom im Fundamentalkreis 3. Dann ist

$$Q_x^{(el)} = \frac{1}{2} \frac{\partial L(x)}{\partial x} (\dot{q}^3)^2 = -\frac{L_0}{x_h} \frac{x}{(1 + (x/x_h)^2)^2} (\dot{q}^3)^2$$

die auf den Eisenkern wirkende elektrisch erzeugte Kraft. Die Position des Kerns bei entspannter Feder sei  $x_F$ . Die MTS-Bewegungsgleichung lautet dann

$$m\ddot{x} + d\dot{x} + c(x - x_F) + mg + \frac{L_0}{x_h} \frac{x}{(1 + (x/x_h)^2)^2} (\dot{q}^3)^2 = 0$$

( $m$  – Masse,  $d$  – Dämpfungskonstante,  $c$  – Federsteifigkeit,  $g$  – Gravitationskonstante).

Eine über der Diode  $D_1$  abfallende Spannung werde mit  $V^{D_1} = -\lambda_1$  bezeichnet. Für die Spannung über der Diode  $D_2$  gelte entsprechend  $V^{D_2} = -\lambda_2$ . Dann liefert der Kirchhoff'sche Maschensatz

$$(R_0 + R_1)\dot{q}^1 + R_1\dot{q}^2 + q^1/C_1 + V_0(t) = \lambda_1, \quad (7.3a)$$

$$R_1\dot{q}^1 + (R_1 + R_2)\dot{q}^2 + (q^2 - q^3)/C_2 = \lambda_1 + \lambda_2, \quad (7.3b)$$

$$L(x)\ddot{q}^3 + R_3(x)\dot{q}^3 - (q^2 - q^3)/C_2 = 0. \quad (7.3c)$$

Für die Auswahl einer gültigen Struktur lässt sich aus den Gleichungen (7.3a) und (7.3b) ein LCP ableiten. Mit  $\Delta R = R_0R_1 + R_0R_2 + R_1R_2$  ergibt sich zunächst

$$\begin{aligned} \dot{q}^1 &= \frac{R_1 + R_2}{\Delta R} \left[ \lambda_1 - V_0(t) - \frac{q^1}{C_1} \right] - \frac{R_1}{\Delta R} \left[ \lambda_1 + \lambda_2 - \frac{q^2 - q^3}{C_2} \right], \\ \dot{q}^2 &= -\frac{R_1}{\Delta R} \left[ \lambda_1 - V_0(t) - \frac{q^1}{C_1} \right] + \frac{R_0 + R_1}{\Delta R} \left[ \lambda_1 + \lambda_2 - \frac{q^2 - q^3}{C_2} \right]. \end{aligned}$$

Der Zweigstrom durch die Diode  $D_1$  sei mit  $\dot{q}^1$  und der durch  $D_2$  mit  $\dot{q}^2$  bezeichnet. Wegen der Maschentransformation (2.30) gilt für die Zweigströme durch die Dioden

$$\dot{q}^1 = \dot{q}^1 + \dot{q}^2 \quad \text{bzw.} \quad \dot{q}^2 = \dot{q}^2.$$

Damit folgt schließlich für das LCP nach (5.72)

$$\begin{aligned} \dot{q}^1 &= \frac{R_0 + R_2}{\Delta R} \lambda_1 + \frac{R_0}{\Delta R} \lambda_2 - \frac{R_2}{\Delta R} \left[ V_0(t) + \frac{q^1}{C_1} \right] - \frac{R_0}{\Delta R} \frac{q^2 - q^3}{C_2}, \\ \dot{q}^2 &= \frac{R_0}{\Delta R} \lambda_1 + \frac{R_0 + R_1}{\Delta R} \lambda_2 + \frac{R_1}{\Delta R} \left[ V_0(t) + \frac{q^1}{C_1} \right] - \frac{R_0 + R_1}{\Delta R} \frac{q^2 - q^3}{C_2}, \end{aligned}$$

wobei die Bedingungen

$$\dot{q}^1 \geq 0, \quad \lambda_1 \geq 0, \quad \dot{q}^2 \geq 0, \quad \lambda_2 \geq 0$$

alle gleichzeitig erfüllt sein müssen.

Die Diode  $D_1$  liegt zusammen mit  $R_1$  auf einem Gerüstzweig. Im Fall einer gesperrten Diode ergibt sich deshalb zusätzlich zu dem Gleichungssatz (7.3) eine Zwangsbedingung  $\dot{q}^1 = \dot{q}^1 + \dot{q}^2 = 0$ . Die einzuhaltende Zustandsbedingung lautet  $\lambda_1 \geq 0$ . Die zugehörige Indikatorfunktion lässt sich aus dem Kirchhoff'schen Maschensatz von Fundamentalkreis 1 ermitteln (vgl. (7.3a)):

$$\lambda_1 = (R_0 + R_1)\dot{q}^1 + R_1\dot{q}^2 + q^1/C_1 + V_0(t). \quad (7.4)$$

Bei leitender Diode  $D_1$  ergibt sich als Zustandsbedingung  $\dot{q}^1 = \dot{q}^1 + \dot{q}^2 \geq 0$ .

Die Diode  $D_2$  liegt zusammen mit  $R_2$  auf einem Cogerüstzweig. Im Fall einer gesperrten Diode  $D_2$  gilt somit  $\dot{q}^2 = 0$  bzw.  $q^2 \stackrel{!}{=} q_{sl}^2 = const.$  ( $q_{sl}^2$  bezeichne die Ladung  $q^2$  zum aktuell letzten Zeitpunkt des  $D_2$ -Übergangs von Leiten nach Sperren). Die zum Fundamentalkreis 2 gehörende Gleichung ist dann nicht mehr Bestandteil der Bewegungsgleichungen. Als Zustandsbedingung ist  $\lambda_2 \geq 0$  zu überwachen. Die entsprechende Indikatorfunktion lässt sich aus (7.3b) ermitteln:

$$\lambda_2 = R_1\dot{q}^1 + (q_{sl}^2 - q^3)/C_2 - \lambda_1,$$

wobei  $\lambda_1$  entweder verschwindet ( $D_1$  – leitend) oder sich aus (7.4) ergibt ( $D_1$  – gesperrt). Demgegenüber erfordert eine leitende Diode  $D_2$  die Beobachtung der Zustandsbedingung  $\dot{q}^2 = \dot{q}^2 \geq 0$ .

Die Bilder 7.7–7.12 enthalten einige Resultate von Simulationsuntersuchungen mit **alaska**. In Bild 7.7 ist die Zeitgeschichte der Position des Eisenkerns relativ zum Induk-

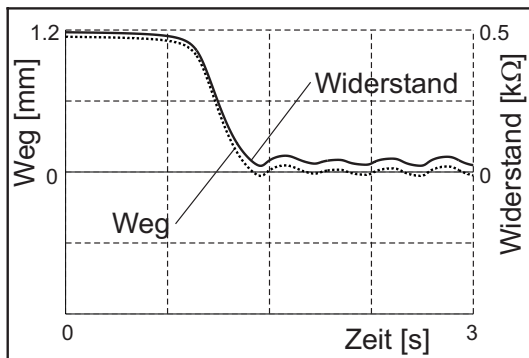


Bild 7.7: Eisenkernposition (Weg  $x$ ) und Potentiometerwiderstand  $R_3(x)$

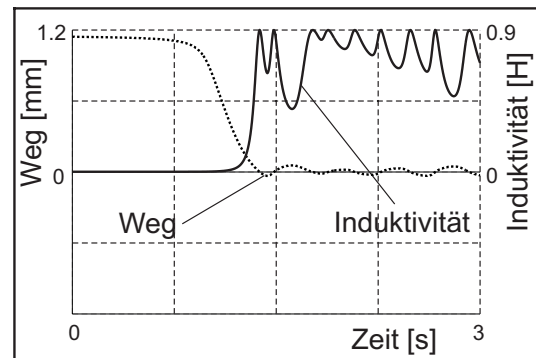


Bild 7.8: Eisenkernposition (Weg  $x$ ) und Induktivität  $L(x)$

tor zusammen mit dem zugehörigen, durch den Schleifkontakt realisierten Widerstand dargestellt. Bild 7.8 zeigt neben der mechanischen Koordinate die sich daraus ergebende Induktivität. Das MTS durchläuft einen Einschwingvorgang und nähert sich der Nullposition. Dementsprechend fällt der Widerstand von hohen zu niedrigen Werten. Die



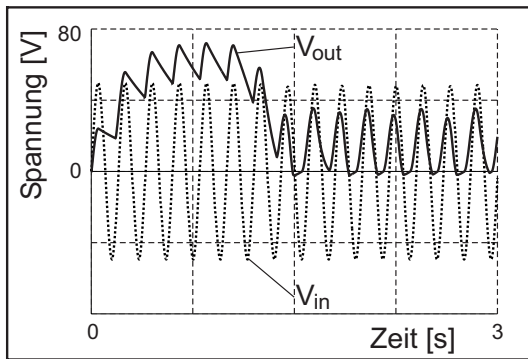
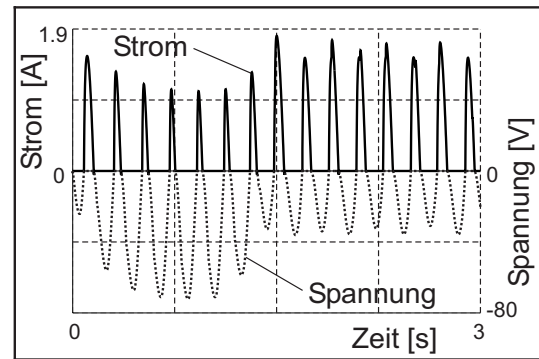
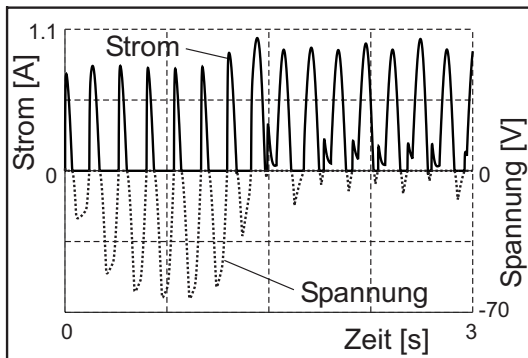
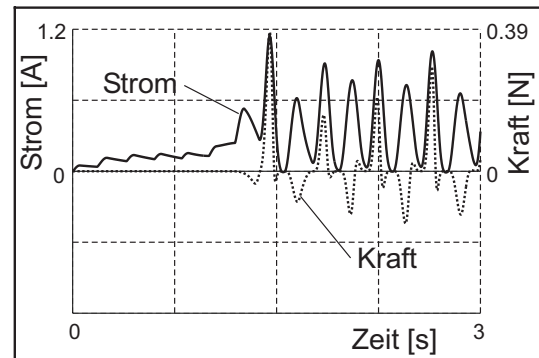


Bild 7.9: Eingangsspannung und Ausgangsspannung des Spannungsverstärkers

Bild 7.10: Elektrische Größen der Diode  $D_1$ Bild 7.11: Elektrische Größen der Diode  $D_2$ Bild 7.12: Induktorstrom  $\dot{q}^3$  und elektrisch erzeugte Kraft  $Q_x^{(el)}$ 

Induktivität ist anfangs nahezu Null. Im weiteren Verlauf strebt sie zunächst gegen ihren Maximalwert  $L_0$  und verbleibt dann zwischen  $L_0$  und  $L_0/2$ . Bild 7.9 enthält die Eingangsspannung ( $V_{in} = V_0(t)$ ) und die Ausgangsspannung ( $V_{out}$ ) des Spannungsverstärkers. Die Eingangsspannung ist sinusförmig. Die Ausgangsspannung wächst im ersten Teil der Darstellung (bis ca. 1 s) infolge des relativ hohen Lastwiderstandes – unterbrochen von Phasen der Entladung des Glättungskondensators  $C_2$ . Es stellt sich kurzzeitig eine pulsierende Gleichspannung ein. Im zweiten Teil der Darstellung wird der Lastwiderstand drastisch verringert. Deshalb bricht die abgegebene Spannung zusammen. In den Bildern 7.10 und 7.11 sind die Ströme und Spannungen der beiden Dioden dargestellt. Wie im vorhergehenden Beispiel wird auch hier die strikte Komplementarität der entsprechenden Größen jeweils einer Diode deutlich. Der Einfluss des MTS zeigt sich in beiden Zeitverläufen. In Bild 7.10 sind vor allem die auftretenden Strom- und Spannungsspitzen von der Höhe der Belastung abhängig. Bild 7.11 verdeutlicht darüber hinaus, dass das MTS entscheidenden Einfluss auf die Schaltzustands-Übergänge der Diode  $D_2$  ausübt. In der ersten Phase (zwischen 0 und ca. 1,3 s) schaltet die Diode relativ regelmäßig. Bei großer Belastung hingegen treten weniger Zustandsübergänge auf. Schließlich enthält Bild 7.12 den Verlauf des Stromes durch den Lastinduktor und die sich daraus ergebende elektrisch erzeugte Kraft. Das ständig wechselnde Vorzeichen dieser Kraft in der zweiten Phase der Darstellung (ab

ca. 1,5 s) ist die Ursache dafür, dass der Eisenkern nicht zur Ruhe kommt und statt dessen eine verzerrte periodische Schwingung ausführt (vgl. Bild 7.7 bzw. 7.8).

Die im Abschnitt 7.1 aufgeführten Beispiele zeigen die grundsätzliche Anwendbarkeit der in Kapitel 5 vorgestellten Methode zur einheitlichen mathematischen Modellierung von EMS mit strukturvariablem elektrischen Teilsystem mittels Lagrange-Formalismus, unilateralen Bindungen und LCP.

## 7.2 Inverse Dynamik am Plattenkondensator

In diesem Abschnitt wird eine Anwendung des erweiterten PD-Reglers nach Kapitel 6.3 dargestellt. Damit wird der prinzipielle Funktionsnachweis eines solchen Reglers erbracht. Im Gegensatz zu dem später (in Abschnitt 7.3.4) verwendeten Spezialfall kommt hier das Regelgesetz in seiner kompletten Form gemäß (6.11) zum Einsatz.

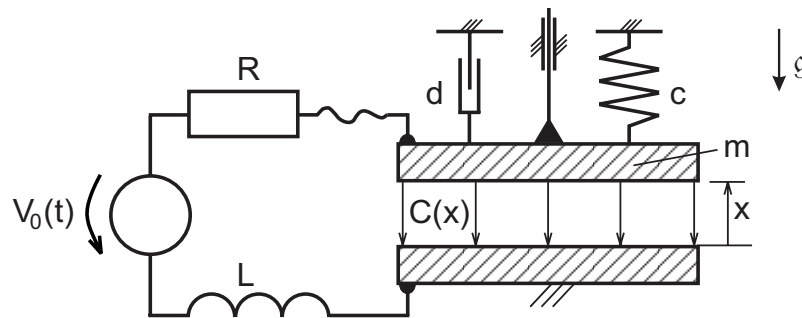


Bild 7.13: Prinzip eines Plattenkondensators als EMS

Das Beispiel-EMS besteht aus einem Plattenkondensator mit einer beweglichen Elektrode, wie er schon in Abschnitt 7.1.1 verwendet wurde. Der Kondensator ist galvanisch (in Reihenschaltung) mit einer Spannungsquelle  $V_0(t)$ , einem konstanten Ohm'schen Widerstand  $R$  und einem Induktor mit konstanter Induktivität  $L$  verbunden. (Ein ähnliches Beispiel ohne Induktor wird in [40] vorgestellt.) Bild 7.13 zeigt eine Prinzipdarstellung des Gesamt-EMS. Das mechanische Teilsystem stellt ein gedämpftes Feder-Masse-System dar, wobei die Lagekoordinate  $x$  gleichzeitig der Plattenabstand des Kondensators ist. Die Position bei entspannter Feder sei  $x_F$ . Das elektrische Teilmodell besteht aus einem gedämpften Schwingkreis mit variabler (von der mechanischen Koordinate abhängigen) Kapazität gemäß (7.1). Die elektrische Ladung des Kondensators sei mit  $q$  bezeichnet. Dann ist

$$Q_x^{(el)} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{C(x)} \right) q^2 = -\frac{1}{2} \frac{q^2}{\varepsilon_0 A}$$

die auf die bewegliche Elektrode wirkende, elektrisch erzeugte Kraft und die Bewegungsgleichungen des Gesamt-EMS lauten mit (7.1)

$$m\ddot{x} + d\dot{x} + c(x - x_F) + mg + \frac{1}{2} \frac{q^2}{\varepsilon_0 A} = 0, \quad (7.5a)$$

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{x}{\varepsilon_0 A} q + V_0(t) = 0. \quad (7.5b)$$

### 7.2.1 Regelung des Plattenabstandes

Zunächst wird nur der Plattenabstand dynamisch gesteuert. Zu diesem Zweck wird eine zusätzliche Steuerkraft  $\bar{R}_x$  auf die bewegliche Platte eingepreist. Die Bewegungsgleichung (7.5a) wird deshalb auf der rechten Seite um  $\bar{R}_x$  ergänzt. Die elektrisch erzeugte Kraft stellt eine Störung dar. Auf diese Weise kann der Einfluss der verschiedenen Anteile des erweiterten PD-Reglers verdeutlicht werden. Der Sollwert für den Plattenabstand sei mit  $x_0(t)$  bezeichnet. Nach (6.11a) kann die einzuprägende Steuerkraft dargestellt werden als

$$\bar{R}_x = \bar{R}_x^{(ffm)} + \bar{R}_x^{(ffe)} + \bar{R}_x^{(fb)}$$

mit

$$\begin{aligned}\bar{R}_x^{(ffm)} &= m\ddot{x}_0(t) + d\dot{x} + c(x - x_F) + mg, \\ \bar{R}_x^{(ffe)} &= \frac{1}{2} \frac{q^2}{\varepsilon_0 A}, \\ \bar{R}_x^{(fb)} &= -K_{xx}(\dot{x} - \dot{x}_0(t)) - C_{xx}(x - x_0(t)).\end{aligned}$$

Die Summanden  $\bar{R}_x^{(ffm)}$  und  $\bar{R}_x^{(ffe)}$  bilden zusammen die nichtlineare Vorsteuerung (feed forward, aufgeteilt in mechanischen und elektrischen Anteil) und  $\bar{R}_x^{(fb)}$  ist die lineare Rückführung (feedback).

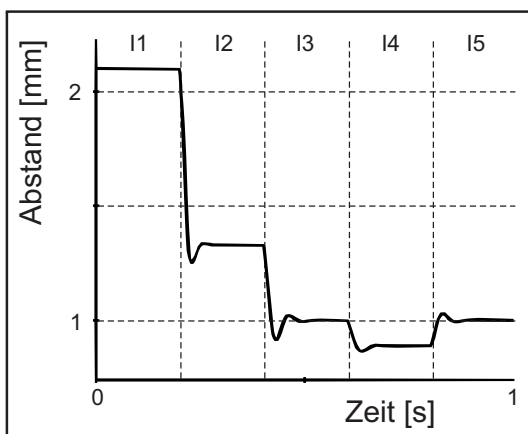


Bild 7.14: Plattenabstand  $x$  bei verschiedenen Reglermodi

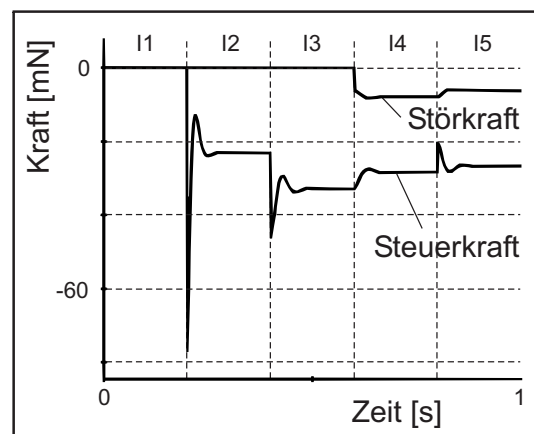


Bild 7.15: Steuerkraft  $\bar{R}_x$  und elektrisch erzeugte Störkraft  $Q_x^{(el)}$

Die in den Bildern 7.14 und 7.15 gezeigten Resultate gelten für einen konstanten Sollplattenabstand von  $x_0(t) = 1,0$  mm. Alle Zeitverläufe sind in fünf Intervalle I1 bis I5 aufgeteilt. In den ersten drei Abschnitten hat die Spannungsquelle den Wert Null, in der vierten und fünften Phase einen konstanten Wert von 75 V. Im ersten Intervall ist kein Regler aktiv. Trotz eines Plattenabstandes von 2,1 mm ist die Regelkraft gleich Null. Im zweiten Abschnitt ist nur die lineare Rückführung zugeschaltet. Das entspricht der Verwendung eines klassischen PD-Reglers. Der Plattenabstand erreicht 1,3 mm, d.h., systembedingt entsteht eine bleibende Regelabweichung. In der dritten Phase wird der mechanische Teil

der Vorwärtssteuerung  $\bar{R}_x^{(ffm)}$  zusätzlich verwendet. Diese reicht aus, um den Plattenabstand asymptotisch auf den Sollwert zu senken. Die entsprechende Steuerkraft beträgt etwa  $-33$  mN. Im vierten und fünften Intervall wird durch das Zuschalten der Spannungsquelle eine Ladungstrennung auf dem Kondensator vorgenommen. Die resultierende Kraft (siehe Bild 7.15) kann für die Regelaufgabe als Störung aufgefasst werden. In der vierten Phase arbeitet der Regler ohne den elektrischen Anteil der Vorwärtssteuerung. Deshalb tritt hier wieder eine bleibende Regelabweichung auf. Der Plattenabstand verringert sich auf etwa  $0,9$  mm. Im letzten Abschnitt wird der elektrische Anteil der Vorwärtssteuerung  $\bar{R}_x^{(ffe)}$  zugeschaltet. Damit sind alle Anteile des Reglers aktiv. Der Plattenabstand wird auf den Sollwert ausgeregelt. Die dazu notwendige Steuerkraft beträgt etwa  $-27$  mN.

## 7.2.2 Unabhängige Regelung von Plattenabstand und Ladung

Die Realisierung einer *unabhängigen Regelung* von Plattenabstand und Kondensatorladung ist ebenfalls möglich. Neben der Vorgabe des Zeitverlaufs des Abstandes ist gleichzeitig ein Sollverlauf der Ladung gegeben. Beide Vorgaben sollen mittels dynamischer Steuerung eingehalten werden *trotz der nichtlinearen elektromechanischen Wechselwirkung untereinander*. Nach (6.11) ergibt sich der Gesamtregler zu

$$\begin{aligned}\bar{R}_x &= m\ddot{x}_0(t) + d\dot{x} + c(x - x_F) + mg + \frac{1}{2} \frac{q^2}{\varepsilon_0 A} - K_{xx}(\dot{x} - \dot{x}_0(t)) - C_{xx}(x - x_0(t)), \\ \bar{R}_q &= L\ddot{q}_0(t) + R\dot{q} + \frac{x}{\varepsilon_0 A} q + V_0(t) - K_{qq}(\dot{q} - \dot{q}_0(t)) - C_{qq}(q - q_0(t)).\end{aligned}$$

Die zusätzliche Kraft  $\bar{R}_x$  wird auf die bewegliche Platte eingeprägt, während die zusätzliche Spannung  $\bar{R}_q$  in den Stromkreis (z.B. additiv zu  $V_0(t)$ ) eingespeist wird. Der Sollzeitverlauf für den Plattenabstand sei eine sinusförmige Funktion (Mittelwert  $1$  mm, Amplitude  $0,5$  mm), während die Ladung auf dem Kondensator eine Rechteckfolge (zwischen  $0,1 \mu\text{As}$  und  $0,2 \mu\text{As}$ ) absolvieren soll. Der Wert der Spannungsquelle sei konstant  $V_0(t) = 50$  V. Die Resultate sind in den Bildern 7.16–7.19 zusammengestellt. Die Bilder

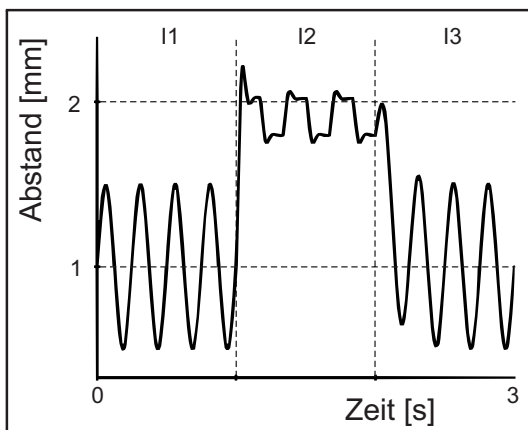


Bild 7.16: Plattenabstand  $x$

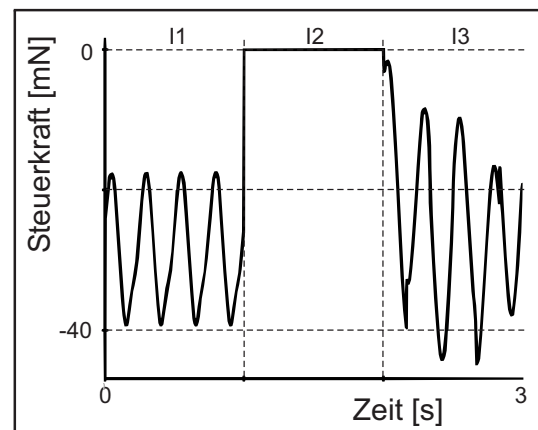
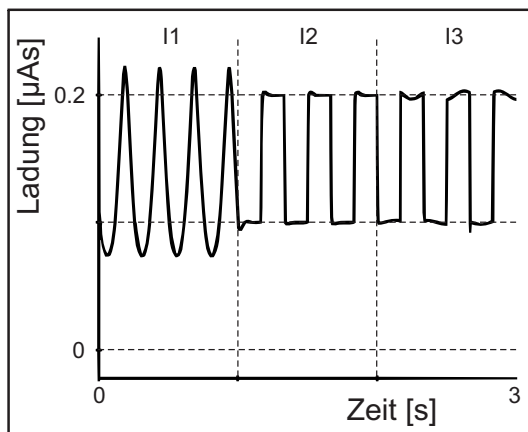
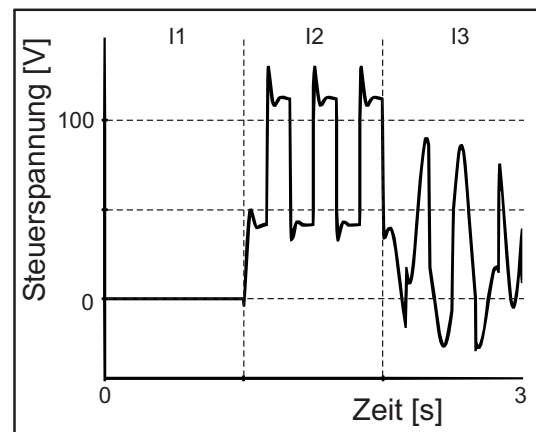


Bild 7.17: Steuerkraft  $\bar{R}_x$

Bild 7.18: Kondensatorladung  $q$ Bild 7.19: Steuerspannung  $\bar{R}_q$ 

7.16 und 7.18 zeigen jeweils die Zeitgeschichte der Regelgrößen, während in den Diagrammen 7.17 und 7.19 die Steuergrößen dargestellt sind. Alle Zeitverläufe sind jeweils in drei Intervalle I1 bis I3 aufgeteilt. In der ersten Phase ist nur der Teilregler für den Plattenabstand aktiv, d.h., die zusätzliche Steuerspannung ist Null (Intervall I1 in Bild 7.19). Während in diesem Fall der Abstand einen idealen sinusförmigen Verlauf aufweist (Intervall I1 in Bild 7.16), wird die Ladung infolge der abstandsabhängigen Kapazität entsprechend gestört (Intervall I1 in Bild 7.18). Im zweiten Abschnitt ist nur der Regler für die Kondensatorladung zugeschaltet, d.h., die zusätzliche Steuerkraft ist Null (Intervall I2 in Bild 7.17). Jetzt zeigt die Ladung eine sehr gut angenäherte Rechteckfolge (Intervall I2 in Bild 7.18), während der Abstand entsprechend gestört wird (Intervall I2 in Bild 7.16). Beide Intervalle (I1 und I2) verdeutlichen die nichtlineare elektromechanische Wechselwirkung zwischen den dynamisch zu steuernden Größen.

Im dritten Zeitabschnitt (I3) arbeiten beide Teilregler gleichzeitig. Der Abstand erreicht asymptotisch den vorgegebenen Sinusverlauf (Intervall I3 in Bild 7.16). Die Kondensatorladung zeigt einen deutlich erkennbaren rechteckigen Verlauf mit leichten Störungen der konstanten Abschnitte zwischen den Sollwertsprüngen (Intervall I3 in Bild 7.18). Beide Regelaufgaben sind somit trotz der nichtlinearen Wechselwirkung zufriedenstellend gelöst. Das wird möglich durch die *Berücksichtigung der Wechselwirkungen in der Vorsteuerung beider Teilregler*.

In den Bildern 7.20 und 7.21 sind zum Vergleich zwei Beispielzeitverläufe dargestellt, die (bei gleichem Betriebsregime) mit zwei klassischen PD-Reglern (ohne Vorwärtssteuerung) ermittelt wurden. Die dabei verwendeten Reglerverstärkungsfaktoren stellen einen Kompromiss dar, weil eine weitere Erhöhung der Verstärkung des Abstandsreglers eine Verringerung der Verstärkung des Ladungsreglers erzwingt. Die beiden Diagramme verdeutlichen, dass der Abstandsregler allein bedingt geeignet ist, seine Regelaufgabe zu erfüllen (bleibende Regelabweichung in Intervall I1 noch akzeptabel). Demgegenüber ist der Regler für die Kondensatorladung (vgl. Intervall I2) dazu nicht in der Lage (die Rechteckfolge sollte zwischen  $0,1 \mu\text{As}$  und  $0,2 \mu\text{As}$  liegen). Eine Erhöhung der Verstärkung des Ladungsreglers führt aber infolge der elektromechanischen Wechselwirkung zur Instabilität. Deshalb ist eine Verbesserung des Regelverhaltens nicht möglich. In Intervall I3

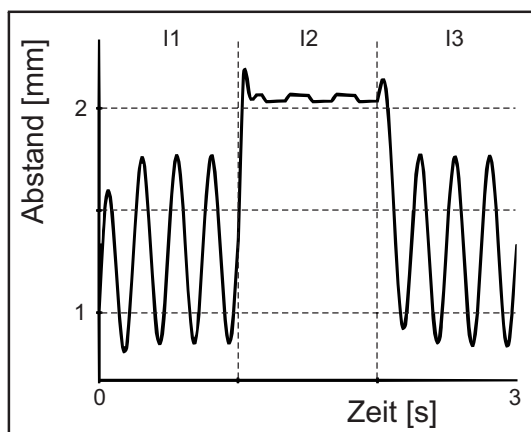


Bild 7.20: Plattenabstand bei Einsatz eines klassischen PD-Reglers

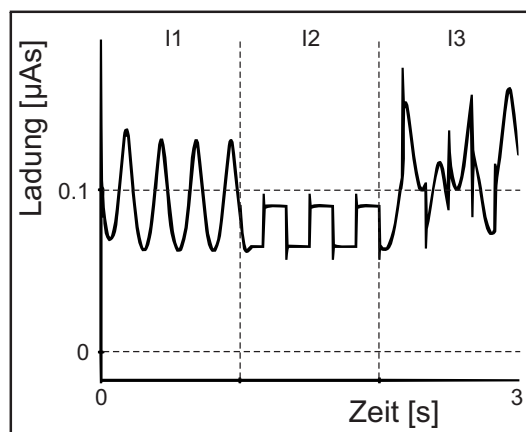


Bild 7.21: Kondensatorladung bei Einsatz eines klassischen PD-Reglers

sind beide Regler aktiv. Die Ergebnisse bzgl. der Kondensatorladung sind völlig unbefriedigend. An dieser Stelle wird der *entscheidende Vorteil des erweiterten PD-Reglers* deutlich.

Die im Abschnitt 7.2 angeführten Beispiele zur dynamischen Steuerung mittels inverser Dynamik zeigen die grundsätzliche Anwendbarkeit der in Abschnitt 6.3 vorgestellten Methode der nichtlinearen Steuerung.

## 7.3 Mikrospiegel

In diesem Abschnitt werden elektrostatisch angetriebene Mikrospiegel und deren dynamische Steuerung betrachtet. Solche aus Silizium-Wafern geätzten Strukturen sind besonders interessante Objekte der Mikrosystemtechnik (siehe z.B. [66, 155, 156, 207]). Es sind vielfältige Bauformen und Ausführungen bekannt (siehe z.B. auch [12]). In der vorliegenden Arbeit werden zwei Spiegelausführungen näher betrachtet – so genannte 1D- und 2D-Spiegel.

### 7.3.1 Mikrospiegel als diskrete EMS

Die hier betrachteten Mikrospiegel bestehen jeweils aus einer ebenen Spiegelplatte, die über Federstrukturen an einem Rahmen befestigt ist. Im Fall des 2D-Spiegels ist diese Platte quadratisch. Sie wird als starrer Körper angenommen, auf den neben den Federkräften auch Dämpfungskräfte einwirken (vgl. [155]). In Bild 7.22 ist ein 1D-Spiegel und in Bild 7.24 ein 2D-Spiegel dargestellt. Die Form der Federstrukturen ermöglicht sowohl eine Translation des Spiegels in  $z$ -Richtung als auch Rotationen um ein (1D) bzw. zwei (2D) körperfeste, in der Spiegelebene liegende Drehachsen. Die anderen Bewegungsmöglichkeiten werden weitestgehend unterdrückt und können deshalb hier vernachlässigt werden. Eine Lage des mechanischen Teilsystems ist somit durch zwei (1D) bzw. drei (2D) Koordinaten gekennzeichnet.

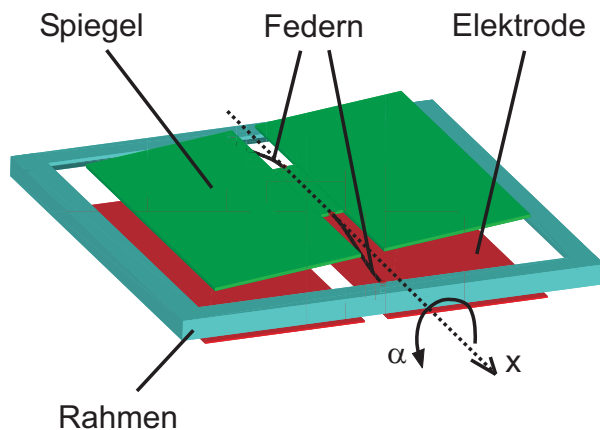


Bild 7.22: Mechanischer Aufbau des 1D-Spiegels

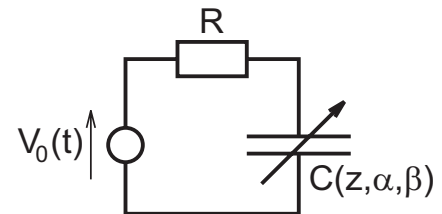


Bild 7.23: Stromkreis eines Kondensators am 2D-Spiegel

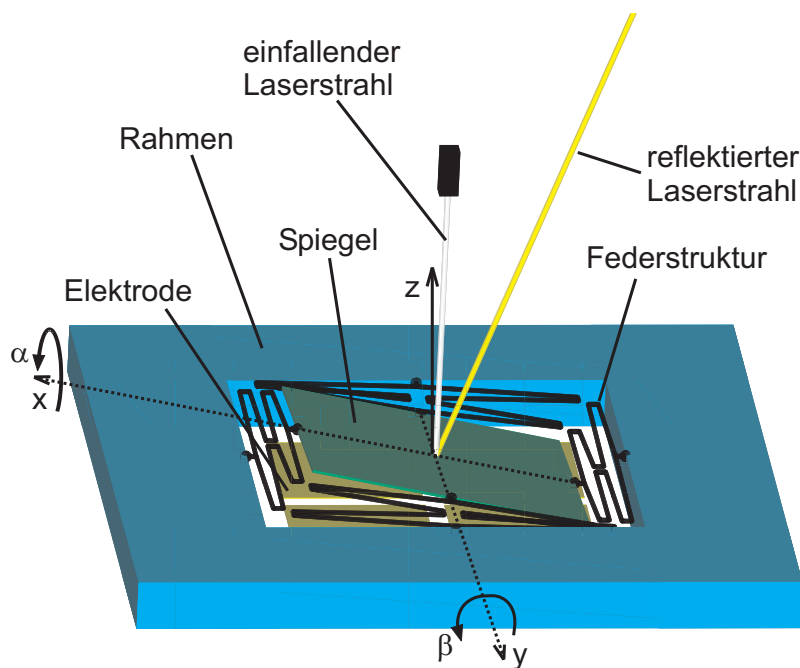


Bild 7.24: Mechanischer Aufbau des 2D-Spiegels

Zum Antrieb eines 1D-Spiegels sind unterhalb der Platte zwei Elektroden rahmenfest angeordnet. Beim 2D-Spiegel dienen vier Elektroden diesem Zweck. Jede Elektrode für sich bildet mit der Spiegelplatte einen Kondensator, dessen Kapazität  $C$  eine Funktion der zwei bzw. drei mechanischen Koordinaten ist (1D-Spiegel: Verschiebung  $z$  entlang der raumfesten  $z$ -Achse, Verdrehung um die körperfeste  $x$ -Achse gemessen mit dem Bryant- oder auch Kardanwinkel  $\alpha$ ; 2D-Spiegel: Verschiebung  $z$  entlang der raumfesten  $z$ -Achse, Verdrehungen um die körperfeste  $x$ - bzw.  $y$ -Achse gemessen mit den Bryant- oder auch Kardanwinkeln  $\alpha$  bzw.  $\beta$ ). Jeder Kondensator wird separat von einer Spannungsquelle

$V_0(t)$  über einen Ohm'schen Widerstand  $R$  mit Ladungsträgern gespeist. Das elektrische Teilsystem besteht somit aus zwei bzw. vier gleichartigen Stromkreisen. Einer davon (gültig für den 2D-Spiegel) ist in Bild 7.23 dargestellt.

Die elektromechanische Wechselwirkung ist durch die Abhängigkeiten der Kapazitäten von den mechanischen Koordinaten charakterisiert. Entsprechende Modelle zur geschlossenen Darstellung dieser funktionellen Abhängigkeiten unter bestimmten Annahmen wurde bereits in [37, 38, 45] vorgeschlagen. Der Vollständigkeit halber sind im Anhang E nochmals die wichtigsten Schritte der Herleitung dieser Modelle aufgeführt. Die entsprechenden Bewegungsgleichungen des kompletten EMS wurden in [45, 46] in detaillierter Form angegeben.

### 7.3.2 Dynamische Untersuchungen bei variabler Struktur

In der Standardausführung sind die Elektroden der hier betrachteten Mikrospiegel durch eine schmale Oxidschicht elektrisch isoliert. Deshalb kann unter normalen Umständen ein Kurzschluss zwischen Elektroden und Spiegelplatte nicht auftreten. Falls aber die Isolierschicht Defekte aufweist oder – aus welchen Gründen auch immer – das Oxid auf einer Elektrode nicht vorhanden ist, ist ein elektrischer Kurzschluss möglich. Bei einem 2D-Spiegel würde ein solcher Kurzschluss dann auftreten, wenn eine Ecke der Spiegelplatte auf die darunter befindliche Elektrode auftrifft. Der entsprechende mechanische Kontakt kann infolge der biegsamen Spiegelplatte mittels einer zusätzlichen Feder modelliert werden. Ein einfaches Modell für den elektrischen Kurzschluss ist durch einen relativ geringen Widerstand  $R_k$  parallel zur Kapazität  $C(z, \alpha, \beta)$  zwischen der betreffenden Elektrode und der Spiegelplatte realisierbar. Da der entsprechende Zweig nur bei mechanischem Kontakt zugeschaltet werden darf, wird noch ein elektrischer Schalter hinzugefügt, dessen Schaltzustand von dem Abstand zwischen Elektrode und Spiegelplattenecke und damit von allen drei generalisierten mechanischen Koordinaten abhängt (fremdgesteuerter Schalter  $S(z, \alpha, \beta)$ ). Das führt zu einem *strukturvariablen ETS* wie in Bild 7.25 dargestellt.

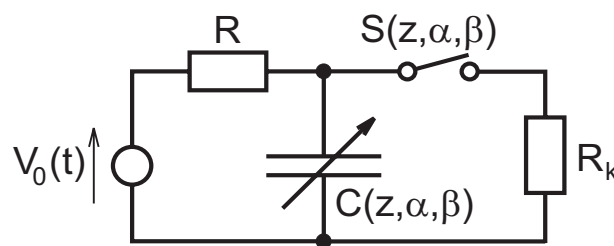
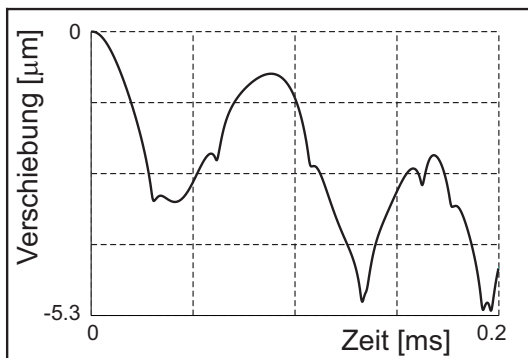
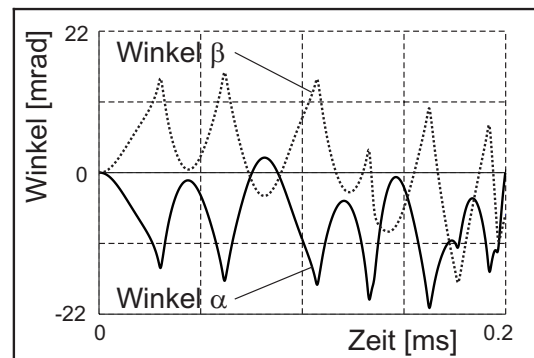


Bild 7.25: Stromkreis eines Kondensators mit Kurzschlusswiderstand  $R_k$

Die Bilder 7.26–7.32 zeigen Resultate einiger Simulationsuntersuchungen, die beispielhaft für einen 2D-Spiegel mit Kurzschlussmöglichkeit durchgeführt wurden. Bei der verwendeten Spiegelausführung beträgt der Abstand zwischen Spiegelplatte und Elektroden bei entspannten Federn  $10 \mu\text{m}$ . Der Pull-In- oder Schnapp-Punkt (Übergang vom stabilen zum instabilen Arbeitsbereich, siehe z.B. [155]) liegt bei ca. 177 V für den Fall, dass die Spannung nur an einer Elektrode anliegt (die anderen seien spannungslos). Bei zwei (nebeneinander liegenden) Elektroden mit gleicher Betriebsspannung liegt der stabile Arbeitsbereich zwischen 0 und ca. 145 V.



Während der dynamischen Simulation hat die Spannungsquelle für den ersten Quadranten (siehe Anhang E, Bild E.2) einen konstanten Wert von 200 V. Die Quelle des zweiten Quadranten realisiert einen linearen Spannungsanstieg von 0 auf 200 V innerhalb der betrachteten Simulationszeit von 0,2 ms. Neben den entsprechenden elektrostatischen Kräften wirken noch Federkräfte, Luftreibung und Gravitation. Daraus ergibt sich der Zeitverlauf der generalisierten mechanischen Koordinaten der Spiegelplatte. In Bild 7.26 ist die Verschiebung des Plattenschwerpunktes in  $z$ -Richtung dargestellt. Die Simulation

Bild 7.26: Verschiebung  $z$ Bild 7.27: Bryantwinkel  $\alpha$  und  $\beta$ 

beginnt in der „Nulllage“ (entspannte Federn). Im weiteren Verlauf bewegt sich der Spiegel infolge der elektrostatischen Kräfte tendenziell auf die Elektroden zu. Bild 7.27 enthält die beiden Bryantwinkel  $\alpha$  und  $\beta$ . Zu Beginn sind diese beiden Kurven nahezu spiegelgleich, weil der weitaus überwiegende Teil der elektrisch erzeugten Kräfte im ersten Quadranten der Platte wirkt. Die „Umkehrpunkte“ deuten auf einen kurzzeitigen mechanischen Kontakt zwischen Spiegelecke und Elektrode und einer entsprechenden „Rückfederung“ hin. Diese Tatsache wird in Bild 7.28 bestätigt. Hier sind die Zeitverläufe der vier Abstände

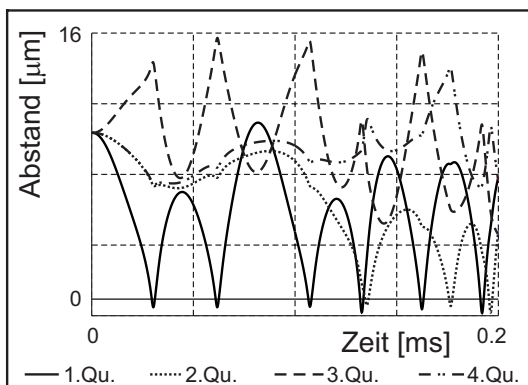


Bild 7.28: Eckabstände des 1. bis 4. Quadranten

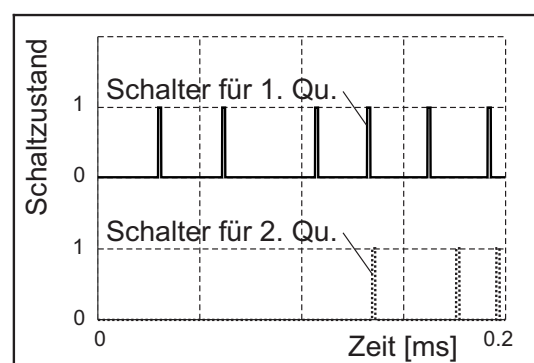


Bild 7.29: Fremdgesteuerte Schalter für 1. und 2. Quadranten

Spiegelecke-Elektrode dargestellt. Infolge der hohen Betriebsspannung am Kondensator im ersten Quadranten berührt die betreffende Ecke mehrmals die entsprechende Elektrode. In der Simulation ist der mechanische Kontakt durch einen kurzzeitigen negativen

Abstand dokumentiert. Am realen Spiegel kommt es statt dessen zu einer Durchbiegung der Spiegelplatte inklusive Rückfederung. In der zweiten Phase der Simulation (ab etwa 0,1 ms) tritt mechanischer Kontakt auch im zweiten Quadranten auf, weil die dort angelegte Betriebsspannung jetzt genügend hoch ist. In Bild 7.29 sind die Schaltzustände der beiden (zum ersten bzw. zweiten Quadranten gehörenden) fremdgesteuerten Schalter dargestellt. Null bedeutet „Schalter offen“ (kein Kontakt) und Eins heißt „Schalter geschlossen“ (mechanischer Kontakt und damit elektrischer Kurzschluss). Die Gleichzeitigkeit zwischen dem Auftreffen der Spiegelplatte auf der Elektrode (in Bild 7.28) und dem Schließen des Schalters (in Bild 7.29) ist klar ersichtlich. Gleiches gilt für den Zusammenhang zwischen dem Abheben der Platte und dem Öffnen des Schalters.

Bild 7.30 enthält die Zeitgeschichten der Kapazitäten der vier Quadranten, wie sie sich aus dem Verlauf der mechanischen Koordinaten ergeben. Hier fallen die Zeitpunkte

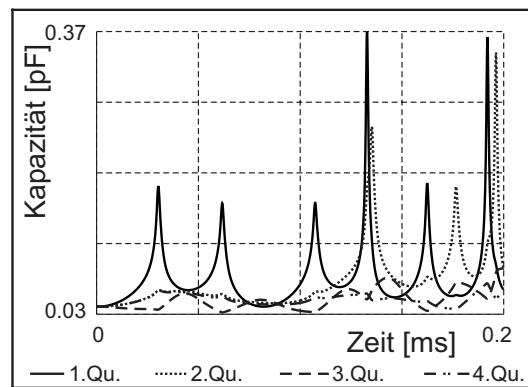


Bild 7.30: Kapazitäten des 1. bis 4. Quadranten

des mechanischen Kontaktes (d.h. des tiefsten „Eintauchens“ der Platte in die Elektrode) jeweils mit einem Maximum der betreffenden Kapazität zusammen. Schließlich repräsentieren die Bilder 7.31 und 7.32 das Verhalten der ETS-Teilschaltungen für den ersten und zweiten Quadranten. In Bild 7.31 sind die Ladungen der beiden Kondensatoren aufge-

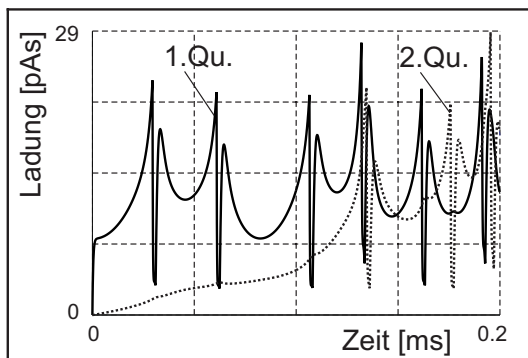


Bild 7.31: Ladungen des 1. und 2. Quadranten

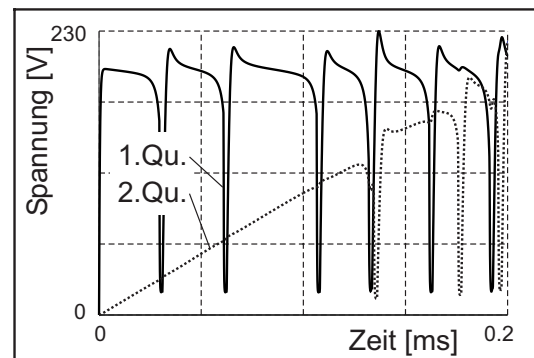


Bild 7.32: Spannungen des 1. und 2. Quadranten

tragen. Bild 7.32 enthält die zugehörigen Spannungen über den Kondensatoren. In allen

Kurven sind gewisse „Einbrüche“ sichtbar, die zeitlich mit mechanischen Kontakten zusammenfallen. Sie dokumentieren Entladungsprozesse der Kondensatoren, die infolge der elektrischen Kurzschlüsse („Schalter geschlossen“) auftreten. Gleichzeitig erfolgt eine drastische Verringerung der auf die Platte wirkenden elektrostatischen Kraft. Die Dynamik dieser Prozesse ist natürlich stark von dem relativ geringen Kurzschlusswiderstand  $R_k$  und damit hauptsächlich von der Oberflächenbeschaffenheit von Spiegelplatte und Elektroden abhängig. Einen ebenso starken Einfluss hat aber auch die Dauer des mechanischen Kontaktes, welcher wiederum von der im Modell verwendeten Federsteifigkeit (und damit von der Verwölbungssteifigkeit der Spiegelplatte) abhängt.

Die hier aufgeführten Simulationsergebnisse zeigen die prinzipielle Anwendbarkeit der in den Kapiteln 3 und 4 vorgestellten Methode zur einheitlichen mathematischen Modellierung von EMS und der in Kapitel 5 vorgeschlagenen Erweiterung auf Systeme mit Strukturvariabilität. Dazu wurde auf der Basis von elektrostatisch angetriebenen Mikrosiegeln ein EMS „konstruiert“, in dem mechanische und elektrische Schaltphänomene gleichzeitig auftreten.

### 7.3.3 Parameteroptimierung am Mikrospiegel

Für die Optimierung von Parametern eines EMS (vgl. Abschnitt 6.2) erweist sich die einheitliche mathematische Modellierung solcher Systeme nach Kapitel 3 als tragfähiges Fundament. Hier sollen zwei kleine Beispiele einer solchen Optimierung an einem Mikrospiegel angeführt werden.

Bei einer Anordnung von mehreren Spiegeln in Array-Form treten infolge von Herstellungstoleranzen stets gewisse Exemplarstreuungen auf. Durch Hinzufügen von zusätzlichen minimalen Massen am Spiegelrand könnte gezielt Einfluss auf die beiden Eigenfrequenzen des mechanischen Teilsystems jedes einzelnen Spiegels genommen werden. Auf diese Weise wäre es möglich, die Exemplarstreuung durch Anbringen von zusätzlichem oder Entfernen von überflüssigem Material zu verringern und somit die Funktionalität eines solchen Arrays zu verbessern. In einem ersten Beispiel soll für einen 1D-Spiegel – mit Eigenfrequenzen von z.B. 339 Hz und 1362 Hz in horizontaler Spiegelposition – durch zusätzliche Massen die erste Resonanzfrequenz auf 320 Hz und die zweite auf 1300 Hz gesenkt werden. Zu diesem Zweck soll Material punktförmig an den Spiegelrändern jeweils in der Kantenmitte (auf der spiegel festen  $x$ - und  $y$ -Achse) befestigt werden. Diese Zusatzmassen verändern im Wesentlichen die Trägheitsmomente der Spiegelplatte und haben damit direkten Einfluss auf das MTS. Als Zielfunktional wird die Summe der quadratischen Abweichungen der ermittelten Eigenfrequenzen von deren Sollwerten eingesetzt. Der Optimierungsalgorithmus verwendet zur Bestimmung des Zielfunktionals die in **alaska** implementierte *Modalanalyse des elektromechanischen Systems*. In Bild 7.33 ist der Verlauf der beiden Optimierungsparameter mit zunehmender Anzahl von Iterationsschritten dargestellt. Durch Anbringen einer zusätzlichen Masse von je  $15,6 \mu\text{g}$  an beiden zur  $x$ -Achse parallelen Spiegelkanten und von je  $19,8 \mu\text{g}$  an den beiden anderen Kanten werden schließlich die gewünschten Resonanzfrequenzen erreicht.

In einem zweiten Beispiel soll durch Veränderung der Kantenlänge eines 2D-Spiegels dessen Resonanzfrequenz der Taumelbewegung einen bestimmten vorgegebenen Wert erreichen. Die quadratische Form des Spiegels soll dabei erhalten bleiben. Eine  $15 \mu\text{m}$  dicke

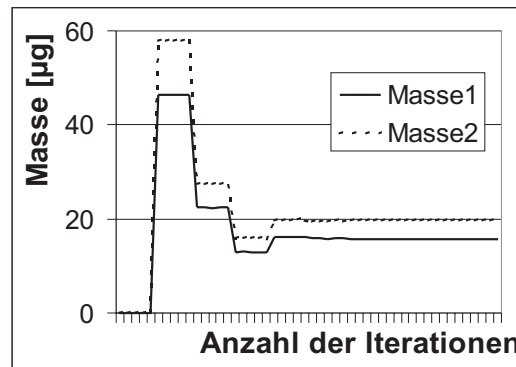


Bild 7.33: Parameteroptimierung am 1D-Spiegel

Spiegelplatte mit  $500\ \mu\text{m}$  Kantenlänge habe z.B. eine Resonanzfrequenz von  $22,5\ \text{kHz}$ . Die Optimierungsaufgabe besteht darin, zu ermitteln, welche Kantenlänge der Spiegel besitzen müsste, damit Resonanz bei möglichst genau  $21\ \text{kHz}$  auftritt. Dabei müssen alle Einflüsse der Kantenlänge auf die Eigenformen des Spiegels in Betracht gezogen werden. Neben den Trägheitseigenschaften (Masse, Trägheitsmomente) verändern sich mit wachsender Kantenlänge auch die elektrisch erzeugten Kräfte infolge der vergrößerten aktiven Elektrodenflächen. Dadurch wird – bei Auslenkung aus der horizontalen Lage – die Resonanzfrequenz zusätzlich verschoben. Eine Variation der Spiegelkantenlänge hat somit direkten Einfluss sowohl auf das MTS als auch auf das ETS. Deshalb ist die Verwendung eines einheitlichen Modells des EMS von entscheidendem Vorteil für eine Parameteroptimierung. Die Federkräfte sollen nicht mit der Spiegelgröße variieren, d.h., der Rahmen wird dem Spiegel entsprechend angepasst. Die Zielfunktionalbestimmung erfolgt während der Optimierung mittels Modalanalyse. In den Bildern 7.34 und 7.35 ist jeweils der Verlauf der Kantenlänge als Optimierungsparameter mit zunehmender Anzahl von Iterationsschritten dargestellt. Für die horizontale Lage wurde eine Kantenlänge von  $517,5\ \mu\text{m}$  ermittelt. Wenn die Resonanzfrequenz von  $21\ \text{kHz}$  in gekippter Spiegelage bei z.B.  $150\ \text{V}$  an einer Elektrode erreicht werden soll, muss die Kantenlänge  $498,5\ \mu\text{m}$  betragen.

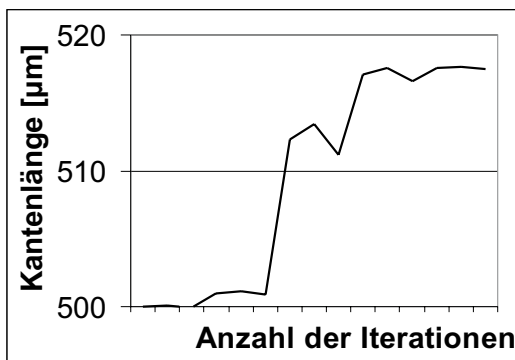


Bild 7.34: Parameteroptimierung am 2D-Spiegel bei Horizontallage

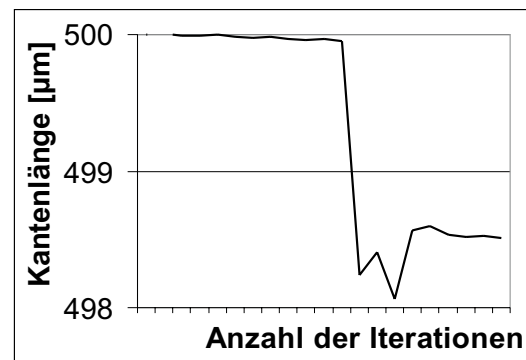


Bild 7.35: Parameteroptimierung am 2D-Spiegel bei Schräglage

### 7.3.4 Panoramaprojektion

Mit dem EMS-Modell des Mikrospiegels ist prinzipiell eine dynamische Steuerung mittels erweitertem PD-Regler gemäß Abschnitt 6.3 möglich. Die Konstruktion des Mikrospiegels ist allerdings so ausgelegt, dass die Bewegung der Spiegelplatte durch elektrisch erzeugte Kräfte/Momente gesteuert werden soll. Eine Anwendung der in 6.3.3 bzw. 6.3.5 dargestellten Regelgesetze wäre somit nur unter zusätzlichen konstruktiven Maßnahmen möglich. Deshalb kommt hier der in Abschnitt 6.3.7 beschriebene Sonderfall der Steuerung des MTS mittels ETS zum Einsatz.

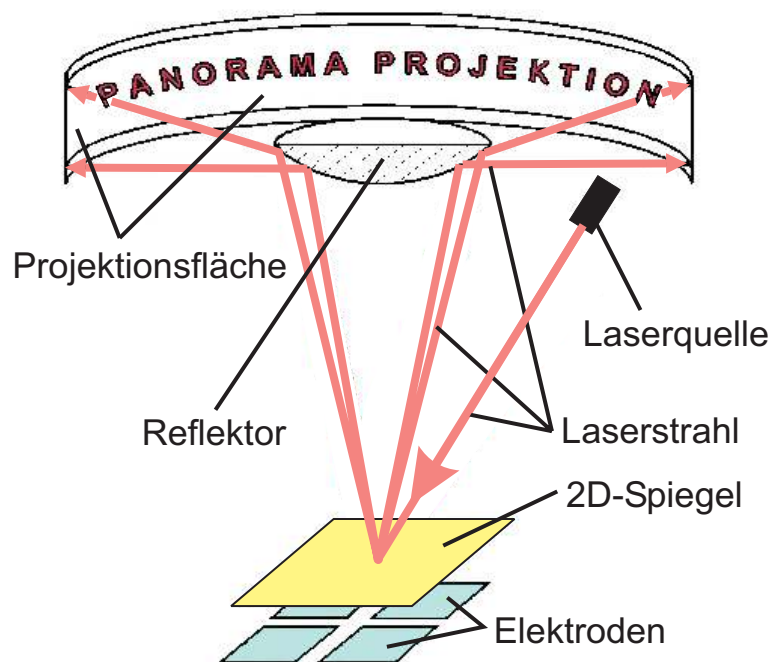


Bild 7.36: Prinzip der Panorama-Projektion

Der prinzipielle Aufbau einer Panorama- oder Rundumprojektion mittels 2D-Spiegel ist in Bild 7.36 dargestellt. Der optische Strahl einer Laserquelle wird vom Spiegel auf einen rotationssymmetrischen Körper mit verspiegelter Oberfläche (Reflektor) reflektiert, der sich oberhalb des Spiegels befindet (Symmetrieachse parallel zur  $z$ -Achse des Spiegels). Von dort gelangt er auf die Innenseite eines Zylinders und erzeugt einen Lichtpunkt. Die Position eines solchen Lichtpunktes ist von der momentanen Lage der Spiegelplatte abhängig. Alle Punkte, die mit einer möglichen Auslenkung der Platte erreicht werden können, bilden zusammen den Projektionsbereich. Ziel ist eine zeilenweise Überstreichung dieses Projektionsbereiches, d.h., der Lichtpunkt soll nahezu waagrecht auf der Zylinderinnenseite entlang laufen, wobei die Steigung so berechnet ist, dass nach einer Umrundung genau die nächsthöhere Pixelzeile geschrieben wird. Durch geeignete Ein-/Austastung der Laserquelle kann dann z.B. ein Schriftzug auf der Projektionsfläche dargestellt werden (Rastergrafik). Nach erfolgter Bilderzeugung wird in einer Dunkelphase der Laserstrahl wieder an den Ausgangspunkt zurück geführt.

Um den beschriebenen Strahlenverlauf zu erzeugen, muss der Spiegel eine Bewegung derart durchführen, dass der Reflexionspunkt auf dem rotationssymmetrischen Körper eine archimedische (anwachsende „kreisförmige“) Spirale beschreibt. Diese Taumelbewegung ist durch geeignete Auslenkungen des Spiegels um die  $x$ - bzw.  $y$ -Achse gekennzeichnet. Eine vertikale Spiegelbewegung hat auf die Form der auf dem Reflektor entstehenden Spirale und damit auf das darzustellende Bild nur einen vernachlässigbar kleinen Einfluss. Die zu steuernden Koordinaten sind somit die beiden Bryantwinkel  $\alpha$  und  $\beta$  der Spiegeldrehungen um die körperfeste  $x$ - bzw.  $y$ -Achse. Die Vertikalbewegung ( $z$ -Koordinate) muss nicht gesteuert werden. Damit kann mittels inverser Kinematik eine Solltrajektorie der beiden dynamisch zu steuernden Koordinaten im Konfigurationsraum des mechanischen Teilsystems bestimmt werden. Gemäß Abschnitt 6.3.7 können zu jedem Zeitpunkt in einem dreistufigen Algorithmus zunächst die notwendigen mechanischen verallgemeinerten Kräfte (in diesem Fall die Momente um die körperfesten Achsen  $x$  und  $y$ ), daraus eine geeignete Lage des ETS (hier der Kondensatorladungen) und damit schließlich die notwendigen elektrischen verallgemeinerten Kräfte (die Werte der vier Spannungsquellen) berechnet werden.

Die Bilder 7.37 und 7.38 zeigen Ergebnisse der Simulation eines Anfahrvorgangs. Zu

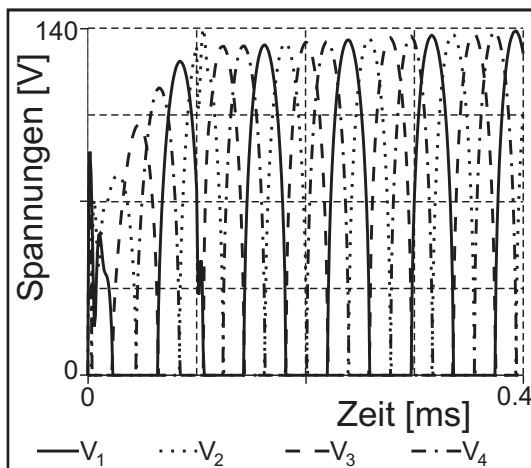


Bild 7.37: Zeitverlauf der errechneten Spannungen

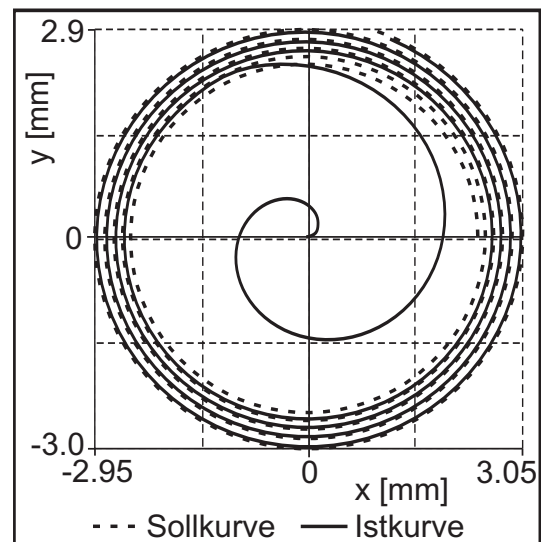


Bild 7.38: Verlauf des Laserpunktes auf dem Reflektor

jedem Integrationszeitpunkt werden dazu in der genannten Weise die benötigten Spannungen (Bild 7.37) errechnet und in das Simulationsmodell eingespeist. Startend aus der Ruhelage (ladungslose Kondensatoren, Laserpunkt bei  $x = y = 0$  mm) wird der Spiegel in eine Taumelbewegung versetzt (vgl. Volllinie in Bild 7.38). Gegenüber dem Beginn der Solltrajektorie (Strichlinie in Bild 7.38) stellt die Ruhelage eine erhebliche Störung dar. Deshalb nähert sich die Spiegelbewegung zunächst asymptotisch der Sollbewegung. Nach etwa 0,1 ms ist die Solltrajektorie erreicht und der Spiegel bewegt sich im weiteren Verlauf stabil nahezu entlang der vorgegebenen Kurve. Nach Ablauf der ersten Bilderzeugungsphase und der darauf folgenden Dunkelphase existiert keine Anfangsstörung mehr. Die

Amplitude der Taumelbewegung wächst dann linear entsprechend der Sollvorgabe. Das ermöglicht eine verzerrungsfreie Darstellung des Bildes auf der Projektionsfläche.

Mikrospiegel sind hochdynamische Systeme. Das Verhältnis von Simulationszeit zu erforderlicher Rechenzeit ist selbst bei heutigen Computern noch recht ungünstig. Deshalb ist die hier vorgestellte Regelung nur innerhalb einer dynamischen Simulation anwendbar. Ein realer Spiegel kann derzeit nicht auf diese Weise online geregelt werden. Es ist aber durchaus denkbar, die zunächst mittels Simulation ermittelten Spannungsverläufe danach am realen Spiegel einzuspeisen und so eine offline-Steuerung zu realisieren. Falls dann keine unvorhergesehenen Störungen auftreten, wird bei genügend genauem Modell des realen Systems die tatsächliche Spiegelbewegung sehr nahe der gewünschten liegen. Diese Verfahrensweise konnte erfolgreich getestet werden.

Im Abschnitt 7.3 wurden am Beispiel von elektromechanischen Mikrospiegeln zwei Methoden der in Kapitel 6 vorgestellten inversen Problemstellungen angewendet. Die nichtlineare Parameteroptimierung wurde exemplarisch an einem 1D- und einem 2D-Spiegel gezeigt. Die nichtlineare dynamische Steuerung in Gestalt des in Abschnitt 6.3.7 vorgestellten Sonderfalles (Steuerung des MTS mittels elektrisch erzeugten Kräften) wurde anhand der Panoramaprojektion mittels 2D-Spiegel dargestellt.





# Kapitel 8

## Zusammenfassung und Ausblick

In der Arbeit werden verschiedene *Methoden zur Analyse und Synthese elektromechanischer Systeme* vorgestellt. Grundlage ist dabei eine *einheitliche mathematische Modellierung* solcher Systeme auf der Basis des Prinzips der virtuellen Arbeit in Lagrange'scher Fassung. Zunächst wird die Anwendung dieses Prinzips auf rein mechanische und rein elektrische Systeme wiederholt. Danach wird die Herleitung der Bewegungsgleichungen des EMS als einheitliches System mittels dieses Prinzips nochmals dargestellt. Das dabei gewonnene differenzial-algebraische Gleichungssystem dient als Grundlage aller weiteren Betrachtungen.

Als Methoden der Analyse werden für strukturfeste EMS neben der numerischen Integration auch die Bestimmung von statischen Gleichgewichtszuständen und die Herleitung der linearisierten Gleichungen für die Schwingungsanalyse dargelegt. In den Bewegungsgleichungen des elektrischen Teilsystems können Ordnungsreduktionen oder Entartungen auftreten. Diese können z.B. begründet sein in nicht vollständig besetzten Koeffizientenmatrizen oder in linearen Abhängigkeiten der Koeffizienten. Deshalb wird für alle Analysemethoden eine entsprechende Klasseneinteilung bzgl. der elektrischen generalisierten Koordinaten verwendet. Für einen Gleichgewichtszustand eines EMS wird eine geeignete Definition angegeben. Die linearisierten Gleichungen werden sowohl für die Modalanalyse als auch für Störungsuntersuchungen dargestellt. Einer der beiden Hauptinhalte der Arbeit ist jedoch die einheitliche Modellierung und Behandlung von *strukturvariablen EMS*. Dazu werden zunächst die Phänomene der Strukturvariabilität (Schaltphänomene) in der mechanischen und der elektrischen Domäne als unilaterale Bindungen aufgefasst. Jede dieser Bindungen bewirkt eine einseitige Beschränkung des Konfigurationsraumes des EMS. Bei Erreichen einer solchen Beschränkung erfolgt eine Strukturänderung des Systems und damit auch der Bewegungsgleichungen. Bei Existenz mehrerer Schaltphänomene ist das Auffinden einer neuen erlaubten Struktur ein kombinatorisches Problem, das mittels LCP gelöst werden kann. Nach einer kurzen Wiederholung der entsprechenden Beschreibung von Schaltphänomenen in der Mechanik (Kontakt, Reibung) wird in der Arbeit ausführlich auf die Behandlung solcher Phänomene in der elektrischen Domäne eingegangen. Dazu werden für selbststeuernde Schaltbauelemente die komplementären Schaltzustände angegeben und – daraus abgeleitet – Zustandsbedingungen, Indikatorfunktionen und Schaltzulässigkeitskriterien formuliert. Das Aufstellen des LCP erfolgt unter Beachtung der Klasseneinteilung der generalisierten elektrischen Koordinaten. Die gesamte Methode wird anhand einiger Schaltbauelemente (Diode, Zenerdiode, Thyristor)

ausführlich erläutert. Die in der Arbeit dargestellte Behandlung von Schaltphänomenen mittels unilateraler Bindungen und LCP ermöglicht eine einheitliche Modellierung von strukturvariablen EMS auf der Basis des Gesamtsystems der Bewegungsgleichungen.

Die Synthese (der Entwurf) eines Systems wird in der Arbeit als inverses Problem verstanden. Als eine diesbezügliche Methode wird die nichtlineare Parameteroptimierung als eine Lösung des inversen Problems bei fester Struktur aber nicht komplett vorgegebenen Konstitutivparametern erwähnt. Hier ist das einheitliche Modell des EMS insbesondere dann von Vorteil, wenn Parameter bestimmt werden sollen, die das Verhalten sowohl des mechanischen als auch des elektrischen Teilsystems beeinflussen. Der zweite der beiden Hauptinhalte der Arbeit ist die *nichtlineare dynamische Steuerung* von EMS als die Lösung des inversen Problems bei fester Gesamtkonfiguration (Struktur und Konstitutivparameter). Dabei sind Vorgaben für die zeitliche Abfolge von mechanischen und/oder elektrischen Koordinaten (darstellbar als explizit zeitabhängige Sollwerte für die generalisierten Koordinaten) zugelassen. Ausgehend von den EMS-Bewegungsgleichungen (ohne zusätzliche Zwangsbedingungen) werden unter Einbeziehung der Klasseneinteilung der generalisierten elektrischen Koordinaten zunächst die „Voronetz“-Gleichungen eines teilweise gesteuerten EMS (underactuated system) abgeleitet. Darauf aufbauend wird mit gezielten Modifikationen ein so genannter *erweiterter PD-Regler* entworfen. Dieser besteht aus einer nichtlinearen Vorsteuerung unter Verwendung der inversen Dynamik des Systems und einer linearen Rückführung des Lage- und Geschwindigkeitsfehlers. Der Nachweis der globalen (asymptotischen) Stabilität des vorgeschlagenen Regelgesetzes gelingt mittels expliziter Konstruktion einer Lyapunov-Funktion. Schließlich wird noch auf den wichtigen Sonderfall der dynamischen Steuerung des mechanischen Teilsystems ausschließlich mit elektrisch erzeugten Kräften/Momenten eingegangen.

Einige Beispiele, die die Anwendung der Analyse- und Synthesemethoden zeigen, runden die Arbeit ab.

Zukünftige Arbeiten sollten auf die Erweiterung und Vertiefung des hier vorgestellten theoretischen Grundgerüsts einer Modellierung elektromechanischer Systeme gerichtet sein. Verschiedene Sachverhalte verdienen dabei Beachtung:

- Berücksichtigung nichtlinearer elektrischer Bauelemente (z.B. Kennlinien von Dioden und Transistoren, wenn diese nicht als Schaltbauelemente idealisiert werden können),
- Berücksichtigung nichtlinearer elektromagnetischer Effekte wie Hysterese und Sättigung (vgl. auch [227]),
- tiefgreifende Untersuchungen der LCP-Anwendung für Systeme mit sich gegenseitig beeinflussenden mechanischen und elektrischen Schaltphänomenen,
- Zusammenführung der Ergebnisse zum erweiterten PD-Regler für Starrkörpersysteme mit zusätzlichen Zwangsbedingungen (CMS) (vgl. [90, 139]) und dem in der vorliegenden Arbeit vorgestellten erweiterten PD-Regler für EMS,
- Beschreibung von EMS mittels Lagrange-Funktionen, die in den Geschwindigkeiten nicht quadratisch sind, z.B. zur Modellierung allgemeiner Wirbelstromeffekte etwa bei Linearmotoren mit nicht strukturiertem Sekundärteil (siehe z.B. [135]).

# Anhang A

## Integrabilitätsbedingungen und Zustandsfunktionen

Dieser Anhang stellt Ergänzungen zu den Kapiteln 2 und 3 bereit. Er stützt sich wesentlich auf die Arbeiten zur Lagrange-basierten EMS-Modellierung von MAISSER/STEIGENBERGER [142, 143, 220, 221] sowie deren Weiterentwicklung in [131, 144].

### A.1 Mehrkörpersysteme

Im Anhang A.1 gelten folgende Indexvereinbarungen:  $\kappa, \lambda, \varrho \in J$ ;  $\alpha, \beta \in J \cup \{0\}$  ( $J$  – Indexmenge der generalisierten Koordinaten des MKS,  $q^0 \equiv t$ ).

In Abschnitt 2.2 erfolgt die Herleitung der Bewegungsgleichungen eines Mehrkörpersystems (MKS) mittels Zerlegung der Kräfte gemäß (2.10) mit (2.11). Die für (2.11a) bzw. (2.11c) notwendigen und hinreichenden Integrabilitätsbedingungen lauten (siehe [131])

$$\partial_{[\kappa} Q_{\lambda]}^{(0)} = 0, \quad (\text{A.1})$$

$$\dot{\partial}_{[\kappa} Q_{\lambda]}^{(2)} = 0. \quad (\text{A.2})$$

Die zugehörigen Zustandsfunktionen, Potenzial  $U$  und Dissipationsfunktion  $D$ , sind dann wegunabhängige Linienintegrale:

$$U(q, t) := \int_0^{q^\kappa} Q_\kappa^{(0)}(q, t) dq^\kappa, \quad D(\dot{q}, q, t) := \int_0^{\dot{q}^\kappa} Q_\kappa^{(2)}(\dot{q}, q, t) d\dot{q}^\kappa. \quad (\text{A.3a,b})$$

Die für (2.11b) notwendigen und hinreichenden Integrabilitätsbedingungen sind z.B. in [18] zu finden (siehe auch [16]). Die  $Q_\kappa^{(1)}$  müssen notwendigerweise linear in  $\dot{q}^\lambda$  mit schiefsymmetrischer Koeffizientenmatrix  $w_{\kappa\lambda}$  sein:

$$Q_\kappa^{(1)} = w_{\kappa\lambda}(q, t)\dot{q}^\lambda + w_{\kappa 0}(q, t).$$

Das verallgemeinerte Potenzial  $V$  muss dann ebenfalls linear in  $\dot{q}^\kappa$  sein:

$$V(\dot{q}, q, t) = \omega_\kappa(q, t)\dot{q}^\kappa + \omega_0(q, t). \quad (\text{A.4})$$

Dabei müssen die  $\omega_\kappa, \omega_0$  einem System partieller Differentialgleichungen

$$2\partial_{[\alpha}\omega_{\beta]} = w_{\alpha\beta}$$

genügen. Dieses System besitzt genau dann Lösungen, wenn  $\partial_\rho w_{\kappa\lambda} + \partial_\lambda w_{\rho\kappa} + \partial_\kappa w_{\lambda\rho} = 0$  und  $2\partial_{[\lambda} w_{\kappa]0} = \partial_0 w_{\kappa\lambda}$  bzw. zusammengefasst

$$\partial_\beta w_{\kappa\lambda} + \partial_\lambda w_{\beta\kappa} + \partial_\kappa w_{\lambda\beta} = 0 \quad (\text{A.5})$$

erfüllt ist.

Die Bedingungen (A.1), (A.2) und (A.5) wurden zuerst von HELMHOLTZ angegeben. Sie entsprechen gleichzeitig den notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Existenz eines kinetischen Potentials erster Ordnung (Lagrange-Funktion  $\Lambda(\dot{q}, q)$ ) gemäß

$$\left( \dot{\partial}_\kappa \Lambda \right)' - \partial_\kappa \Lambda = Q_\kappa.$$

In der von HELMHOLTZ angeführten Form ([83]) lauten sie

$$\ddot{\partial}_{[\lambda} Q_{\kappa]} = 0, \quad \dot{\partial}_{(\lambda} Q_{\kappa)} = \left( \ddot{\partial}_\kappa Q_\lambda \right)', \quad \partial_{[\lambda} Q_{\kappa]} = \frac{1}{2} \left( \dot{\partial}_{[\lambda} Q_{\kappa]} \right)', \quad \ddot{\partial}_\lambda \ddot{\partial}_\rho Q_\kappa = 0.$$

## A.2 Elektrische Systeme

Im Anhang A.2 gelten folgende Indexvereinbarungen:  $i, j \in \Gamma$ ;  $\mu, \nu, \omega \in H^*$  ( $\Gamma$  – Indexmenge der Zweige des Netzwerkgraphen des ES,  $H^*$  – Indexmenge der Cogerüstkanten).

In Abschnitt 2.3 erfolgt die Herleitung der Bewegungsgleichungen eines elektrischen Systems (ES) in Ladungsformulierung unter Einhaltung gewisser Integrabilitätsbedingungen. Diese lassen sich aus dem Prinzip der virtuellen Arbeit (2.38) unter Verwendung der Zerlegung (2.39) herleiten. Darin implizit enthalten ist die konkrete Bestimmung der Zustandsfunktionen  $W'_m$ ,  $W_e$  und  $V^h$ .

Die aus Induktoren resultierenden Anteile der virtuellen Arbeit lassen sich mit den Maschenflüssen

$$\psi_\mu(\dot{q}, t) = A^i_\mu \Psi_i \quad (\text{A.6})$$

schreiben als

$$V_i^{(L)} \delta \bar{q}^i = \dot{\Psi}_i \delta \bar{q}^i = \dot{\Psi}_i A^i_\mu \delta q^\mu = \dot{\psi}_\mu \delta q^\mu.$$

Mit einer Zustandsfunktion  $W'_m(\dot{q}, t)$  ist  $(\dot{\partial}_\mu W'_m) \delta q^\mu = \dot{\psi}_\mu \delta q^\mu$  für beliebige  $\delta q^\mu$  nur dann erfüllbar, falls  $\dot{\partial}_\mu W'_m = \psi_\mu + \text{const.}$  gilt. Diese partiellen Differentialgleichungen für  $W'_m$  sind nur unter der Bedingung  $\dot{\partial}_{[\nu} \psi_{\mu]} = 0$  integrierbar. Wegen  $\dot{\partial}_\mu(\cdot) = A^i_\mu \dot{\partial}_i(\cdot)$  und (A.6) muss somit

$$A^i_\mu A^j_\nu \dot{\partial}_{[i} \Psi_{j]} = 0 \quad (\text{A.7})$$

gelten. In diesem Fall heißt das wegunabhängige Linienintegral

$$W'_m(\dot{q}, t) := \int \psi_\mu dq^\mu$$

*magnetische Coenergie* des ES. Für einen linearen Induktor gilt  $\Psi_i = L_{ij}(t) \dot{q}^j + \Psi_{i0}(t)$  ( $L_{ij} = L_{ji}$  – Induktivitäten,  $\Psi_{i0}$  – explizit zeitabhängiger magnetischer Fluss infolge Permanentmagneten) und somit

$$W'_m = \frac{1}{2} L_{ij}(t) \dot{q}^i \dot{q}^j + \Psi_{i0}(t) \dot{q}^i \Big|_{MT}.$$

Die aus Kondensatoren und Spannungsquellen resultierenden Anteile der virtuellen Arbeit lassen sich mit

$$v_{\mu}^{(C)}(q, t) = A^i{}_{\mu} V_i^{(C)}, \quad v_{\mu 0}(t) = A^i{}_{\mu} V_{i0} \quad (\text{A.8})$$

schreiben als

$$(V_i^{(C)} + V_{i0}) \delta \bar{q}^i = (V_i^{(C)} + V_{i0}) A^i{}_{\mu} \delta q^{\mu} = (v_{\mu}^{(C)} + v_{\mu 0}) \delta q^{\mu}.$$

Mit einer Zustandsfunktion  $W_e(q, t)$  ist  $\partial_{\mu} W_e \delta q^{\mu} = (v_{\mu}^{(C)} + v_{\mu 0}) \delta q^{\mu}$  für beliebige  $\delta q^{\mu}$  nur dann erfüllbar, falls  $\partial_{\mu} W_e = v_{\mu}^{(C)} + v_{\mu 0} + \text{const.}$  gilt. Diese partiellen Differentialgleichungen für  $W_e$  sind nur unter der Bedingung  $\partial_{[\nu} v_{\mu]}^{(C)} = 0$  integrierbar ( $\partial_{\nu} v_{\mu 0} \equiv 0$ ). Wegen  $\partial_{\mu}(\cdot) = A^i{}_{\mu} \partial_i(\cdot)$  und (A.8) muss somit

$$A^i{}_{\mu} A^j{}_{\nu} \partial_{[i} V_{j]}^{(C)} = 0 \quad (\text{A.9})$$

gelten. In diesem Fall heißt das wegunabhängige Linienintegral

$$W_e(q, t) := \int (v_{\mu}^{(C)} + v_{\mu 0}) dq^{\mu}$$

*elektrische Energie* des ES. Für einen linearen Kondensator gilt  $V_i^{(C)} = C_{ij}(t) \bar{q}^j + V_{i0}^{(C)}$  ( $C_{ij} = C_{ji}$  – Elemente der inversen Matrix der Teilkapazitäten,  $V_{i0}^{(C)}$  – Spannungen infolge Anfangsladungen) und somit

$$W_e = \frac{1}{2} C_{ij}(t) \bar{q}^i \bar{q}^j + V_{i0}^{(C)} \bar{q}^i \Big|_{MT}.$$

Die aus (zunächst nicht unbedingt quasilinearen) Resistoren resultierenden Anteile der virtuellen Arbeit lassen sich mit

$$v_{\mu}^{(R)}(\dot{q}, q, t) = A^i{}_{\mu} V_i^{(R)} \quad (\text{A.10})$$

schreiben als

$$V_i^{(R)} \delta \bar{q}^i = V_i^{(R)} A^i{}_{\mu} \delta q^{\mu} = v_{\mu}^{(R)} \delta q^{\mu}.$$

Mit einer Zustandsfunktion  $D(\dot{q}, q, t)$  ist dann  $\dot{\partial}_{\mu} D \delta q^{\mu} = v_{\mu}^{(R)} \delta q^{\mu}$  für beliebige  $\delta q^{\mu}$  nur dann erfüllbar, falls  $\dot{\partial}_{\mu} D = v_{\mu}^{(R)} + \text{const.}$  gilt. Diese partiellen Differentialgleichungen für  $D$  sind nur unter der Bedingung  $\dot{\partial}_{[\nu} v_{\mu]}^{(R)} = 0$  integrierbar. Wegen  $\partial_{\mu}(\cdot) = A^i{}_{\mu} \partial_i(\cdot)$  und (A.10) muss somit

$$A^i{}_{\mu} A^j{}_{\nu} \dot{\partial}_{[i} V_{j]}^{(R)} = 0 \quad (\text{A.11})$$

gelten. In diesem Fall heißt das wegunabhängige Linienintegral

$$D(\dot{q}, q, t) := \int v_{\mu}^{(R)} d\dot{q}^{\mu} \quad (\text{A.12})$$

*Dissipationsfunktion* des ES. Für einen quasilinearen Resistor gilt  $V_i^{(R)} = R_{ij}(q, t)\dot{q}^j$  und somit

$$v_\mu^{(R)} = r_{\mu\nu}(q, t)\dot{q}^\nu + s_\mu(q, t),$$

wobei der erste Term von den Maschenströmen (d.h. den generalisierten „Geschwindigkeiten“) herrührt ( $r_{\mu\nu} = A^i{}_\mu A^j{}_\nu R_{ij}$ ) und der zweite Term in Folge eventuell vorhandener Stromquellen entsteht ( $s_\mu = A^i{}_\mu A^j{}_{\nu_0} R_{ij} \dot{q}_0^{\nu_0}(t)$ ,  $\nu_0 \in H_0$ ). Sei  $r_{\mu\nu} = s_{\mu\nu} + w_{\mu\nu}$  mit  $s_{\mu\nu} := r_{(\mu\nu)}$  und  $w_{\mu\nu} := r_{[\mu\nu]}$ . Dann zerfällt  $v_\mu^{(R)}$  in einen *dissipativen* ( $v_\mu^{(R_d)}$ ) und einen *gyroskopischen* Anteil ( $v_\mu^{(R_g)}$ ), wobei  $v_\mu^{(R_d)} = s_{\mu\nu}\dot{q}^\nu + s_\mu$  und  $v_\mu^{(R_g)} = w_{\mu\nu}\dot{q}^\nu$  ist. Damit sind für den dissipativen Anteil die Bedingungen (A.11) erfüllt und nach (A.12) ist

$$D = \frac{1}{2}s_{\mu\nu}(q, t)\dot{q}^\mu\dot{q}^\nu + s_\mu(q, t)\dot{q}^\mu$$

die dem dissipativen Anteil der quasilinearen Resistoren zugeordnete *Rayleigh'sche Dissipationsfunktion*. Für den gyroskopischen Anteil ergibt sich schließlich die Existenz einer Zustandsfunktion  $V^h$  mit  $\delta_\mu V^h = (\dot{\partial}_\mu V^h) - \partial_\mu V^h = -v_\mu^{(R_g)}$  unter den Bedingungen

$$\partial_\omega w_{\mu\nu} + \partial_\nu w_{\omega\mu} + \partial_\mu w_{\nu\omega} = 0, \quad \partial_0 w_{\mu\nu} = 0 \quad (\text{A.13})$$

( $q^0 \equiv t$ ). Dann sind die partiellen Differentialgleichungen  $2\partial_{[\mu}\omega_{\nu]} = w_{\mu\nu}$  integrierbar. Im Fall  $w_{\mu\nu} = r_{[\mu\nu]} = \text{const.}$  ist  $\omega_\nu = w_{\mu\nu}q^\mu$  und

$$V^h = \frac{1}{2}w_{\mu\nu}q^\mu\dot{q}^\nu$$

ist das *gyroskopische Potenzial* der quasilinearen Resistoren des ES.

Die Bedingungen (A.7), (A.9), (A.11) und (A.13) wurden zuerst von HELMHOLTZ angegeben. Sie entsprechen gleichzeitig den notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Existenz eines kinetischen Potenzials erster Ordnung (Lagrange-Funktion  $\Lambda(\dot{q}, q)$ ) gemäß

$$\left(\dot{\partial}_\mu \Lambda\right) - \partial_\mu \Lambda = v_\mu.$$

In der von HELMHOLTZ angeführten Form ([83]) lauten sie

$$\ddot{\partial}_{[\nu}v_{\mu]} = 0, \quad \dot{\partial}_{(\nu}v_{\mu)} = \left(\ddot{\partial}_\nu v_\mu\right), \quad \partial_{[\nu}v_{\mu]} = \frac{1}{2}\left(\dot{\partial}_{[\nu}v_{\mu]}\right), \quad \ddot{\partial}_\nu \ddot{\partial}_\omega v_\mu = 0.$$

Der Nachweis der Notwendigkeit und Hinlänglichkeit dieser Bedingungen stammt ebenfalls von HELMHOLTZ und ist gelegentlich wiederholt worden (z.B. in [131]).

### A.3 Elektromechanische Systeme

Im Anhang A.3 gelten folgende Indexvereinbarungen:  $\kappa, \lambda, \varrho, \sigma \in J$ ;  $\mu, \nu, \omega \in H^*$ ;  $a, b, c \in J \cup H^*$ ;  $\alpha, \beta, \gamma \in J \cup H^* \cup \{0\}$  ( $q^0 \equiv t$ );  $i, j \in \Gamma$ .

### A.3.1 Integrabilitätsbedingungen

Die Klasseneinteilung (3.9) mit (3.10) ist hinreichend für die Darstellbarkeit der  $Q_\kappa, v_\mu$  gemäß (3.7). Im Folgenden sind die Bedingungen für die Klassenzugehörigkeit für gewisse Kraft- und Spannungsanteile aufgeführt.

Das Funktionentupel  $(Q_\kappa^{(0)}, \psi_\mu, -v_\mu^{(0)})$  gehört zur Klasse  $K^{(0)}$  genau dann, wenn

$$\begin{aligned} \partial_{[\kappa} Q_{\lambda]}^{(0)} &= 0, & \dot{\partial}_{[\nu} \psi_{\mu]} &= 0, & \partial_{[\nu} v_{\mu]}^{(0)} &= 0, \\ \dot{\partial}_\mu Q_\kappa^{(0)} - \partial_\kappa \psi_\mu &= 0, & \partial_\mu Q_\kappa^{(0)} + \partial_\kappa v_\mu^{(0)} &= 0, & \partial_\nu \psi_\mu + \dot{\partial}_\mu v_\nu^{(0)} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Das Funktionentupel  $(Q_\kappa^{(1)}, -v_\mu^{(1)}) = (Q_a^{(1)})$  gehört zur Klasse  $K^{(1)}$  genau dann, wenn

$$Q_a^{(1)} = -r_{a\alpha}(q, t) \dot{q}^\alpha \quad (\text{A.15})$$

und (mit  $r_{0a} := -r_{a0}$ ,  $r_{00} := 0$ ,  $r_{[\alpha\beta]} := w_{\alpha\beta}$ )

$$r_{(\alpha\beta)} = 0, \quad \partial_\gamma w_{\alpha\beta} + \partial_\beta w_{\gamma\alpha} + \partial_\alpha w_{\beta\gamma} = 0. \quad (\text{A.16a,b})$$

Bedingung (A.15) bedeutet Linearität in  $\dot{q}$ , d.h.  $Q_\kappa^{(1)} = -w_{\kappa a}(q, t) \dot{q}^a - w_\kappa(q, t)$  sowie  $v_\mu^{(1)} = w_{\mu a}(q, t) \dot{q}^a + w_\mu(q, t)$ . Bedingung (A.16a) bedeutet Schiefsymmetrie der Koeffizientenmatrix und  $w_a = r_{a0}$ . Die Bedingungen (A.16b) sind gerade die notwendigen und hinreichenden Integrabilitätsbedingungen für das System partieller Differentialgleichungen

$$2\partial_{[\alpha} w_{\beta]} = w_{\alpha\beta} \quad (\text{A.17})$$

zur Bestimmung der Funktionen  $w_\alpha(q, t)$ . Sie lauten ausführlich  $\partial_c w_{ab} + \partial_b w_{ca} + \partial_a w_{bc} = 0$  und  $\partial_0 w_{ab} = 2\partial_{[b} w_{a]}$ . Schließlich gehört das Funktionentupel  $(Q_\kappa^{(2)}, -v_\mu^{(2)}) = (Q_a^{(2)})$  zur Klasse  $K^{(2)}$  genau dann, wenn

$$\dot{\partial}_{[a} Q_{b]}^{(2)} = 0, \quad \text{d.h.} \quad \dot{\partial}_{[\lambda} Q_{\kappa]}^{(2)} = 0, \quad \dot{\partial}_{[\nu} v_{\mu]}^{(2)} = 0, \quad \dot{\partial}_\mu Q_\kappa^{(2)} + \dot{\partial}_\kappa v_\mu^{(2)} = 0. \quad (\text{A.18})$$

### A.3.2 Ermittlung der Zustandsfunktionen

Die Funktionen  $Q_a$  seien gemäß (3.3) gegeben. Dann müssen diese nach (3.10) zerlegt werden derart, dass die Bedingungen (A.14), (A.16) und (A.18) identisch erfüllt sind. Wenn dies gelingt, können die zugehörigen Zustandsfunktionen wie folgt berechnet werden.

#### A.3.2.1 Zustandsfunktion $\Psi$

Nach (3.10) gilt für  $\Psi$  zunächst einmal die allgemeine Darstellung

$$\Psi := \int_{(0,0,0)}^{(\dot{q}^\mu, q^\mu, q^\kappa)} \psi_\mu(\dot{q}^c, q^c, t) d\dot{q}^\mu - v_\mu^{(0)}(\dot{q}^c, q^c, t) dq^\mu + Q_\kappa^{(0)}(\dot{q}^c, q^c, t) dq^\kappa.$$

Für dieses Linienintegral kann infolge der Wegunabhängigkeit von  $\Psi$  ein beliebiger Integrationsweg – also z.B.  $(0, 0, 0) \rightarrow (0, 0, q^\kappa) \rightarrow (0, q^\mu, q^\kappa) \rightarrow (\dot{q}^\mu, q^\mu, q^\kappa)$  – gewählt werden. Mit  $\tilde{v}_\mu^{(0)}(q^c, t) := v_\mu^{(0)}|_{\dot{q}^c=0}$  und  $\tilde{Q}_\kappa^{(0)}(q^\sigma, t) := Q_\kappa^{(0)}|_{\dot{q}^c=0, q^\omega=0}$  ist dann

$$\Psi := \int_0^{\dot{q}^\mu} \psi_\mu(\dot{q}^c, q^c, t) d\dot{q}^\mu - \int_0^{q^\mu} \tilde{v}_\mu^{(0)}(q^c, t) dq^\mu + \int_0^{q^\kappa} \tilde{Q}_\kappa^{(0)}(q^\sigma, t) dq^\kappa. \quad (\text{A.19})$$

Infolge der ausschließlichen Betrachtung diskreter EMS und damit der Anwendung der Kirchhoff-Theorie (als quasistationäre Näherung der Maxwell-Gleichungen) hängt die Zustandsfunktion  $\Psi$  nicht von den Ladungen  $q^\mu$  ab, d.h.  $\Psi = \Psi(\dot{q}^\omega, q^\sigma, t)$ . Dann gilt wegen (3.10)

$$\psi_\mu = \dot{\partial}_\mu \Psi = \psi_\mu(\dot{q}^\omega, q^\sigma, t), \quad v_\mu^{(0)} = -\partial_\mu \Psi \equiv 0, \quad Q_\kappa^{(0)} = \partial_\kappa \Psi = Q_\kappa^{(0)}(\dot{q}^\omega, q^\sigma, t)$$

und somit nach (A.19)

$$\Psi := \int_0^{\dot{q}^\mu} \psi_\mu(\dot{q}^\omega, q^\sigma, t) d\dot{q}^\mu + \int_0^{q^\kappa} \tilde{Q}_\kappa^{(0)}(q^\sigma, t) dq^\kappa. \quad (\text{A.20})$$

Ist  $\psi_\mu$  der verkettete magnetische Fluss im Fundamentalkreis  $\mu$ , so heißt  $\Psi$  *magnetomechanisches Copotenzial* des EMS („magnetische Coenergie“). Die dieser Zustandsfunktion entsprechenden Kräfte

$$Q_\kappa^{(0)} := \partial_\kappa \Psi = \int_0^{\dot{q}^\mu} \partial_\kappa \psi_\mu d\dot{q}^\mu + \tilde{Q}_\kappa^{(0)}(q^\sigma, t) \quad (\text{A.21})$$

sind dann magnetischen Ursprungs. Die  $\tilde{Q}_\kappa^{(0)}$  resultieren dabei aus Magnetfeldern, die in Induktoren durch Quellströme oder Permanentmagnete erzeugt werden.

Im Fall linearer Fluss-Strom-Relationen lassen sich weitere Aussagen machen. Mit

$$\psi_\mu = l_{\mu\nu}(q^\sigma, t)\dot{q}^\nu + \psi_{\mu 0}(q^\sigma, t), \quad l_{\mu\nu} = l_{\nu\mu}$$

ist nach (A.20) und (A.21)

$$\Psi = \frac{1}{2} l_{\mu\nu}(q^\sigma, t) \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu + \psi_{\mu 0}(q^\sigma, t) \dot{q}^\mu + \tilde{\Psi}(q^\sigma, t), \quad \tilde{\Psi} := \int_0^{q^\kappa} \tilde{Q}_\kappa^{(0)} dq^\kappa, \quad (\text{A.22})$$

$$Q_\kappa^{(0)} = \partial_\kappa \Psi = \frac{1}{2} \partial_\kappa l_{\mu\nu}(q^\sigma, t) \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu + \partial_\kappa \psi_{\mu 0}(q^\sigma, t) \dot{q}^\mu + \tilde{Q}_\kappa^{(0)}(q^\sigma, t). \quad (\text{A.23})$$

Zur Ermittlung von  $\tilde{\Psi}$  und  $\tilde{Q}_\kappa^{(0)}$  wird die magnetische Coenergie für lineare Induktoren unter Einbeziehung der Zweigstromanteile  $\dot{q}_0^i(t)$  infolge Stromquellen betrachtet:

$$\Psi(\dot{q}^\omega, q^\sigma, t) = \frac{1}{2} L_{ij}(q^\sigma, t) (A^i_\mu \dot{q}^\mu + \dot{q}_0^i) (A^j_\nu \dot{q}^\nu + \dot{q}_0^j) + \Psi_{i0}(q^\sigma, t) (A^i_\mu \dot{q}^\mu + \dot{q}_0^i).$$

Mit  $l_{\mu\nu} = A^i_\mu A^j_\nu L_{ij}$  und  $\psi_{\mu 0} = A^i_\mu (L_{ij} \dot{q}_0^j + \Psi_{i0})$  folgt daraus

$$\Psi = \frac{1}{2} l_{\mu\nu}(q^\sigma, t) \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu + \psi_{\mu 0}(q^\sigma, t) \dot{q}^\mu + \frac{1}{2} L_{ij}(q^\sigma, t) \dot{q}_0^i \dot{q}_0^j + \Psi_{i0}(q^\sigma, t) \dot{q}_0^i$$



bzw. mit (A.22)

$$\tilde{\Psi}(q^\sigma, t) \equiv \int_0^{q^\kappa} \tilde{Q}_\kappa^{(0)}(q^\sigma, t) dq^\kappa = \frac{1}{2} L_{ij}(q^\sigma, t) \dot{q}_0^i(t) \dot{q}_0^j(t) + \Psi_{i0}(q^\sigma, t) \dot{q}_0^i(t).$$

Für  $\tilde{Q}_\kappa^{(0)}$  folgt deshalb

$$\tilde{Q}_\kappa^{(0)}(q^\sigma, t) := \partial_\kappa \Psi|_{\dot{q}^\omega=0} = \partial_\kappa \tilde{\Psi} = \frac{1}{2} \underline{\partial_\kappa L_{ij}(q^\sigma, t) \dot{q}_0^i \dot{q}_0^j} + \underline{\partial_\kappa \Psi_{i0}(q^\sigma, t) \dot{q}_0^i}. \quad (\text{A.24})$$

Der einfach unterstrichene Term in (A.24) repräsentiert Kräfte in Induktoren infolge Stromquellen, der doppelt unterstrichene Term repräsentiert Kräfte auf Permanentmagnete infolge Stromquellen.

### A.3.2.2 Zustandsfunktion $V$

Nach (3.10), (A.15) und (A.17) ist

$$V = \omega_\alpha(q, t) \dot{q}^\alpha \equiv \omega_a \dot{q}^a + \omega_0 \stackrel{!}{=} V^h + \omega_0, \quad (\text{A.25})$$

wobei  $\omega_\alpha$  Lösung des Systems partieller Differentialgleichungen (A.17) ist. Zwei Lösungen dieses Systems unterscheiden sich durch einen Gradienten  $\partial_\alpha \Phi(q^\beta)$ . Der zugehörige Teil von  $V$  ist  $\partial_\alpha \Phi(q^\beta) \dot{q}^\alpha \equiv \dot{\Phi}$ , also genügt wegen  $\delta_a \dot{\Phi} \equiv 0$  die Bestimmung einer speziellen Lösung. Dazu werde ein  $\alpha$  so gewählt, dass  $w_{\alpha\beta} \neq 0$  für mindestens ein  $\beta$  ist. Mit  $\omega_\alpha := 0$  ist nach (A.17)

$$2\partial_{[a}\omega_{\beta]} \equiv \partial_a \omega_\beta = w_{\alpha\beta},$$

und wegen (A.16b) ist schließlich

$$\omega_\beta = \int w_{\alpha\beta} dq^\alpha$$

eine spezielle Lösung. Das hier kurz angedeutete Verfahren der Quadratur ist in [144] ausführlich erläutert.

Die Zustandsfunktion  $V$  wird als (inhomogenes) *verallgemeinertes Potenzial* bezeichnet. Ihr homogener Anteil  $V^h$  wird auch *gyroskopisches Potenzial* genannt. Einsetzen von (A.25) in die Bewegungsgleichungen (3.13) liefert

$$Q_a^{(1)} = \delta_a V = \delta_a(\omega_b \dot{q}^b) - \partial_a \omega_0 \equiv -2\partial_{[a}\omega_{b]}\dot{q}^b + \partial_0 \omega_a - \partial_a \omega_0 \stackrel{!}{=} -w_{ab}\dot{q}^b - w_a.$$

Der Term  $\delta_a(\omega_b \dot{q}^b) \equiv \delta_a V^h = -2\partial_{[a}\omega_{b]}\dot{q}^b + \partial_0 \omega_a$  beschreibt quasigyroskopische (d.h. leistungslose) Wechselwirkungen (vgl. [144]). Aus dem inhomogenen Anteil  $\omega_0$  von  $V$  resultieren folgende Kraft- und Spannungsanteile:

$$\bar{Q}_a^{(1)}(q^\omega, q^\sigma, t) := -\partial_a \omega_0 = -(w_a + \partial_0 \omega_a).$$

Folglich ist

$$\omega_0 := - \int_{(0,0)}^{(q^\mu, q^\kappa)} \bar{Q}_a^{(1)}(q^c, t) dq^a,$$

und weil dieses Linienintegral wegunabhängig ist, wird mit  $\tilde{Q}_\kappa^{(1)}(q^\sigma, t) = \bar{Q}_\kappa^{(1)}|_{q^\omega=0}$

$$\omega_0 = \int \bar{v}_\mu^{(1)}(q^c, t) dq^\mu - \int \tilde{Q}_\kappa^{(1)}(q^\sigma, t) dq^\kappa. \quad (\text{A.26})$$

Der inhomogene Anteil  $\omega_0$  von  $V$  heißt *elektromechanisches Potenzial*. Die  $\tilde{Q}_\kappa^{(1)}$  beschreiben Kräfte, die durch Quellladungen (Ladungen infolge Stromquellen) in Kondensatoren und Elektreten erzeugt werden.

Zur Ermittlung von  $\bar{v}_\mu^{(1)}$  und  $\tilde{Q}_\kappa^{(1)}$  wird die elektrische Energie für lineare Kondensatoren unter Einbeziehung der Zweigladsanteile  $q_0^j(t)$  infolge Stromquellen betrachtet:

$$\omega_0(q^c, t) = \frac{1}{2} C_{ij}(q^\sigma, t) (A^i{}_\mu q^\mu + q_0^i) (A^j{}_\nu q^\nu + q_0^j) + [C_{i0}(q^\sigma, t) + V_{i0}] (A^i{}_\mu q^\mu + q_0^i).$$

Mit  $c_{\mu\nu} = A^i{}_\mu A^j{}_\nu C_{ij}$  und  $w_\mu = A^i{}_\mu (C_{ij} q_0^j + C_{i0} + V_{i0})$  folgt daraus

$$\omega_0 = \frac{1}{2} c_{\mu\nu}(q^\sigma, t) q^\mu q^\nu + w_\mu(q^\sigma, t) q^\mu + \frac{1}{2} C_{ij}(q^\sigma, t) q_0^i q_0^j + C_{i0}(q^\sigma, t) q_0^i + V_{i0}(t) q_0^i.$$

Gemäß (A.26) soll gelten

$$\omega_0 \stackrel{!}{=} \bar{\omega}_0(q^c, t) + \tilde{\omega}_0(q^\sigma, t),$$

woraus sowohl

$$\bar{\omega}_0(q^c, t) = \frac{1}{2} c_{\mu\nu}(q^\sigma, t) q^\mu q^\nu + w_\mu(q^\sigma, t) q^\mu$$

als auch

$$\tilde{\omega}_0(q^\sigma, t) \equiv - \int_0^{q^\kappa} \tilde{Q}_\kappa^{(1)}(q^\sigma, t) dq^\kappa = \frac{1}{2} C_{ij}(q^\sigma, t) q_0^i q_0^j + C_{i0}(q^\sigma, t) q_0^i + V_{i0}(t) q_0^i$$

folgt. Für  $\tilde{Q}_\kappa^{(1)}$  ergibt sich deshalb

$$\tilde{Q}_\kappa^{(1)}(q^\sigma, t) = - \partial_\kappa \omega_0|_{q^\omega=0} = - \partial_\kappa \tilde{\omega}_0 = - \frac{1}{2} \underline{\partial_\kappa C_{ij}(q^\sigma, t) q_0^i q_0^j} - \underline{\partial_\kappa C_{i0}(q^\sigma, t) q_0^i}.$$

Der einfach unterstrichene Term repräsentiert Kräfte in Kondensatoren infolge Stromquellen, der doppelt unterstrichene Term repräsentiert Kräfte in Elektreten infolge Stromquellen.

### A.3.2.3 Zustandsfunktion $D$

Nach (3.10) gilt für  $D$  zunächst einmal die allgemeine Darstellung

$$D := \int_{(0,0)}^{(\dot{q}^\mu, \dot{q}^\kappa)} v_\mu^{(2)}(\dot{q}^c, q^c, t) d\dot{q}^\mu - Q_\kappa^{(2)}(\dot{q}^c, q^c, t) d\dot{q}^\kappa.$$

Für dieses Linienintegral kann infolge der Wegunabhängigkeit von  $D$  ein beliebiger Integrationsweg – also z.B.  $(0, 0) \rightarrow (0, \dot{q}^\kappa) \rightarrow (\dot{q}^\mu, \dot{q}^\kappa)$  – gewählt werden. Mit  $\tilde{Q}_\kappa^{(2)}(\dot{q}^\sigma, q^c, t) := Q_\kappa^{(2)}|_{\dot{q}^\omega=0}$  ist dann

$$D := \int_0^{\dot{q}^\mu} v_\mu^{(2)}(\dot{q}^c, q^c, t) d\dot{q}^\mu - \int_0^{\dot{q}^\kappa} \tilde{Q}_\kappa^{(2)}(\dot{q}^\sigma, q^c, t) d\dot{q}^\kappa. \quad (\text{A.27})$$

Die Zustandsfunktion  $D$  heißt *Rayleigh'sche Dissipationsfunktion*.

**A.3.2.4 Bemerkung**

Gelegentlich wird mittels Indizierung der Homogenitätsgrad einer Zustandsfunktion angezeigt. Wegen (2.12) ist die kinetische Energie  $T$  des mechanischen Teilsystems eine quadratische Funktion in den  $\dot{q}^\lambda$  und es gilt  $T = T_2 + T_1 + T_0$  ( $T_i$  – in den generalisierten „mechanischen“ Geschwindigkeiten homogenes Polynom  $i$ -ten Grades,  $i = 0, 1, 2$ ). Wegen (A.22) ist die magnetische Coenergie  $\Psi$  eine quadratische Funktion in den  $\dot{q}^\nu$  und es gilt  $\Psi = \Psi_2 + \Psi_1 + \Psi_0$  ( $\Psi_i$  – in den Maschenströmen homogenes Polynom  $i$ -ten Grades,  $i = 0, 1, 2$ ). Das verallgemeinerte Potenzial kann gemäß (A.25) dargestellt werden als  $V = V_1 + V_0 = V^h + \omega_0$ . Es ist eine lineare Funktion in den generalisierten Geschwindigkeiten. Schließlich sei die Dissipationsfunktion eine quadratische Funktion in den generalisierten Geschwindigkeiten, weshalb formal  $D = D_2 + D_1$  gilt ( $D_0$  entfällt wegen (A.27)).



# Anhang B

## Lineare Schwingungsanalyse

Dieser Anhang stellt eine Ergänzung zu Kapitel 4 dar. Zunächst wird das System von Differenzialgleichungen erster Ordnung für das elektrische Teilsystem angegeben. Anschließend werden – der Vollständigkeit halber – für EMS ohne Zwangsbedingungen die linearisierten Differenzialgleichungen aus den Lagrange’schen EMS-Bewegungsgleichungen (3.27) hergeleitet, statt aus den in Kapitel 4 verwendeten Gleichungen (4.23) mit ETS-DGLn erster Ordnung. Im dritten Abschnitt werden schließlich die kompletten Störungsgleichungen für EMS mit Zwangsbedingungen angegeben.

### B.1 Die Differenzialgleichungen erster Ordnung für das elektrische Teilsystem

Für die Herleitung des Systems von Differenzialgleichungen erster Ordnung für das elektrische Teilsystem werden folgende Indexmengen verwendet:  $\mu, \nu \in H^*$  und  $\varphi, \chi \in I$  (siehe Abschnitt 4.3.1.1). Die Subindizes  $L2, L1, R1$  bedeuten ein Durchlaufen der entsprechenden Untermengen  $H_{L2}, H_{L1}, H_{R1}$  (siehe Abschnitt 4.1.3.1).

Gemäß (4.22) sei der Vektor der Zustandsgrößen ( $q^\varphi$ ) und seine zeitliche Ableitung ( $\dot{q}^\chi$ ) dargestellt als

$$(q^\varphi) = \begin{pmatrix} \dot{q}^{\mu L2} \\ q^{\mu L2} \\ \dot{q}^{\mu L1} \\ q^{\mu R1} \end{pmatrix}, \quad (\dot{q}^\chi) = \begin{pmatrix} \ddot{q}^{\nu L2} \\ \dot{q}^{\nu L2} \\ \ddot{q}^{\nu L1} \\ \dot{q}^{\nu R1} \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich aus (4.21b) die Matrix  $B_{\varphi\chi}$  in (4.23b) zu

$$(B_{\varphi\chi}) = \begin{pmatrix} l_{\mu L2\nu L2} & 0 & l_{\mu L2\nu L1} & r_{\mu L2\nu R1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ l_{\mu L1\nu L2} & 0 & l_{\mu L1\nu L1} & r_{\mu L1\nu R1} \\ 0 & 0 & 0 & r_{\mu R1\nu R1} \end{pmatrix}$$

und der Vektor der rechten Seiten  $b_\varphi$  lautet

$$(b_\varphi) = - \begin{pmatrix} \tilde{r}_{\mu L2\nu L2} & c_{\mu L2\nu L2} & \tilde{r}_{\mu L2\nu L1} & c_{\mu L2\nu R1} \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{r}_{\mu L1\nu L2} & 0 & \tilde{r}_{\mu L1\nu L1} & 0 \\ r_{\mu R1\nu L2} & c_{\mu R1\nu L2} & r_{\mu R1\nu L1} & c_{\mu R1\nu R1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}^{\nu L2} \\ q^{\nu L2} \\ \dot{q}^{\nu L1} \\ q^{\nu R1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tilde{v}_{\mu L2 0} \\ 0 \\ \tilde{v}_{\mu L1 0} \\ \tilde{v}_{\mu R1 0} \end{pmatrix}.$$

## B.2 Linearisierte Differenzialgleichungen zweiter Ordnung für EMS ohne Zwangsbedingungen

### B.2.1 Störungsgleichungen

In Abschnitt 4.3 wurden die EMS-Störungsgleichungen (4.24) aus den Gleichungen mit ETS-DGLn erster Ordnung (4.23) entwickelt. Der Vorteil der dort verwendeten Darstellung ist die universelle Verwendbarkeit trotz des eventuell vorhandenen Rangabfalls in der Induktor- und/oder der Resistormatrix. Von Nachteil ist allerdings der Verlust der in Abschnitt 3.2.5 herausgearbeiteten Struktur der Bewegungsgleichungen. Hier soll deshalb die Herleitung der Störungsgleichungen aus den EMS-Bewegungsgleichungen (3.27) dargestellt werden. Beim Vergleich beider Varianten sind insbesondere die unterschiedlich verwendeten Indexmengen zu beachten. Während in (4.24)  $\varphi, \chi, \eta, \zeta \in I$  gilt, werden hier die Indizes  $\mu, \nu, \omega, \vartheta \in H^*$  verwendet. Die notwendige Invertierung der verallgemeinerten Induktivitätsmatrix  $g_{\mu\nu}$  erfordert deren Regularität. Bezüglich der Existenz von Kondensatoren in Fundamentalkreisen wird weiterhin zwischen den Indexmengen  $H_{L2}$  (mit Kondensatoren) und  $H_{L1}$  (ohne Kondensatoren) unterschieden.

Zunächst werden die Gleichungen (3.27) hier wiederholt:

$$\begin{aligned} g_{\kappa\lambda}\ddot{q}^\lambda + \Gamma_{\kappa\lambda\rho}\dot{q}^\lambda\dot{q}^\rho - \frac{1}{2}\partial_\kappa g_{\nu\omega}\dot{q}^\nu\dot{q}^\omega + (2\Gamma_{\kappa b0} + s_{\kappa b})\dot{q}^b + \Gamma_{\kappa 00} + s_{\kappa 0} &= 0, \\ g_{\mu\nu}\ddot{q}^\nu &+ \partial_\lambda g_{\mu\nu}\dot{q}^\lambda\dot{q}^\nu + (2\Gamma_{\mu b0} + s_{\mu b})\dot{q}^b + \Gamma_{\mu 00} + s_{\mu 0} = 0. \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

Sei  $q(t)$  eine Referenzlösung, in deren Nähe das Systemverhalten untersucht werden soll. Mittels der Transformation  $q^a \mapsto \bar{q}^a = q^a + x^a$  werden für kleine  $x^a$  die in den Bewegungsgleichungen auftretenden Objekte bis zu linearen Termen entwickelt. Die verallgemeinerten mechanischen Lagekoordinaten werden wieder mit  $\kappa, \lambda, \rho, \sigma \in J$  indiziert, während ihre Störungen mit dem Index  $\xi \in J$  bezeichnet werden sollen. Für die Maschenladungen gelten die Indizes  $\mu, \nu, \omega \in H^*$  und für deren Störungen der Index  $\vartheta \in H^*$ . Weiterhin sei  $b, c \in J \cup H^*$ . Dann gilt wegen  $s_{\kappa\mu} = s_{\mu\kappa} \equiv 0$  für die Terme in den „mechanischen“ Gleichungen

$$\begin{aligned} g_{\kappa\lambda}(\bar{q}^\sigma, t)\ddot{\bar{q}}^\lambda &= g_{\kappa\lambda}(q^\sigma, t)\ddot{q}^\lambda + g_{\kappa\xi}(q^\sigma, t)\ddot{x}^\xi + \partial_\xi g_{\kappa\lambda}(q^\sigma, t)\dot{q}^\lambda x^\xi, \\ \Gamma_{\kappa\lambda\rho}(\bar{q}^\sigma, t)\dot{\bar{q}}^\lambda\dot{\bar{q}}^\rho &= \Gamma_{\kappa\lambda\rho}(q^\sigma, t)\dot{q}^\lambda\dot{q}^\rho + 2\Gamma_{\kappa\lambda\xi}(q^\sigma, t)\dot{q}^\lambda\dot{x}^\xi + \partial_\xi \Gamma_{\kappa\lambda\rho}(q^\sigma, t)\dot{q}^\lambda\dot{q}^\rho x^\xi, \\ \partial_\kappa g_{\nu\omega}(\bar{q}^\sigma, t)\dot{\bar{q}}^\nu\dot{\bar{q}}^\omega &= \partial_\kappa g_{\nu\omega}(q^\sigma, t)\dot{q}^\nu\dot{q}^\omega + 2\partial_\kappa g_{\nu\vartheta}(q^\sigma, t)\dot{q}^\nu\dot{x}^\vartheta + \partial_\xi \partial_\kappa g_{\nu\omega}(q^\sigma, t)\dot{q}^\nu\dot{q}^\omega x^\xi, \\ \Gamma_{\kappa b0}(\bar{q}^\sigma, t)\dot{\bar{q}}^b &= \Gamma_{\kappa b0}(q^\sigma, t)\dot{q}^b + \Gamma_{\kappa c0}(q^\sigma, t)\dot{x}^c + \partial_\xi \Gamma_{\kappa b0}(q^\sigma, t)\dot{q}^b x^\xi, \\ s_{\kappa\lambda}(\bar{q}^\sigma, t)\dot{\bar{q}}^\lambda &= s_{\kappa\lambda}(q^\sigma, t)\dot{q}^\lambda + s_{\kappa\xi}(q^\sigma, t)\dot{x}^\xi + \partial_\xi s_{\kappa\lambda}(q^\sigma, t)\dot{q}^\lambda x^\xi, \\ \Gamma_{\kappa 00}(\bar{q}^\sigma, \bar{q}^\omega, t) &= \Gamma_{\kappa 00}(q^\sigma, q^\omega, t) + \partial_\xi \Gamma_{\kappa 00}(q^\sigma, q^\omega, t)x^\xi + \partial_\vartheta \Gamma_{\kappa 00}(q^\sigma, q^\omega, t)x^\vartheta, \\ s_{\kappa 0}(\bar{q}^\sigma, t) &= s_{\kappa 0}(q^\sigma, t) + \partial_\xi s_{\kappa 0}(q^\sigma, t)x^\xi \end{aligned}$$

und für die Objekte in den „elektrischen“ Gleichungen

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}(\bar{q}^\sigma, t)\ddot{\bar{q}}^\nu &= g_{\mu\nu}(q^\sigma, t)\ddot{q}^\nu + g_{\mu\vartheta}(q^\sigma, t)\ddot{x}^\vartheta + \partial_\xi g_{\mu\nu}(q^\sigma, t)\dot{q}^\nu x^\xi, \\ \partial_\lambda g_{\mu\nu}(\bar{q}^\sigma, t)\dot{\bar{q}}^\lambda\dot{\bar{q}}^\nu &= \partial_\lambda g_{\mu\nu}(q^\sigma, t)\dot{q}^\lambda\dot{q}^\nu + \partial_\xi g_{\mu\nu}(q^\sigma, t)\dot{q}^\nu\dot{x}^\xi + \partial_\lambda g_{\mu\vartheta}(q^\sigma, t)\dot{q}^\lambda\dot{x}^\vartheta \\ &+ \partial_\xi \partial_\lambda g_{\mu\nu}(q^\sigma, t)\dot{q}^\lambda\dot{q}^\nu x^\xi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{\mu b 0}(\bar{q}^\sigma, t)\dot{\bar{q}}^b &= \Gamma_{\mu b 0}(q^\sigma, t)\dot{q}^b + \Gamma_{\mu c 0}(q^\sigma, t)\dot{x}^c + \partial_\xi \Gamma_{\mu b 0}(q^\sigma, t)\dot{q}^b x^\xi, \\
 s_{\mu\nu}(\bar{q}^\sigma, t)\dot{\bar{q}}^\nu &= s_{\mu\nu}(q^\sigma, t)\dot{q}^\nu + s_{\mu\vartheta}(q^\sigma, t)\dot{x}^\vartheta + \partial_\xi s_{\mu\nu}(q^\sigma, t)\dot{q}^\nu x^\xi, \\
 \Gamma_{\mu 0 0}(\bar{q}^\sigma, \bar{q}^\omega, t) &= \Gamma_{\mu 0 0}(q^\sigma, q^\omega, t) + \partial_\xi \Gamma_{\mu 0 0}(q^\sigma, q^\omega, t)x^\xi + \partial_\vartheta \Gamma_{\mu 0 0}(q^\sigma, q^\omega, t)x^\vartheta, \\
 s_{\mu 0}(\bar{q}^\sigma, t) &= s_{\mu 0}(q^\sigma, t) + \partial_\xi s_{\mu 0}(q^\sigma, t)x^\xi.
 \end{aligned}$$

Unter Hinzunahme von zusätzlichen kleinen generalisierten Störkräften  $\Phi_\kappa(\dot{q}^\sigma, q^\sigma, \dot{q}^\omega, q^\omega, t)$  und Störspannungen  $\Phi_\mu(\dot{q}^\sigma, q^\sigma, \dot{q}^\omega, q^\omega, t)$  folgt damit für die Störungsgleichungen

$$\begin{aligned}
 g_{\kappa\xi}\ddot{x}^\xi + \left(2\Gamma_{\kappa\lambda\xi}\dot{q}^\lambda + 2\Gamma_{\kappa\xi 0} + s_{\kappa\xi}\right)\dot{x}^\xi + \left(2\Gamma_{\kappa\vartheta 0} - \partial_\kappa g_{\nu\vartheta}\dot{q}^\nu\right)\dot{x}^\vartheta + \partial_\vartheta \Gamma_{\kappa 0 0} x^\vartheta + \\
 + \left[\partial_\xi g_{\kappa\lambda}\ddot{q}^\lambda + \partial_\xi \Gamma_{\kappa\lambda\vartheta}\dot{q}^\lambda \dot{q}^\vartheta - \frac{1}{2}\partial_\xi \partial_\kappa g_{\nu\omega}\dot{q}^\nu \dot{q}^\omega + 2\partial_\xi \Gamma_{\kappa b 0}\dot{q}^b + \partial_\xi s_{\kappa\lambda}\dot{q}^\lambda + \right. \\
 \left. + \partial_\xi \Gamma_{\kappa 0 0} + \partial_\xi s_{\kappa 0}\right] x^\xi = \Phi_\kappa, \quad (\text{B.2})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g_{\mu\vartheta}\ddot{x}^\vartheta + \left(\partial_\xi g_{\mu\nu}\dot{q}^\nu + 2\Gamma_{\mu\xi 0}\right)\dot{x}^\xi + \left(\partial_\lambda g_{\mu\vartheta}\dot{q}^\lambda + 2\Gamma_{\mu\vartheta 0} + s_{\mu\vartheta}\right)\dot{x}^\vartheta + \partial_\vartheta \Gamma_{\mu 0 0} x^\vartheta + \\
 + \left(\partial_\xi g_{\mu\nu}\dot{q}^\nu + \partial_\xi \partial_\lambda g_{\mu\nu}\dot{q}^\lambda \dot{q}^\nu + 2\partial_\xi \Gamma_{\mu b 0}\dot{q}^b + \partial_\xi s_{\mu\nu}\dot{q}^\nu + \partial_\xi \Gamma_{\mu 0 0} + \partial_\xi s_{\mu 0}\right) x^\xi = \Phi_\mu.
 \end{aligned}$$

## B.2.2 Modalanalyse

Die Gleichungen (B.2) können analog zum Vorgehen in Abschnitt 4.3.1.2 zur Untersuchung des Eigenschwingungsverhaltens und zur Ermittlung von Störbewegungen um einen statischen Gleichgewichtszustand bei vorgegebenen Anfangsstörungen verwendet werden. Dabei gelten folgende Vereinfachungen:  $\Phi_a = 0$ ,  $\ddot{q}^\lambda \equiv 0$ ,  $\dot{q}^\lambda \equiv 0$ ,  $\dot{q}^\nu \equiv 0$ ,  $\dot{q}^{\nu L_2} \equiv 0$ . Ein Verschwinden der  $\dot{q}^{\nu L_1}$  wird nicht verlangt (siehe Definition eines statischen Gleichgewichtszustandes eines EMS in Abschnitt 4.2). Der Vektor der Störungsvariablen und seine erste Ableitung lauten jetzt

$$(x^b) = \begin{pmatrix} \dot{x}^\xi \\ x^\xi \\ \dot{x}^\vartheta \\ x^\vartheta \end{pmatrix}, \quad (\dot{x}^a) = \begin{pmatrix} \ddot{x}^\sigma \\ \dot{x}^\sigma \\ \ddot{x}^\omega \\ \dot{x}^\omega \end{pmatrix}.$$

Die Systemmatrix in den linearisierten Bewegungsgleichungen (4.27) hat dann die Struktur

$$(A^a_b) = \begin{pmatrix} (A_{11}) & (A_{12}) & (A_{13}) & (A_{14}) \\ (\delta_\xi^\sigma) & (0) & (0) & (0) \\ (A_{31}) & (A_{32}) & (A_{33}) & (A_{34}) \\ (\delta_\vartheta^\omega) & (0) & (0) & (0) \end{pmatrix}$$

mit den Submatrizen

$$\begin{aligned}
 A_{11} &: -g^{\sigma\kappa} (2\Gamma_{\kappa\xi 0} + s_{\kappa\xi}), \\
 A_{12} &: -g^{\sigma\kappa} \left( -\frac{1}{2}\partial_\xi \partial_\kappa g_{\nu L_1 \omega L_1} \dot{q}^{\nu L_1} \dot{q}^{\omega L_1} + 2\partial_\xi \Gamma_{\kappa \nu L_1 0} \dot{q}^{\nu L_1} + \partial_\xi \Gamma_{\kappa 0 0} + \partial_\xi s_{\kappa 0} \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{13} &: -g^{\sigma\kappa} (2\Gamma_{\kappa\vartheta 0} - \partial_{\kappa} g_{\nu L_1 \vartheta} \dot{q}^{\nu L_1}), \\
A_{14} &: -g^{\sigma\kappa} \partial_{\vartheta} \Gamma_{\kappa 00}, \\
A_{31} &: -g^{\omega\mu} (\partial_{\xi} g_{\mu\nu L_1} \dot{q}^{\nu L_1} + 2\Gamma_{\mu\xi 0}), \\
A_{32} &: -g^{\omega\mu} (2\partial_{\xi} \Gamma_{\mu\nu L_1 0} \dot{q}^{\nu L_1} + \partial_{\xi} s_{\mu\nu L_1} \dot{q}^{\nu L_1} + \partial_{\xi} \Gamma_{\mu 00} + \partial_{\xi} s_{\mu 0}), \\
A_{33} &: -g^{\omega\mu} (2\Gamma_{\mu\vartheta 0} + s_{\mu\vartheta}), \\
A_{34} &: -g^{\omega\mu} \partial_{\vartheta} \Gamma_{\mu 00}.
\end{aligned}$$

## B.3 Linearisierte Differenzialgleichungen zweiter Ordnung für EMS mit Zwangsbedingungen

### B.3.1 Störungsgleichungen

Die EMS-Störungsgleichungen im kompletten  $(n + m)$ -dimensionalen Konfigurationsraum lauten (siehe Abschnitt 4.3.2.2)

$$\begin{aligned}
&g_{\kappa\xi} \ddot{x}^{\xi} + \left( 2\Gamma_{\kappa\lambda\xi} \dot{q}^{\lambda} - \dot{\partial}_{\xi} Q_{\kappa}^{(me)} \right) \dot{x}^{\xi} - \dot{\partial}_{\vartheta L} Q_{\kappa}^{(el)} \dot{x}^{\vartheta L} + \\
&\quad + \left( \partial_{\xi} g_{\kappa\lambda} \dot{q}^{\lambda} + \partial_{\xi} \Gamma_{\kappa\lambda\varrho} \dot{q}^{\lambda} \dot{q}^{\varrho} - \partial_{\xi} Q_{\kappa}^{(me)} - \partial_{\xi} Q_{\kappa}^{(el)} - \lambda_{\varrho 1} \partial_{\xi} f^{\varrho 1}_{\kappa} \right) x^{\xi} - \\
&\quad \quad \quad - \partial_{\vartheta} Q_{\kappa}^{(el)} x^{\vartheta} - \xi_{\varrho 1} f^{\varrho 1}_{\kappa} = \Phi_{\kappa}, \\
&l_{\mu L' \vartheta L} \ddot{x}^{\vartheta L} + \left( \dot{\partial}_{\xi} \tilde{r}_{\mu L' \nu L'} \dot{q}^{\nu L'} + \dot{\partial}_{\xi} \hat{v}_{\mu L' 0} \right) \dot{x}^{\xi} + \tilde{r}_{\mu L' \vartheta L'} \dot{x}^{\vartheta L'} + r_{\mu L' \vartheta R} \dot{x}^{\vartheta R} + \\
&+ \left( \partial_{\xi} l_{\mu L' \nu L} \dot{q}^{\nu L} + \partial_{\xi} \tilde{r}_{\mu L' \nu L'} \dot{q}^{\nu L'} + \partial_{\xi} r_{\mu L' \nu R} \dot{q}^{\nu R} + \partial_{\xi} c_{\mu L' \nu C\#} \dot{q}^{\nu C\#} + \partial_{\xi} \hat{v}_{\mu L' 0} \right) x^{\xi} + \\
&\quad \quad \quad + c_{\mu L' \vartheta C\#} x^{\vartheta C\#} = \Phi_{\mu L'}, \\
&r_{\mu R 1 \vartheta L'R} \ddot{x}^{\vartheta L'R} + \left( \partial_{\xi} r_{\mu R 1 \nu L'R} \dot{q}^{\nu L'R} + \partial_{\xi} c_{\mu R 1 \nu C\#} \dot{q}^{\nu C\#} + \partial_{\xi} \hat{v}_{\mu R 1 0} \right) \dot{x}^{\xi} + c_{\mu R 1 \vartheta C\#} x^{\vartheta C\#} = \Phi_{\mu R 1}.
\end{aligned}$$

Dabei gilt einerseits  $\dot{\partial}_{\vartheta L} Q_{\kappa}^{(el)} \dot{x}^{\vartheta L} = \dot{\partial}_{\vartheta L'} Q_{\kappa}^{(el)} \dot{x}^{\vartheta L'} + \dot{\partial}_{\vartheta L 0} Q_{\kappa}^{(el)} \dot{x}^{\vartheta L 0}$ . Die in den elektrischen Bewegungsgleichungen nicht erscheinenden  $\dot{x}^{\vartheta L 0}$  können durch zusätzliche Integration der in den Bindungsgleichungen vorhandenen  $\ddot{x}^{\vartheta L 0}$  ermittelt werden. Andererseits ist  $\partial_{\vartheta} Q_{\kappa}^{(el)} x^{\vartheta} = \partial_{\vartheta LR} Q_{\kappa}^{(el)} x^{\vartheta LR} + \partial_{\vartheta C} Q_{\kappa}^{(el)} x^{\vartheta C}$ , wobei darüber hinaus  $\partial_{\vartheta LR} Q_{\kappa}^{(el)} x^{\vartheta LR} = \partial_{\vartheta L'R 1} Q_{\kappa}^{(el)} x^{\vartheta L'R 1} + \partial_{\vartheta L 0} Q_{\kappa}^{(el)} x^{\vartheta L 0} + \partial_{\vartheta R 0} Q_{\kappa}^{(el)} x^{\vartheta R 0}$  gilt. Die nicht auftretenden  $x^{\vartheta L 1}$ ,  $x^{\vartheta L 0}$  und  $x^{\vartheta R 0}$  können ebenfalls durch zusätzliche Integration gewonnen werden. Die  $x^{\vartheta C}$  sind abhängige elektrische Störungen (siehe unten). Die Unbekannten  $\xi_{\varrho 1}$  werden durch Multiplikation mit dem zu  $f^{\varrho 1}_{\kappa}$  orthogonalen Komplement  $F^{\kappa}_{\kappa 2}$  eliminiert. Weiterhin werden die kompletten mechanischen Störungen inklusive der ersten und zweiten Ableitungen durch die unabhängigen mechanischen Störungen und deren Ableitungen gemäß

$$\begin{aligned}
\ddot{x}^{\xi} &= F^{\xi}_{\xi 2} \ddot{x}^{\xi 2} + 2 \left( \partial_{\kappa} F^{\xi}_{\xi 2} \dot{q}^{\kappa} + \partial_0 F^{\xi}_{\xi 2} \right) \dot{x}^{\xi 2} + \\
&\quad + \left( \partial_{\lambda} \partial_{\kappa} F^{\xi}_{\xi 2} \dot{q}^{\kappa} \dot{q}^{\lambda} + 2\partial_0 \partial_{\kappa} F^{\xi}_{\xi 2} \dot{q}^{\kappa} + \partial_0 \partial_0 F^{\xi}_{\xi 2} \right) x^{\xi 2}, \\
\dot{x}^{\xi} &= F^{\xi}_{\xi 2} \dot{x}^{\xi 2} + \left( \partial_{\kappa} F^{\xi}_{\xi 2} \dot{q}^{\kappa} + \partial_0 F^{\xi}_{\xi 2} \right) x^{\xi 2}, \\
x^{\xi} &= F^{\xi}_{\xi 2} x^{\xi 2}
\end{aligned}$$



ausgedrückt. Die abhängigen elektrischen Störungen werden mittels

$$\begin{aligned}\ddot{x}^{\vartheta L0} &= -l^{\vartheta L0\mu L0} \left[ l_{\mu L0\vartheta L'} \ddot{x}^{\vartheta L'} + \dot{\partial}_\xi \hat{v}_{\mu L00} \dot{x}^\xi + (\partial_\xi l_{\mu L0\nu L} \ddot{q}^{\nu L} + \partial_\xi \hat{v}_{\mu L00}) x^\xi \right], \\ \dot{x}^{\vartheta R0} &= -r^{\vartheta R0\mu R0} \left[ r_{\mu R0\vartheta L'R1} \dot{x}^{\vartheta L'R1} + (\partial_\xi r_{\mu R0\nu L'R} \dot{q}^{\nu L'R} + \partial_\xi \hat{v}_{\mu R00}) x^\xi \right], \\ x^{\vartheta C} &= -c^{\vartheta C\mu C} \left[ c_{\mu C\vartheta \check{C}} x^{\vartheta \check{C}} + (\partial_\xi c_{\mu C\nu C\#} \dot{q}^{\nu C\#} + \partial_\xi \hat{v}_{\mu C0}) x^\xi \right]\end{aligned}$$

eliminiert. Mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned}g_{\kappa_2\xi_2} &= g_{\kappa\xi} F^\kappa_{\kappa_2} F^\xi_{\xi_2}, \\ d_{\kappa_2\xi_2}^{(m,m)} &= \left( 2\Gamma_{\kappa\lambda\xi} \dot{q}^\lambda - \dot{\partial}_\xi Q_\kappa^{(me)} \right) F^\kappa_{\kappa_2} F^\xi_{\xi_2} + 2g_{\kappa\xi} F^\kappa_{\kappa_2} \left( \partial_\kappa F^\xi_{\xi_2} \dot{q}^\kappa + \partial_0 F^\xi_{\xi_2} \right), \\ d_{\kappa_2\vartheta L}^{(m,e)} &= -\dot{\partial}_{\vartheta L} Q_\kappa^{(el)} F^\kappa_{\kappa_2}, \\ k_{\kappa_2\xi_2}^{(m,m)} &= \left( \partial_\xi g_{\kappa\lambda} \ddot{q}^\lambda + \partial_\xi \Gamma_{\kappa\lambda\rho} \dot{q}^\lambda \dot{q}^\rho - \partial_\xi Q_\kappa^{(me)} - \partial_\xi Q_\kappa^{(el)} - \lambda_{\rho 1} \partial_\xi f^{\rho 1} \right) F^\kappa_{\kappa_2} F^\xi_{\xi_2} + \\ &\quad + g_{\kappa\xi} F^\kappa_{\kappa_2} \left( \partial_\lambda \partial_\kappa F^\xi_{\xi_2} \dot{q}^\lambda \dot{q}^\kappa + 2\partial_0 \partial_\kappa F^\xi_{\xi_2} \dot{q}^\kappa + \partial_0 \partial_0 F^\xi_{\xi_2} \right) + \\ &\quad + \left( 2\Gamma_{\kappa\lambda\xi} \dot{q}^\lambda - \dot{\partial}_\xi Q_\kappa^{(me)} \right) F^\kappa_{\kappa_2} \left( \partial_\kappa F^\xi_{\xi_2} \dot{q}^\kappa + \partial_0 F^\xi_{\xi_2} \right) + \\ &\quad + \partial_{\vartheta C} Q_\kappa^{(el)} F^\kappa_{\kappa_2} c^{\vartheta C\mu C} \left( \partial_\xi c_{\mu C\nu C\#} \dot{q}^{\nu C\#} + \partial_\xi \hat{v}_{\mu C0} \right) F^\xi_{\xi_2}, \\ k_{\kappa_2\vartheta LR}^{(m,e)} &= -\partial_{\vartheta LR} Q_\kappa^{(el)} F^\kappa_{\kappa_2} + \partial_{\vartheta C} Q_\kappa^{(el)} F^\kappa_{\kappa_2} c^{\vartheta C\mu C} c_{\mu C\vartheta LR}, \\ \Phi_{\kappa_2} &= \Phi_\kappa F^\kappa_{\kappa_2}\end{aligned}$$

lauten die „mechanischen“ Störungsgleichungen

$$g_{\kappa_2\xi_2} \ddot{x}^{\xi_2} + d_{\kappa_2\xi_2}^{(m,m)} \dot{x}^{\xi_2} + d_{\kappa_2\vartheta L}^{(m,e)} \dot{x}^{\vartheta L} + k_{\kappa_2\xi_2}^{(m,m)} x^{\xi_2} + k_{\kappa_2\vartheta LR}^{(m,e)} x^{\vartheta LR} = \Phi_{\kappa_2}.$$

Zur Herleitung der „elektrischen“ Störungsgleichungen werden die abhängigen elektrischen Störungen wie oben eliminiert. Mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned}l_{\mu L'\vartheta L'}^* &= l_{\mu L'\vartheta L'} - l_{\mu L'\vartheta L0} l^{\vartheta L0\mu L0} l_{\mu L0\vartheta L'}, \\ \check{l}_{\mu L'}^{\mu L0} &= l_{\mu L'\vartheta L0} l^{\vartheta L0\mu L0}, \\ \tilde{r}_{\mu L'\vartheta L'}^* &= \tilde{r}_{\mu L'\vartheta L'} - r_{\mu L'\vartheta R0} r^{\vartheta R0\mu R0} r_{\mu R0\vartheta L'}, \\ r_{\mu L'\vartheta R1}^* &= r_{\mu L'\vartheta R1} - r_{\mu L'\vartheta R0} r^{\vartheta R0\mu R0} r_{\mu R0\vartheta R1}, \\ \check{r}_{\mu L'}^{\mu R0} &= r_{\mu L'\vartheta R0} r^{\vartheta R0\mu R0}, \\ C_{\mu L'\vartheta \check{C}}^* &= c_{\mu L'\vartheta \check{C}} - c_{\mu L'\vartheta C} c^{\vartheta C\mu C} c_{\mu C\vartheta \check{C}}, \\ \check{c}_{\mu L'}^{\mu C} &= c_{\mu L'\vartheta C} c^{\vartheta C\mu C}, \\ r_{\mu R1\vartheta L'R1}^* &= r_{\mu R1\vartheta L'R1} - r_{\mu R1\vartheta R0} r^{\vartheta R0\mu R0} r_{\mu R0\vartheta L'R1}, \\ \check{r}_{\mu R1}^{\mu R0} &= r_{\mu R1\vartheta R0} r^{\vartheta R0\mu R0}, \\ C_{\mu R1\vartheta \check{C}}^* &= c_{\mu R1\vartheta \check{C}} - c_{\mu R1\vartheta C} c^{\vartheta C\mu C} c_{\mu C\vartheta \check{C}}, \\ \check{c}_{\mu R1}^{\mu C} &= c_{\mu R1\vartheta C} c^{\vartheta C\mu C}\end{aligned}$$

lassen sich die „elektrischen“ Störungsgleichungen zunächst ausdrücken als

$$\begin{aligned}
& l_{\mu_{L'}\vartheta_{L'}}^* \ddot{x}^{\vartheta_{L'}} + \tilde{r}_{\mu_{L'}\vartheta_{L'}}^* \dot{x}^{\vartheta_{L'}} + r_{\mu_{L'}\vartheta_{R1}}^* \dot{x}^{\vartheta_{R1}} + c_{\mu_{L'}\vartheta_{\check{C}}}^* x^{\vartheta_{\check{C}}} + \\
& + \left( \dot{\partial}_{\xi} \tilde{r}_{\mu_{L'}\nu_{L'}} \dot{q}^{\nu_{L'}} + \dot{\partial}_{\xi} \hat{v}_{\mu_{L'}0} - \check{l}_{\mu_{L'}}^{\mu_{L'0}} \dot{\partial}_{\xi} \hat{v}_{\mu_{L'0}0} \right) \dot{x}^{\xi} + \\
& + \left[ \partial_{\xi} l_{\mu_{L'}\nu_{L'}} \ddot{q}^{\nu_{L'}} + \partial_{\xi} \tilde{r}_{\mu_{L'}\nu_{L'}} \dot{q}^{\nu_{L'}} + \partial_{\xi} r_{\mu_{L'}\nu_{R}} \dot{q}^{\nu_{R}} + \partial_{\xi} c_{\mu_{L'}\nu_{C\#}} q^{\nu_{C\#}} + \partial_{\xi} \hat{v}_{\mu_{L'}0} - \right. \\
& \quad - \check{l}_{\mu_{L'}}^{\mu_{L'0}} (\partial_{\xi} l_{\mu_{L'0}\nu_{L'}} \ddot{q}^{\nu_{L'}} + \partial_{\xi} \hat{v}_{\mu_{L'0}0}) - \check{r}_{\mu_{L'}}^{\mu_{R0}} (\partial_{\xi} r_{\mu_{R0}\nu_{L'R}} \dot{q}^{\nu_{L'R}} + \partial_{\xi} \hat{v}_{\mu_{R0}0}) - \\
& \quad \left. - \check{c}_{\mu_{L'}}^{\mu_{C}} (\partial_{\xi} c_{\mu_{C}\nu_{C\#}} q^{\nu_{C\#}} + \partial_{\xi} \hat{v}_{\mu_{C0}}) \right] x^{\xi} = \Phi_{\mu_{L'}}, \\
& r_{\mu_{R1}\vartheta_{L'R1}}^* \dot{x}^{\vartheta_{L'R1}} + c_{\mu_{R1}\vartheta_{\check{C}}}^* x^{\vartheta_{\check{C}}} + \left[ \partial_{\xi} r_{\mu_{R1}\nu_{L'R}} \dot{q}^{\nu_{L'R}} + \partial_{\xi} c_{\mu_{R1}\nu_{C\#}} q^{\nu_{C\#}} + \partial_{\xi} \hat{v}_{\mu_{R1}0} - \right. \\
& \quad \left. - \check{r}_{\mu_{R1}}^{\mu_{R0}} (\partial_{\xi} r_{\mu_{R0}\nu_{L'R}} \dot{q}^{\nu_{L'R}} + \partial_{\xi} \hat{v}_{\mu_{R0}0}) - \check{c}_{\mu_{R1}}^{\mu_{C}} (\partial_{\xi} c_{\mu_{C}\nu_{C\#}} q^{\nu_{C\#}} + \partial_{\xi} \hat{v}_{\mu_{C0}}) \right] x^{\xi} = \Phi_{\mu_R}.
\end{aligned}$$

In einem zweiten Schritt werden noch die abhängigen mechanischen Störungen ersetzt. Mit den weiteren Abkürzungen

$$\begin{aligned}
d_{\mu_{L'}\xi_2}^{(e,m)} &= \left( \dot{\partial}_{\xi} \tilde{r}_{\mu_{L'}\nu_{L'}} \dot{q}^{\nu_{L'}} + \dot{\partial}_{\xi} \hat{v}_{\mu_{L'}0} - \check{l}_{\mu_{L'}}^{\mu_{L'0}} \dot{\partial}_{\xi} \hat{v}_{\mu_{L'0}0} \right) F^{\xi}_{\xi_2}, \\
k_{\mu_{L'}\xi_2}^{(e,m)} &= \left( \dot{\partial}_{\xi} \tilde{r}_{\mu_{L'}\nu_{L'}} \dot{q}^{\nu_{L'}} + \dot{\partial}_{\xi} \hat{v}_{\mu_{L'}0} - \check{l}_{\mu_{L'}}^{\mu_{L'0}} \dot{\partial}_{\xi} \hat{v}_{\mu_{L'0}0} \right) \left( \partial_{\kappa} F^{\xi}_{\xi_2} \dot{q}^{\kappa} + \partial_0 F^{\xi}_{\xi_2} \right) + \\
& + \left[ \partial_{\xi} l_{\mu_{L'}\nu_{L'}} \ddot{q}^{\nu_{L'}} + \partial_{\xi} \tilde{r}_{\mu_{L'}\nu_{L'}} \dot{q}^{\nu_{L'}} + \partial_{\xi} r_{\mu_{L'}\nu_{R}} \dot{q}^{\nu_{R}} + \partial_{\xi} c_{\mu_{L'}\nu_{C\#}} q^{\nu_{C\#}} + \partial_{\xi} \hat{v}_{\mu_{L'}0} - \right. \\
& \quad - \check{l}_{\mu_{L'}}^{\mu_{L'0}} (\partial_{\xi} l_{\mu_{L'0}\nu_{L'}} \ddot{q}^{\nu_{L'}} + \partial_{\xi} \hat{v}_{\mu_{L'0}0}) - \check{r}_{\mu_{L'}}^{\mu_{R0}} (\partial_{\xi} r_{\mu_{R0}\nu_{L'R}} \dot{q}^{\nu_{L'R}} + \partial_{\xi} \hat{v}_{\mu_{R0}0}) - \\
& \quad \left. - \check{c}_{\mu_{L'}}^{\mu_{C}} (\partial_{\xi} c_{\mu_{C}\nu_{C\#}} q^{\nu_{C\#}} + \partial_{\xi} \hat{v}_{\mu_{C0}}) \right] F^{\xi}_{\xi_2}, \\
p_{\mu_{R1}\xi_2}^{(e,m)} &= \left[ \partial_{\xi} r_{\mu_{R1}\nu_{L'R}} \dot{q}^{\nu_{L'R}} + \partial_{\xi} c_{\mu_{R1}\nu_{C\#}} q^{\nu_{C\#}} + \partial_{\xi} \hat{v}_{\mu_{R1}0} - \right. \\
& \quad \left. - \check{r}_{\mu_{R1}}^{\mu_{R0}} (\partial_{\xi} r_{\mu_{R0}\nu_{L'R}} \dot{q}^{\nu_{L'R}} + \partial_{\xi} \hat{v}_{\mu_{R0}0}) - \check{c}_{\mu_{R1}}^{\mu_{C}} (\partial_{\xi} c_{\mu_{C}\nu_{C\#}} q^{\nu_{C\#}} + \partial_{\xi} \hat{v}_{\mu_{C0}}) \right] F^{\xi}_{\xi_2}
\end{aligned}$$

lauten die „elektrischen“ Störungsgleichungen schließlich

$$\begin{aligned}
l_{\mu_{L'}\vartheta_{L'}}^* \ddot{x}^{\vartheta_{L'}} + r_{\mu_{L'}\vartheta_{R1}}^* \dot{x}^{\vartheta_{R1}} + d_{\mu_{L'}\xi_2}^{(e,m)} \dot{x}^{\xi_2} + \tilde{r}_{\mu_{L'}\vartheta_{L'}}^* \dot{x}^{\vartheta_{L'}} + k_{\mu_{L'}\xi_2}^{(e,m)} x^{\xi_2} + c_{\mu_{L'}\vartheta_{\check{C}}}^* x^{\vartheta_{\check{C}}} &= \Phi_{\mu_{L'}}, \\
r_{\mu_{R1}\vartheta_{R1}}^* \dot{x}^{\vartheta_{R1}} + r_{\mu_{R1}\vartheta_{L'}}^* \dot{x}^{\vartheta_{L'}} + p_{\mu_{R1}\xi_2}^{(e,m)} x^{\xi_2} + c_{\mu_{R1}\vartheta_{\check{C}}}^* x^{\vartheta_{\check{C}}} &= \Phi_{\mu_R}.
\end{aligned}$$

# Anhang C

## Das lineare Komplementaritätsproblem

Dieser Anhang stellt eine Ergänzung zu Kapitel 5 dar. Hier sind einige wichtige Eigenschaften von Matrizen erläutert. Anschließend wird die Grundform des linearen Komplementaritätsproblems (LCP) dargestellt und kurz auf seine Lösbarkeit eingegangen.

### C.1 Matrizen mit bestimmten Eigenschaften

**Definition C.1** Sei  $B_{ab} \in \mathbb{R}^{n,n}$  eine quadratische Matrix, deren Zeilen und Spalten fortlaufend durchnummeriert sind ( $i = 1, \dots, n$ ). Jede Matrix, die man durch (evtl. wiederholtes) Weglassen einer Zeile und einer Spalte mit der gleichen Nummer erhält, heißt Hauptuntermatrix von  $B_{ab}$ . Die Determinante einer Hauptuntermatrix von  $B_{ab}$  heißt Hauptunterdeterminante von  $B_{ab}$ .

**Definition C.2** Eine quadratische Matrix  $B_{ab} \in \mathbb{R}^{n,n}$  heißt P-Matrix, wenn all ihre Hauptunterdeterminanten strikt positiv sind.

**Definition C.3** Eine quadratische Matrix  $B_{ab} \in \mathbb{R}^{n,n}$  heißt PD-Matrix (bzw. positiv definit), wenn  $B_{ab} x^a x^b > 0$  für alle  $x^a \neq 0$  ist.

#### **Bemerkung:**

Eine symmetrische Matrix, die positiv definit ist, ist stets gleichzeitig eine P-Matrix und umgekehrt. Eine nicht symmetrische positiv definite Matrix ist ebenfalls stets gleichzeitig eine P-Matrix (aber nicht umgekehrt).

### C.2 Definition des LCP

Das lineare Komplementaritätsproblem (aus dem Englischen: linear complementarity problem – LCP) ist hauptsächlich bekannt als eine einheitliche Beschreibung für die große Klasse der linearen und quadratischen Optimierungsprobleme. Es wird aber ebenso zur Lösung von Aufgaben des Operations research, der Spieltheorie und anderer Bereiche eingesetzt. Stets sind zwei Problemeigenschaften für eine mögliche Anwendung des LCP

ausschlaggebend: Komplementarität und Linearität. Detaillierte Beschreibungen des LCP finden sich z.B. in [26] und [161]. Eine sehr gute Zusammenfassung der wichtigsten Eigenschaften eines LCP und der daraus ableitbaren Aussagen bezüglich seiner Lösungsmöglichkeiten enthält [67].

Die Grundform des LCP (hier in Tensorschreibweise angegeben) lautet:

**Definition C.4** *Mit  $a, b \in \{1, \dots, n\}$  seien eine  $n$ -reihige quadratische Matrix  $B_a^b \in \mathbb{R}^{n,n}$  und ein Vektor  $b_a \in \mathbb{R}^n$  gegeben. Dann sind alle Lösungen  $y_a, x_a \in \mathbb{R}^n$  gesucht zu dem Problem*

$$y_a = B_a^b x_b + b_a \quad (\text{C.1})$$

unter den zusätzlichen Bedingungen

$$y_a, x_a \geq 0 \quad \forall a, \quad y_a x_a = 0. \quad (\text{C.2a,b})$$

Wegen (C.2a) ist (C.2b) nur erfüllt, wenn die Komplementaritätsbedingung  $y_b x_b = 0$  für jedes  $b = 1, \dots, n$  gültig ist. Mit der Einheitsmatrix  $\delta_a^b$  ( $a$  – Zeilenindex,  $b$  – Spaltenindex) ist (C.1) äquivalent mit

$$\delta_a^b y_b - B_a^b x_b = b_a. \quad (\text{C.3})$$

Das heißt mit (C.2), dass der Vektor  $b_a$  als nichtnegative Linearkombination der (mit  $b$  nummerierten) Spaltenvektoren der beiden Matrizen  $\delta_a^b$  und  $-B_a^b$  dargestellt werden muss, wobei aufgrund der Komplementaritätsbedingung  $y_b x_b = 0$  für jedes spezielle  $b$  entweder nur das betreffende Spaltenelement aus  $\delta_a^b$  oder das aus  $-B_a^b$  in die Darstellung eingeht. Die beiden Variablen  $x_b$  und  $y_b$  werden deshalb auch als Paar komplementärer Variablen bezeichnet.

### C.3 Existenz und Eindeutigkeit

Zur Ermittlung aller Lösungen eines LCP ist es notwendig  $2^n$  verschiedene lineare Systeme der Form

$$C_k^a z_b = b, \quad \text{mit } z_b \geq 0, \quad k = 1, \dots, 2^n, \quad (\text{C.4})$$

aufzustellen. Dabei setzt sich der Vektor  $z_b$  aus den Komponenten von  $y_b$  oder  $x_b$  zusammen ( $z_i \in \{y_i, x_i\}$ ,  $i = 1, \dots, n$ ). Die Matrix  $C_k^a$  besteht aus  $n$  Spaltenvektoren ( $C_k^a{}^i$ ,  $i = 1, \dots, n$ ). Jeder dieser Spaltenvektoren wird entweder aus einem Spaltenvektor der Einheitsmatrix  $\delta_a^b$  oder der Matrix  $-B_a^b$  gebildet ( $C_k^a{}^i \in \{\delta_a^i, -B_a^i\}$ ,  $i = 1, \dots, n$ ). Die Komplementärbedingung liefert für alle  $z_k^i$  und  $C_k^a{}^i$

$$\begin{aligned} z_k^i = y_i &\iff C_k^a{}^i = \delta_a^i, \\ z_k^i = x_i &\iff C_k^a{}^i = -B_a^i. \end{aligned}$$

Das komplette LCP kann keine oder genau eine Lösung aber auch mehrere oder unendlich viele Lösungen besitzen. Die Existenz und Eindeutigkeit der LCP-Lösungen hängt

hauptsächlich von der Matrix  $B_a^b$  aber gelegentlich auch vom Vektor  $b_a$  ab. In dem speziellen Fall, dass  $B_a^b$  eine so genannte P-Matrix ist (siehe Abschnitt C.1), hat das LCP unabhängig von  $b_a$  immer exakt eine Lösung. Diese Eigenschaft ist bei der Lösung der für elektrische Systeme aufzustellenden LCP von Bedeutung. Eine Zusammenstellung der für verschiedene unilaterale Bindungen bei mechanischen Systemen aufzustellenden LCP und die Diskussion ihrer Lösungen findet sich in [67].

Zur Lösung eines LCP sind derzeit im Wesentlichen zwei Methoden bekannt. Die derzeit einzige Verfahrensweise, die mit Sicherheit alle existierenden Lösungen liefert, ist die – oben beschriebene – so genannte enumerative Methode. Dabei werden der Reihe nach alle  $2^n$  verschiedenen linearen Systeme der Form (C.4) aufgestellt und auf erlaubte Lösungen untersucht. Das kann (vor allem bei großen Systemen) sehr aufwändig werden. Eine andere Möglichkeit besteht in der Anwendung des so genannten Lemke-Algorithmus [25, 114, 115]. Dieser hat allerdings einen Nachteil: Wenn der Algorithmus ohne gefundene Lösung abbricht, ist nicht sicher, ob nicht etwa trotzdem Lösungen des LCP existieren. Für bestimmte Klassen von Matrizen (z.B. positiv semidefinite) lässt sich allerdings zeigen, dass der Algorithmus eine Lösung findet, falls Lösungen existieren. Für tiefgreifende Betrachtungen zur Lösbarkeit von LCP sei auf die Literatur verwiesen (z.B. [25, 26, 161]).



# Anhang D

## Stabilitätsnachweise mittels Lyapunov-Funktion

Dieser Anhang stellt eine Ergänzung zu Kapitel 6.3 dar. Zunächst werden einige Eigenschaften von symmetrischen positiv definiten Matrizen hergeleitet. Anschließend wird die zeitliche Ableitung der Fehlerzustandsfunktion  $V$  unter Verwendung der Fehlerdynamik bei regulärer Induktormatrix sowie bei strukturellen Singularitäten ausführlich dargestellt.

### D.1 Einige Eigenschaften

#### D.1.1 Eine Matrixzerlegung

Jede symmetrische Matrix kann in Matrixschreibweise dargestellt werden als

$$g = \begin{pmatrix} u & v^T \\ v & w \end{pmatrix}$$

( $u$ ,  $w$  jeweils symmetrisch,  $v$  nicht notwendig quadratisch). Wenn  $g$  positiv definit ist, sind auch  $u$  und  $w$  positiv definit (bzw. jede Hauptuntermatrix). Dann ist  $w$  invertierbar und es gilt  $(w^{-1})^T = w^{-1}$ . Wenn  $g$  linksseitig mit einer beliebigen Matrix und rechtsseitig mit deren Transponierter multipliziert wird, bleiben die Symmetrie- und Definitheitseigenschaften von  $g$  erhalten (siehe z.B. [101]). Mit  $I$  als Einheitsmatrix lässt sich also schreiben

$$\begin{aligned} B &= \begin{pmatrix} I & -v^T w^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & v^T \\ v & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -w^{-1}v & I \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u - v^T w^{-1}v & 0 \\ v & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -w^{-1}v & I \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u - v^T w^{-1}v & 0 \\ 0 & w \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wenn  $g$  positiv definit ist, gilt das auch für  $B$  und somit jeweils für  $u - v^T w^{-1}v$  und  $w$ . Deshalb sind (6.12a) und (6.12b) jeweils symmetrisch und positiv definit.

### D.1.2 Eine quadratische Form

Die quadratischen Formen (6.16) bzw. (6.27) lassen sich in Matrixschreibweise darstellen als

$$Q = -\dot{e}^T \tilde{A} \dot{e} + 2\dot{e}^T B e - e^T C e.$$

Dabei ist  $e$  der Vektor der Lageabweichungen, d.h.  $(e) = ((e^{\kappa_1}, e^{\mu_1}))$  und  $(\dot{e}) = ((\dot{e}^{\kappa_1}, \dot{e}^{\mu_1}))$ . Die Matrizen  $\tilde{A}$ ,  $B$ ,  $C$  sind Zusammenfassungen der entsprechenden Koeffizienten aus (6.16) bzw. (6.27). Die Matrix  $\tilde{A}$  ist für eine entsprechend gewählte Gain-Matrix  $K$  symmetrisch und positiv definit. Die Matrix  $C$  setzt sich aus den beiden Gain-Matrizen  $C_{\kappa_1 \lambda_1}$  und  $C_{\mu_1 \nu_1}$  (bzw.  $C_{\mu_1^L \nu_1^L}$ ) zusammen und ist somit unter Berücksichtigung der Ergänzungsfaktoren  $\varepsilon_m$  und  $\varepsilon_e$  frei wählbar (symmetrisch, positiv definit). Mit der stets möglichen Zerlegung  $\tilde{A} = A^T A$  folgt dann weiter

$$\begin{aligned} Q &= -\dot{e}^T A^T A \dot{e} + \dot{e}^T B e + (\dot{e}^T B e)^T - e^T C e \\ &= -\dot{e}^T A^T A \dot{e} + \dot{e}^T B e + e^T B^T \dot{e} - e^T C e \\ &= -(\dot{e}^T A^T - e^T B^T A^{-1})(A \dot{e} - (A^T)^{-1} B e) + e^T B^T A^{-1} (A^T)^{-1} B e - e^T C e \\ &= -(A \dot{e} - (A^T)^{-1} B e)^T (A \dot{e} - (A^T)^{-1} B e) - e^T (C - B^T A^{-1} (A^T)^{-1} B) e. \end{aligned}$$

Falls nun die Elemente der Matrix  $C$  genügend groß gewählt werden, ist  $(C - B^T A^{-1} (A^T)^{-1} B)$  positiv definit und die quadratische Form  $Q$  wird negativ semidefinit.

## D.2 Stabilität bei regulärer Induktivitätsmatrix

Die Fehlerzustandsfunktion nach (6.14) lautet

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \check{g}_{\kappa_1 \lambda_1} \dot{e}^{\kappa_1} \dot{e}^{\lambda_1} + \frac{1}{2} C_{\kappa_1 \lambda_1} e^{\kappa_1} e^{\lambda_1} + \frac{1}{2} \check{g}_{\mu_1 \nu_1} \dot{e}^{\mu_1} \dot{e}^{\nu_1} + \frac{1}{2} C_{\mu_1 \nu_1} e^{\mu_1} e^{\nu_1} + \\ &\quad + \varepsilon_m \check{g}_{\kappa_1 \lambda_1} e^{\kappa_1} \dot{e}^{\lambda_1} + \varepsilon_e \check{g}_{\mu_1 \nu_1} e^{\mu_1} \dot{e}^{\nu_1}. \end{aligned} \quad (D.1)$$

Die totale Zeitableitung von  $V$  ergibt zunächst

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \check{g}_{\kappa_1 \lambda_1} \dot{e}^{\kappa_1} \ddot{e}^{\lambda_1} + \frac{1}{2} \dot{\check{g}}_{\kappa_1 \lambda_1} \dot{e}^{\kappa_1} \dot{e}^{\lambda_1} + C_{\kappa_1 \lambda_1} \dot{e}^{\kappa_1} e^{\lambda_1} + \\ &\quad + \check{g}_{\mu_1 \nu_1} \dot{e}^{\mu_1} \ddot{e}^{\nu_1} + \frac{1}{2} \dot{\check{g}}_{\mu_1 \nu_1} \dot{e}^{\mu_1} \dot{e}^{\nu_1} + C_{\mu_1 \nu_1} \dot{e}^{\mu_1} e^{\nu_1} + \\ &\quad + \varepsilon_m \left[ \dot{\check{g}}_{\kappa_1 \lambda_1} \dot{e}^{\kappa_1} \dot{e}^{\lambda_1} + \check{g}_{\kappa_1 \lambda_1} \dot{e}^{\kappa_1} \dot{e}^{\lambda_1} + \check{g}_{\kappa_1 \lambda_1} e^{\kappa_1} \ddot{e}^{\lambda_1} \right] + \\ &\quad + \varepsilon_e \left[ \dot{\check{g}}_{\mu_1 \nu_1} \dot{e}^{\mu_1} \dot{e}^{\nu_1} + \check{g}_{\mu_1 \nu_1} \dot{e}^{\mu_1} \dot{e}^{\nu_1} + \check{g}_{\mu_1 \nu_1} e^{\mu_1} \ddot{e}^{\nu_1} \right]. \end{aligned} \quad (D.2)$$

Umstellen von (6.13) nach  $\ddot{e}^{\alpha_1}$  liefert mit  $\check{g}^{\sigma_1 \kappa_1} \check{g}_{\kappa_1 \lambda_1} = \delta_{\lambda_1}^{\sigma_1}$  und  $\check{g}^{\omega_1 \mu_1} \check{g}_{\mu_1 \nu_1} = \delta_{\nu_1}^{\omega_1}$

$$\begin{aligned} \ddot{e}^{\sigma_1} &= -\check{g}^{\sigma_1 \kappa_1} \left[ (\Gamma_{\kappa_1 \lambda_1 \rho} \dot{q}^\rho + \Gamma_{\kappa_1 \lambda_1 0} + K_{\kappa_1 \lambda_1}) \dot{e}^{\lambda_1} + \Gamma_{\kappa_1 \nu_1 \omega} \dot{q}^\omega \dot{e}^{\nu_1} + C_{\kappa_1 \lambda_1} e^{\lambda_1} \right], \\ \ddot{e}^{\omega_1} &= -\check{g}^{\omega_1 \mu_1} \left[ (\Gamma_{\mu_1 \nu_1 \rho} \dot{q}^\rho + \Gamma_{\mu_1 \nu_1 0} + K_{\mu_1 \nu_1}) \dot{e}^{\nu_1} + \Gamma_{\mu_1 \lambda_1 \nu} \dot{q}^\nu \dot{e}^{\lambda_1} + C_{\mu_1 \nu_1} e^{\nu_1} \right]. \end{aligned}$$



Eine Substitution dieser Fehlerbeschleunigungen in (D.2) ergibt unter Beachtung von  $\check{g}_{a_1 b_1} = g_{a_1 b_1} - G_{a_1 b_1}$  (wegen (6.12) und (6.15)) schließlich

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -(\Gamma_{\kappa_1 \lambda_1 \varrho} \dot{q}^\varrho + \Gamma_{\kappa_1 \lambda_1 0} + K_{\kappa_1 \lambda_1}) \dot{e}^{\kappa_1} \dot{e}^{\lambda_1} - \Gamma_{\kappa_1 \nu_1 \omega} \dot{q}^\omega \dot{e}^{\kappa_1} \dot{e}^{\nu_1} + \frac{1}{2} (\dot{g}_{\kappa_1 \lambda_1} - \dot{G}_{\kappa_1 \lambda_1}) \dot{e}^{\kappa_1} \dot{e}^{\lambda_1} - \\ & - (\Gamma_{\mu_1 \nu_1 \varrho} \dot{q}^\varrho + \Gamma_{\mu_1 \nu_1 0} + K_{\mu_1 \nu_1}) \dot{e}^{\mu_1} \dot{e}^{\nu_1} - \Gamma_{\mu_1 \lambda_1 \omega} \dot{q}^\omega \dot{e}^{\mu_1} \dot{e}^{\lambda_1} + \frac{1}{2} (\dot{g}_{\mu_1 \nu_1} - \dot{G}_{\mu_1 \nu_1}) \dot{e}^{\mu_1} \dot{e}^{\nu_1} + \\ & + \varepsilon_m \left[ \check{g}_{\kappa_1 \lambda_1} \dot{e}^{\kappa_1} \dot{e}^{\lambda_1} + \dot{g}_{\kappa_1 \lambda_1} e^{\kappa_1} \dot{e}^{\lambda_1} - \right. \\ & \quad \left. - (\Gamma_{\kappa_1 \lambda_1 \varrho} \dot{q}^\varrho + \Gamma_{\kappa_1 \lambda_1 0} + K_{\kappa_1 \lambda_1}) e^{\kappa_1} \dot{e}^{\lambda_1} - \Gamma_{\kappa_1 \nu_1 \omega} \dot{q}^\omega e^{\kappa_1} \dot{e}^{\nu_1} - C_{\kappa_1 \lambda_1} e^{\kappa_1} \dot{e}^{\lambda_1} \right] + \\ & + \varepsilon_e \left[ \check{g}_{\mu_1 \nu_1} \dot{e}^{\mu_1} \dot{e}^{\nu_1} + \dot{g}_{\mu_1 \nu_1} e^{\mu_1} \dot{e}^{\nu_1} - \right. \\ & \quad \left. - (\Gamma_{\mu_1 \nu_1 \varrho} \dot{q}^\varrho + \Gamma_{\mu_1 \nu_1 0} + K_{\mu_1 \nu_1}) e^{\mu_1} \dot{e}^{\nu_1} - \Gamma_{\mu_1 \lambda_1 \omega} \dot{q}^\omega e^{\mu_1} \dot{e}^{\lambda_1} - C_{\mu_1 \nu_1} e^{\mu_1} \dot{e}^{\nu_1} \right]. \end{aligned}$$

Die totale Zeitableitung von  $g_{\kappa_1 \lambda_1}$  lautet

$$\dot{g}_{\kappa_1 \lambda_1}(q^\sigma, t) = \partial_\varrho g_{\kappa_1 \lambda_1} \dot{q}^\varrho + \partial_0 g_{\kappa_1 \lambda_1}$$

und es gilt für die Christoffelsymbole

$$\Gamma_{\kappa_1 \lambda_1 \varrho} = \frac{1}{2} (\partial_{\lambda_1} g_{\kappa_1 \varrho} + \partial_\varrho g_{\kappa_1 \lambda_1} - \partial_{\kappa_1} g_{\lambda_1 \varrho})$$

sowie

$$\Gamma_{\kappa_1 \lambda_1 0} = \frac{1}{2} (\partial_{\lambda_1} g_{\kappa_1 0} + \partial_0 g_{\kappa_1 \lambda_1} - \partial_{\kappa_1} g_{\lambda_1 0}).$$

Damit ist

$$\frac{1}{2} \dot{g}_{\kappa_1 \lambda_1} - \Gamma_{\kappa_1 \lambda_1 \varrho} \dot{q}^\varrho - \Gamma_{\kappa_1 \lambda_1 0} = \partial_{[\kappa_1} g_{\lambda_1] \varrho} \dot{q}^\varrho + \partial_{[\kappa_1} g_{\lambda_1] 0}$$

schiefsymmetrisch bezüglich der Indizes  $\kappa_1$  und  $\lambda_1$  und es verschwindet die quadratische Form

$$\left( \frac{1}{2} \dot{g}_{\kappa_1 \lambda_1} - \Gamma_{\kappa_1 \lambda_1 \varrho} \dot{q}^\varrho - \Gamma_{\kappa_1 \lambda_1 0} \right) \dot{e}^{\kappa_1} \dot{e}^{\lambda_1} = (\partial_{[\kappa_1} g_{\lambda_1] \varrho} \dot{q}^\varrho + \partial_{[\kappa_1} g_{\lambda_1] 0}) \dot{e}^{\kappa_1} \dot{e}^{\lambda_1} \equiv 0.$$

Weiterhin gilt

$$\dot{g}_{\mu_1 \nu_1}(q^\sigma, t) = \partial_\varrho g_{\mu_1 \nu_1} \dot{q}^\varrho + \partial_0 g_{\mu_1 \nu_1}$$

und wegen  $g_{\mu\lambda} \equiv 0$  schließlich

$$\Gamma_{\mu_1 \nu_1 \varrho} \dot{q}^\varrho + \Gamma_{\mu_1 \nu_1 0} = \frac{1}{2} \partial_\varrho g_{\mu_1 \nu_1} \dot{q}^\varrho + \frac{1}{2} (\partial_{\nu_1} g_{\mu_1 0} + \partial_0 g_{\mu_1 \nu_1} - \partial_{\mu_1} g_{\nu_1 0}).$$

Somit verschwindet wegen der Schiefsymmetrie bezüglich der Indizes  $\mu_1$  und  $\nu_1$  ebenfalls die quadratische Form

$$\left( \frac{1}{2} \dot{g}_{\mu_1 \nu_1} - \Gamma_{\mu_1 \nu_1 \varrho} \dot{q}^\varrho - \Gamma_{\mu_1 \nu_1 0} \right) \dot{e}^{\mu_1} \dot{e}^{\nu_1} = \partial_{[\mu_1} g_{\nu_1] 0} \dot{e}^{\mu_1} \dot{e}^{\nu_1} \equiv 0.$$

Wegen  $g_{\kappa\nu} \equiv 0$  ist

$$\Gamma_{\kappa_1\nu_1\omega} = -\Gamma_{\nu_1\kappa_1\omega} = -\frac{1}{2}\partial_{\kappa_1}g_{\nu_1\omega}.$$

Daraus folgt weiter für die totale Zeitableitung von  $V$

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\left(K_{\kappa_1\lambda_1} + \frac{1}{2}\dot{G}_{\kappa_1\lambda_1} - \varepsilon_m\check{g}_{\kappa_1\lambda_1}\right)\dot{e}^{\kappa_1}\dot{e}^{\lambda_1} - \left(K_{\mu_1\nu_1} + \frac{1}{2}\dot{G}_{\mu_1\nu_1} - \varepsilon_e\check{g}_{\mu_1\nu_1}\right)\dot{e}^{\mu_1}\dot{e}^{\nu_1} - \\ &\quad - \varepsilon_m C_{\kappa_1\lambda_1} e^{\kappa_1} e^{\lambda_1} - \varepsilon_e C_{\mu_1\nu_1} e^{\mu_1} e^{\nu_1} + \\ &\quad + \varepsilon_m \left[ \left(\dot{g}_{\kappa_1\lambda_1} - \Gamma_{\kappa_1\lambda_1\varrho}\dot{q}^\varrho - \Gamma_{\kappa_1\lambda_1 0} - K_{\kappa_1\lambda_1}\right) e^{\kappa_1} \dot{e}^{\lambda_1} - \Gamma_{\kappa_1\nu_1\omega}\dot{q}^\omega e^{\kappa_1} \dot{e}^{\nu_1} \right] + \\ &\quad + \varepsilon_e \left[ \left(\dot{g}_{\mu_1\nu_1} - \Gamma_{\mu_1\nu_1\varrho}\dot{q}^\varrho - \Gamma_{\mu_1\nu_1 0} - K_{\mu_1\nu_1}\right) e^{\mu_1} \dot{e}^{\nu_1} - \Gamma_{\mu_1\lambda_1\omega}\dot{q}^\omega e^{\mu_1} \dot{e}^{\lambda_1} \right]. \end{aligned}$$

Diese Darstellung von  $\dot{V}$  findet sich in Abschnitt 6.3.4 in Gestalt von (6.16) wieder.

### D.3 Stabilität bei strukturellen Singularitäten

Dieser Anhang ergänzt die Ausführungen in Abschnitt 6.3.5. Deshalb wird auch die dort eingeführte Schreibweise mit oberen Subindizes verwendet. Die Fehlerzustandsfunktion nach (6.25) lautet

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}\check{g}_{\kappa^1\lambda^1}\dot{e}^{\kappa^1}\dot{e}^{\lambda^1} + \frac{1}{2}C_{\kappa^1\lambda^1}e^{\kappa^1}e^{\lambda^1} + \frac{1}{2}\check{g}_{\mu^1\nu^1}\dot{e}^{\mu^1}\dot{e}^{\nu^1} + \frac{1}{2}C_{\mu^1\nu^1}e^{\mu^1}e^{\nu^1} + \\ &\quad + \vartheta\check{r}_{\mu^1_R\nu^1_R}e^{\mu^1_R}e^{\nu^1_R} + \varepsilon_m\check{g}_{\kappa^1\lambda^1}e^{\kappa^1}\dot{e}^{\lambda^1} + \varepsilon_e\check{g}_{\mu^1\nu^1}e^{\mu^1}\dot{e}^{\nu^1}. \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

Daraus folgt die totale Zeitableitung

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \check{g}_{\kappa^1\lambda^1}\dot{e}^{\kappa^1}\ddot{e}^{\lambda^1} + \frac{1}{2}\dot{\check{g}}_{\kappa^1\lambda^1}\dot{e}^{\kappa^1}\dot{e}^{\lambda^1} + C_{\kappa^1\lambda^1}\dot{e}^{\kappa^1}e^{\lambda^1} + \\ &\quad + \check{g}_{\mu^1\nu^1}\dot{e}^{\mu^1}\dot{e}^{\nu^1} + \frac{1}{2}\dot{\check{g}}_{\mu^1\nu^1}\dot{e}^{\mu^1}\dot{e}^{\nu^1} + C_{\mu^1\nu^1}\dot{e}^{\mu^1}e^{\nu^1} + \\ &\quad + \vartheta\check{r}_{\mu^1_R\nu^1_R}e^{\mu^1_R}\dot{e}^{\nu^1_R} + \vartheta\frac{1}{2}\dot{\check{r}}_{\mu^1_R\nu^1_R}e^{\mu^1_R}e^{\nu^1_R} + \\ &\quad + \varepsilon_m \left[ \check{g}_{\kappa^1\lambda^1}\dot{e}^{\kappa^1}\dot{e}^{\lambda^1} + \dot{\check{g}}_{\kappa^1\lambda^1}e^{\kappa^1}\dot{e}^{\lambda^1} + \check{g}_{\kappa^1\lambda^1}e^{\kappa^1}\ddot{e}^{\lambda^1} \right] + \\ &\quad + \varepsilon_e \left[ \check{g}_{\mu^1\nu^1}\dot{e}^{\mu^1}\dot{e}^{\nu^1} + \dot{\check{g}}_{\mu^1\nu^1}e^{\mu^1}\dot{e}^{\nu^1} + \check{g}_{\mu^1\nu^1}e^{\mu^1}\ddot{e}^{\nu^1} \right]. \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

Umstellen von (6.24a–6.24c) nach  $\ddot{e}^{\kappa^1}$ ,  $\ddot{e}^{\mu^1}$  bzw.  $\dot{e}^{\mu^1_R}$  liefert (mit  $\check{r}_{\mu^1_R\nu^1_R} = \delta_{\nu^1_R}^{\mu^1_R}$ )

$$\begin{aligned} \ddot{e}^{\sigma^1} &= -\check{g}^{\sigma^1\kappa^1} \left[ (\Gamma_{\kappa^1\lambda^1\varrho}\dot{q}^\varrho + \Gamma_{\kappa^1\lambda^1 0} + K_{\kappa^1\lambda^1}) \dot{e}^{\lambda^1} + \Gamma_{\kappa^1\nu^1\omega}\dot{q}^\omega \dot{e}^{\nu^1} + C_{\kappa^1\lambda^1}e^{\lambda^1} \right], \\ \ddot{e}^{\omega^1} &= -\check{g}^{\omega^1\mu^1} \left[ (\Gamma_{\mu^1\nu^1\varrho}\dot{q}^\varrho + \Gamma_{\mu^1\nu^1 0} + K_{\mu^1\nu^1}) \dot{e}^{\nu^1} + \Gamma_{\mu^1\lambda^1\omega}\dot{q}^\omega \dot{e}^{\lambda^1} + C_{\mu^1\nu^1}e^{\nu^1} \right], \\ \dot{e}^{\omega^1_R} &= -\check{r}^{\omega^1_R\mu^1_R} C_{\mu^1_R\nu^1_R} \dot{e}^{\nu^1_R}. \end{aligned}$$

Eine Substitution dieser Fehlerbeschleunigungen bzw. -geschwindigkeiten in (D.4) ergibt

$$\begin{aligned}
\dot{V} = & -(\Gamma_{\kappa^1\lambda^1\varrho}\dot{q}^\varrho + \Gamma_{\kappa^1\lambda^1 0} + K_{\kappa^1\lambda^1})\dot{e}^{\kappa^1}\dot{e}^{\lambda^1} - \Gamma_{\kappa^1\nu_L^1\omega_L}\dot{q}^{\omega_L}\dot{e}^{\kappa^1}\dot{e}^{\nu_L^1} + \frac{1}{2}\dot{g}_{\kappa^1\lambda^1}\dot{e}^{\kappa^1}\dot{e}^{\lambda^1} - \\
& - \left(\Gamma_{\mu_L^1\nu_L^1\varrho}\dot{q}^\varrho + \Gamma_{\mu_L^1\nu_L^1 0} + K_{\mu_L^1\nu_L^1}\right)\dot{e}^{\mu_L^1}\dot{e}^{\nu_L^1} - \Gamma_{\mu_L^1\lambda^1\omega_L}\dot{q}^{\omega_L}\dot{e}^{\mu_L^1}\dot{e}^{\lambda^1} + \frac{1}{2}\dot{g}_{\mu_L^1\nu_L^1}\dot{e}^{\mu_L^1}\dot{e}^{\nu_L^1} - \\
& - \vartheta \left(C_{\mu_R^1\nu_R^1} - \frac{1}{2}\dot{r}_{\mu_R^1\nu_R^1}\right)e^{\mu_R^1}e^{\nu_R^1} + \\
& + \varepsilon_m \left[\dot{g}_{\kappa^1\lambda^1}\dot{e}^{\kappa^1}\dot{e}^{\lambda^1} + \dot{g}_{\kappa^1\lambda^1}e^{\kappa^1}\dot{e}^{\lambda^1} - (\Gamma_{\kappa^1\lambda^1\varrho}\dot{q}^\varrho + \Gamma_{\kappa^1\lambda^1 0} + K_{\kappa^1\lambda^1})e^{\kappa^1}\dot{e}^{\lambda^1} - \right. \\
& \quad \left. - \Gamma_{\kappa^1\nu_L^1\omega_L}\dot{q}^{\omega_L}e^{\kappa^1}\dot{e}^{\nu_L^1} - C_{\kappa^1\lambda^1}e^{\kappa^1}e^{\lambda^1}\right] + \\
& + \varepsilon_e \left[\dot{g}_{\mu_L^1\nu_L^1}\dot{e}^{\mu_L^1}\dot{e}^{\nu_L^1} + \dot{g}_{\mu_L^1\nu_L^1}e^{\mu_L^1}\dot{e}^{\nu_L^1} - \left(\Gamma_{\mu_L^1\nu_L^1\varrho}\dot{q}^\varrho + \Gamma_{\mu_L^1\nu_L^1 0} + K_{\mu_L^1\nu_L^1}\right)e^{\mu_L^1}\dot{e}^{\nu_L^1} - \right. \\
& \quad \left. - \Gamma_{\mu_L^1\lambda^1\omega_L}\dot{q}^{\omega_L}e^{\mu_L^1}\dot{e}^{\lambda^1} - C_{\mu_L^1\nu_L^1}e^{\mu_L^1}e^{\nu_L^1}\right].
\end{aligned}$$

Im Folgenden werden die gleichen Schiefsymmetrie-Eigenschaften wie im vorhergehenden Abschnitt unter Beachtung von  $\check{g}_{a_L^1 b_L^1} = g_{a_L^1 b_L^1} - G_{a_L^1 b_L^1}$  und  $\check{r}_{\mu_R^1 \nu_R^1} = r_{\mu_R^1 \nu_R^1} - G_{\mu_R^1 \nu_R^1}$  (wegen (6.23) und (6.26)) ausgenutzt. Weiterhin gilt wegen (6.26) und (3.16b) und weil  $w_{\mu\nu}$  stets als konstant vorausgesetzt wird

$$\begin{aligned}
\check{r}_{\mu_R^1 \nu_R^1} &= \dot{r}_{\mu_R^1 \nu_R^1} - \dot{G}_{\mu_R^1 \nu_R^1} = \dot{s}_{\mu_R^1 \nu_R^1} + \dot{w}_{\mu_R^1 \nu_R^1} - \dot{G}_{\mu_R^1 \nu_R^1} \\
&= \dot{s}_{\mu_R^1 \nu_R^1} - \dot{G}_{\mu_R^1 \nu_R^1}.
\end{aligned}$$

Damit wird die zeitliche Ableitung der Fehlerzustandsfunktion

$$\begin{aligned}
\dot{V} = & - \left(K_{\kappa^1\lambda^1} + \frac{1}{2}\dot{G}_{\kappa^1\lambda^1} - \varepsilon_m\check{g}_{\kappa^1\lambda^1}\right)\dot{e}^{\kappa^1}\dot{e}^{\lambda^1} - \left(K_{\mu_L^1\nu_L^1} + \frac{1}{2}\dot{G}_{\mu_L^1\nu_L^1} - \varepsilon_e\check{g}_{\mu_L^1\nu_L^1}\right)\dot{e}^{\mu_L^1}\dot{e}^{\nu_L^1} - \\
& - \vartheta \left(C_{\mu_R^1\nu_R^1} - \frac{1}{2}\dot{s}_{\mu_R^1\nu_R^1} + \frac{1}{2}\dot{G}_{\mu_R^1\nu_R^1}\right)e^{\mu_R^1}e^{\nu_R^1} - \varepsilon_m C_{\kappa^1\lambda^1}e^{\kappa^1}e^{\lambda^1} - \varepsilon_e C_{\mu_L^1\nu_L^1}e^{\mu_L^1}e^{\nu_L^1} + \\
& + \varepsilon_m \left[\left(\dot{g}_{\kappa^1\lambda^1} - \Gamma_{\kappa^1\lambda^1\varrho}\dot{q}^\varrho - \Gamma_{\kappa^1\lambda^1 0} - K_{\kappa^1\lambda^1}\right)e^{\kappa^1}\dot{e}^{\lambda^1} - \Gamma_{\kappa^1\nu_L^1\omega_L}\dot{q}^{\omega_L}e^{\kappa^1}\dot{e}^{\nu_L^1}\right] + \\
& + \varepsilon_e \left[\left(\dot{g}_{\mu_L^1\nu_L^1} - \Gamma_{\mu_L^1\nu_L^1\varrho}\dot{q}^\varrho - \Gamma_{\mu_L^1\nu_L^1 0} - K_{\mu_L^1\nu_L^1}\right)e^{\mu_L^1}\dot{e}^{\nu_L^1} - \Gamma_{\mu_L^1\lambda^1\omega_L}\dot{q}^{\omega_L}e^{\mu_L^1}\dot{e}^{\lambda^1}\right].
\end{aligned}$$

Diese Darstellung von  $\dot{V}$  findet sich in Abschnitt 6.3.5 in Gestalt von (6.27) wieder.



# Anhang E

## Modellierung von Mikrospiegeln

Im Abschnitt 7.3 wird die Anwendung einiger der in der Arbeit vorgestellten Methoden beispielhaft anhand von elektrostatisch angetriebenen Mikrospiegeln gezeigt. Wichtig für ein Gesamtmodell des diskreten EMS ist dabei eine geschlossene Darstellung der funktionalen Abhängigkeiten der Antriebskapazitäten von den mechanischen Koordinaten. Diese Abhängigkeiten charakterisieren die elektromechanischen Wechselwirkungen. Die Herleitung von entsprechenden Modellen für 1D- und 2D-Spiegel wird hier der Vollständigkeit halber angegeben.

### E.1 Die Kapazitäten des 1D-Spiegels

Ein 1D-Mikrospiegel ist derart mittels Federstrukturen am raumfesten Rahmen befestigt, dass seine Hauptbewegungen eine Verschiebung in Richtung der  $z$ -Achse und eine Drehung um die körperfeste  $x$ -Achse (gemessen mittels Bryantwinkel  $\alpha$ ) sind. Die anderen Bewegungsmöglichkeiten sind wegen der Form der Federn stark eingeschränkt und werden deshalb hier vernachlässigt. Der Antrieb des Spiegels erfolgt über die beiden Kondensatoren, die von jeweils einer Spiegelhalbplatte und der darunter liegenden Elektrode gebildet werden. Das Prinzip der Modellierung der Kapazität eines solchen Kondensators ist in Bild E.1 dargestellt. Die Betrachtung eines Kapazitätselementes mit der Länge  $a$  und

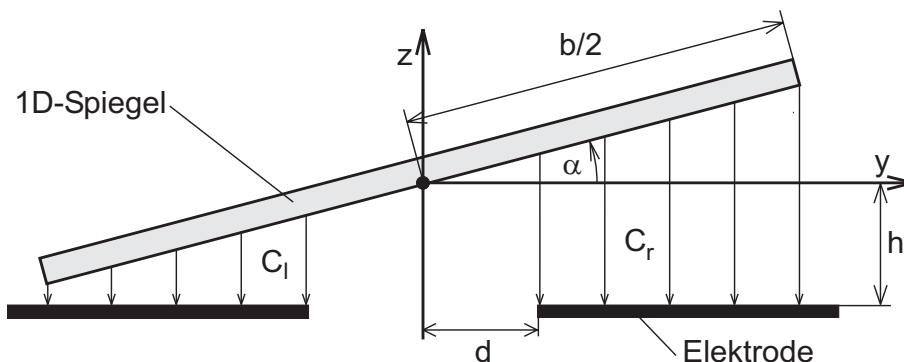


Bild E.1: Prinzip der Kapazitätsmodellierung beim 1D-Spiegel

der Breite  $dy$  liefert unter der Annahme eines Parallelplattenkondensators (homogenes

elektrisches Feld parallel zur  $z$ -Achse, keine Randeffekte) die Kapazität

$$dC = \frac{\varepsilon_0 a}{h + z + y \tan \alpha} dy$$

( $\varepsilon_0$  – Dielektrizitätskonstante,  $a$  – Spiegellänge). Durch Integration in den durch Elektrode und Spiegel bestimmten Grenzen ergeben sich die Funktionen der linken und rechten Kapazität:

$$\begin{aligned} C_l(z, \alpha) &= \int_{-\frac{b}{2} \cos \alpha}^{-d} \frac{\varepsilon_0 a}{h + z + y \tan \alpha} dy = \frac{\varepsilon_0 a}{\tan \alpha} \ln \left( \frac{h + z - d \tan \alpha}{h + z - \frac{b}{2} \sin \alpha} \right) \\ &= -\frac{\varepsilon_0 a}{\tan \alpha} \ln \left( \frac{h + z - \frac{b}{2} \sin \alpha}{h + z - d \tan \alpha} \right), \quad (\text{E.1}) \\ C_r(z, \alpha) &= \int_d^{\frac{b}{2} \cos \alpha} \frac{\varepsilon_0 a}{h + z + y \tan \alpha} dy = \frac{\varepsilon_0 a}{\tan \alpha} \ln \left( \frac{h + z + \frac{b}{2} \sin \alpha}{h + z + d \tan \alpha} \right). \end{aligned}$$

Bei horizontaler Lage des Spiegels ( $\alpha = 0$ ) liefern diese Konstitutivparameter numerisch nicht definierte Ausdrücke. Unter den Bedingungen

$$\left| \frac{\frac{b}{2} \sin \alpha - d \tan \alpha}{h + z \mp d \tan \alpha} \right| < 1$$

sind Taylorentwicklung der entsprechenden Logarithmusfunktionen möglich. Diese liefern für kleine Winkel bei Entwicklung bis zur zweiten Potenz

$$\tilde{C}_{l/r}(z, \alpha) = \frac{\varepsilon_0 a \left( \frac{b}{2} \cos \alpha - d \right)}{h + z \mp d \tan \alpha} \left( 1 \pm \frac{1}{2} \frac{\frac{b}{2} \sin \alpha - d \tan \alpha}{h + z \mp d \tan \alpha} \right). \quad (\text{E.2})$$

Bei sehr kleinen Winkeln  $\alpha$  sind die Kapazitäten gemäß (E.2) zu beschreiben, während bei größeren Winkel (E.1) verwendet werden kann.

## E.2 Die Kapazitäten des 2D-Spiegels

Die Hauptbewegungen des 2D-Mikrospiegels sind eine Verschiebung in Richtung der  $z$ -Achse und zwei Drehungen um die körperfeste  $x$  bzw.  $y$ -Achse (gemessen mittels Bryantwinkeln  $\alpha$  bzw.  $\beta$ ). Die anderen Bewegungsmöglichkeiten können vernachlässigt werden. Der Antrieb des Spiegels erfolgt über vier Kondensatoren, die von jeweils einer Spiegelviertelplatte und der darunter liegenden Elektrode gebildet werden. Bild E.2 zeigt die Aufteilung der Spiegelplatte in vier Viertelplatten. Jede der vier Kapazitäten hängt von den drei mechanischen Koordinaten ab. Ein Ansatz ähnlich dem beim 1D-Spiegel verwendeten Kapazitätselement führt auf Ausdrücke, die nicht geschlossen integrierbar sind. Deshalb wird ein anderer Ansatz angewendet. Dieses Modellierungsprinzip ist in Bild E.3 dargestellt. Es basiert darauf, dass für die Berechnung jeder Kapazität statt der quadratischen Überdeckungsfläche zwischen Spiegelviertelplatte und Elektrode eine kreisförmige Überdeckungsfläche mit gleichem Flächeninhalt angenommen wird. Der Mittelpunkt des

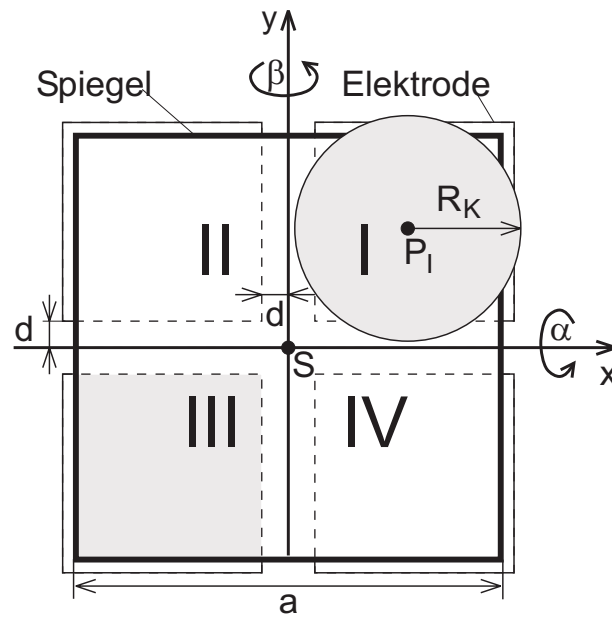


Bild E.2: Viertelplattenaufteilung beim 2D-Spiegel

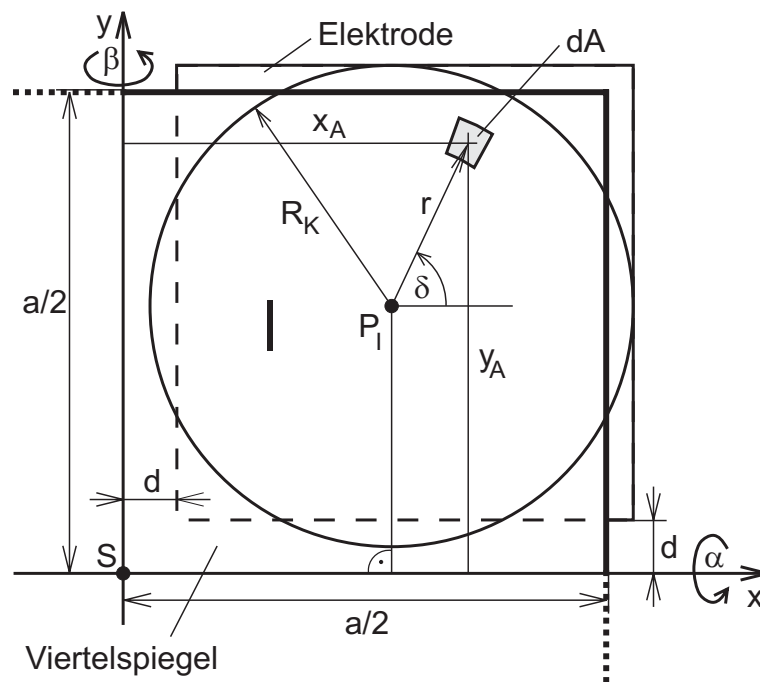


Bild E.3: Prinzip der Kapazitätsmodellierung beim 2D-Spiegel

Überdeckungskreis fällt mit dem Mittelpunkt des Überdeckungsquadrates zusammen. Für den Radius gilt  $R_K = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{b}{2} - d \right)$ . Um die Schrägstellung der Kreisplatte zu berücksichtigen, wird ein Kapazitätselement  $dC$  als Plattenkondensator betrachtet (homogenes elektrisches Feld unterhalb der Plattenfläche  $dA$ , keine Randeffekte). Der Abstand zwischen dem Flächenelement  $dA$  und der Elektrode lässt sich aus den drei mechanischen Koordinaten  $(z, \alpha, \beta)$  des 2D-Spiegels ermitteln. Für den ersten Quadranten lautet er

z.B.

$$h_{A_I} = h + z - x_A \cos \alpha \sin \beta + y_A \sin \alpha,$$

wobei gilt  $x_A = \frac{a}{4} + \frac{d}{2} + r \cos \delta$  und  $y_A = \frac{a}{4} + \frac{d}{2} + r \sin \delta$ . Damit lautet die differenzielle Kapazität

$$dC = \frac{\varepsilon_0 r dr d\delta}{h + z - x_A \cos \alpha \sin \beta + y_A \sin \alpha}.$$

Durch zweifache Integration in den durch den kreisförmigen Ansatz bestimmten Grenzen kann die Gesamtkapazität in geschlossener Form ermittelt werden. Sie lautet z.B. für den ersten Quadranten:

$$\begin{aligned} C_I(z, \alpha, \beta) &= 2\varepsilon_0 \int_0^{R_K} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{r dr d\delta}{h_{P_I} - r \cos \alpha \sin \beta \cos \delta + r \sin \alpha \sin \delta} \\ &= \frac{2\pi\varepsilon_0 h_{P_I}}{1 - \cos^2 \alpha \cos^2 \beta} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{R_K^2 (1 - \cos^2 \alpha \cos^2 \beta)}{h_{P_I}^2}} \right), \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

wobei  $h_{P_I} = h + z + \left(\frac{a}{4} + \frac{d}{2}\right) (\sin \alpha - \cos \alpha \sin \beta)$  der Abstand zwischen Überdeckungskreismittelpunkt und Elektrode ist ( $h$  – Abstand zwischen Spiegelplatte und Elektrode bei entspannten Federn ( $z = \alpha = \beta = 0$ ),  $a$  – Kantenlänge der Spiegelplatte,  $d$  – halber Abstand der Elektroden untereinander). Bei horizontaler Lage des Spiegel ( $\alpha = \beta = 0$ ) liefern diese Konstitutivparameter numerisch nicht definierte Ausdrücke. Für die Kapazität des ersten Quadranten ist unter der Bedingung

$$\left| \frac{\frac{1}{\pi} \left(\frac{a}{2} - d\right)^2 (1 - \cos^2 \alpha \cos^2 \beta)}{h + z + \left(\frac{a}{4} + \frac{d}{2}\right) (\sin \alpha - \cos \alpha \sin \beta)} \right| < 1$$

eine Taylorreihenentwicklung der Wurzelfunktion möglich. Diese liefert für kleine Winkel bei Entwicklung bis zur zweiten Potenz

$$\tilde{C}_I = \frac{\varepsilon_0 \left(\frac{a}{2} - d\right)^2}{h_{P_I}} \left( 1 + \frac{\left(\frac{a}{2} - d\right)^2 (1 - \cos^2 \alpha \cos^2 \beta)}{4\pi h_{P_I}} \right). \quad (\text{E.4})$$

Bei sehr kleinen Winkeln  $\alpha, \beta$  ist die Kapazität des ersten Quadranten gemäß (E.4) zu beschreiben, während bei größeren Winkeln (E.3) verwendet werden kann. Die Kapazitäten der anderen drei Quadranten werden auf analoge Art und Weise ermittelt.



# Literaturverzeichnis

- [1] **Adamski, D.:** *Komponentenbasierte Simulation mechatronischer Systeme*. Diss., Universität Duisburg, 2001. Zugl.: Fortschrittberichte VDI, Reihe 10, Nr. 682, VDI-Verlag, Düsseldorf, 2001.
- [2] **Al-Khayyal, F.A.:** An implicit enumeration procedure for the general linear complementarity problem. *Mathematical Programming Study*, **31**:1–20, 1987.
- [3] *Referenz-Handbuch alaska 5.0*. Institut für Mechatronik e.V., Chemnitz, 2004.
- [4] **Alshenas, T.:** *Zur numerischen Behandlung, Stabilisierung durch Projektion und Modellierung mechanischer Systeme mit Nebenbedingungen und Invarianten (TRITA-NA-9202)*. Diss., The Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden, 1992.
- [5] **Amerongen, J. van:** Modelling, simulation and controller design for mechatronic systems with 20-sim 3.0. In Isermann, R. (Ed.): *1<sup>st</sup> IFAC Conference on Mechatronic Systems, Darmstadt, Germany, September 18–20, 2000, Preprints*, volume II, pages 831–836. TU Darmstadt, 2000.
- [6] **Amerongen, J. van (Ed.):** *8<sup>th</sup> Mechatronic Forum International Conference – Mechatronics 2002, Enschede, The Netherlands, June 24–26, 2002, Proceedings*. Robotics and Mechatronics Professional Network, 2002.
- [7] **Andersson, M.:** *Object-Oriented Modeling and Simulation of Hybrid Systems*. PhD Thesis, Lund Institute of Technology, Lund, Sweden, 1994.
- [8] **Baumgarte, J.:** Stabilization of constraints and integrals of motion. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **1**(1):1–16, 1972.
- [9] **Berghuis, H.; Ortega, R.; Nijmeijer, H.:** A robust adaptive controller for robot manipulators. *IEEE Trans. Robotics Automation*, **9**(6):740–754, 1993.
- [10] **Bertram, T.:** Mechatronische Systeme erfordern eine ganzheitliche Betrachtungsweise und Entwicklungsmethode. In: *Internationales wissenschaftliches Kolloquium „Probleme der Mechatronik 2003“, Novocheerkassk, Russland*, 2003.
- [11] **Bertram, T.; Gausemeier, J.; et al.:** *Entwicklungsmethodik für mechatronische Systeme – VDI-Richtlinie 2206*. VDI-Verlag, Düsseldorf, 2003.
- [12] **Bhaskar, A.K.; Packirisamy, M.; Bhat, R.B.:** Modeling switching response of torsional micromirrors for optical microsystems. *Mechanism and Machine Theory*, **39**(12):1399–1410, 2004.
- [13] **Bielefeld, J.:** *Simulation analoger elektromechanischer Mikrosysteme und des Verhaltens von elektrothermischen Bauelementen unter Verwendung eines automatisch generierten vereinheitlichten Modells*. Diss., Universität Duisburg, 1996. Zugl.: Shaker, Aachen, 1997.
- [14] **Bloch, A.M.; Chang, D.E.; Leonard, N.E.; Marsden, J.E.:** Controlled Lagrangians and the stabilization of mechanical systems II: Potential shaping. *IEEE J. Automatic Control*, **46**(10):1556–1571, 2001.
- [15] **Bloch, A.M.; Krishnaprasad, P.S.; Marsden, J.E.; Murray, R.M.:** Nonholonomic mechanical systems with symmetry. CDS Technical Report 94-013, California Institute of Technology, 1995.
- [16] **Brehmer, S.; Harr, H.:** *Differentialformen und Vektoranalysis*. VEB DVW, Berlin, 1973.

- [17] **Brenan, K.E.; Campbell, S.L.; Petzold, L.R.:** *Numerical Solutions of Initial-Value Problems in Differential-Algebraic Equations*. Elsevier, 1989.
- [18] **Bressan, A.:** Sulle sollecitazioni Lagrangiane, dipendenti anche dall'atto di moto e derivanti da un potenziale generalizzato. Rendiconti Seminario matematico Universita Padova 28, Universita Padova, 1958.
- [19] **Brielmann, M.E.:** *Modellierung und Entwurf heterogener Systeme*. Diss., Universität Paderborn, 1997.
- [20] **Bryant, P.R.:** Graph theory applied to electrical networks. In Harary, F. (Ed.): *Graph Theory and Theoretical Physics*, pages 111–137. Academic Press, London, 1967.
- [21] **Buss, M.:** *Methoden zur Regelung Hybrider Dynamischer Systeme*. Habil., TU München. Zugl.: Fortschrittberichte VDI, Reihe 8, Nr. 970, VDI-Verlag, Düsseldorf, 2002.
- [22] **Campbell, M.I.; Cagan, J.; Kotovsky, K.:** Agent-based synthesis of electromechanical design configurations. *Trans. ASME, J. of Mechanical Design*, **122**(1):61–69, 2000.
- [23] **Chen, D.-Z.; Liu, C.-P.:** A hierarchical decomposition scheme for the topological synthesis of articulated gear mechanisms. *Trans. ASME, J. of Mechanical Design*, **121**(2):256–263, 1999.
- [24] **Coron, J.M.; Teel, A.; Praly, L.:** Feedback stabilization of nonlinear systems: Sufficient and necessary conditions and Lyapunov Input-Output techniques. In Isidori, A. (Ed.): *New Trends in Control*, pages 293–347. Springer, 1995.
- [25] **Cottle, R.W.; Danzig, G.B.:** Complementary pivot theory of mathematical programming. *Linear Algebra and Its Applications*, **1**:103–125, 1968.
- [26] **Cottle, R.W.; Pang, J.-S.; Stone, R.E.:** *The Linear Complementarity Problem*. Academic Press, Boston, 1992.
- [27] **Crandall, S.H.; Karnopp, D.C.; Kurtz, E.F.; Pridmore-Brown, D.C.:** *Dynamics of Mechanical and Electromechanical Systems*. McGraw-Hill, New York, 1968.
- [28] **Dobronravov, V.V. (Добронравов, В.В.):** *Основы аналитической механики (Osnovy analiticheskoi mekhaniki – Grundlagen der analytischen Mechanik)*. Высшая Школа, Москва („Visshaya Shkola“, Moskau), 1976.
- [29] **Eckhardt, H.D.:** *Kinematic Design of Machines and Mechanisms*. McGraw-Hill, New York, 1998.
- [30] **Eich, E.:** *Projizierende Mehrschrittverfahren zur numerischen Lösung von Bewegungsgleichungen technischer Mehrkörpersysteme mit Zwangsbindungen und Unstetigkeiten*. Fortschrittberichte VDI, Reihe 18, Nr. 109. VDI-Verlag, Düsseldorf, 1992.
- [31] **Elmqvist, H.:** *A Structured Model Language for Large Continuous Systems*. PhD Thesis, Lund Institute of Technology, Lund, Sweden, 1978.
- [32] **Elmqvist, H.:** *Object-oriented Modelling and Automatic Formula Manipulation in Dymola*. Scand. Simul. Soc. SIMS, Kongsberg, 1993.
- [33] **Elmqvist, H.; Mattson, S.E.:** Modelica – The next generation modeling language. In: *Proc. World Congress on System Simulation (WCSS'97)*, 1997.
- [34] **Enge, O.:** Die Anwendung des linearen Komplementaritätsproblems zur Modellierung elektrischer Systeme mit variabler Struktur. In: *6. Chemnitzer Fachtagung Mikrosystemtechnik – Mikromechanik & Mikroelektronik, Chemnitz, 29./30. Oktober 2003, Proc.*, pages 131–138, 2003.
- [35] **Enge, O.:** Modelling of electromechanical systems with variable structure using the linear complementarity problem. *Int. J. of Applied Electromagnetics and Mechanics*, **19**(1–4):25–29, 2004.
- [36] **Enge, O.; Kielau, G.; Maißer, P.:** *Dynamiksimulation elektromechanischer Systeme*. Fortschrittberichte VDI, Reihe 20, Nr. 165. VDI-Verlag, Düsseldorf, 1995.

- [37] **Enge, O.; Maißer, P.:** Virtuelles Prototyping elektromechanischer Systeme. Institutsreport 03/00, Institut für Mechatronik e.V., Chemnitz, 2000. Zugl.: Arbeits- und Ergebnisbericht 1998–2000 an die DFG zum Teilprojekt A6 des Sonderforschungsbereiches "Mikromechanische Sensor- und Aktorarrays" an der TU Chemnitz (SFB 379).
- [38] **Enge, O.; Maißer, P.:** Lyapunov-stabile Steuerung von Mikrospiegeln mittels inverser Dynamik. In: *4. VDI Mechatronik Tagung Innovative Produktentwicklungen, Frankenthal, 12./13. September 2001 (VDI-Berichte, Nr. 1631)*, pages 597–615. VDI-Verlag, Düsseldorf, 2001.
- [39] **Enge, O.; Maißer, P.:** Modelling of electrical systems with piecewise-linear characteristics by means of the linear complementarity principle. In Maißer, P.; Tenberge, P. (Eds.): *First International Symposium on Mechatronics ISOm 2002 – Advanced Driving Systems, Chemnitz, Germany, March 21–22, 2002, Proc.*, pages 492–502. Institut für Mechatronik e.V./TU Chemnitz, 2002.
- [40] **Enge, O.; Maißer, P.:** Lyapunov-stable control of mechatronic systems. *Journal Systems and Control Engineering*, **219**(2):173–185, 2005.
- [41] **Enge, O.; Maißer, P.:** Modelling electromechanical systems with electrical switching components using the linear complementarity problem. *Journal Multibody System Dynamics*, **13**(4):421–445, 2005.
- [42] **Enge, O.; Maißer, P.; Jungnickel, U.:** Modelling of electromechanical systems as a basis for inverse dynamics. In Isermann, R. (Ed.): *1<sup>st</sup> IFAC-Conference on Mechatronic Systems, Darmstadt, Germany, September 18–20, 2000, Preprints*, volume I, pages 347–352, 2000.
- [43] **Enge, O.; Maißer, P.; Jungnickel, U.:** Non-linear control of electrically driven micromirrors by means of inverse dynamics. *Int. J. of Applied Electromagnetics and Mechanics*, **13**(1–4):107–112, 2001/2002.
- [44] **Enge, O.; Maißer, P.; Jungnickel, U.; Kielau, G.:** Untersuchungen zur inversen Dynamik von elektromechanischen Systemen am Beispiel eines 2D-Mikrospiegels. In: *4. Chemnitzer Fachtagung Mikrosystemtechnik – Mikromechanik & Mikroelektronik, Chemnitz, 11./12. Oktober 1999, Proc.*, pages 45–50, 1999.
- [45] **Enge, O.; Maißer, P.; Kielau, G.:** Modelling and dynamic simulation of silicon micromirrors as electromechanical systems. In Safacas, A.N.; Tatakis, E.C. (Eds.): *3<sup>rd</sup> International Symposium on Advanced Electromechanical Motion Systems – ELECTROMOTION'99, Patras, Greece, July 8–9, 1999, Proc.*, volume II, pages 719–724, 1999.
- [46] **Enge, O.; Maißer, P.; Kielau, G.:** Modelling and simulation of electromechanical systems in the case of micromirrors. In Di Barba, P.; Savini, A. (Eds.): *International Symposium on Non-Linear Electromagnetic Systems – ISEM'99, Pavia, Italy, May 10–12, 1999, Proc.*, pages 563–566. IOS Press, Amsterdam, 2000.
- [47] **Erdman, A.G.; Sandor, G.N.; Kota, S.:** *Mechanism Design: Analysis and Synthesis, Vol. I*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 2001.
- [48] **Eyndhoven, J.T.J. van:** Solving the linear complementarity problem in circuit simulation. *SIAM J. Control Opt.*, **24**:1050–1062, 1986.
- [49] **Fang, W.E.; Freudenstein, F.:** The stratified representation of mechanisms. *Trans. ASME, J. of Mechanical Design*, **112**:514–519, 1990.
- [50] **Ferris, M.C.; Pang, J.S.:** Engineering and economic applications of complementarity problems. *SIAM Rev.*, **39**:669–713, 1997.
- [51] **Fletcher, R.:** *Practical Methods of Optimization*. Wiley, 1987.
- [52] **Fletcher, R.; Powell, M.J.D.:** A rapidly convergent descent method for minimization. *Computer Journal*, **6**:163–168, 1963.
- [53] **Föllinger, O.:** *Nichtlineare Regelungen I*. Oldenbourg, München, 1993.

- [54] **Führer, C.; Wallrap, O.A.:** A computer-oriented method for reducing linearized multibody systems equations by incorporating constraints. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **46**(2):169–175, 1984.
- [55] **Fukuda, T.; Akai, F.; Hasegawa, Y; Matsuura, H.:** Research Activities 2002 – Robotics and Mechatronics. Technical report, Laboratory of Micro Systems Control, Nagoya University, Japan, 2003.
- [56] **Funk, K.:** A pivoting solver for dynamic planar multi-contact friction problems. *Machine Dynamics Problems*, **24**:87–99, 2000.
- [57] **Galiullin, A.S. (Галиуллин, А.С.):** *Методы решения обратных задач динамики (Metody reshenya obratnykh zadach dinamiki – Methoden der Lösung inverser Aufgaben der Dynamik)*. Наука, Москва („Nauka“, Moskau), 1986.
- [58] **Gambuzza, A.; Oberschelp, O.; Deppe, M.:** Verteilte modulare Simulation mechatronischer Systeme. In: *5. VDI Mechatronik Tagung – Innovative Produktentwicklungen, Fulda, 7./8. Mai 2003 (VDI-Berichte, Nr. 1753)*, pages 291–309. VDI-Verlag, Düsseldorf, 2003.
- [59] **Gausemeier, J.; Flath, M.:** Entwicklungsumgebungen Mechatronik (EUMECH) – Methoden und Werkzeuge zur Entwicklung mechatronischer Systeme. In Gausemeier, J.; Lückel, J. (Eds.): *Auf dem Weg zu den Produkten für die Märkte von morgen – 4. Internationales Heinz Nixdorf Symposium, Paderborn, Germany, Proc.*, pages 133–156. HNI-Verlagsschriftenreihe, Bd. 82, 2000.
- [60] **Gausemeier, J.; Flath, M.; Riepe, B.:** Strategic planning and conceptual design of mechatronic products. In Wallaschek, J.; Lückel, J.; Littmann, W. (Eds.): *3<sup>rd</sup> International Heinz Nixdorf Symposium on Mechatronics and Advanced Motion Control, Paderborn, Germany, May 1999, Proc.*, pages 177–191. HNI-Verlagsschriftenreihe, Bd. 49, 1999.
- [61] **Gausemeier, J.; Lückel, J. (Eds.):** *Auf dem Weg zu den Produkten für die Märkte von morgen – 4. Internationales Heinz Nixdorf Symposium, Paderborn, Proceedings*. HNI-Verlagsschriftenreihe, Bd. 82, 2000.
- [62] **Gausemeier, J.; Lückel, J. (Eds.):** *Entwicklungsumgebungen Mechatronik – Methoden und Werkzeuge zur Entwicklung mechatronischer Systeme*. HNI-Verlagsschriftenreihe, Bd. 80, 2000.
- [63] **Gausemeier, J.; Lückel, J.; Wallaschek, J. (Eds.):** *Intelligente mechatronische Systeme – 1. Paderborner Workshop*. HNI-Verlagsschriftenreihe, Bd. 122, 2003.
- [64] **Gausemeier, J.; Möhringer, S.:** Die neue Richtlinie VDI 2206: Entwicklungsmethodik für mechatronische Systeme. In: *5. VDI Mechatronik Tagung – Innovative Produktentwicklungen, Fulda, 7./8. Mai 2003 (VDI-Berichte, Nr. 1753)*, pages 43–68. VDI-Verlag, Düsseldorf, 2003.
- [65] **Gausemeier, J.; Wallaschek, J. (Eds.):** *Intelligente mechatronische Systeme – 2. Paderborner Workshop*. HNI-Verlagsschriftenreihe, Bd. 145, 2004.
- [66] **Gerlach, G.; Dötzel, W.:** *Grundlagen der Mikrosystemtechnik*. Carl Hanser, München, 1997.
- [67] **Glocker, C.:** *Dynamik von Starrkörpersystemen mit Reibung und Stößen*. Diss., TU München, 1995. Zugl.: Fortschrittberichte VDI, Reihe 18, Nr. 182, VDI-Verlag, Düsseldorf, 1995.
- [68] **Glocker, C.:** Formulation of spatial contact situations in rigid multibody systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **177**(3–4):199–214, 1999.
- [69] **Glocker, C.; Pfeiffer, F.:** Dynamical systems with unilateral contacts. *Nonlinear Dynamics*, **3**:245–259, 1992.
- [70] **Glocker, C.; Pfeiffer, F.:** An LCP-approach for multibody systems with planar friction. In: *Proc. of the Contact Mechanics Int. Symposium, Lausanne, Switzerland*, pages 13–30, 1992.
- [71] **Glocker, C.; Pfeiffer, F.:** Complementarity problems in multibody systems with planar friction. *Archive of Applied Mechanics*, **63**:452–463, 1993.

- [72] **Glocker, C.; Pfeiffer, F.:** Stick-slip phenomena and applications. In Thompson, J.M.T.; Bishop, S.R. (Eds.): *Nonlinearity and Chaos in Engineering Dynamics*, pages 103–113. John Wiley & Sons, Chichester, 1994.
- [73] **Glocker, C.; Pfeiffer, F.:** Multiple impacts with friction in multibody systems. *Nonlinear Dynamics*, **7**:471–497, 1995.
- [74] **Gründer, T.:** *Allgemeine Lösung ingenieurwissenschaftlicher Probleme der Leistungselektronik mittels Formelmanipulation*. Diss., TU Chemnitz, 2000.
- [75] **Günther, M.; Rentrop, P.:** Numerical simulation of electrical circuits. *GAMM-Mitteilungen*, **23**(1/2):51–77, 2000.
- [76] **Hadwich, V.:** *Modellbildung mechatronischer Systeme*. Diss., TU München. Zugl.: Fortschrittberichte VDI, Reihe 8, Nr. 704, VDI-Verlag, Düsseldorf, 1998.
- [77] **Hadwich, V.; Pfeiffer, F.:** The principle of virtual work in mechanical and electromechanical systems. *Archive of Applied Mechanics*, **65**(6):390–400, 1995.
- [78] **Hahn, M.:** Object-oriented physical modelling of mechatronic systems. *Mathematical Modelling of Systems*, **1**(4):286–302, 1995.
- [79] **Hahn, M.:** *OMD – Ein Objektmodell für den Mechatronikentwurf*. Diss., Universität Paderborn, 1999. Zugl.: Fortschrittberichte VDI, Reihe 20, Nr. 299, VDI-Verlag, Düsseldorf, 1999.
- [80] **Hahn, W.:** *Theorie und Anwendung der Direkten Methode von Ljapunov*. Springer, Berlin, 1959.
- [81] **Harashima, F.; Tomizuka, M.; Fukuda, T.:** Mechatronics – what is it, why, and how? *IEEE/ASME Trans. Mechatronics*, **1**(1):1–4, 1996.
- [82] **Haug, E.J.; Wu, S.C.; Yang, S.M.:** Dynamics of mechanical systems with coulomb friction and constraint addition-deletion – I, II, III. *Mechanism and Machine Theory*, **21**(5):401–425, 1986.
- [83] **Helmholtz, H. von:** Über die physikalische Bedeutung des Prinzips der kleinsten Wirkung. *Wiss. Abhandlungen*, **III**:203–248, 1885.
- [84] **Hendel, K.:** *Qualitative und quantitative Untersuchungen der Dynamik von Mehrkörpersystemen mittels Störungsgleichungen und 1. Integrale*. Diss., Universität Leipzig, 1992.
- [85] **Hiller, M.; Bardini, R.; Bertram, T.; Torlo, M.; Ward, D.:** Mechatronic design in automotive systems. In Isermann, R. (Ed.): *1<sup>st</sup> IFAC Conference on Mechatronic Systems, Darmstadt, Germany, September 18–20, 2000, Preprints*, volume I, pages 89–94. TU Darmstadt, 2000.
- [86] **Hindmarsh, A.C.:** ODEPACK, a systematized collection of ODE solvers. In Stepleman, R.S.; et al. (Eds.): *Scientific Computing*. North-Holland, Amsterdam, 1983.
- [87] **Hussein, B.A.:** On modelling mechatronics systems – a geometrical approach. *Mechatronics*, **10**(3):307–337, 2000.
- [88] **Isermann, R.:** Modeling and design methodology for mechatronic systems. *IEEE/ASME Trans. Mechatronics*, **1**(1):16–28, 1996.
- [89] **Isermann, R. (Ed.):** *1<sup>st</sup> IFAC-Conference on Mechatronic Systems, Darmstadt, Germany, September 18–20, 2000, Preprints*, volume I–III. TU Darmstadt, 2000.
- [90] **Jungnickel, U.; Maißer, P.:** Dynamic control of under-actuated systems. In: *ICTAM, Chicago, August 27–September 1, 2000, Extended Summaries*, 2000.
- [91] **Junker, F.:** *Eine modular-hierarchisch organisierte Modellbildung mechanischer Komponenten der Mechatronik*. Diss., Universität Paderborn, 1997. Zugl.: Fortschrittberichte VDI, Reihe 20, Nr. 261, VDI-Verlag, Düsseldorf, 1997.
- [92] **Kahlert, M.; Paetzold, K.; Schweiger, W.:** Konzept und Architektur für einen mechatronischen Effektkatalog. In: *5. VDI Mechatronik Tagung – Innovative Produktentwicklungen, Fulda, 7./8. Mai 2003 (VDI-Berichte, Nr. 1753)*, pages 145–161. VDI-Verlag, Düsseldorf, 2003.

- [93] **Kallenbach, E.; Birli, O.; Saffert, E.; Schäffel, C.:** Zur Gestaltung integrierter mechatronischer Produkte. In: *Mechatronik im Maschinen- und Fahrzeugbau (VDI-Berichte, Nr. 1315)*, pages 1–14. VDI-Verlag, Düsseldorf, 1997.
- [94] **Kallenbach, E.; Kireev, V.; Zentner, J.; Kovalev, S.:** Designprozess mechatronischer Systeme am Beispiel integrierter elektromechanischer Mehrkoordinatenantriebe. In: *First International Symposium on Mechatronics ISoM 2002 – Advanced Driving Systems, Chemnitz, Germany, March 21–22, 2002, Proc.*, pages 239–250. Institut für Mechatronik e.V./TU Chemnitz, 2002.
- [95] **Kallenbach, M.; Beyer, F.; Baumbach, J.; Keilig, R.; Kallenbach, E.:** Grenzen der Schnellwirkung von Antriebssystemen mit stark nichtlinearen Magnetaktoren. In: *5. VDI Mechatronik Tagung – Innovative Produktentwicklungen, Fulda, 7./8. Mai 2003 (VDI-Berichte, Nr. 1753)*, pages 541–554. VDI-Verlag, Düsseldorf, 2003.
- [96] **Karnopp, D.C.; Margolis, D.L.; Rosenberg, R.C.:** *System Dynamics: Modeling and Simulation of Mechatronic Systems*. John Wiley & Sons, 2000.
- [97] **Kasper, R.:** Mechatronisches Design integrierter Piezoaktoren. In: *First International Symposium on Mechatronics ISoM 2002 – Advanced Driving Systems, Chemnitz, Germany, March 21–22, 2002, Proc.*, pages 379–392. Institut für Mechatronik e.V./TU Chemnitz, 2002.
- [98] **Kayser, A.:** *Komponentenorientierte Modellierung elektrischer und mechanischer Systeme*. Diss., Universität Magdeburg, 2002. Zugl.: Fortschrittberichte VDI, Reihe 20, Nr. 368, VDI-Verlag, Düsseldorf, 2003.
- [99] **Khalil, H.K.:** *Nonlinear Systems*. Macmillan, 1992.
- [100] **Kielau, G.; Maißer, P.:** Nonholonomic multibody dynamics. *J. Multibody System Dynamics*, **9**(3):213–236, 2003.
- [101] **Kielbasiński, A.; Schwetlick, H.:** *Numerische lineare Algebra*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1988.
- [102] **Klarbring, A.; Björkman, G.:** A mathematical programming approach to contact problems with friction and varying contact surface. *Computers & Structures*, **30**:1185–1198, 1988.
- [103] **Klepp, H.J.:** Stopping check for systems with friction-affected constraints. *Z. Ang. Math. Mech.*, **72**(11):539–548, 1992.
- [104] **Koch, W.:** *Eine interaktive Entwurfsplattform für mechatronische Systeme auf der Basis von Komponentensoftware*. Diss., Universität Magdeburg, 2000. Zugl.: Fortschrittberichte VDI, Reihe 20, Nr. 320, VDI-Verlag, Düsseldorf, 2000.
- [105] **Koditschek, D.E.:** Natural motion of robot arms. In: *23<sup>rd</sup> IEEE Conference Control and Decision, Las Vegas, NV, 1984, Proc.*, pages 733–735, 1984.
- [106] **Koditschek, D.E.:** Robot planning and control via potential functions. In: *The Robotics Review 1*, pages 349–367. MIT Press, 1989.
- [107] **Kübler, R.:** *Modulare Modellierung und Simulation mechatronischer Systeme*. Diss., Universität Stuttgart, 2000. Zugl.: Fortschrittberichte VDI, Reihe 20, Nr. 327, VDI-Verlag, Düsseldorf, 2000.
- [108] **Kugi, A.; Schlacher, K.:** Rotational hydraulic piston actuators and DC-DC-power converters: A unifying modelling and control approach. In: *1<sup>st</sup> IFAC-Conference on Mechatronic Systems, Darmstadt, Germany, September 18–20, 2000, Preprints*, volume I, pages 373–378, 2000.
- [109] **Kwak, B.M.:** Complementarity problem formulation for three-dimensional frictional contact. *ASME J. Applied Mechanics*, **58**:134–140, 1991.
- [110] **Kwak, B.M.; Lee, S.S.:** A complementarity problem formulation for two-dimensional frictional contact problems. *Computers & Structures*, **28**(4):469–480, 1988.

- [111] **Le Marrec, P.; Valderrama, C.A.; Hessel, F.; Jerraya, A.:** Hardware, software and mechanical cosimulation for automotive applications. In: *Proc. Int. Workshop on Rapid System Prototyping*, pages 202–206, 1998.
- [112] **Lee, W.-L.:** *Aufbau und Regelung homoplanarer Magnetlagersysteme*. Diss., TU Braunschweig, 2002. Zugl.: Fortschrittberichte VDI, Reihe 8, Nr. 951, VDI-Verlag, Düsseldorf, 2002.
- [113] **Lefarth, U.:** *SIMEX – eine offene Simulationsumgebung zum rechnergestützten Entwurf mechatronischer Systeme*. Diss., Universität Paderborn. Zugl.: Fortschrittberichte VDI, Reihe 20, Nr. 223, VDI-Verlag, Düsseldorf, 1996.
- [114] **Lemke, C.E.:** Recent results on complementarity problems. In Rosen, J.B.; Mangasarian, O.L.; Ritter, K. (Eds.): *Nonlinear Programming*, pages 349–384. American Mathematical Society, Providence, RI, 1970.
- [115] **Lemke, C.E.:** A survey of complementarity theory. In Cottle, R.W.; Giannessi, F.; Lions, J.L. (Eds.): *Variational Inequalities and Complementarity Problems*, pages 213–239. John Wiley & Sons, Chichester, 1980.
- [116] **Lippold, C.:** *Eine domänenübergreifende Konzeptionsumgebung für die Entwicklung mechatronischer Systeme*. Diss., Universität Bochum, 2000. Zugl.: Shaker, Aachen, 2001.
- [117] **Liu-Henke, X.; Lückel, J.; Jäker, K.-P.:** An active suspension/tilt system for a mechatronic railway carriage. *Control Engineering Practice*, **10**(9):991–998, 2002.
- [118] **Lootsma, Y.J.; van der Schaft, A.J.; Çamlıbel, M.K.:** Uniqueness of solutions of linear relay systems. *Automatica*, **35**:467–478, 1999.
- [119] **Lötstedt, P.:** *A Numerical Method for the Simulation of Mechanical Systems With Unilateral Constraints (TRITA-NA-7920)*. Diss., The Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden, 1979.
- [120] **Lötstedt, P.:** Coulomb friction in two-dimensional rigid body friction. *Z. Ang. Math. Mech.*, **61**:605–615, 1981.
- [121] **Lötstedt, P.:** Mechanical systems of rigid bodies subject to unilateral constraints. *SIAM J. Appl. Math.*, **42**:281–296, 1982.
- [122] **Löwis, J. von:** *Flachheitsbasierte Trajektorienfolgeregelung elektromechanischer Systeme*. Diss., TU Dresden, 2002. Zugl.: Shaker, Aachen, 2002.
- [123] **Lückel, J. (Ed.):** *Proc. of the Third Conference on Mechatronics and Robotics, Paderborn, Germany, October 4–6, 1995*. B.G. Teubner, 1995.
- [124] **Lückel, J.; Ettingshausen, C.; Hestermeyer, T.; Schlautmann, P.:** Neue Bahntechnik Paderborn – Eine Anwendung der verallgemeinerten Kaskade. In Maißer, P.; Tenberge, P. (Eds.): *First International Symposium on Mechatronics ISoM 2002 – Advanced Driving Systems, Chemnitz, Germany, March 21–22, 2002, Proc.*, pages 46–57. Institut für Mechatronik e.V./TU Chemnitz, 2002.
- [125] **Lückel, J.; Koch, T.; Schmitz, J.:** Mechatronik als integrative Basis für innovative Produkte. In: *VDI Mechatronik Tagung – Mechanisch/Elektrische Antriebstechnik, Wiesloch, 29./30. März 2000 (VDI-Berichte, Nr. 1533)*, pages 1–26. VDI-Verlag, Düsseldorf, 2000.
- [126] **Lückel, J.; Koch, T.; Schmitz, J.; Gausemeier, J.; et al.:** Computer-aided design of mechatronic systems, exemplified by the integrated wheel suspension of an innovative service vehicle. In Isermann, R. (Ed.): *1st IFAC Conference on Mechatronic Systems, Darmstadt, Germany, September 18–20, 2000, Preprints*, volume II, pages 849–854, 2000.
- [127] **Lückel, J.; Moritz, W.; Kuhlbusch, W.; Toepper, S.; Scharfeld, F.; Maißer, P.; Freudenberg, H.; Kallenbach, E.; Zentner, J.; Saffert, E.:** Iterative model-based design of the parallel robot TRIPLANAR. In: *IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics, Como, Italy, July 8–11, 2001, Proc.*, 2001.

- [128] **Lur'e, A.I. (Лурье, А.И.):** *Аналитическая механика (Analiticheskaya mekhanika – Analytische Mechanik)*. Москва (Moskau), 1961. Auch: *Mécanique Analytique*. Librairie Universitaire, Louvain, Belgium, 1968.
- [129] **Lyapunov, A.M.:** *Stability of Motion*. Academic Press, London, 1966.
- [130] **Lyapunov, A.M. (Ляпунов, А.М.):** *Общая задача об устойчивости движения (Obshchaya zadacha ob' ustoichivosti dvizheniya – Das allgemeine Problem der Stabilität der Bewegung)*. Издание Харьковского Математического Общества (Izдание Khar'kovskogo Matematicheskogo Obshchestva – Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft Kharkov), 1892. Auch: *Problème générale de la stabilité du mouvement*. Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse, **9**:203–474, 1907. Auch: *The General Problem of the Stability of Motion*. Taylor & Francis, London, 1992.
- [131] **Maißer, P.:** *Ein Beitrag zur Theorie diskreter elektromechanischer Systeme mit Anwendungen in der Manipulator-/Robotertechnik*. Diss. B, TH Ilmenau, 1984.
- [132] **Maißer, P.:** Analytische Dynamik von Mehrkörpersystemen. *Z. Ang. Math. Mech.*, **68**(10):463–481, 1988.
- [133] **Maißer, P.:** A differential-geometric approach to the multi body system dynamics. *Z. Ang. Math. Mech.*, **71**(4):T116–T119, 1991.
- [134] **Maißer, P.:** Mechatronik – wirklich etwas Neues? In: *Festschrift zum 65. Geburtstag von Prof. Kallenbach*, pages 27–31. TU Ilmenau, 2000.
- [135] **Maißer, P.:** About some aspects in mathematical modelling of mechatronic systems. In: *International Symposium on Dynamics and Control, Hanoi, Vietnam, September 15–17, 2003, Proc.*, 2003.
- [136] **Maißer, P.:** Differential, geometric methods in dynamics and control of mechatronic systems. In Parkin, R.M.; Al-Habaibeh, A.; Jackson, M.R. (Eds.): *International Conference on Mechatronics – ICOM 2003, Loughborough, UK, June 19–20, 2003*, pages 9–16. Professional Engineering Publishing, 2003.
- [137] **Maißer, P.; Enge, O.; Freudenberg, H.; Kielau, G.:** Electromechanical interactions in multi-body systems containing electromechanical drives. *J. Multibody System Dynamics*, **1**(3):281–302, 1997.
- [138] **Maißer, P.; Jungnickel, U.:** Stability of controlled motion in diving simulations. In Riehle, H.J.; Vieten, M.M. (Eds.): *XVI International Symposium on Biomechanics in Sports (ISBS'98), Konstanz, Germany, July 21–25, 1998, Proc. I*, pages 367–370. Universitätsverlag Konstanz, 1998.
- [139] **Maißer, P.; Jungnickel, U.:** Lyapunov-stable position control of constrained multibody systems. In Wallaschek, J.; Lückel, J.; Littmann, W. (Eds.): *3<sup>rd</sup> International Heinz Nixdorf Symposium on Mechatronics and Advanced Motion Control, Paderborn, Germany, May 1999, Proc.*, pages 61–66. HNI-Verlagsschriftenreihe, Bd. 49, 1999.
- [140] **Maißer, P.; Jungnickel, U.:** Stability of controlled motion of a gymnast in high-speed mid air maneuvers. In: *IUTAM-Symposium on Recent Developments and in Non-linear Oscillations of Mechanical Systems, Hanoi, Vietnam, March 2–5, 1999, Proc.*, pages 121–129, 1999.
- [141] **Maißer, P.; Jungnickel, U.:** Stabilität schneller Drehbewegungen von Sportlern in Freiflugphasen. In: *BISp Jahrbuch 2000*, pages 195–224, 2000.
- [142] **Maißer, P.; Steigenberger, J.:** Zugang zur Theorie elektromechanischer Systeme mittels klassischer Mechanik, Teil 1: Elektrische Systeme in Ladungsformulierung. *Wissenschaftliche Zeitschrift TH Ilmenau*, **20**(6):105–123, 1974.
- [143] **Maißer, P.; Steigenberger, J.:** Zugang zur Theorie elektromechanischer Systeme mittels klassischer Mechanik, Teil 4: Elektromechanische Systeme. *Wissenschaftliche Zeitschrift TH Ilmenau*, **23**(6):151–172, 1977.



- [144] **Maißer, P.; Steigenberger, J.:** Lagrange-Formalismus für diskrete elektromechanische Systeme. *Z. Ang. Math. Mech.*, **59**:717–730, 1979.
- [145] **Maißer, P.; Tenberge, P. (Eds.):** *First International Symposium on Mechatronics ISoM 2002 – Advanced Driving Systems, Chemnitz, Germany, March 21–22, 2002, Proceedings*. Institut für Mechatronik e.V./TU Chemnitz, 2002.
- [146] **Mann, H.:** Modular approach to Lagrange’s formalism for mechatronic systems. In Wallaschek, J.; Lückel, J.; Littmann, W. (Eds.): *3<sup>rd</sup> International Heinz Nixdorf Symposium on Mechatronics and Advanced Motion Control, Paderborn, Germany, May 1999, Proc.*, pages 177–191. HNI-Verlagsschriftenreihe, Bd. 49, 1999.
- [147] **Mann, H.; Sevcenko, M.:** Multipole diagrams for efficient design of mechatronic systems. In Parkin, R.M.; Al-Habaibeh, A.; Jackson, M.R. (Eds.): *International Conference on Mechatronics – ICOM 2003, Loughborough, UK, June 19–20, 2003*, pages 41–46. Professional Engineering Publishing, 2003.
- [148] **Mann, H.; Brussel, H., van; Yli-Pietilä, T.:** Physical level modelling and simulation of multidisciplinary systems. In: *Proc. 35<sup>th</sup> SIMS Simulation Conference*, pages 51–60. Scandinavian Simulation Society, 1993.
- [149] **Marsden, J.E.; Ratiu, T.S.:** *Introduction to Mechanics and Symmetry*. Springer, New York, 1994.
- [150] **Mayourian, M.:** *The Creation of Mechanisms According to the Separation of Kinematic Structures and Function and Its Partial Automation*. PhD Thesis, Columbia University, 1985.
- [151] **Mayourian, M.; Freudenstein, F.:** The development of an atlas of the kinematic structures of mechanisms. *ASME J. of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*, **106**(12):458–461, 1984.
- [152] **McPhee, J.J.:** On the use of linear graph theory in multibody system dynamics. *Nonlinear Dynamics*, **9**:73–90, 1996.
- [153] **McPhee, J.J.:** Automatic generation of motion equations for planar mechanical systems using the new set of “branch coordinates”. *Mechanism and Machine Theory*, **33**:805–823, 1998.
- [154] **McPhee, J.J.; Scherrer, M.; Shi, P.:** A unified modelling approach for electro-mechanical multibody systems. In: *Proc. Int. Congress on Theoretical and Applied Mechanics, Chicago, 2000*, 2000.
- [155] **Mehner, J.:** *Entwurf in der Mikrosystemtechnik*. Habil., TU Chemnitz, 1999. Zugl.: Gerlach, G.; Dötzel, W. (Hrsg.): *Dresdner Beiträge zur Sensorik, Band 9*, Dresden University Press, 2000.
- [156] **Mehner, J.; Dötzel, W.:** A design system for kinetic micro mechanical components. In Adey, R.A.; Lahrman, A.; Leßmöllmann, C. (Eds.): *Simulation and Design of Microsystems and Microstructures*. Computational Mechanics Publications, Southampton, 1995.
- [157] **Miu, D.K.:** *Mechatronics - Electromechanics and Contromechanics*. Springer, New York, 1993.
- [158] **Molian, S.:** *Mechanism Design – The Practical Kinematics and Dynamics of Machinery*. Elsevier, Oxford, 1997.
- [159] **Müller, J.:** *Entwicklung virtueller Prototypen des hydraulisch angetriebenen Schreitfahrwerks ALDURO*. Diss., Universität Duisburg, 2002. Zugl.: Fortschrittberichte VDI, Reihe 1, Nr. 356, VDI-Verlag, Düsseldorf, 2002.
- [160] **Murray, R.M.; Li, Z.; Sastry, S.S.:** *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation*. CRC Press, Boca Raton, FL, 1994.
- [161] **Murty, K.G.:** *Linear Complementarity, Linear and Nonlinear Programming*. Sigma Series in Applied Mathematics 3. Heldermann, Berlin, 1988.
- [162] NATO-RTO: *MEMS Aerospace Applications, Montreal, Canada, Preprints*, 2002.

- [163] **Neittaanmäki, P.; Rudnicki, M.; Savini, A.:** *Inverse Problems and Optimal Design in Electricity and Magnetism*. Clarendon Press, Oxford, 1996.
- [164] **Nijmeijer, H.; van der Schaft, A.J.:** *Nonlinear Dynamical Control Systems*. Springer, New York, 1996.
- [165] **Oberbeck, C.:** *Entwicklung und mechatronische Optimierung eines elektromagnetischen Aktors*. Diss., Universität Essen, 2002. Zugl.: Fortschrittberichte VDI, Reihe 8, Nr. 984, VDI-Verlag, Düsseldorf, 2003.
- [166] **Olcoz, S.; Entrena, L.; Berrojo, L.:** A VHDL virtual prototyping technique for mechatronic systems design. In: *Int. Conf. on Recent Advances in Mechatronics*, pages 761–766, 1995.
- [167] **Ortega, R.; Loría, A.; Nicklasson, P.J.; Sira-Ramírez, H.:** *Passivity-based Control of Euler-Lagrange Systems*. Springer, London, 1998.
- [168] **Otter, M.:** *Objektorientierte Modellierung mechatronischer Systeme am Beispiel geregelter Roboter*. Diss., Univ. Bochum, 1994. Zugl.: Fortschrittberichte VDI, Reihe 20, Nr. 147, VDI-Verlag, Düsseldorf, 1995.
- [169] **Otter, M.:** Objektorientierte Modellierung physikalischer Systeme. *Automatisierungstechnik*, **47/48**:A1–A68, 1999/2000.
- [170] **Otter, M.; Schweiger, C.:** Modellierung mechatronischer Systeme mit Modelica. In: *VDI-Berichte, Nr. 1842*, pages 39–50. VDI-Verlag, Düsseldorf, 2004.
- [171] **Paden, B.; Panja, R.:** Globally asymptotically stable PD+ controller for robot manipulators. *Int. J. of Control*, **47**:1697–1712, 1988.
- [172] **Panreck, K.:** *Rechnergestützte Modellbildung physikalisch-technischer Systeme*. Habil., Universität Paderborn, 2002. Zugl.: Fortschrittberichte VDI, Reihe 8, Nr. 945, VDI-Verlag, Düsseldorf, 2002.
- [173] **Papageorgiou, M.:** *Optimierung – statische, dynamische und stochastische Verfahren für die Anwendung*. Oldenbourg, München, 1996.
- [174] **Papastavridis, J.G.:** *Tensor Calculus and Analytical Dynamics*. CRC Press, London, 1999.
- [175] **Papastavridis, J.G.:** *Analytical Mechanics*. Oxford University Press, Oxford, 2002.
- [176] **Parkin, R.M.; Al-Habaibeh, A.; Jackson, M.R. (Eds.):** *International Conference on Mechatronics – ICOM 2003, Loughborough, UK, June 19–20, 2003*. Professional Engineering Publishing, 2003.
- [177] **Parks, P.C.; Hahn, V.:** *Stabilitätstheorie*. Springer, Berlin, 1981.
- [178] **Pelz, G.:** *Modellierung und Simulation mechatronischer Systeme*. Habil., Universität Duisburg, 2001. Zugl.: Hüthig, Heidelberg, 2001.
- [179] **Petzold, L.R.:** A description of DASSL: A differential/algebraic system solver. In: *10<sup>th</sup> IMACS World Congress, Montreal, Canada, August 1982, Proc.*, 1982.
- [180] **Pfeiffer, F.:** Dynamical systems with time-varying or unsteady structure. *Z. Ang. Math. Mech.*, **71**(4):T6–T22, 1991.
- [181] **Pfeiffer, F.:** Complementarity problems of stick-slip vibrations. In: *Dynamics and Vibrations of Time-Varying Systems and Structures*, DE-Vol. 56, pages 43–50. ASME, 1993.
- [182] **Pfeiffer, F.:** Methoden zur nichtlinearen Antriebstechnik. In: *VDI-Berichte, Nr. 1153*, pages 599–624. VDI-Verlag, Düsseldorf, 1994.
- [183] **Pfeiffer, F.:** Unilateral problems in dynamics. *Archive of Applied Mechanics*, **69**:503–527, 1999.
- [184] **Pfeiffer, F.:** Applications of unilateral multibody dynamics. *Philosophical Transactions: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, **359**(1789):2609–2628, 2001.

- [185] **Pfeiffer, F.:** The idea of complementarity in multibody dynamics. *Archive of Applied Mechanics*, **72**(11–12):807–816, 2003.
- [186] **Pfeiffer, F.; Glocker, C.:** *Multibody Dynamics with Unilateral Contacts*. John Wiley & Sons, New York, 1996.
- [187] **Rao, A.C.; Deshmukh, P.B.:** Computer aided structural synthesis of planar kinematic chains obviating the test for isomorphism. *Mechanism and Machine Theory*, **36**(4):489–506, 2001.
- [188] **Richert, J.:** *CAMeL – Eine Integrationsplattform für kooperative Entwurfswerkzeuge der Mechatronik*. Diss., Universität Paderborn, 1998. Zugl.: Fortschrittberichte VDI, Reihe 20, Nr. 273, VDI-Verlag, Düsseldorf, 1998.
- [189] **Rossmann, T.; Pfeiffer, F.:** Efficient algorithms for nonsmooth dynamics. In: *ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition, Dallas, TX, 1997, Proc.*, 1997.
- [190] **Sachs, H.:** *Einführung in die Theorie endlicher Graphen, Teil 1*. B.G. Teubner, Leipzig, 1970.
- [191] **Sandor, G.N.; Erdman, A.G.:** *Advanced Mechanism Design: Analysis and Synthesis, Vol. II*. Prentice-Hall, 1984.
- [192] **Sass, L.; Telteu, D.; Grenier, D.; Fisette, P.:** Unified symbolic modelling of mechatronic systems – implementation and applications. In: *7<sup>th</sup> International Conference on Modeling and Simulation of Electric Machines, Converters and Systems – ELECTRIMACS 2002, Montreal, Quebec, Canada, August 18–21, 2002, Proc.*, 2002.
- [193] **Sastry, S.S.; Bodson, M.:** *Adaptive Control: Stability, Convergence, and Robustness*. Prentice-Hall, 1989.
- [194] **Schaft, A.J. van der:**  *$\mathcal{L}_2$ -Gain and Passivity Techniques in Nonlinear Control*. Lecture Notes in Control and Information Sciences, no. 218. Springer, 1996.
- [195] **Schaft, A.J. van der; Schumacher, J.M.:** The complementary-slackness class of hybrid systems. *Math. Contr. Signals Systems*, **9**:266–301, 1996.
- [196] **Schaft, A.J. van der; Schumacher, J.M.:** Complementarity modelling of hybrid systems. *IEEE Trans. Automatic Control*, **43**(4):483–490, 1998.
- [197] **Schaik, W.H.J.:** Object oriented design method for mechatronic products. In Acar, M.; Makra, J.; Penney, E. (Eds.): *Mechatronics – The Basis for New Industrial Development*. Computational Mechanics Publications, Southampton, 1994.
- [198] **Scherber, S.; Müller-Schloer, C.:** Entwicklungsumgebung zur Modellierung und Simulation heterogener mechatronischer Systeme. In: *Proc. Multi Nature Systems, Jena*, pages 53–62, 1999.
- [199] **Scherpen, J.M.A.; Jeltsema, D.; Klaassens, J.B.:** Lagrangian modelling and control of switching networks with integrated coupled magnetics. In Zhu, J.J. (Ed.): *Proc. 39<sup>th</sup> IEEE Conference on Decision and Control, Sydney, Australia*, pages 4054–4059, 2000.
- [200] **Scherpen, J.M.A.; Jeltsema, D.; Klaassens, J.B.:** Lagrangian modelling of switching electrical networks. *Systems and Control Letters*, **48**(5):365–374, 2003.
- [201] **Scherpen, J.M.A.; Klaassens, J.B.; Ballini, L.:** Lagrangian modeling and control of DC-to-DC converters. In: *Proc. 21<sup>st</sup> International Telecommunications Energy Conference – INTELEC’99, Copenhagen, Denmark*, pages 1–9, 1999.
- [202] **Scherrer, M.; McPhee, J.J.:** Dynamic modelling of electromechanical multibody systems. *J. Multibody System Dynamics*, **9**(1):87–115, 2003.
- [203] **Schiehlen, W. (Ed.):** *Multibody Systems Handbook*. Springer, Berlin, 1990.
- [204] **Schiehlen, W.; Scholz, C.:** Simulator coupling for mechatronic systems. In Maißer, P.; Tenberge, P. (Eds.): *First International Symposium on Mechatronics ISoM 2002 – Advanced Driving Systems, Chemnitz, Germany, March 21–22, 2002, Proc.*, pages 31–40. Institut für Mechatronik e.V./TU Chemnitz, 2002.

- [205] **Schlacher, K.; Kugi, A.; Scheidl, R.:** Tensor analysis based symbolic computation for mechatronic systems. *J. Math. Comp. Sim.*, **46**(5-6):517–525, 1998.
- [206] **Schön, A.:** *Konzept und Architektur eines Assistenzsystems für die mechatronische Produktentwicklung.* Diss., Universität Erlangen-Nürnberg, 2000.
- [207] **Senturia, S.D.:** *Microsystem Design.* Kluwer, Boston, 2001.
- [208] **Seo, K.; Fan, Z.; Hu, J.; Goodman, E.D.; Rosenberg, R.C.:** Toward a unified and automated design methodology for multi-domain dynamic systems using bond graphs and genetic programming. *Mechatronics*, **13**(8–9):851–885, 2003.
- [209] **Sepulchre, R.; Janković, M.; Kokotović, P.:** *Constructive Nonlinear Control.* Springer, London, 1997.
- [210] **Seshu, S.; Balabanian, N.:** *Linear Network Analysis.* John Wiley & Sons, London, Chapman & Hall, Ltd., 1959.
- [211] **Seshu, S.; Reed, M.B.:** *Linear Graphs and Electrical Networks.* Addison-Wesley, Reading, MA, 1961.
- [212] **Seyfferth, W.:** *Modellierung unstetiger Montageprozesse mit Robotern.* Diss., TU München. Zugl.: Fortschrittberichte VDI, Reihe 11, Nr. 199, VDI-Verlag, Düsseldorf, 1993.
- [213] **Shabana, A.A.:** *Dynamics of Multibody Systems.* John Wiley & Sons, New York, 1989.
- [214] **Shampine, L.F.; Allen, R.C.:** *Numerical Computing: An Introduction.* Saunders, Philadelphia, 1973.
- [215] **Simonyi, K.:** *Theoretische Elektrotechnik.* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1971.
- [216] **Slotine, J.J.; Li, W.:** Adaptive manipulator control: A case study. *IEEE Trans. Automatic Control*, **33**(11):995–1003, 1988.
- [217] **Spellucci, P.:** *Numerische Verfahren der nichtlinearen Optimierung.* Birkhäuser, 1993.
- [218] **Spong, M.W.; Vidyasagar, M.:** *Dynamics and Control of Robot Manipulators.* John Wiley, 1989.
- [219] **Steffani, H.F.:** *Modellbildung und Regelung eines spannungsgesteuerten Magnetlagers.* Diss., TU Chemnitz, 2001. Zugl.: Fortschrittberichte VDI, Reihe 21, Nr. 336, VDI-Verlag, Düsseldorf, 2002.
- [220] **Steigenberger, J.; Maißer, P.:** Zugang zur Theorie elektromechanischer Systeme mittels klassischer Mechanik, Teil 2: Elektrische Systeme in Flußformulierung. *Wissenschaftliche Zeitschrift TH Ilmenau*, **22**(3):157–163, 1976.
- [221] **Steigenberger, J.; Maißer, P.:** Zugang zur Theorie elektromechanischer Systeme mittels klassischer Mechanik, Teil 3: Elektrische Systeme in gemischter Formulierung. *Wissenschaftliche Zeitschrift TH Ilmenau*, **22**(4):123–139, 1976.
- [222] **Stein, H. von:** *Optimale Regelung aktiver Mechanismen: Modellbildung, Reglerentwurf, Experiment.* Diss., Universität Essen, 2000. Zugl.: Fortschrittberichte VDI, Reihe 8, Nr. 841, VDI-Verlag, Düsseldorf, 2000.
- [223] **Stevens, S.N.; Lin, P.-M.:** Analysis of piecewise-linear resistive networks using complementary pivot theory. *IEEE Trans. Circuits Systems*, **28**(5):429–441, 1981.
- [224] **Stiegelmeier, A.:** *Zur numerischen Berechnung strukturvarianter Mehrkörpersysteme.* Diss., TU München, 2001. Zugl.: Fortschrittberichte VDI, Reihe 18, Nr. 271, VDI-Verlag, Düsseldorf, 2001.
- [225] **Süße, R.; Diemar, U.; Michel, G.:** *Theoretische Elektrotechnik, Band 2: Netzwerke und Elemente höherer Ordnung.* Wissenschaftsverlag Ilmenau, Ilmenau, 1999.
- [226] **Süße, R.; Kallenbach, E.; Ströhla, T.:** *Theoretische Elektrotechnik, Band 3: Analyse und Synthese elektrotechnischer Systeme.* Wissenschaftsverlag Ilmenau, Ilmenau, 1997.

- [227] **Süße, R.; Marx, B.:** *Theoretische Elektrotechnik, Band 5: Elektrische Netzwerke – Berechnung und Synthese von Schaltungen für vorgegebenes Bifurkationsverhalten.* Wissenschaftsverlag Ilmenau, Ilmenau, 2002.
- [228] **Tabarrok, B.; Rimrott, F.P.J.:** *Variational Principles and Complementary Formulations in Dynamics.* Kluwer, Dordrecht, 1994.
- [229] **Takamori, T.; Tsuchiya, K. (Eds.):** *Robotics, Mechatronics and Manufacturing Systems – IMACS.* Elsevier, Amsterdam, 1993.
- [230] **Tanaka, M. (Ed.):** *Inverse Problems in Engineering Mechanics, IUTAM Symposium, Tokyo, Japan, 1992, Proc.* Springer, 1993.
- [231] **Telteu, D.; Sass, L.; Grenier, D.; Fiset, P.; Labrique, F.:** Modélisation et simulation des convertisseurs électroniques de puissance par analogie avec les systèmes mécaniques. *Revue Internationale de Génie Electrique*, **6**(3-4):429–456, 2003.
- [232] **Tischer, C.; Samuel, A.; Hunt, K.:** Selecting multi-freedom multi-loop kinematic chains to suit a given task. *Mechanism and Machine Theory*, **36**(8):925–938, 2001.
- [233] **Toepper, S.:** *Die mechatronische Entwicklung des Parallelroboters TRIPLANAR.* Diss., Universität Paderborn. Zugl.: Fortschrittberichte VDI, Reihe 8, Nr. 966, VDI-Verlag, Düsseldorf, 2002.
- [234] **Tomizuka, M.:** Mechatronics: From the 20<sup>th</sup> to 21<sup>st</sup> century. In Isermann, R. (Ed.): *1<sup>st</sup> IFAC Conference on Mechatronic Systems, Darmstadt, Germany, September 18–20, 2000, Preprints*, volume I, pages 1–10. TU Darmstadt, 2000.
- [235] **Trinkle, J.C.; Pang, J.S.; Sudarsky, S.; Lo, G.:** On dynamic multi-rigid-body contact problems with Coulomb friction. *Z. Ang. Math. Mech.*, **77**:267–279, 1997.
- [236] **Tsai, L.-W.:** *Mechanism Design – Enumeration of Kinematic Structures According to Function.* CRC Press, Boca Raton, FL, 2001.
- [237] **Vandenbergh, L.; de Moor, B.L.; Vandewalle, J.:** The generalized linear complementarity problem applied to the complete analysis of resistive piecewise-linear circuits. *IEEE Trans. Circuits Systems*, **36**:1382–1391, 1989.
- [238] **Verein Deutscher Ingenieure (Ed.):** *Mechatronik im Maschinen- und Fahrzeugbau, VDI-Berichte, Nr. 1315.* VDI-Verlag, Düsseldorf, 1997.
- [239] **Verein Deutscher Ingenieure (Ed.):** *VDI Mechatronik Tagung – Mechanisch/Elektrische Antriebstechnik, Wiesloch, 29./30. März 2000, VDI-Berichte, Nr. 1533.* VDI-Verlag, Düsseldorf, 2000.
- [240] **Verein Deutscher Ingenieure (Ed.):** *4. VDI Mechatronik Tagung – Innovative Produktentwicklungen, Frankenthal, 12./13. September 2001, VDI-Berichte, Nr. 1631.* VDI-Verlag, Düsseldorf, 2001.
- [241] **Verein Deutscher Ingenieure (Ed.):** *5. VDI Mechatronik Tagung – Innovative Produktentwicklungen, Fulda, 7./8. Mai 2003, VDI-Berichte, Nr. 1753.* VDI-Verlag, Düsseldorf, 2003.
- [242] **Vidyasagar, M.:** *Nonlinear Systems Analysis.* Prentice-Hall, 1993.
- [243] **Voßkämper, L.; Lüdecke, A.; Leineweber, M.; Pelz, G.:** Electromechanical modeling beyond VHDL-AMS. In: *IEEE/ACM Workshop on Behavioral Modeling and Simulation (VIUF-BMAS)*, 1999.
- [244] **Vucina, D.; Freudenstein, F.:** An application to graph theory and nonlinear programming to the kinematic synthesis of mechanisms. *Mechanisms and Machine Theory*, **26**(6):553–563, 1991.
- [245] **Wallaschek, J.; Lückel, J.; Littmann, W. (Eds.):** *Mechatronics and Advanced Motion Control. Proceedings of 3<sup>rd</sup> International Heinz Nixdorf Symposium, Paderborn, Germany, May 1999.* HNI-Verlagsschriftenreihe, Bd. 49, 1999.
- [246] **Wen, J.T.; Bayard, D.S.:** New class of control laws for robot manipulators, Part 1: Non-adaptive case. *Int. J. of Control*, **47**(5):1361–1385, 1988.

- [247] **Werner, R.:** Lösung linearer Komplementaritätsprobleme unter Verwendung von Strahlübergängen. *Math. Operationsforsch. Statist., Ser. Optimization*, **12**(2):221–234, 1981.
- [248] **White, D.C.; Woodson, H.H.:** *Electromechanical Energy Conversion*. John Wiley & Sons, New York, 1959.
- [249] **Woodson, H.H.; Melcher, J.R.:** *Electromechanical Dynamics, Part I: Discrete Systems*. John Wiley & Sons, New York, 1968.
- [250] **Wösle, M.:** *Dynamik von räumlichen strukturvarianten Starrkörpersystemen*. Diss., TU München, 1997. Zugl.: Fortschrittberichte VDI, Reihe 18, Nr. 2131, VDI-Verlag, Düsseldorf, 1997.
- [251] **Youcef-Toumi, K.:** Modeling, design, and control integration: A necessary step in mechatronics. *IEEE/ASME Trans. Mechatronics*, **1**(1):29–38, 1996.

# Abbildungsverzeichnis

5.1	Kontakt zweier Körper . . . . .	73
5.2	Kontakt als unilaterale Bindung . . . . .	73
5.3	Coulomb'sche Reibung . . . . .	76
5.4	Reibkennlinie . . . . .	76
5.5	Reibkennlinie auf Beschleunigungsebene . . . . .	77
5.6	Reibung als unilaterale Bindungen . . . . .	77
5.7	Schaltzustände eines elektrischen Schalters . . . . .	80
5.8	Elektrische Größen am elektrischen Schalter . . . . .	80
5.9	Schaltsymbol einer Diode . . . . .	83
5.10	Kennlinie einer Schaltodiode . . . . .	83
5.11	Schaltsymbol einer Zenerdiode . . . . .	87
5.12	Schaltzustände einer Zenerdiode . . . . .	87
5.13	Kennlinie einer Zenerdiode . . . . .	87
5.14	Zenerdiode als unilaterale Bindungen . . . . .	87
5.15	Schaltsymbol eines Thyristors . . . . .	88
5.16	Repräsentierender Graph eines Thyristors . . . . .	88
5.17	Kennlinie eines Thyristors . . . . .	88
5.18	Schaltzustände eines Thyristors . . . . .	88
5.19	Gleichrichterschaltung nach Graetz . . . . .	97
7.1	Einweggleichrichter mit Last . . . . .	132
7.2	Lastkondensator mit mechanischem Teilsystem . . . . .	132
7.3	Mechanische Koordinate (Abstand $x$ ) und Kapazität $C(x)$ . . . . .	133
7.4	Spannungen über verschiedenen Bauelementen . . . . .	133
7.5	Elektrische Größen der Diode . . . . .	133
7.6	Eintaktspannungsverdoppler mit Last . . . . .	134
7.7	Eisenkernposition (Weg $x$ ) und Potentiometerwiderstand $R_3(x)$ . . . . .	136
7.8	Eisenkernposition (Weg $x$ ) und Induktivität $L(x)$ . . . . .	136
7.9	Eingangs- und Ausgangsspannung des Spannungsverstärkers . . . . .	137
7.10	Elektrische Größen der Diode $D_1$ . . . . .	137
7.11	Elektrische Größen der Diode $D_2$ . . . . .	137
7.12	Induktorstrom $\dot{q}^3$ und elektrisch erzeugte Kraft $Q_x^{(el)}$ . . . . .	137
7.13	Prinzip eines Plattenkondensators als EMS . . . . .	138
7.14	Plattenabstand $x$ bei verschiedenen Reglermodi . . . . .	139
7.15	Steuerkraft $\bar{R}_x$ und elektrisch erzeugte Störkraft $Q_x^{(el)}$ . . . . .	139
7.16	Plattenabstand $x$ . . . . .	140
7.17	Steuerkraft $\bar{R}_x$ . . . . .	140

7.18	Kondensatorladung $q$ . . . . .	141
7.19	Steuerspannung $\bar{R}_q$ . . . . .	141
7.20	Plattenabstand bei Einsatz eines klassischen PD-Reglers . . . . .	142
7.21	Kondensatorladung bei Einsatz eines klassischen PD-Reglers . . . . .	142
7.22	Mechanischer Aufbau des 1D-Spiegels . . . . .	143
7.23	Stromkreis eines Kondensators am 2D-Spiegel . . . . .	143
7.24	Mechanischer Aufbau des 2D-Spiegels . . . . .	143
7.25	Stromkreis eines Kondensators mit Kurzschlusswiderstand $R_k$ . . . . .	144
7.26	Verschiebung $z$ . . . . .	145
7.27	Bryantwinkel $\alpha$ und $\beta$ . . . . .	145
7.28	Eckabstände des 1. bis 4. Quadranten . . . . .	145
7.29	Fremdgesteuerte Schalter für 1. und 2. Quadranten . . . . .	145
7.30	Kapazitäten des 1. bis 4. Quadranten . . . . .	146
7.31	Ladungen des 1. und 2. Quadranten . . . . .	146
7.32	Spannungen des 1. und 2. Quadranten . . . . .	146
7.33	Parameteroptimierung am 1D-Spiegel . . . . .	148
7.34	Parameteroptimierung am 2D-Spiegel bei Horizontallage . . . . .	148
7.35	Parameteroptimierung am 2D-Spiegel bei Schräglage . . . . .	148
7.36	Prinzip der Panorama-Projektion . . . . .	149
7.37	Zeitverlauf der errechneten Spannungen . . . . .	150
7.38	Verlauf des Laserpunktes auf dem Reflektor . . . . .	150
E.1	Prinzip der Kapazitätsmodellierung beim 1D-Spiegel . . . . .	181
E.2	Viertelplattenaufteilung beim 2D-Spiegel . . . . .	183
E.3	Prinzip der Kapazitätsmodellierung beim 2D-Spiegel . . . . .	183



# Lebenslauf

Name, Vorname: Enge, Olaf  
akademischer Grad: Dipl.-Ing.  
Geburtsdatum: 14.10.1961  
Geburtsort: Karl-Marx-Stadt (jetzt Chemnitz)  
Familienstand: in häuslicher Gemeinschaft, 1 Sohn

1981–1986	TH Karl-Marx-Stadt	Studium der Elektrotechnik, Diplomingenieur für Technische Kybernetik und Automatisierungstechnik
1986–1988	VEB ORSTA Hydraulik Leipzig	Entwicklungsingenieur (Arbeitsort TH/TU Karl-Marx-Stadt), Modellierung und Untersuchung hydraulischer und elektrohydraulischer Systeme
1989–1992	TU Karl-Marx-Stadt bzw. TU Chemnitz	Entwicklungsingenieur für Lehre und Forschung, Modellbildung und Simulation kontinuierlicher insbesondere elektrohydraulischer Systeme
1993–2004	Institut für Mechatro- nik e.V., Chemnitz	wissenschaftlicher Mitarbeiter, Modellbildung und Simulation elektrome- chanischer Systeme (theoretische Untersuchungen, Mo- dellbeschreibung), Modellierung und Optimierung mikro-elektromechanischer Systeme, Methoden- entwicklung zur Analyse und Synthese elektrome- chanischer Systeme (Strukturvariabilität, nichtli- neare Regelung)
seit 2005	Fraunhofer IIS, Außenstelle EAS, Dresden	wissenschaftlicher Mitarbeiter, Modellbildung und Simulation heterogener Systeme