

論文

비선형 운동방정식에 근거한 비례항법유도의
최적성에 관한 해석

전인수* 이진익*

Analysis on Optimality of Proportional Navigation
Based on Nonlinear Formulation

In-Soo Jeon* and Jin-Ik Lee*

ABSTRACT

Analysis on optimality of the proportional navigation guidance(PNG) law is presented in this paper. While most of previous studies on optimality of PNG were relied on the linear formulation, this paper is based on the nonlinear formulation. The analysis shows that PNG is an optimal solution minimizing a range-weighted control energy, where the weighting function is an inverse of α power of the distance-to-target. We show that the navigation constant N is related to α directly. And also the conditions required to ensure the analysis result are investigated.

초 록

본 논문에서는 기존 연구결과들과 달리 비행체의 운동을 선형방정식으로 표현할 수 있다는 가정을 도입하지 않고 비례항법유도법칙의 최적성에 관한 해석 결과를 제시한다. 비례항법유도법칙은 비행체-표적 거리의 지수함수를 가중치로 갖는 제어 에너지를 최소화하는 최적의 유도법칙임을 비선형 방정식 기반으로 유도한다. 이때 가중함수의 지수와 비례항법상수와의 관계에 대해 설명한다. 또한 이러한 해석의 유효한 조건을 도출한다.

Key Words : Proportional Navigation Guidance(비례항법유도), Optimal Guidance(최적유도), Homing Guidance(호밍유도)

1. 서 론

비례항법유도법칙은 2차 세계대전 이후 유도탄의 중기유도 혹은 종말유도에 사용되기 시작하였으며, 현재 각종 전술 유도탄에 가장 널리 사용되고 있는 유도법칙이다. 비례항법유도법칙은 구조가 단순하고 구현이 용이하면서도 성능이 매우 우수하여 실전에서 가장 보편적으로 사용되고 있다. 뿐만 아니라 현재까지도 호밍 유도법칙의

로서의 연구 주제로 가장 많이 취급되고 있는 분야의 하나이다.

비례항법유도법칙은 충돌 삼각형 상에서 표적과 비행체를 잇는 시선(LOS, Line of Sight)이 변화하지 않으면 결국 비행체가 표적에 충돌하게 된다는 사실로부터 유도명령은 시선의 회전각속도에 비례하도록 주어진다. 이때 비례 상수를 항법상수라고 하며 일반적으로 3~5의 값이 선택되는 것으로 알려져 있다.

비례항법유도법칙이 문헌에 소개된 이후 비례항법유도의 최적성이 수학적으로 유도된 것은 그로부터 20년이 경과한 이후이며[1], 항법상수가 3인 비례항법유도법칙이 비행체의 에너지를 최

† 2009년 1월 20일 접수 ~ 2009년 3월 30일 심사완료

* 정회원, 국방과학연구소

교신저자, E-mail : isjeon@add.re.kr

대전광역시 유성우체국 사서함 35-3호

소화하면서 표적과 충돌할 수 있는 최적해가 됨이 알려졌다[2]. 제어입력의 형태나 이득을 미리 정하고 이러한 제어입력이 최적해가 되기 위한 성능지수를 구하는 이른바 역최적 문제를 비례항법유도법칙에 적용하여 항법상수가 3이 아닌 경우에도 최적해가 되도록 하는 비행상태 및 제어입력에 가중함수를 갖는 성능지수가 존재함 또한 알려져 있다[3]. 유도명령 에너지를 최소화하는 최적제어문제의 가중함수에 어떤 함수 형태가 주어지면 그 해가 임의의 항법상수를 갖는 비례항법유도법칙이 되는 지에 대한 연구도 수행되었으며 결과적으로 그 가중함수는 잔여비행시간의 지수 형태가 됨이 알려졌다[4,5]. 한편으로 비례항법유도법칙의 항법상수와 최적제어문제와의 관계에 대한 다양한 해석을 통해 항법상수와 비행궤적 및 잔여비행시간과의 관계 등이 정립된 바도 있다[6-8]. 이러한 연구들은 비례항법유도법칙의 특성 특히 최적성에 관한 다양한 시각을 제공해주었다.

그러나 이러한 연구 결과들은 모두 비행체와 표적의 기하학적 관계에서 비행체의 운동을 선형 방정식으로 표현할 수 있다는 가정 하에서 정립된 것이다. 이러한 가정이 성립하기 위해서는 유도 과정에서 비행체 속도 벡터의 방향이 표적을 지향하는 각도가 크지 않아야 한다. 비행체가 비례항법유도법칙을 통해 유도되면 표적에 접근할수록 이상의 가정이 잘 성립하는 조건이 되므로 현실적으로 큰 문제는 없으나 비례항법유도법칙의 특성을 엄밀하게 해석하고자 할 때 선형 가정은 불완전하고 불편한 조건임에 분명하다.

본 논문에서는 일체의 선형화 가정을 도입하지 않고 비례항법유도법칙의 최적성에 대한 해석을 수행한다. 먼저 비행체와 표적 간의 직선거리의 지수로 표현되는 가중함수를 포함하는 제어에너지 성능지수를 도입한다. 다음으로 이러한 성능지수를 최소화하며 비선형 방정식으로 표현되는 운동방정식 구속조건을 만족시키는 최적 유도법칙을 구한다. 이때 최적 유도법칙은 잘 알려진 비례항법유도법칙의 형태가 됨을 보이고 해의 특성에 대해 고찰한다.

II. 문제 설정

수평면 상의 임의의 정지된 표적을 향해 비행하는 비행체를 고려하자. 표적을 원점으로 하는 좌표계를 도입하여 유도기하를 나타내면 Fig. 1과 같다. Fig. 1로부터 비행체의 운동은 다음과 같은 방정식으로 기술된다.

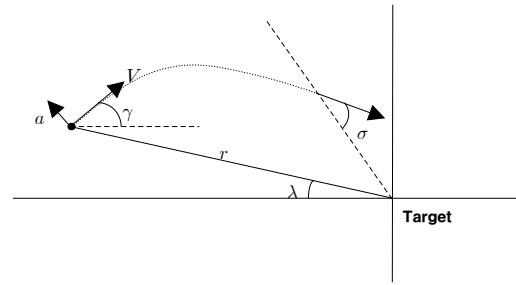


Fig. 1. Guidance Geometry

$$\dot{r} = -V \cos(\gamma - \lambda) \quad (1)$$

$$\dot{\lambda} = -\frac{V}{r} \sin(\gamma - \lambda) \quad (2)$$

$$\dot{\gamma} = a/V \quad (3)$$

여기서 r 은 비행체와 표적과의 시선거리(이하 표적거리), V 는 비행체의 속도, γ 는 비행경로각, λ 는 비행체와 목표점의 시선각, 그리고 a 는 비행체 속도 벡터에 수직인 제어 입력이다. 비행체의 속력은 유도 과정에서 일정하게 유지된다고 가정한다.

비행체의 속도 벡터가 비행체와 목표점의 시선과 이루는 각(σ)을 지향각이라고 정의하자. 식(1)-(3)을 지향각($\sigma = \gamma - \lambda$)을 이용해 정리하면 다음과 같다.

$$\dot{r} = -V \cos \sigma \quad (4)$$

$$\dot{\sigma} = \dot{\gamma} - \dot{\lambda} = \frac{a}{V} + \frac{V}{r} \sin \sigma \quad (5)$$

비행체 유도의 목적이 표적과 충돌(intercept)하는 것이라면 표적거리(r)는 유한한 시간(t_f)에 영으로 접근해야 한다. 또한 표적거리가 영으로 접근할 때 지향각도 영으로 접근해야 한다. 따라서 충돌을 위한 종말의 경계조건은 다음과 같이 표현된다.

$$\lim_{t \rightarrow t_f} r = 0 \quad (6)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sigma = 0 \quad (7)$$

만약 표적거리가 시간에 따라 단조감소하면 상태변수들의 독립변수로 시간(t) 대신 표적거리(r)를 사용하여 표현할 수 있다. 식(4)로부터 r 이 시간에 따라 단조 감소하기 위한 조건은 다음과 같음을 알 수 있다.

$$|\sigma(t)| < \frac{\pi}{2} \quad \text{for } t \in [0, t_f] \quad (8)$$

식(4), (5)에서 독립변수를 시간 대신 표적거리를 사용하여 표현하면 다음과 같이 하나의 비선형 식으로 표현된다.

$$\frac{d\sigma}{dr} = -\frac{a}{V^2 \cos \sigma} - \frac{1}{r} \tan \sigma \quad (9)$$

다음과 같이 표적거리에 대한 가중함수로 표현되는 제어 에너지 성능지수를 정의하자.

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{r_0} \frac{a(r)^2}{r^\alpha} dr, \quad (\alpha: \text{실수}) \quad (10)$$

여기서 r_0 는 r 의 초기치를 의미한다. 이제 식(8)의 조건을 만족하며, 식(9)의 비선형 구속조건을 갖고 식(10)의 성능지수를 최소화하는 최적제어 입력(a)을 구하는 문제를 고찰한다.

III. 선형 해석

먼저 비행체의 유도 과정에서 지향각이 작다고 가정하고, 식(10)의 성능지수에서 $\alpha=0$ 인 경우인 비행에너지 최소문제에 대해 살펴보자. 이러한 가정에 의해 식(4)와 (5)는 다음과 같이 선형화될 수 있다.

$$\dot{r} = -V \quad (11)$$

$$\dot{\sigma} = \frac{a}{V} + \frac{V}{r} \sigma \quad (12)$$

식(11)로부터 표적거리는 다음과 같이 표현된다.

$$r = V(t_f - t) \quad (13)$$

따라서 식(12)는 다음과 같이 표현된다.

$$\dot{\sigma} = \frac{a}{V} + \frac{\sigma}{t_f - t} \quad (14)$$

식(10)에서 $\alpha=0$ 인 경우 성능지수는 다음과 같이 표현된다.

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} a(t)^2 dt \quad (15)$$

이러한 성능지수를 최소화하며 식(14)의 구속조건을 만족하는 가속도 명령(a)을 구해보면

$$a(t) = -\frac{3V\dot{\sigma}(t)}{t_f - t} \quad (16)$$

여기서 식(2)와 식(13)으로부터 $\dot{\lambda} \approx -\sigma/(t_f - t)$ 이므로 가속도 명령은 항법상수가 3인 비례항법유도법칙이 됨을 알 수 있다.

$$a(t) \approx 3V\dot{\lambda} \quad (17)$$

이상과 같이 지향각이 작다는 가정 하에 제어 입력 에너지를 최소화시키는 유도법칙은 비례항법상수가 3인 비례항법유도법칙임은 이미 잘 알려진 사실이다. 또한 $\alpha \neq 0$ 인 조건에 대해 지향각이 작다는 가정 하에 유사문제를 다룬 바가 있으나[5], 지향각이 작다고 가정할 수 없는 일반적인 조건에 대해 비선형 운동방정식을 기반으로 이러한 문제를 다룬 바는 없다.

IV. 비선형 해석

식(9)의 양변에 $\cos \sigma$ 를 곱하여 정리하면 다음과 같다.

$$\frac{d \sin \sigma}{dr} = -\frac{a}{V^2} - \frac{1}{r} \sin \sigma \quad (18)$$

여기서 새로운 변수 $\eta = \sin \sigma$ 를 도입하면 식(18)는 다음과 같이 η 에 대한 미분 방정식 형태가 된다.

$$\frac{d\eta}{dr} = -\frac{a}{V^2} - \frac{\eta}{r} \quad (19)$$

이제 유도의 종말 경계조건은 식(7)에 따라 $\eta_f = \eta(0) = 0$ 로 표현된다.

식(10)의 성능지수를 최소화하기 위한 유도 문제에서 Pontryagin의 minimum principle을 적용하기 위하여 다음과 같이 해밀토니언(H)을 정의하자[2].

$$H = \frac{a^2}{2r^\alpha} + \lambda_\eta \left(-\frac{a}{V^2} - \frac{\eta}{r} \right) \quad (20)$$

여기서 λ_η 는 costate이며 다음과 같은 식을 따라 움직인다.

$$\frac{d\lambda_\eta}{dr} = -H_\eta = \frac{\lambda_\eta}{r} \quad (21)$$

여기서 $\eta(0) = 0$ 라는 종말 경계조건에 의해 $\lambda_{\eta f} = 0$ 로 둘 수 있다. 따라서 식(21)을 풀면 다음과 같이 표현된다.

$$\lambda_\eta = \nu_\eta r \quad (22)$$

여기서 ν_η 는 상수이다. 한편 최적제어 입력은 다음의 관계식을 만족한다.

$$H_a = \frac{a}{r^\alpha} - \frac{\lambda_\eta}{V^2} = 0 \quad (23)$$

따라서 최적 제어 입력은 다음과 같이 표현된다.

$$a = \frac{\nu_\eta}{V^2} r^{\alpha+1} \quad (24)$$

식(24)의 제어입력을 식(19)에 대입하면 다음과 같은 미분방정식으로 표현된다.

$$\frac{d\eta}{dr} + \frac{\eta}{r} = -\frac{\nu_\eta}{V^4} r^{\alpha+1} \quad (25)$$

위 미분방정식의 해는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\eta = \frac{C}{r} - \frac{\nu_\eta}{V^4} \frac{r^{\alpha+2}}{\alpha+3} \quad (26)$$

적분상수 C 는 초기조건($\eta_0(r_0)$)에 의해 구해지며 따라서 해는 다음과 같이 표현된다.

$$\eta = \left(\eta_0 r_0 + \frac{\nu_\eta}{V^4} \frac{r_0^{\alpha+3}}{\alpha+3} \right) \frac{1}{r} - \frac{\nu_\eta}{V^4} \frac{r^{\alpha+2}}{\alpha+3} \quad (27)$$

여기서 종말조건($\eta_f = 0$)을 적용하면 상수 ν_η 를 다음과 같이 결정할 수 있다.

$$\nu_\eta = -\frac{V^4(\alpha+3)\eta_0}{r_0^{\alpha+2}} \quad (28)$$

따라서 최종 해의 형태를 정리하면 다음과 같다.

$$\eta = \eta_0 \left(\frac{r}{r_0} \right)^{\alpha+2} \quad (29)$$

여기서 표적거리가 영으로 접근할 때 지향각이 영으로 접근하기 위해서는 $\alpha+2 > 0$ 이어야 함을 알 수 있다. 또한 $\eta_0 \neq 0$ 이면 $r=0$ 일 때만 $\eta=0$ 임을 알 수 있다. 즉 지향각 초기치가 영이 아니면 표적과 충돌하는 순간을 제외한 전 비행구간에서 지향각이 영이 되지 않는다는 것이다.

또한 식(28)을 식(24)에 대입하면 다음과 같은 개루프 최적 해를 구할 수 있다.

$$a(r) = -\frac{V^2(\alpha+3)\eta_0}{r_0} \left(\frac{r}{r_0} \right)^{\alpha+1} \quad (30)$$

식(30)에서 표적거리가 영으로 접근할 때 유도 명령이 유한하기 위해서는 $\alpha+1 \geq 0$ 이어야 함을 알 수 있다. 따라서 식(29)과 (30)의 고찰에서 물리적으로 의미 있는 실수 α 의 범위는 $\alpha \geq -1$ 이어야 함을 알 수 있다.

현재의 상태를 초기조건으로 보면 다음과 같은 페루프 최적 해를 구할 수 있다.

$$a(r, \eta) = -\frac{V^2(\alpha+3)\eta}{r} \quad (31)$$

지향각(σ)을 이용하여 해를 표현하면 다음과 같다.

$$a(r, \sigma) = -\frac{V^2(\alpha+3)\sin\sigma}{r} \quad (32)$$

식(32)의 유도명령은 식(10)의 성능지수를 최소화시키며 유도 목적을 달성할 수 있는 최적 유도 명령이다. 여기서 식(2)의 관계를 이용하면 식(32)는 정확히 다음과 같은 비례항법유도법칙이 됨을 알 수 있다.

$$a = (\alpha+3) V \dot{\lambda} \equiv N V \dot{\lambda} \quad (33)$$

여기서 N 은 $N = \alpha+3$ 인 항법상수이다. 앞에서 언급한 바와 같이 실수 α 의 범위는 $\alpha \geq -1$ 이어야 하므로 비례항법상수의 범위는 $N \geq 2$ 이어야 한다.

다음으로 식(29)를 시간(t)에 대해 미분하고 식(4)의 관계식을 이용하여 다음과 같이 지향각의 시간변화율을 구해보자.

$$\dot{\sigma} = -V(N-1)\sin\sigma_0 \left(\frac{r}{r_0} \right)^{N-2} \frac{1}{r_0}, \quad N \geq 2 \quad (34)$$

여기서 만약 $N=2$ 이면 위 식은 다음과 같이 일정한 값을 갖는다.

$$\dot{\sigma} = -V\sin\sigma_0 \frac{1}{r_0}, \quad N=2 \quad (35)$$

즉, $N=2$ 이면 표적거리가 영으로 접근할 때 지향각은 식(29)를 따라 영으로 접근하지만 지향각의 시간변화율은 식(35)와 같이 일정하다. 반면 만약 $N > 2$ 이면 표적거리가 영으로 접근할 때 지향각 뿐만 아니라 지향각의 시간변화율도 영으로 접근함을 알 수 있다.

마지막으로 r 을 단조 감소시키는 지향각의 초기 조건에 대해 살펴보자. 식(32)의 비례항법유도법칙이 적용되면 식(5)에서 지향각의 시간변화율은 다음과 같이 표현된다.

$$\dot{\sigma} = -(N-1)V\sin\sigma \frac{1}{r}, \quad N \geq 2 \quad (36)$$

따라서 표적거리가 영인 경우를 제외하고는 항상 $\sigma \dot{\sigma} < 0$ 이 성립한다. 이는 $d|\sigma(t)|/dt < 0$ 이 성립함을 의미하므로 만약 지향각의 초기조건이 $|\sigma_0| < \pi/2$ 이면 항상 다음의 관계가 성립한다.

$$|\sigma(t)| \leq |\sigma_0| < \frac{\pi}{2} \quad \text{for } t \in [0, t_f] \quad (37)$$

그러므로 $|\sigma_0| < \pi/2$ 이면 $N \geq 2$ 인 비례항법유도법칙은 항상 r 을 단조 감소시킨다.

이상의 결과를 정리하면 다음과 같다. 초기 지향각의 범위가 $|\sigma_0| < \pi/2$ 일 때, $\alpha \geq -1$ 인 실수에 대해 정의되는 식(10)의 성능지수를 최소화하며 식(1)~(3)의 비선형 구속조건을 만족하는 최적의 호밍유도법칙은 항법상수(N)가 $N = \alpha + 3$ ($N \geq 2$) 인 비례항법유도법칙이다.

V. 결 론

본 논문에서는 선형 근사적 방법으로 유도한 기존의 비례항법유도법칙을 근사화 과정 없이 비선형 방정식을 이용하여 도출함으로써 기존의 비례항법유도법칙이 엄밀한 의미에서 최적해임을 보였다. 이러한 해석은 호밍 초기 비행체의 표적에 대한 접근 속도가 양의 값 즉 표적거리의 시간변화율이 음의 값을 가지기만 하면 유효하므로 일반적인 호밍유도의 초기 조건에 대한 시나리오를 대부분 포함한다고 볼 수 있다. 이러한 해석을 통해 비례항법유도법칙에 대한 물리적 의미를 보다 엄밀히 파악할 수 있게 되었다.

참고문헌

1) P. Zarchan, *Tactical and Strategic Missile Guidance*, AIAA Inc., 4th Ed. 2002.

2) A. E. Bryson, Jr., Y. C. Ho, *Applied Optimal Control*, Hemisphere Publishing Co., 1975.

3) E. Kleindler, "Optimality of Proportional Navigation", *AIAA Journal*, Vol. 11, No. 6, June 1973, pp. 878-880.

4) 조항주, "PNG의 항법상수와 이와 관련된 최적제어 문제", 한국자동제어학술회의논문집, 1992. 10, pp. 578-583.

5) E. J. Ohlmeyer, "Control of Terminal Engagement Geometry Using Generalized Vector Explicit Guidance", *Proceedings of the American Control Conference and Exhibit*, Denver, Colorado, June 2003, pp. 396-401.

6) 김을근, 이용인, "비례항법상수 N 에 따른 개루프 궤적 및 Time-to-go 특성", 한국항공우주학회지 제27권 제4호, 1999, pp. 115-120.

7) 이진익, 이용인, "충돌각 제어 호밍유도법칙의 역최적 문제", 한국항공우주학회지, 제35권 제5호, 2007, pp. 412-418.

8) 이용인, 이진익, "역최적 문제를 통한 충돌각 제어 최적유도법칙의 개루프 비행궤적 특성 및 Time-to-go 예측", 한국군사과학기술학회지, 제11권 제3호, 2008, pp. 5-12.