

Aplicação da Equação de Boussinesq em duas dimensões

André Luiz Tonso Fabiani, José Junji Ota

Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Recursos Hídricos e Ambiental – PPGERHA
Departamento de Hidráulica e Saneamento – DHS; Universidade Federal do Paraná - UFPR
Curitiba, Brasil
andre.dhs@ufpr.br; ota.dhs@ufpr.br

Resumo—Este trabalho apresenta a discretização adotada para o termo de correção da não hidrostática nas equações de Boussinesq em duas dimensões, utilizando Séries de Fourier. A solução utiliza o Método de Runge-Kutta Galerkin Descontínuo. A formulação é aplicada a ruptura de uma barragem cilíndrica. Os resultados obtidos mostram que esta consideração da não hidrostática nas Equações de Águas Rasas conduz a resultados mais assimétricos que os obtidos com a consideração das Equações de Águas Rasas convencional, que leva em conta uma distribuição hidrostática de pressões.

Palavras-chave—Equação de Boussinesq; escoamento não-permanente em canais; escoamento bi-dimensional; distribuição não hidrostática de pressões

I. INTRODUÇÃO

Este trabalho busca analisar a influência da consideração de distribuição não hidrostática de pressões em um escoamento frente à consideração tradicional de distribuição hidrostática de pressões. A dedução destas equações, denominadas de equações de Boussinesq em duas dimensões, foram apresentadas em [1], para um sistema de coordenadas cartesianas. Aplica-se esta formulação ao caso de rompimento de uma barragem cilíndrica. A discretização do termo de correção da não hidrostática é apresentada, e a influência das parcelas analisadas.

II. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O estudo dos escoamentos em duas dimensões espaciais é realizado tradicionalmente pelas equações denominadas de Equações de Águas Rasas. Estas equações apresentam a variação dos níveis de água (h) e componentes da velocidade (u e v) nas duas direções espaciais (x e y). Uma das hipóteses básicas adotada da dedução destas equações é de que a distribuição de pressões é hidrostática na vertical. No entanto, alguns pesquisadores têm verificado que em alguns escoamentos a distribuição de pressões pode resultar não hidrostática, em função de fluxos descendentes gerados por fortes gradientes. Os estudos apresentados por [5] e [6], realizados com as Equações de Águas Rasas, concluem que a diferença observada entre os valores experimentalmente medidos em laboratório e os obtidos na modelagem computacional podem ser creditados à distribuição de velocidades não uniforme e, ainda, à não hidrostática das pressões. Uma formulação alternativa é apresentada em [1],

onde é apresentado um termo corretivo na Formulação de Águas Rasas, gerado a partir da consideração de um fluxo descendente na seção transversal, o que ocasiona uma variação da velocidade e, portanto, uma aceleração. Esta aceleração gera uma força adicional a ser considerada na equação de conservação da Quantidade de Movimento Linear. Esta formulação é denominada de Equação de Boussinesq, e pode ser escrita em duas dimensões como em (1):

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial uh}{\partial x} + \frac{\partial vh}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial(u.h)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ u^2.h + g \cdot \frac{h^2}{2} - B \right\} + \frac{\partial(u.v.h)}{\partial y} = g.h.(S_{0x} - S_{fx}) \\ \frac{\partial(v.h)}{\partial t} + \frac{\partial(u.v.h)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ v^2.h + g \cdot \frac{h^2}{2} - B \right\} = g.h.(S_{0y} - S_{fy}) \end{cases} \quad (1)$$

Em que: g representa a aceleração de gravidade ($9,81 \text{ m/s}^2$), S_{0x} e S_{0y} representam as declividades do fundo do canal (m/m) nas direções x e y , respectivamente, e S_{fx} e S_{fy} representam as inclinações da superfície de energia nas respectivas direções (m/m). Estas inclinações podem ser calculadas por equações de determinação da perda de carga, sendo a equação de Manning a mais usual, que pode ser expressa como em (2) e (3), já considerando as direções x e y .

$$S_{fx} = \frac{|V|.u.n^2}{h^{4/3}}; \quad (2)$$

$$S_{fy} = \frac{|V|.v.n^2}{h^{4/3}}. \quad (3)$$

Onde $V = \sqrt{u^2 + v^2}$, vetor velocidade total (m/s) e n é o coeficiente de rugosidade de Manning ($\text{m}^{-1/3}$ s). O termo de correção da distribuição de pressões $-B-$ pode ser determinado por (4).

$$B = \frac{h^3}{3} \left\{ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial t} \right) + \left[u \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \right] - \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right\} \quad (4)$$

Para modelar (1) foi adotado o método de Runge-Kutta Galerkin Descontínuo (RKDG), descrito por [3] e [4]. Este método permite que as funções interpoladas sejam descontínuas nas fronteiras dos elementos, ao contrário dos Métodos dos Elementos Finitos tradicionais em que as funções devem ser contínuas entre os elementos.

O método de Runge-Kutta é um método explícito no tempo, isto é, as condições no tempo futuro são calculadas em função unicamente dos valores conhecidos no instante de tempo anterior. Para que este tipo de método – explícito – convirja, é necessário respeitar a condição de Courant-Friedrichs-Lewis, dada de maneira genérica por (5), que deve ser calculada ponto a ponto.

$$CFL = \frac{V_{\max}}{\min\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}; \frac{\Delta y}{\Delta t}\right)} < CFL_{\maximo} \quad (5)$$

No caso deste método RKDG, usando um método de 2ª ordem, a condição é muito restritiva. O limite superior (CFL_{\maximo}) é igual a 0,35. Mais detalhes podem ser obtidos em [3].

Este método permite que as funções resultantes sejam descontínuas entre os elementos, possibilitando a introdução de fluxos nos contornos. Desta maneira, o método passa a permitir a análise de discontinuidades como, por exemplo, frentes de onda abruptas.

No Método RKDG é necessária a adoção de um limitador, a fim de evitar oscilações numéricas fortes. Existem vários métodos citados na literatura; um conjunto destes limitadores é apresentado por [2]. Neste trabalho será utilizado o método HLL (Harten-Lax & van Leer), também utilizado preferencialmente por [3]. Este limitador está baseado no método das características, e busca limitar a transferência de informação para o futuro pelas velocidades e celeridades do escoamento no ponto estudado. Este tipo de aproximação busca evitar fortes discontinuidades – de origem numérica e não física – que podem conduzir a simulação a apresentar grandes instabilidades. A referência [3] apresenta a aplicação do método de Galerkin Descontínuo às Equações de Saint-Venant (em uma dimensão) e de Águas Rasas. Esta formulação foi adaptada neste trabalho para conter o termo referente à correção de Boussinesq.

As equações de Águas Rasas podem ser escritas de maneira vetorial e conservativa conforme (6).

$$\partial_t U + \partial_x F(U) + \partial_y G(U) = S(U) \quad (6)$$

Onde cada termo é descrito por (7) a (10):

$$U = \begin{Bmatrix} h \\ q_x \\ q_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} h \\ uh \\ vh \end{Bmatrix} \quad (7)$$

$$F(U) = \begin{Bmatrix} q_x \\ \frac{q_x^2}{h} + \frac{1}{2}gh^2 \\ \frac{q_x q_y}{h} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

$$G(U) = \begin{Bmatrix} q_y \\ \frac{q_x q_y}{h} \\ \frac{q_y^2}{h} + \frac{1}{2}gh^2 \end{Bmatrix} \quad (9)$$

$$S(U) = \begin{Bmatrix} 0 \\ gh(S_{0_x} - S_{f_x}) + \frac{\partial B}{\partial x} \\ gh(S_{0_y} - S_{f_y}) + \frac{\partial B}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (10)$$

O termo corretivo B é dado por (4). Os produtos de profundidade pela velocidade representam os fluxos nas direções x e y ($q_x = uh$; $q_y = vh$), respectivamente. O termo de Boussinesq é apresentado em (10) deslocado para o termo fonte.

O Método dos Elementos Finitos na sua solução multiplica a equação original por uma função peso (ψ) e a integra em cada elemento K , como descrito por (11), buscando minimizar o erro de aproximação entre os valores calculados e os observados.

$$\int_K (\partial_t U + \partial_x F(U) + \partial_y G(U) - S(U)) \psi dx dy = 0 \quad (11)$$

Na (11) devemos trocar a incógnita U pela sua aproximação U_h , dada por (12), que utiliza os valores nodais (U^i) e funções de forma ($\psi_i(x)$), normalmente polinômios.

$$U_h = \sum_{i=1}^n U^i \psi_i(x) \quad (12)$$

No método RKDG as discretizações espaciais e temporais podem ser totalmente separadas, pois este é um processo explícito. Desta forma, podemos escrever (11) na forma de (13):

$$\partial_t U + \nabla(F(U, \nabla U), G(U, \nabla U)) = S(U) \quad (13)$$

As incógnitas aparecem explicitamente e são a profundidade (h) e os fluxos nas direções x e y (q_x e q_y).

A discretização no tempo pelo método de Runge-Kutta de 2ª ordem é realizado aplicando-se (14) ao sistema de equações (13).

$$U(t + \Delta t) = U(t) + \frac{\Delta t}{2} L_h \left(U(t), \frac{\partial U(t)}{\partial x}, \frac{\partial U(t)}{\partial y} \right). \quad (14)$$

Onde $L_h()$ representa o operador linear que permite calcular a variação no tempo a partir das variáveis originais e de suas derivadas espaciais.

A modelagem realizada por [3] e [4] é adotada também neste trabalho, utilizando elementos finitos triangulares.

III. DISCRETIZAÇÃO DO TERMO DE BOUSSINESQ

O termo de Boussinesq foi modelado como um termo fonte, tendo em vista ser um termo de correção às equações originais. O estudo de escoamentos em duas dimensões espaciais é realizado tradicionalmente pelas equações denominadas de Águas Rasas. Estas equações apresentam a variação dos níveis e fluxos em cada direção horizontal. No caso do termo de correção de Boussinesq, tem-se que a sua determinação é efetuada a partir das velocidades e suas derivadas nas direções espaciais e temporal, além da própria profundidade. Selecionou-se para o cálculo em cada elemento os valores referentes a este elemento, os seus três vizinhos diretos e os vizinhos destes elementos, denominados circunvizinhos. Desta forma, em cada elemento, tem-se 10 elementos sendo considerados para os cálculos das derivadas. Para representar estas funções foi adotada a Série de Fourier. Tal representação é interessante, pois as funções de Fourier adaptam-se bem a representar funções com fortes gradientes ou mesmo descontinuidades, e apresentam sempre derivadas de qualquer ordem. Foi selecionada a função de Fourier dada por (15), onde tem-se senos e cossenos nas duas direções espaciais, mas apenas com um harmônico em cada direção. A função genérica ϕ representa as componentes da velocidade em x e y (u e v) nos instantes passado (conhecido) e futuro (de cálculo).

$$\phi = a_0 + a_1 \cos\left(\frac{\pi x}{L_x}\right) + a_2 \text{sen}\left(\frac{\pi x}{L_x}\right) + a_3 \cos\left(\frac{\pi y}{L_y}\right) + a_4 \text{sen}\left(\frac{\pi y}{L_y}\right) \quad (15)$$

Em que L_x e L_y são a periodicidade da função, adotada como sendo a amplitude máxima das coordenadas nos elementos utilizados para o cálculo na respectiva direção.

A utilização de uma série de Fourier é proposta neste trabalho, pois testes iniciais com funções polinomiais não convergiram. Da mesma forma, séries de Fourier com mais harmônicos também não convergiram.

A partir desta formulação e adotando-se o método dos mínimos quadrados para a determinação dos coeficientes para cada aproximação – coeficientes a_0 a a_4 – obtém-se as derivadas contidas em (4), conforme as equações (16) a (20).

A Fig. 1 apresenta um elemento genérico da malha, com uma função genérica representada em cada centroide (velocidade u ou v) e a superfície de interpolação gerada pelo

método dos Mínimos Quadrados com a Série de Fourier adotada. A partir desta superfície definida são calculadas as derivadas no elemento em análise.

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{\pi}{L_x} a_1 \text{sen}\left(\frac{\pi x}{L_x}\right) + \frac{\pi}{L_x} a_2 \cos\left(\frac{\pi x}{L_x}\right) \quad (16)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\pi}{L_y} a_3 \text{sen}\left(\frac{\pi y}{L_y}\right) + \frac{\pi}{L_y} a_4 \cos\left(\frac{\pi y}{L_y}\right) \quad (17)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = -\left(\frac{\pi}{L_x}\right)^2 a_1 \cos\left(\frac{\pi x}{L_x}\right) - \left(\frac{\pi}{L_x}\right)^2 a_2 \text{sen}\left(\frac{\pi x}{L_x}\right) \quad (18)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -\left(\frac{\pi}{L_y}\right)^2 a_3 \cos\left(\frac{\pi y}{L_y}\right) - \left(\frac{\pi}{L_y}\right)^2 a_4 \text{sen}\left(\frac{\pi y}{L_y}\right) \quad (19)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = 0 \quad (20)$$

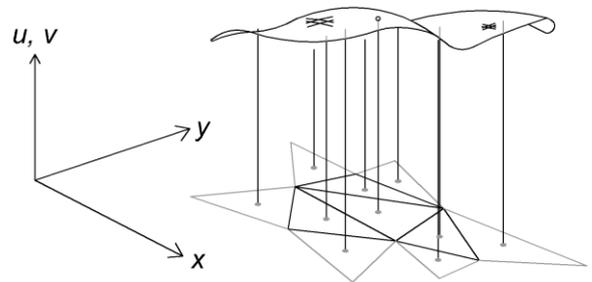


Fig. 1. Representação de um elemento genérico, seus vizinhos e circunvizinhos, e uma função genérica a ser aproximada (eixo vertical)

A partir de (4) e das derivadas calculadas por (16) a (20), podemos escrever as três parcelas da correção de Boussinesq, como em (21) a (23), com (24) apresentando a forma da correção completa.

Os elementos vizinhos e circunvizinhos influenciam nas derivadas, mas os valores são determinados apenas para o elemento em questão, que se encontra em uma posição aproximadamente central em relação ao conjunto.

$$B_1 = \frac{h^3}{3} \left\{ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial t} \right) \right\} \quad (21)$$

$$B_2 = \frac{h^3}{3} \left[\left[u \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \right] \right] \quad (22)$$

$$B_3 = -\frac{h^3}{3} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right\} \quad (23)$$

$$B = B_4 = B_1 + B_2 + B_3 \quad (24)$$

IV. APLICAÇÃO A UMA RUPTURA DE BARRAGEM CILÍNDRICA

O método proposto foi aplicado ao caso de rompimento de barragem cilíndrica apresentado por [3] e [4]. O caso em questão consiste em um tanque quadrado com 40 m de lado, repleto de água em repouso até uma altura de 1 m. Centrado neste quadrado existe um cilindro com 11 m de raio, repleto de água até uma altura de 10 m. Existe um rompimento instantâneo deste cilindro, e o perfil da água é analisado após 0,69 s de escoamento. A Fig. 2 apresenta graficamente esta condição, enquanto a Fig. 3 mostra a malha adotada na simulação, com 5.422 elementos triangulares.

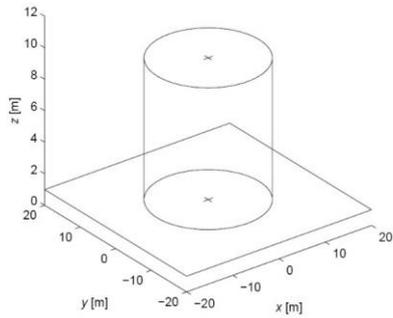


Fig. 2. Condição inicial para o estudo de rompimento de uma barragem cilíndrica [3]

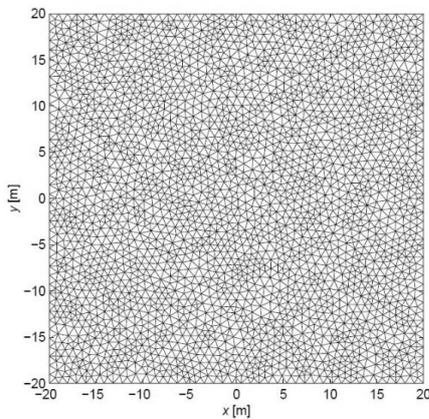


Fig. 3. Malha adotada na simulação da ruptura de uma barragem cilíndrica com 5.422 elementos [3]

A. Aplicação das Equações de Águas Rasas convencionais

A primeira simulação realizada procurou reproduzir com o modelo proposto os resultados apresentados por [7], que tem uma formulação semi-analítica. Na Fig. 4 são plotados os resultados obtidos contra os semi-analíticos na forma radial (isto é, representou-se a distância ao centro e não as coordenadas x e y individualmente). Desta forma agrupa-se os resultados.

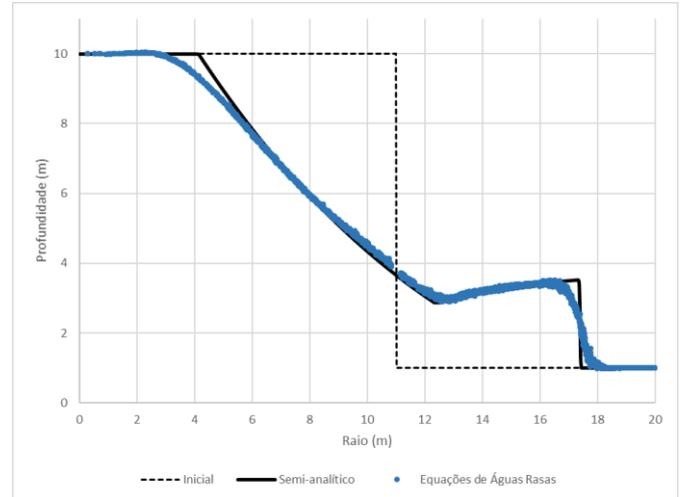


Fig. 4. Resultados obtidos com a Equação de Águas Rasas convencional

Observa-se que os resultados obtidos são coerentes com os obtidos com as equações de Águas Rasas convencionais, apresentando um amortecimento das frentes de onda, característica de modelos de baixa ordem (no caso, Runge-Kutta de 2ª ordem).

B. Aplicação das Equações de Boussinesq

A aplicação seguinte consistiu em analisar a influência de cada uma das três parcelas do termo de correção da não hidrostaticidade neste caso. Para isto, o escoamento foi simulado com cada uma das parcelas dadas por (21) a (24), com os resultados obtidos sendo confrontados com o resultado obtido com as Equações de Águas Rasas, apresentadas na Fig. 4. A seleção do termo de correção em análise é realizada dentro da programação por um indicador denominado *Bou*, que varia de 0 a 4 – sendo zero a Equação de Águas Rasas convencional, sem a correção de Boussinesq. A Fig. 5 apresenta estes resultados da correção completa, no formato radial. Uma consideração a respeito dos resultados apresentados é que a inclusão do termo de não hidrostaticidade aumenta a dispersão das respostas – o que é observado pela amplitude dos pontos em torno do resultado para Águas Rasas. Tal característica é observada principalmente na região próxima à frente de onda.

A análise da influência de cada uma das parcelas na correção total pode ser feita através de seções transversais pelos eixos e, ainda, separando-se as parcelas, como apresentado nas Fig. 6 e Fig. 7 (seção pelos eixos x e y, respectivamente). A Fig. 8 apresenta um detalhe dos resultados

na frente de onda positiva no eixo x – destacado na Fig. 6 – para melhor ilustrar os resultados obtidos.

Da análise destas figuras destaca-se que a correção do termo de não hidrostaticidade está gerando uma assimetria no escoamento, para todas as parcelas, pequena no terceiro termo (eq. 23) e grande no primeiro termo (eq. 21).

O cálculo da correção de Boussinesq tem um custo computacional alto. A Tabela I apresenta os valores de tempo de processamento para o caso do uso das Equações de Águas Rasas convencionais, considerando cada um dos termos de correção e o conjunto completo. Observa-se um aumento de no mínimo seis vezes no tempo de processamento.

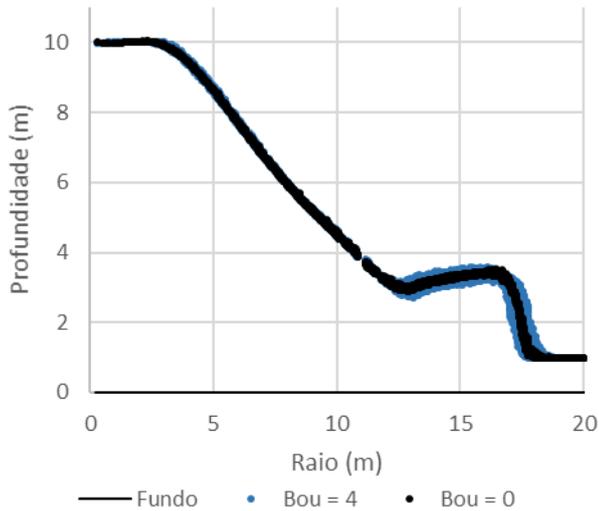


Fig. 5. Resultados obtidos com a correção de Boussinesq completa

TABELA I. TEMPOS DE PROCESSAMENTO E ESFORÇO COMPUTACIONAL

Opção de simulação	Tempo de processamento (s) ^a	Esforço Computacional ^b
Águas Rasas (Bou = 0)	21,04	1,00
Primeiro termo da correção (Bou = 1)	172,93	8,22
Segundo termo da correção (Bou = 2)	139,73	6,64
Terceiro termo da correção (Bou = 3)	140,30	6,67
Correção de Boussinesq completa (Bou = 4)	175,51	8,34

^a. Obtido em um computador i7, com 16 GB de memória RAM.

^b. O esforço é definido pela relação entre o tempo da simulação e o tempo da simulação de águas rasas.

A causa da assimetria obtida no caso em análise é atribuída à condição de fluxo axissimétrico. Neste caso, as velocidades observadas nos dois sentidos dos eixos coordenados são reversas (positivas na direção positiva e negativa na direção negativa do eixo). Isto gera derivadas que, aplicadas aos termos de correção de Boussinesq, conduzem a

valores sempre com o mesmo sinal da correção (positivos ou negativos em ambas as direções dos eixos coordenados), gerando a assimetria nos resultados obtidos.

Os resultados apresentados foram obtidos limitando-se a variação máxima em 10% do valor da correção original determinada com a aplicação das Equações de Águas Rasas convencionais, em cada ponto e em cada passo de tempo. Tal limitador foi implantado pois a consideração de não hidrostaticidade não é o principal efeito das variações do escoamento, mas uma correção a um dos termos. Este procedimento explica o fato de vários pontos (ver Fig. 08) apresentarem o mesmo resultado considerando somente o primeiro termo ($Bou = 1$) ou todos eles serem iguais ($Bou = 4$). Isto indica que o primeiro termo – que apresenta derivadas cruzadas no tempo e no espaço – atingiu este limite neste ponto, normalmente nos pontos da frente de onda. Em termos médios, a correção de Boussinesq é bem inferior a este limite, com os valores médios observados nas simulações apresentados na Tabela II.

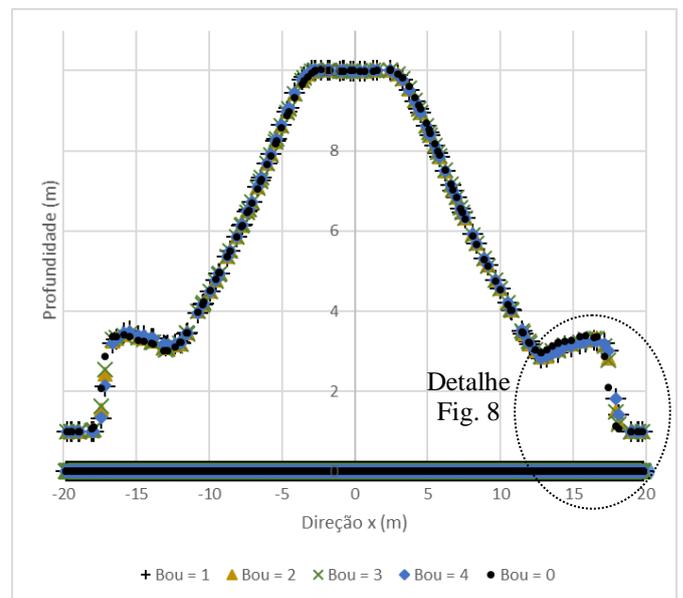


Fig. 6. Resultados obtidos com a correção de Boussinesq – Seção pelo eixo x

TABELA II. CORREÇÕES MÉDIAS

Opção de simulação	Varição média (%)
Águas Rasas (Bou=0)	-
Primeiro termo da correção (Bou = 1)	3,41
Segundo termo da correção (Bou = 2)	2,35
Terceiro termo da correção (Bou = 3)	1,99
Correção de Boussinesq completa (Bou = 4)	3,41

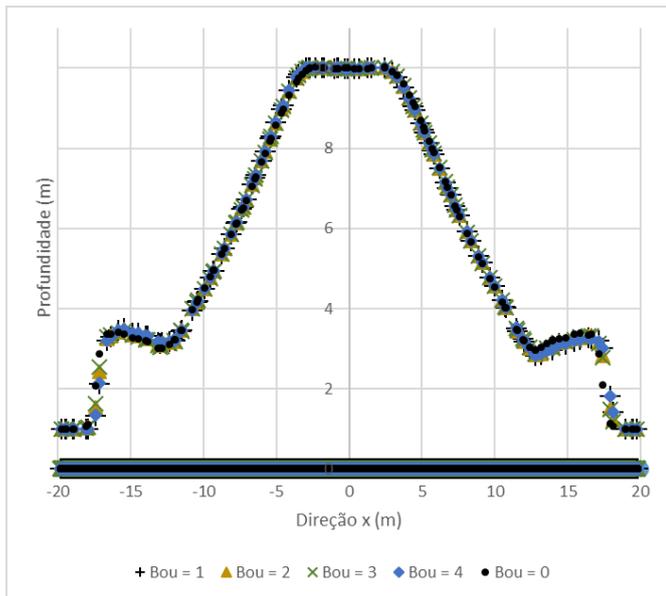


Fig. 7. Resultados obtidos com a correção de Boussinesq – Seção pelo eixo y

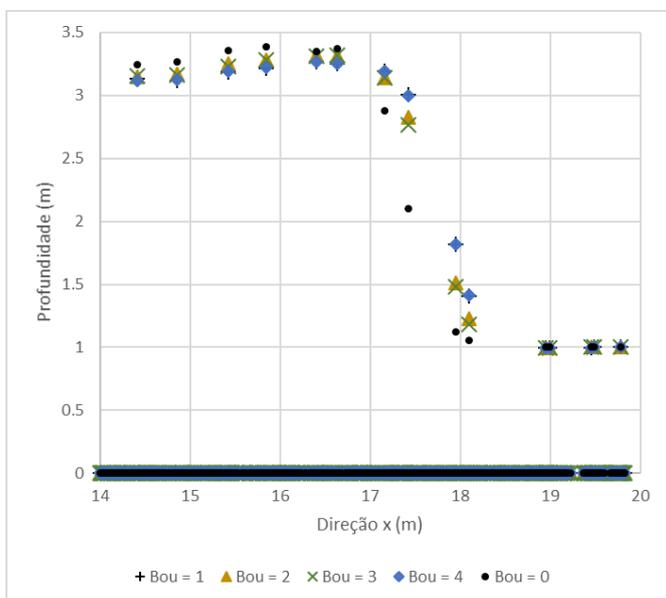


Fig. 8. Detalhe do resultado no eixo x positivo

V. CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

A aplicação do método de Runge-Kutta Galerkin Descontínuo às equações de Boussinesq mostrou-se viável, mas com grande esforço computacional adicional se comparado com a utilização das Equações de Águas Rasas convencionais. Os resultados obtidos apresentaram uma assimetria, conduzindo a resultados levemente diferentes do

que os obtidos com as equações de Águas Rasas convencionais. Quando se inclui a parcela que contém apenas a derivada cruzada no tempo ($Bou = 1$), os resultados tendem a serem mais assimétricos, em comparação com os resultados obtidos utilizando-se apenas os termos com derivadas espaciais ($Bou = 2$ e $Bou = 3$). Os resultados obtidos com a análise completa ($Bou = 4$) conduzem a resultados muito semelhantes, e mesmo idênticos em vários pontos, aos obtidos com a consideração apenas do primeiro termo, devido à importância deste termo e os limitadores adotados no método de solução que garante a estabilidade do método.

Propõe-se a continuidade das pesquisas com a utilização de outras funções de aproximação para calcular as derivadas espaciais das velocidades e permitir uma melhor representação dos termos de correção devido à não hidrostática. Outros casos de escoamentos não permanentes ou com fortes gradientes devem ser analisados em pesquisas futuras, buscando generalizar os resultados obtidos.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos ao professor Dirk Schwanenberg, pela seção de seu código fonte de águas rasas, utilizado como base para este trabalho.

REFERÊNCIAS

- [1] A. L. T. Fabiani, J. J. Ota, “Dedução das Equações de Boussinesq Aplicadas a Escoamentos Bidimensionais em Canais”, In: IV Simpósio de Métodos Numéricos Computacionais da Universidade Federal do Paraná, 2014, Curitiba. Periódico do IV Simpósio de Métodos Numéricos Computacionais - Volume de Artigos Completos. Curitiba: Universidade Federal do Paraná, 2014. v. 1. p. 239-245.
- [2] B. Cockburn; C.-W. SHU, “Runge-Kutta Discontinuous Galerkin Methods for Convection-Dominated Problems”, Journal of Scientific Computing, vol. 16, n. 3, pp. 173-261, September, 2001.
- [3] D. Schwanenberg, “Die Runge-Kutta-Discontinuous-Galerkin-Methode zur Lösung konvektionsdominierter tiefengemittelter Flachwasserprobleme”, PhD thesis, Aachen University, 2003.
- [4] D. Shwanenberg, M. Harms, “Discontinuous Galerkin Finite-Element Method for Transcritical Two-dimensional Shallow Water Flows”, Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, vol. 130, n. 5, p. 412-421, May, 2004.
- [5] S. Roger; B. J. Dewals, S. Erpicum, D. Schwanenberg, H. Schüttrumpf, J. Köngeter, M. Piroton, “Experimental and numerical investigations of dike-break induced flows”, Journal of Hydraulic Research, 47:3, 349-359, 2009.
- [6] S. Roger, J. Köngeter, H. Schüttrumpf, S. Erpicum, P. Archambeau, M. Piroton, D. Schwanenberg, B. J. Dewalds, “Hybrid modeling of dike-break induced flows”, River Flow 2010.
- [7] E. F. Toro.: “Shock-capturing methods for free-surface shallow flows”, Wiltshire : John Wiley and Sons, 2001, 309 p.