

# Aplicación de la aproximación circular en la estimación de estructuras sísmicas bidimensionales

J. C. V. Traslosheros, J. Frez, J. A. Madrid y C. Rebollar  
*División Ciencias de la Tierra, CICESE.*

Recibido: 4 de mayo, 1990; Aceptado: 11 de octubre, 1990.

## RESUMEN

El procedimiento que aquí se presenta sirve para estimar la velocidad de ondas sísmicas en medios heterogéneos bidimensionales a partir de observaciones de tiempos de recorrido. Los tiempos se calculan utilizando la aproximación circular, para lo cual el campo de velocidades es discretizado mediante una malla de celdas triangulares en las que el gradiente de velocidad es constante. En la estimación de la velocidad en cada nodo, se aplica una linealización a través de un desarrollo de Taylor alrededor de una solución inicial. El cálculo correspondiente de las derivadas parciales es hecho analíticamente. El modelo inicial no necesita ser lateralmente heterogéneo. Una doble estabilización del problema inverso resulta de la aplicación de la descomposición en valores singulares sobre un estimador regularizado.

El procedimiento se valida generando e invirtiendo datos sintéticos. En esta validación se simula la complejidad de un ejercicio de aplicación que consiste en la inversión de un conjunto de tiempos de recorrido generados por 15 explosiones y 12 sensores ubicados en el perímetro de un cuadrado de 30 m de lado y que fueron hechas para localizar zonas de baja velocidad sísmica en los primeros 10 a 20 m de profundidad. Los resultados se ilustran con mapas de contorno de igual velocidad y se evalúan discutiendo el grado de suavidad de la solución, la conducta de los residuales y de la matriz de resolución, además del grado de realismo de la solución. Este procedimiento es computacionalmente más eficiente del que resulta de una discretización con celdas rectangulares homogéneas.

**PALABRAS CLAVE:** Tomografía, velocidades sísmicas, aproximación circular.

## ABSTRACT

The computational procedure reported here estimates seismic wave velocities for two-dimensional heterogeneous media from observations of body-wave travel times. The solution of the forward problem is based on the circular approximation. The structure is discretized in a grid of triangular cells and the velocity gradient is held constant within each triangle. In order to estimate the velocity field, a linearized scheme is applied using a Taylor series expansion around an initial solution. The partial derivatives of the travel times with respect to the model parameters are computed from closed form expressions. The initial model does not necessarily have to be laterally heterogeneous. A double stabilization of the least-squares solution of the inverse problem follows from the application of both, the singular-value decomposition and a simple regularization scheme.

The results of several numerical experiments validate the computational procedure. In these experiments, we have modeled a real situation where travel time observations are used from 15 explosions and 12 sensors located at the perimeter of a square (with sides 30 m long) to detect low-velocity regions at maximum depths of 10 to 20 m. The solutions are illustrated with maps of velocity isolines and are evaluated taking into account the smoothness of the solution, the behaviour of the residuals and the resolution matrix, as well as our prior information about the physics of the problem. The procedure is more efficient than those using rectangular homogeneous cells.

**KEY WORDS:** Tomography, seismic velocities, circular approximation.

## INTRODUCCION

En este artículo presentamos un procedimiento para estimar las velocidades de un medio bidimensional a partir de observaciones de tiempos de viaje de primeros arribos y con una distribución conocida de fuentes y sensores. En los ejercicios de validación y aplicación, las fuentes y sensores se distribuyen en el perímetro del medio bidimensional; sin embargo, ésto no es una restricción del procedimiento. En una primera etapa se resuelve el problema directo que consiste en el cálculo de las trayectorias (rayos) y los tiempos de recorrido. En el tratamiento del problema inverso, se linealiza mediante un desarrollo de Taylor alrededor de una solución inicial razonablemente buena; ésto implica la ne-

cesidad de calcular las derivadas parciales correspondientes. Por último, el procedimiento resuelve el problema inverso mismo, o sea, el de la estimación óptima del campo de velocidad sísmica.

El esquema general anterior plantea dificultades de tipo algebraico, algorítmico y computacional, como son: a) un cálculo eficiente de las trayectorias sísmicas y sus tiempos de recorrido para estructuras con heterogeneidades fuertes; b) un cálculo de las derivadas parciales (es decir, de la matriz de sensibilidad en el problema linealizado) que evite el uso de cocientes por diferencias finitas, y c) una estabilización

en la solución del problema inverso. Esta estabilización es necesaria porque el problema inverso es inherentemente mal-condicionado, en el sentido de que buscamos determinar el campo de velocidad (que probablemente incluye zonas de baja velocidad) a partir de un conjunto finito de mediciones obtenidas, para el caso de aplicación, sólo en el perímetro de la región en cuestión.

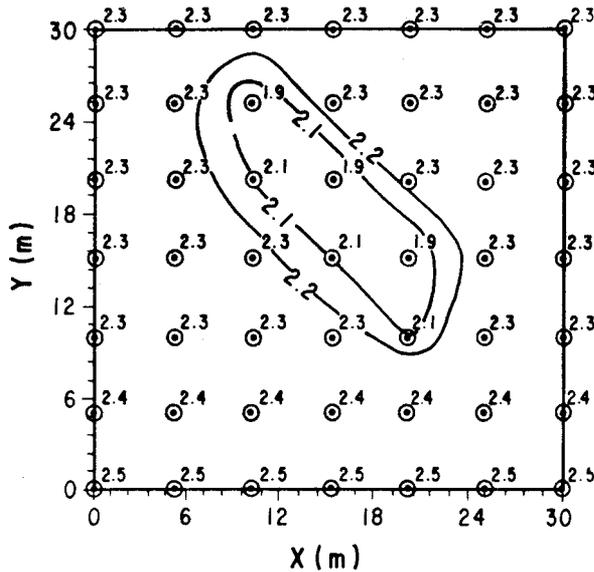


Fig. 1. Modelo utilizado para generar datos en el primer grupo de experimentos numéricos. La discretización consta de 49 nodos. La zona de baja velocidad es de forma aproximadamente elipsoidal con valores de 2.2 km/s en la periferia, disminuyendo hasta 1.9 km/s en su interior; la velocidad alrededor de la zona es de 2.3 km/s. En la parte inferior se agrega un gradiente de velocidad en la dirección  $Oy$ . Las curvas de nivel, tanto en ésta como en las figuras 4 y 12, se obtienen utilizando polinomios de tercer grado en la interpolación.

El cálculo de las trayectorias y tiempos de recorrido resulta de la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales con dos condiciones limítrofes (Cerveny *et al.*, 1977; Cerveny, 1985). Salvo en el caso de estructuras sísmicas muy simples, estas ecuaciones deben integrarse numéricamente. Una aproximación comúnmente utilizada consiste en descomponer la estructura compleja en celdas en las cuales la dependencia específica de la velocidad en función de las coordenadas permite obtener soluciones exactas de las ecuaciones diferenciales. Los dos casos más simples resultan cuando las celdas son homogéneas o tienen un gradiente constante de velocidad, para los cuales los rayos siguen trayectorias rectas o de arcos de circunferencia, respectivamente. Consecuentemente, el procedimiento más común resuelve el problema directo dividiendo el área de estudio en celdas rectangulares de velocidad constante (Aki, 1977; Dines y Lytle, 1979; Neumann, 1981; Ivansson, 1985; Bishop *et al.*, 1990). Sin embargo, una distribución de velocidades con heterogeneidades fuertes hace necesario utilizar un número alto de estas celdas para obtener una adecuada aproximación a la estructura. Esto produce, por lo tanto, un

sistema de ecuaciones algebraicas de grandes dimensiones, cuya solución requiere un fuerte gasto de memoria y de tiempo de computación (Ivansson, 1985; McMechan *et al.*, 1987).

Otros procedimientos generalizan la aproximación anterior. Las celdas pueden ser, por ejemplo, cuadriláteros o triángulos y se escogen funciones de velocidad que permiten una transición suave de la velocidad (y de los rayos) a través de las fronteras de las celdas. Las funciones (aproximaciones) más usadas son las de velocidades que dependen bilineal o linealmente de las coordenadas, en que los coeficientes se calculan algebraicamente a partir de las velocidades en los nodos (ver detalles, para el caso de celdas triangulares, en la sección siguiente). También se pueden obtener soluciones analíticas para las ecuaciones de los rayos en los casos de celdas cuadriláteras o triangulares si se aproxima el cuadrado de la lentitud como función bilineal o lineal de las coordenadas, respectivamente. En el segundo caso, las ecuaciones resultan ser más simples que si se utiliza la aproximación lineal para la velocidad. Sin enumerar otras posibilidades ("splines" cúbicos, aproximaciones analíticas globales, aproximación por líneas de isovelocidades, etc.), podemos concluir que una parametrización del campo de velocidad debe permitir: a) una buena aproximación a distribuciones realistas de velocidades y b) cálculos eficientes, estables y exactos que resuelvan tanto el problema directo como el inverso. En particular, la solución del problema inverso en su versión linealizada por desarrollo de Taylor requiere idealmente que la parametrización permita un cálculo analítico de las derivadas parciales correspondientes.

Para reducir tanto el tiempo de cómputo como la cantidad de memoria en la computadora, usamos la aproximación circular en los cálculos de trazado de rayos. Esta aproximación utiliza una partición del medio en celdas triangulares dentro de las cuales el gradiente de velocidad es constante (Gebrande, 1976; Marks y Hron, 1978; Aric *et al.*, 1980; Madrid y Traslosheros, 1983; entre otros). Para el cálculo de derivadas parciales se cuenta con las expresiones analíticas compactas de Madrid (1986) (ver, también, Bregman *et al.*, 1989). Gracias al uso de la aproximación circular la representación de una estructura con heterogeneidades fuertes puede hacerse con un número mucho menor de parámetros que para el caso de una aproximación basada en celdas rectangulares homogéneas.

En cuanto al problema inverso, existen dos familias de métodos para estabilizar la solución mínimo-cuadrática de sistemas lineales mal-condicionados. En la primera se agrega al criterio mínimo-cuadrático una condición de estabilización que incorpora la condición de suavidad de la función incógnita (métodos de regularización); en la segunda se utiliza un desarrollo espectral truncado de modo que se eliminan las componentes de "frecuencias altas" en la solución. En ambos casos se busca inhibir oscilaciones no realistas de la solución mínimo-cuadrática. Los dos tipos de estabilización se pueden combinar y ésto es lo que se hace en nuestro procedimiento. Por otro lado, existen varias

opciones para resolver un sistema de ecuaciones lineales de gran escala. Una de ellas, actualmente muy popular, usa la aproximación de procesar iterativamente las trayectorias una por una; esto constituye la idea básica de las técnicas de reconstrucción algebraica (ART); ver, por ejemplo, Dynes y Lytle (1979). En otra opción, la inversión se hace simultáneamente en cada paso de un algoritmo iterativo (técnicas SIRT). En nuestro procedimiento, tanto la reducción sustancial del número de incógnitas como el cálculo analítico de la matriz de derivadas parciales permite, a bajo costo, la inversión simultánea y no-iterativa del sistema linealizado de ecuaciones. Además, este mismo bajo costo permite variar los parámetros de estabilización para realizar un muestreo efectivo del espacio de soluciones.

Ya que nuestro problema es no-lineal, el esquema debe iterarse buscando convergencia. Para controlar el desempeño de la regularización, se ha diseñado un procedimiento interactivo. Así, la inspección de los varios resultados del cálculo (vectores de solución y de residuales; matriz de resolución, variancia de la solución) permite evaluar la calidad de una solución y, como resultado, se acepta o modifica una solución en particular; esto último, a través de cambios subsecuentes en los parámetros de estabilización.

Con la excepción de una publicación que apareció durante la revisión de este artículo (Bregman *et al.*, 1989), un procedimiento como el que aquí se presenta no ha aparecido en la literatura. Un artículo de revisión que condensa, entre

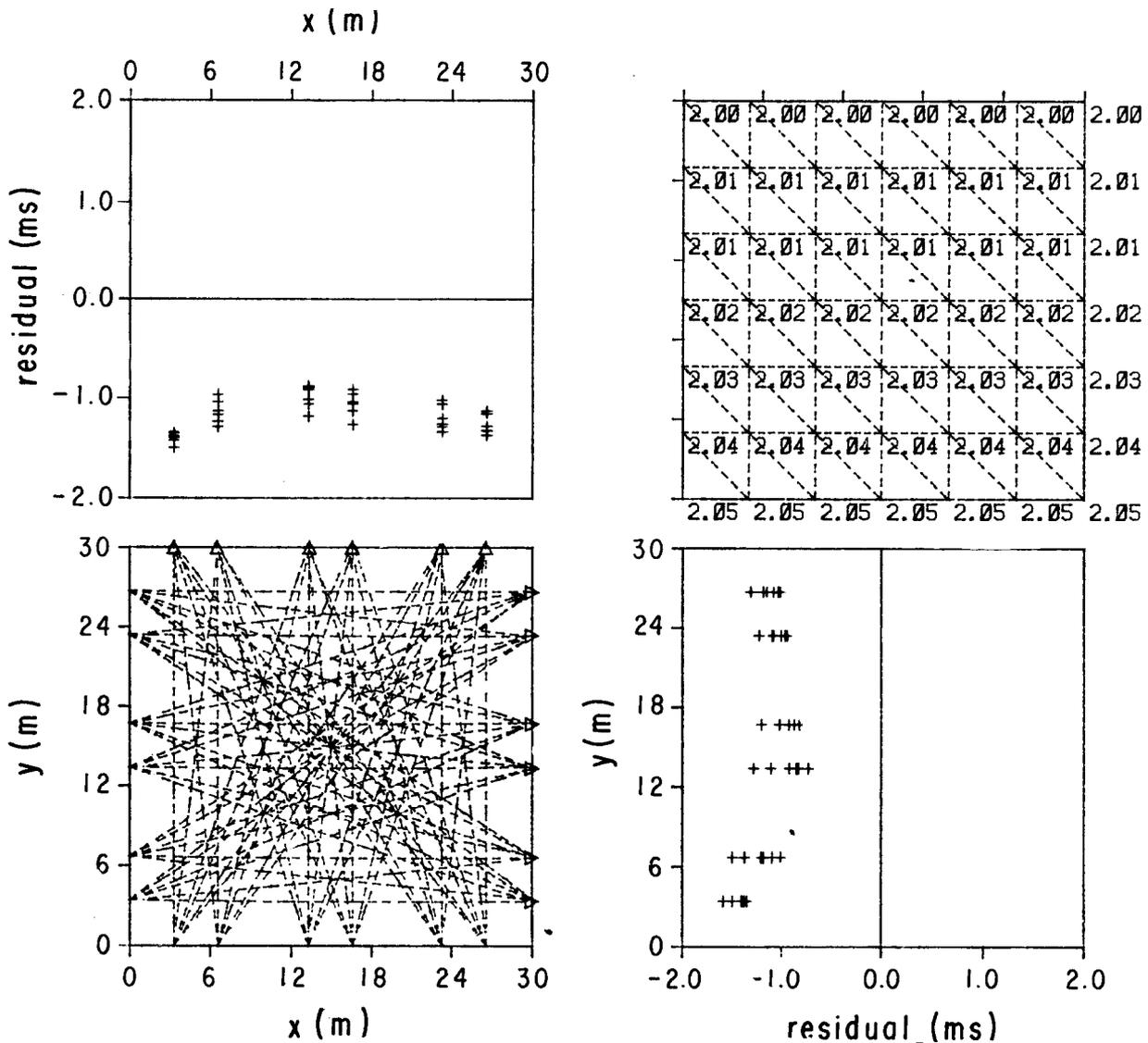


Fig. 2a. Modelo inicial, rayos y residuales correspondientes al primer grupo de experimentos numéricos. En el extremo inferior izquierdo, se muestran los rayos; los triángulos representan la posición de los receptores. En el extremo superior izquierdo se dibujan los residuales en función de la posición de aquellos receptores que están situados a lo largo del eje  $Ox$ . En el extremo inferior derecho se muestran los residuales en función de la posición de los sensores situados sobre el eje  $Oy$ . En el extremo superior derecho se representa el modelo de velocidad (en km/s) para cada nodo de la malla. Las mismas convenciones se aplican a las figuras 3, 5, 6 y 7. Gráfica correspondiente a un modelo inicial casi homogéneo. A los datos se les agregó ruido numérico gaussiano de promedio nulo y con una desviación estándar de 0.14 ms.

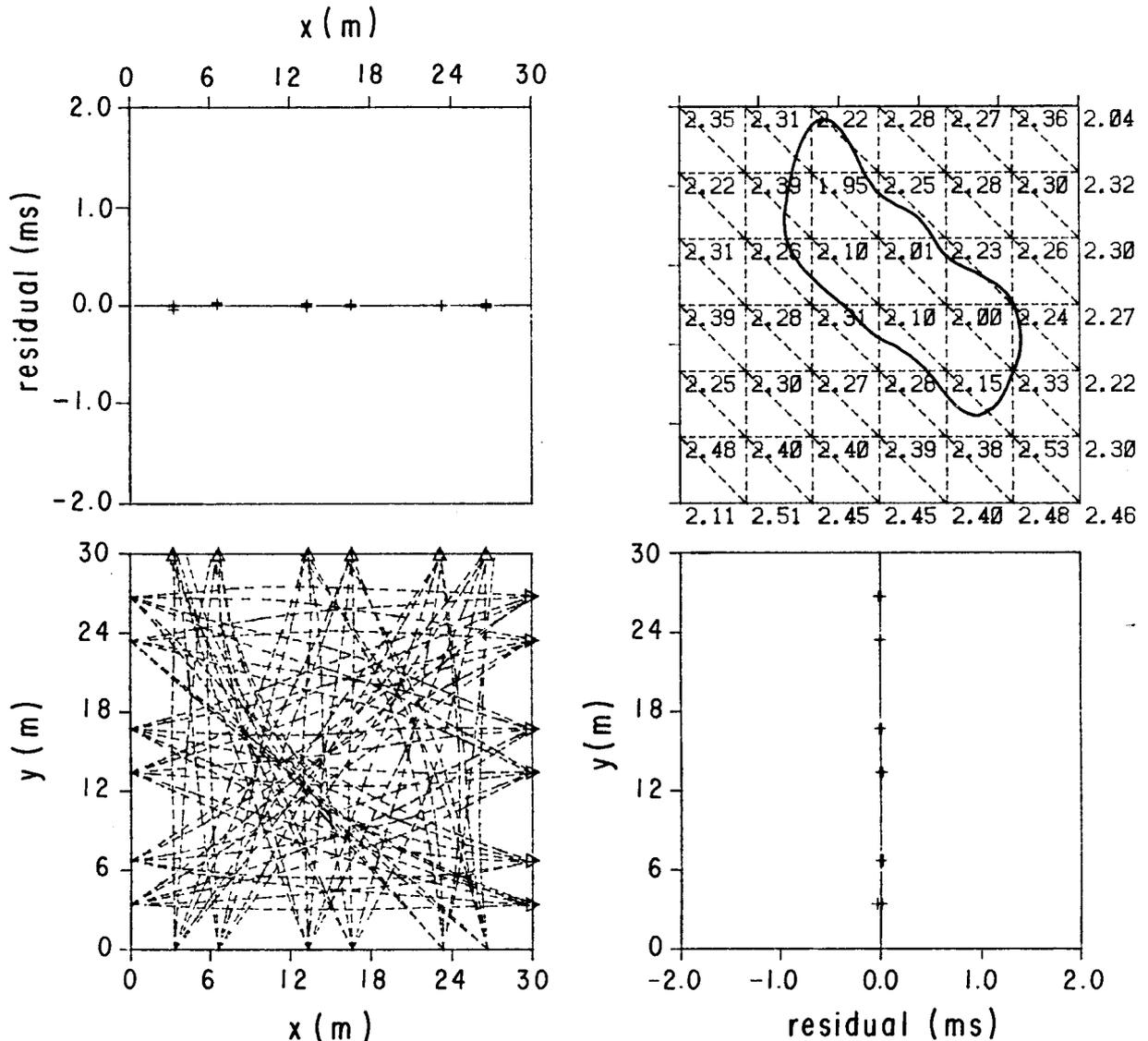


Fig. 2b. Solución estable a partir del modelo inicial ilustrado en la figura 2a. La curva de nivel corresponde a una velocidad de 2.2 km/s. Se usa un coeficiente de estabilización diferente para cada incógnita; como resultado, la solución filtra entre el 40% y el 50% del valor de las componentes singulares de la solución mínimo-cuadrática. (ver figura 2a).

otros, los métodos y resultados aquí detallados es el de Madrid (1989). Los detalles del álgebra y del algoritmo, además de su validación y aplicación, son descritos en las secciones siguientes.

**TRAZADO DE RAYOS Y TIEMPOS DE RECORRIDO**

La aproximación circular es un método que permite calcular eficientemente el trazado de rayos y sus tiempos de recorrido en medios heterogéneos. En esta sección se resume el método; el lector puede consultar a Marks y Hron (1978), Aric et al. (1980), Madrid y Traslosheros (1983) y Madrid (1986) para mayores detalles.

La aproximación tiene como parámetros a los valores de la velocidad en cada nodo de una red triangular. Dentro de cada triángulo la velocidad es una función lineal de las coordenadas

$$v(x, y) = v_0 + b_x x + b_y y \tag{1}$$

donde  $v_0$ ,  $b_x$  y  $b_y$  se calculan resolviendo el sistema de ecuaciones que resultan al introducir en (1) los valores de la velocidad y de las coordenadas para cada nodo. Las componentes del gradiente de velocidad  $\mathbf{b}$  en los ejes  $(x, y)$  son  $(b_x, b_y)$ , respectivamente. El trazado de los rayos está gobernado por un sistema de ecuaciones diferenciales que pueden escribirse de varias maneras. En lo que sigue, se ha adoptado la usada, entre otros, por Cervený et al. (1977) y

Cerveny (1985). El sistema, en su forma general, es el siguiente

$$\frac{d x_i}{d \sigma} = p_i \quad (2)$$

$$\frac{d p_i}{d \sigma} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{v^2} \right) ; \quad i = 1, 2$$

donde  $d\sigma = v dl$ ,  $dl$  es el elemento de arco y  $p \equiv p_1$  y  $q \equiv p_2$  son las componentes del vector de lentitud. Debido al carácter lineal de la dependencia de la velocidad en las coordenadas, el segundo grupo de ecuaciones queda

$$\frac{d p_i}{d \sigma} = \frac{-b_i}{v^3} ; \quad i = 1, 2 \quad (3)$$

Las ecuaciones (2) son las "ecuaciones canónicas de Hamilton" y valen independientemente del sistema de coordenadas usado. En el problema que nos ocupa se consideran dos sistemas de coordenadas. El primero es el de laboratorio,  $(x, y)$ ; el segundo es un sistema local para cada triángulo  $(x', y')$ . Este último es producido por una rotación del primer sistema que deja al eje  $Oy'$  paralelo al gradiente de velocidad  $\mathbf{b}$  del triángulo en particular. El ángulo de rotación correspondiente es

$$\phi = \arctan \left( \frac{-b_x}{b_y} \right) \quad (4)$$

Enseguida, el sistema se traslada paralelamente a  $Oy'$  hasta tener por origen el punto con velocidad nula. Las ecuaciones de transformación quedan, entonces,

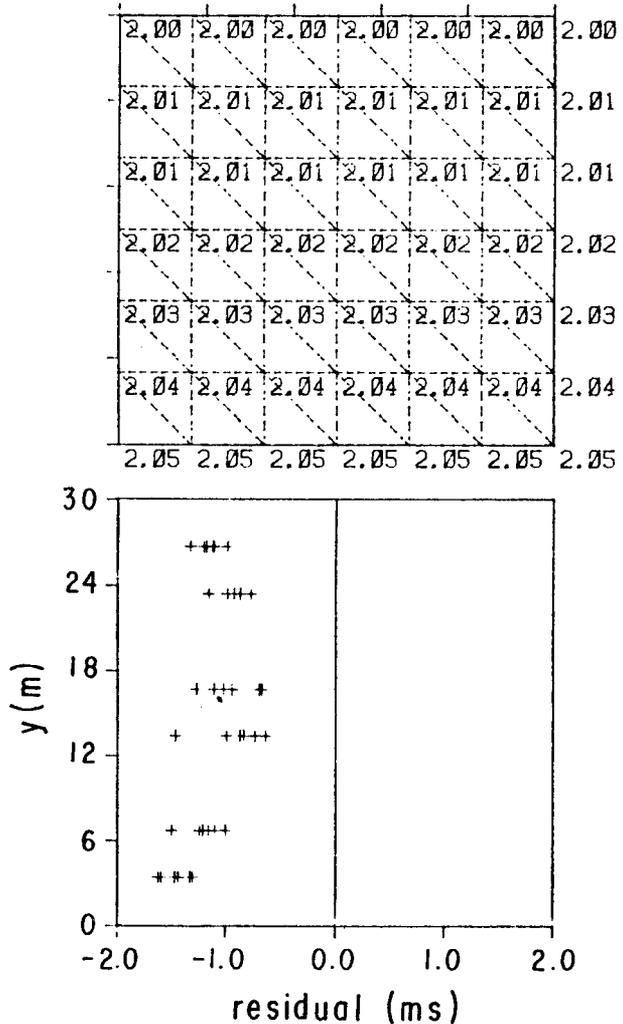
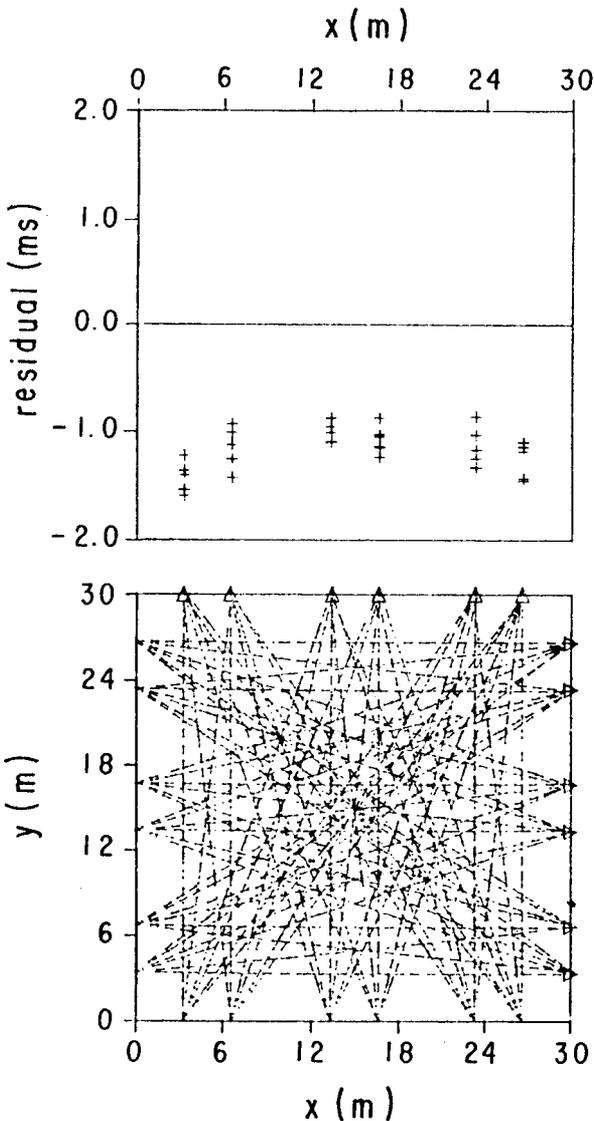


Fig. 2c. Mismo modelo inicial que el ilustrado en la figura 2a; pero, en este caso, los datos contienen un ruido gaussiano con una desviación estándar de 0.7 ms. (ver figura 2a).

$$x' = x \cos \phi + y \sin \phi \quad (5a)$$

$$y' = -x \sin \phi + y \cos \phi - y_{v_0} \quad (5b)$$

donde  $y' = y_{v_0}$  señala la línea donde la velocidad es cero. Así, cada triángulo tiene asociado su propio sistema local de coordenadas, en el cual la velocidad varía dependiendo sólo de una de estas coordenadas. En otras palabras, el medio es lateralmente homogéneo en cada sistema local.

El rayo sigue un arco de circunferencia en cada triángulo; el radio de la circunferencia queda determinado tanto por el vector de lentitud en el punto de su entrada al triángulo, como por la magnitud del gradiente de velocidad  $|\nabla v| = b$ . El parámetro del rayo en el sistema local de coordenadas es

$$p' = p \cos \phi + q \sin \phi. \quad (5c)$$

En este sistema las dos ecuaciones (3) tienen la forma

$$\frac{d p'}{d \sigma} = 0 \quad (6a)$$

$$\frac{d q'}{d \sigma} = \frac{b}{v^3} \quad (6b)$$

La primera ecuación implica que el parámetro del rayo en el sistema local tiene un valor constante. El cambio de signo entre (3) y (6b) resulta al definir el eje  $Oy'$  antiparalelo al gradiente de velocidad.

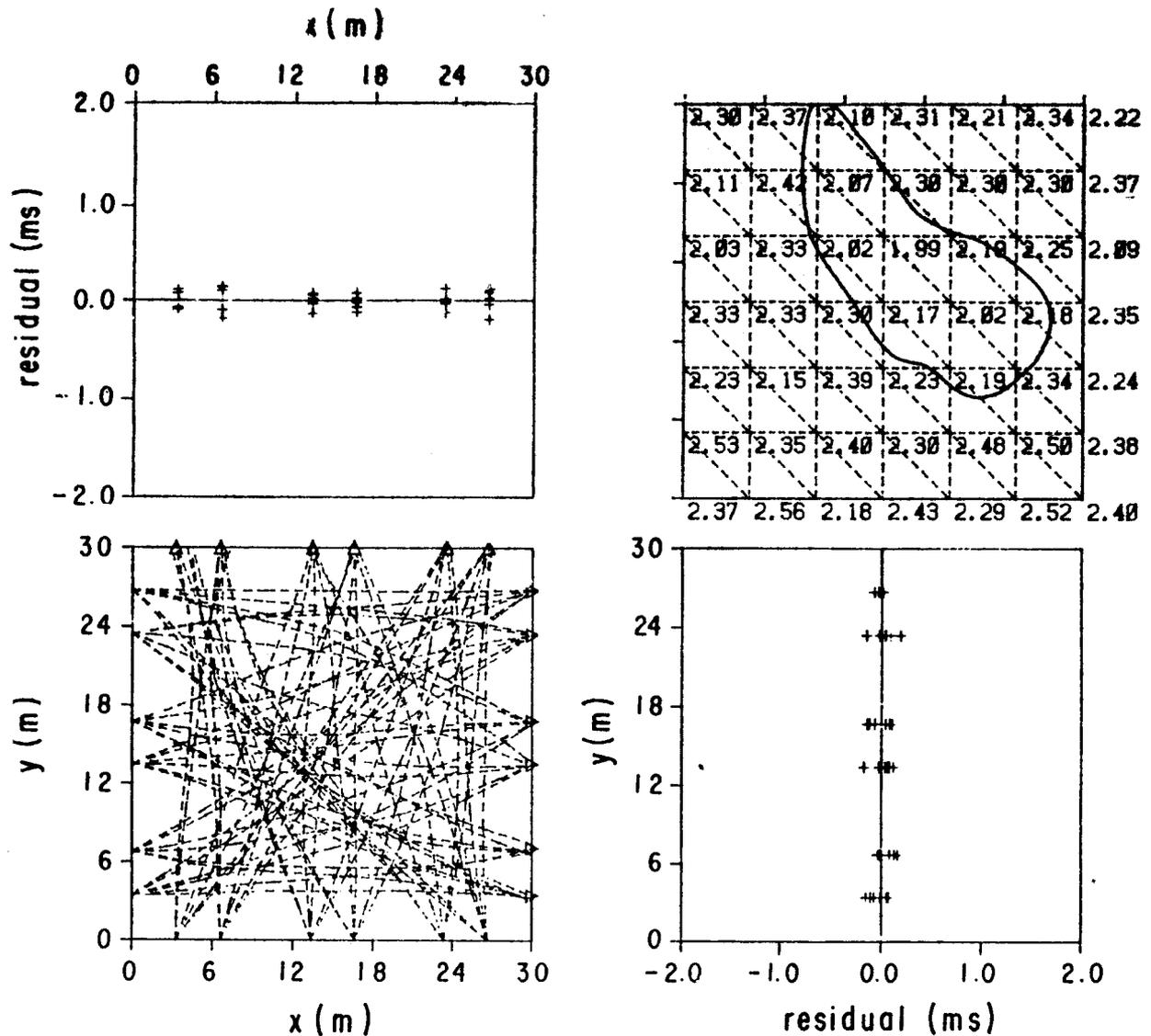


Fig. 2d. Solución estable a partir del modelo inicial ilustrado en la figura 2c. La curva del nivel corresponde a una velocidad de 2.2 km/s. En la estabilización se filtra entre el 70% y el 90% de las componentes singulares de la solución mínimo-cuadrática.(ver figura 2a)

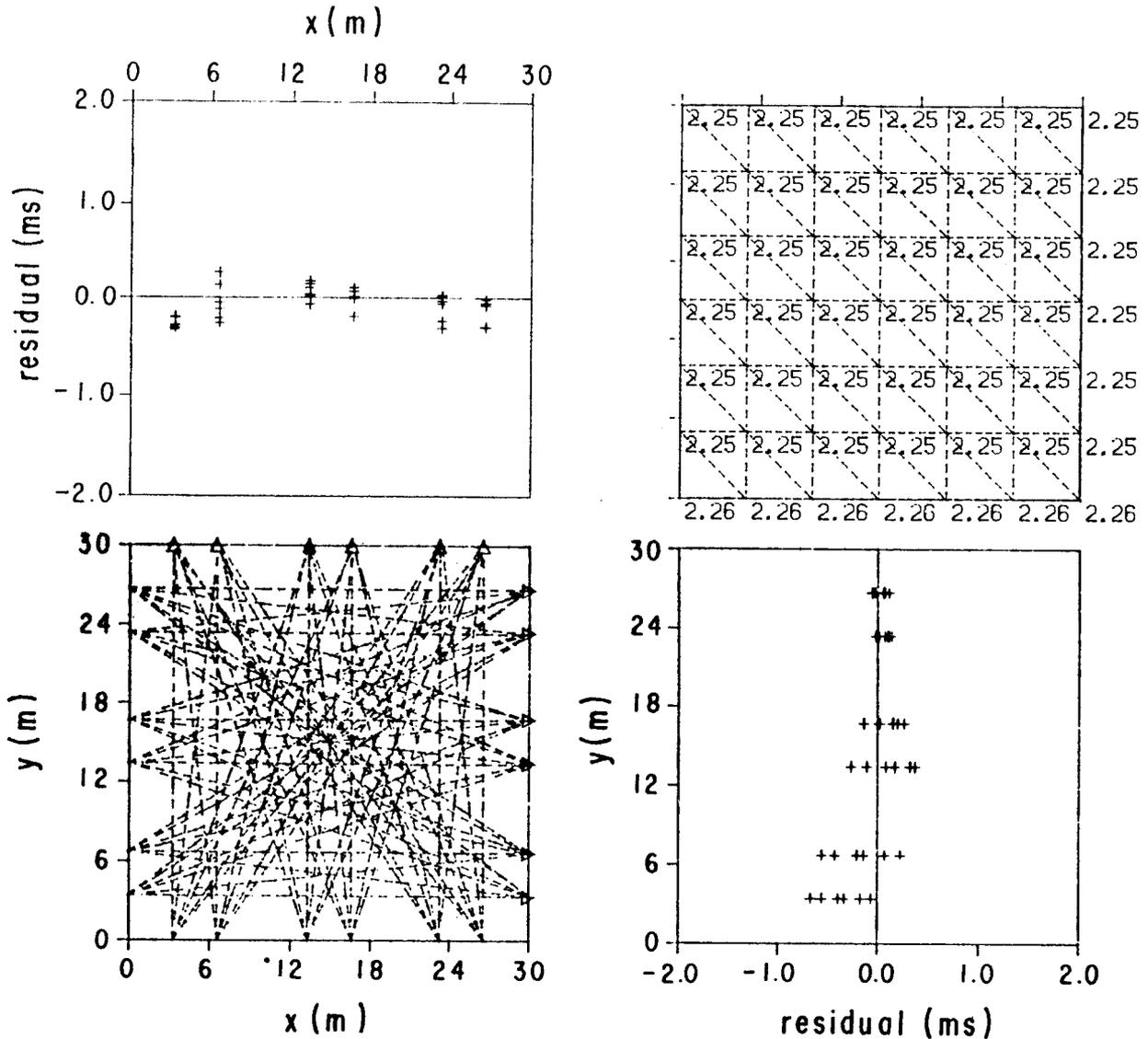


Fig. 3a. Trayectorias y residuales correspondientes a un modelo inicial homogéneo ( $v = 2.25$  km/s) que satisface globalmente los datos generados por el modelo mostrado en la figura 2a. Los datos tienen un ruido gaussiano de promedio nulo y una desviación estándar de 0.7 ms.

Las coordenadas del punto de salida del rayo se obtienen encontrando la intersección entre el arco de circunferencia y uno de los lados del triángulo. Definimos como ángulo de salida ( $\theta$ ) al complemento del ángulo entre el eje  $Oy'$  y la tangente al rayo. Con esta definición, el tiempo de viaje del rayo dentro de cada triángulo está dado por

$$t_{\Delta} = \int_e^s \frac{dl}{v(x,y)} = \int_{\theta_e}^{\theta_s} \frac{R}{v} d\theta \quad (7)$$

La integración se realiza sobre el arco de circunferencia correspondiente. Los subíndices  $e$  y  $s$  indican puntos de entrada y de salida del rayo en un triángulo, respectivamente; en esta expresión,  $R$  representa el radio de la circunferencia

Aplicando condiciones de continuidad, se determinan

tanto el ángulo de entrada como el parámetro del rayo en el sistema local del siguiente triángulo. El cálculo se propaga de esta manera hasta alcanzar la frontera de la región bidimensional. Para resolver el problema límite de los puntos (fuente-sensor), se utiliza el método de disparo múltiple (shooting). Para ahorrar tiempo de cómputo, el algoritmo anterior se detiene al alcanzarse un punto convenientemente cercano al punto de observación. Luego, se corrige el correspondiente tiempo de recorrido trasladando el punto de llegada del rayo cercano al punto de observación mediante una simple expresión analítica (Madrid, 1986). Marks y Hron (1978) han aplicado el método de disparo múltiple comparando resultados de aplicar tanto la aproximación circular como una integración numérica de las ecuaciones canónicas de Hamilton. Estos autores encuentran que las dos técnicas producen resultados con exactitudes comparables; sin embargo, la aproximación circular necesita un tiempo de cómputo mucho menor.

**CALCULO DE LAS DERIVADAS PARCIALES**

El residual del tiempo de recorrido se define por

$$r = t_o - t_c \tag{8}$$

donde  $t_o$  representa el tiempo de viaje observado y  $t_c$ , el calculado para un modelo dado.

Para linealizar el problema, se perturba el modelo inicial de velocidades de modo que el cambio en el tiempo de viaje  $\delta t$  se relaciona con los cambios de la velocidad en los nodos a través de un desarrollo de Taylor truncado

$$\delta t_i = \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial t_i}{\partial v_j} \right) \delta v_j \tag{9}$$

donde  $i$  varía entre 1 y  $m$  ( $m$  es el número de mediciones);  $j$  varía entre 1 y  $n$  ( $n$  es el número de incógnitas), y  $\{ \partial t_i / \partial v_j \}$  constituye la matriz de derivadas parciales. En lo que sigue, se identifican las perturbaciones del tiempo de recorrido y de las velocidades con los residuales y el cambio de velocidades respecto al modelo inicial, respectivamente.

El tiempo de viaje dentro de cada triángulo está definido por la ecuación (7). Siguiendo el tratamiento de Madrid (1986) (ver, también, Bregman *et al.*, 1989), se considera una perturbación de la velocidad en uno de los vértices del

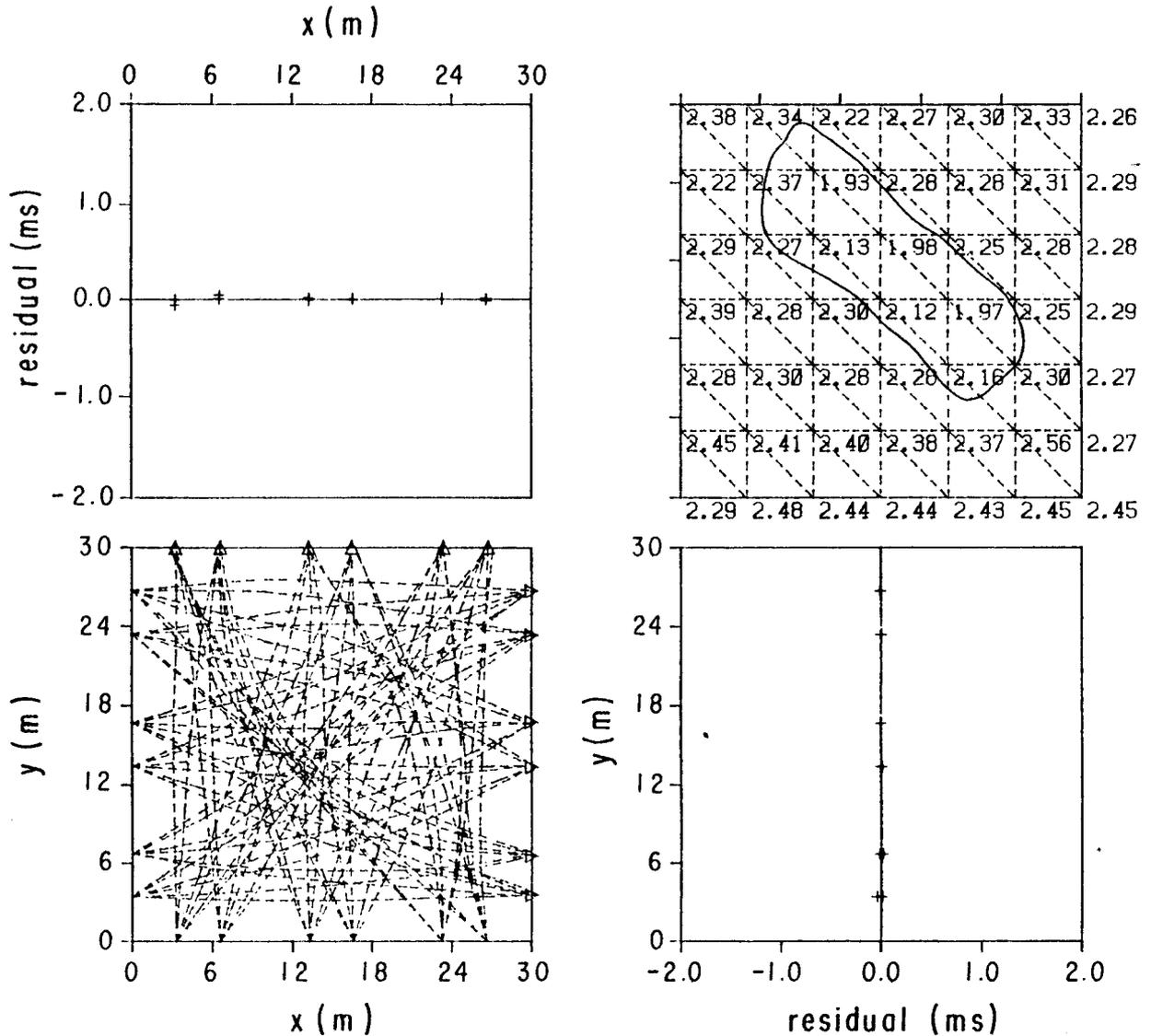


Fig. 3b. Solución que resulta filtrando entre el 50% y el 60% de las componentes de la DVS de la solución mínimo-cuadrática, a partir del modelo inicial de la figura 3a. La curva de nivel corresponde a una velocidad de 2.2 km/s.

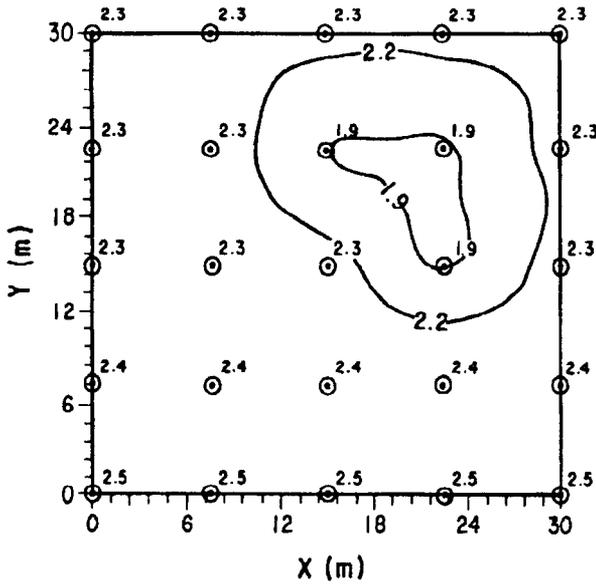


Fig. 4. Modelo que genera datos para el segundo grupo de experimentos (25 parámetros). A una zona de baja velocidad de 1.9 km/s rodeada de un medio de velocidad uniforme de 2.3 km/s, se le agrega un gradiente de velocidad en la dirección  $Oy$  en la parte inferior del modelo.

triángulo. Tomemos, como referencia, al tercer vértice. Derivando parcialmente el tiempo de recorrido según (7) respecto a la velocidad en este vértice, resulta

$$\dot{t}_{\Delta} = - \int_e^s \dot{v} \frac{dl}{v^2} \quad (10)$$

donde el punto sobre una variable indica la derivada respecto a la velocidad del tercer vértice. En la ecuación anterior, se ha despreciado la variación del recorrido del rayo (principio de Fermat).

A partir de (10), se pueden obtener expresiones para el cálculo de las derivadas parciales (Madrid, 1986). El programa de computación debe incluir los posibles cambios de signo en las variables que contienen ángulos. Además, debe cubrir los dos casos en que las trayectorias resultan ser rectas; en particular, cuando  $b = 0$  o  $p' = 0$ . Para el primer caso ( $b = 0$ ), el algoritmo introduce automáticamente una pequeña perturbación en el gradiente. El segundo caso ( $p' = 0$ ) queda resuelto a través de la misma formulación matemática.

## PROBLEMA INVERSO

El modelo directo linealizado para cada iteración se representa por

$$\mathbf{r} = \mathbf{A} \delta \mathbf{x} + \mathbf{e} \quad (11)$$

de donde  $\mathbf{r}$  es el vector de residuales respecto a la solución inicial o previa,  $\mathbf{A}$  es la matriz de derivadas parciales,  $\delta \mathbf{x}$  es el vector de la perturbación de las velocidades en los vértices de cada triángulo y  $\mathbf{e}$  es el vector de errores de observación (en el texto estamos usando letras negrillas mayúsculas para designar matrices y a las negrillas minúsculas, para vectores). La ecuación (11) contiene tres aproximaciones. En primer lugar, el problema original se ha linealizado; en segundo lugar, es una versión algebraizada de un problema inicialmente definido en variables continuas, y, en tercero, cada iteración se realiza utilizando los rayos asociados al resultado de la iteración anterior.

La solución tanto del conjunto de ecuaciones no-lineales (7) (en variables continuas), como de las linealizadas y discretas (11), constituye un problema mal-condicionado, siendo el mal-condicionamiento mayor mientras mayor sea el número de triángulos que se utiliza en la representación discreta del medio. Desde un punto de vista conceptual, esto se debe a que: a) los tiempos de recorrido son medidas globales (integrales) de la estructura local sísmica; b) el muestreo no puede ser completo debido a restricciones en la posición de fuentes y sensores, y c) los recorridos que producen observaciones no cubren adecuadamente (ya que las evitan) las zonas de baja velocidad. Una solución mínimo-cuadrática no-estabilizada del sistema de ecuaciones (11) representa, en general, al campo de velocidad como una función muy oscilante (a la vez que no-realista) de las coordenadas. Estas oscilaciones se asocian, a su vez, a la alta correlación resultante entre los elementos del vector-solución.

Una solución estable de (11) resulta de la aplicación de un criterio mínimo-cuadrático regularizado que minimiza una expresión como

$$\| \mathbf{r}_{i-1} - \mathbf{A}_i \delta \mathbf{x}_i \|_{\mathbf{C}_{yy}}^2 + \alpha \| \mathbf{x}_i - \hat{\mathbf{x}}_{i-1} \|_{\mathbf{C}_{x_0}}^2 \quad (12)$$

donde el índice  $i$  corresponde al número de la iteración;  $\mathbf{C}_{yy}$  es la matriz de covariancias de los errores de observación;  $\mathbf{C}_{x_0}$  es la matriz de covariancias de los errores de la solución previa, pero modificada (ver más abajo) para propósitos de estabilización. Definimos el cuadrado de la norma ponderada de un vector  $\| \mathbf{z} \|_{\mathbf{G}}^2$  como  $\mathbf{z}^T \mathbf{G} \mathbf{z}$ , donde  $\mathbf{z}^T$  es el vector transpuesto de  $\mathbf{z}$  y  $\mathbf{G}$  es una matriz de ponderación, en general, simétrica positiva-definida. El acento circunflejo sobre una incógnita denota estimación. El primer término de (12) representa el grado de ajuste a los datos. La minimización del segundo representa un modo de estabilizar la solución, constrañéndola, en este caso, de tal modo que la diferencia entre soluciones sucesivas resulta ser pequeña. Las matrices de covariancias pueden ser utilizadas para enfatizar ciertas componentes del vector de datos o de la solución previa, ya sea porque estas componentes son más precisas o porque la enfatización permite una estabilización del problema inverso. El parámetro  $\alpha$  pondera globalmente los dos términos de la minimización.

La solución de la ecuación (12) se puede desarrollar en términos de la descomposición en valores singulares (DVS) de la matriz  $A$ ,

$$A = U \Lambda V^T \quad (13)$$

donde la matriz diagonal  $\Lambda$  contiene los valores singulares ordenados de mayor a menor y las matrices  $U$  y  $V$  contienen, como columnas, los correspondientes vectores singulares asociados al espacio de datos y de incógnitas, respectivamente. Utilizando la DVS, la solución regularizada se puede desarrollar del modo siguiente

$$\delta \hat{x}_i = \sum_{j=1}^s (u_j^T r_{i-1}) \frac{\lambda_j}{(\lambda_j^2 + \alpha)} v_j = H r_{i-1} \quad (14)$$

donde  $s$  es el número de valores singulares que se toman en cuenta en la inversión. La matriz  $H$  es la matriz pseudo-inversa resultante. Los vectores  $\{u_j\}$  y  $\{v_j\}$  son los vectores-columnas de las matrices  $U$  y  $V$ , respectivamente;  $\lambda_j$  representa el valor singular correspondiente. El estimador (14) contiene implícitamente las normalizaciones que aparecen en la ecuación (12), en un procedimiento que ya es común en la literatura (Frez, 1986). El uso de la doble estabilización (filtros), a través de variaciones de  $s$  y  $\alpha$ , se justifica ya que el filtro discreto sirve principalmente para analizar espectralmente el problema inverso (ver la sección siguiente) mientras que la mayor flexibilidad del filtro continuo permite optimizar el uso de la información disponible.

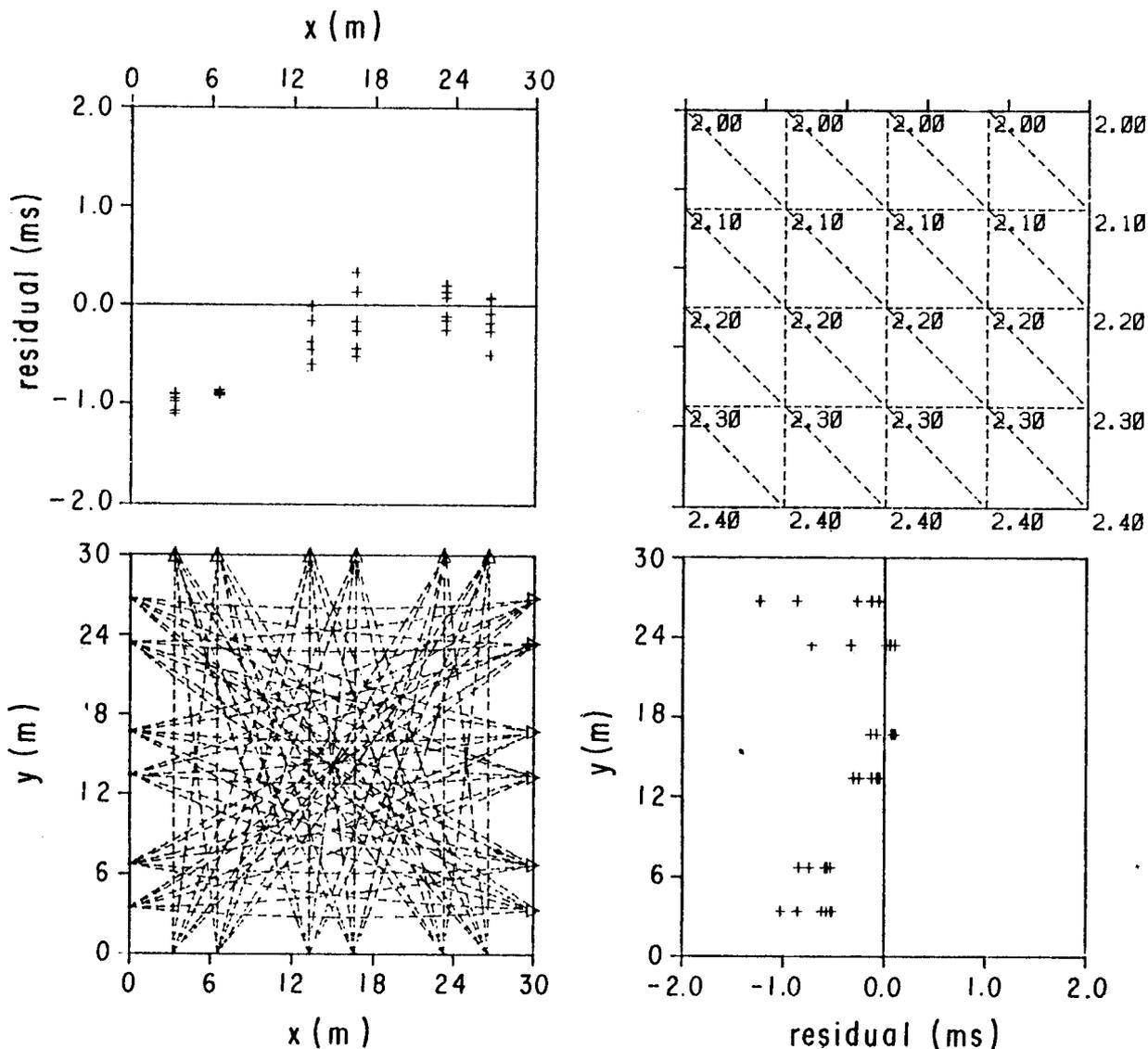


Fig. 5a. Resultados a partir de los datos generados por el modelo representado en la figura 4. En la búsqueda de una solución se discretiza el medio con 25 parámetros. Trayectorias y residuales para un modelo inicial que consiste en un gradiente de velocidad en la dirección  $Oy$ .

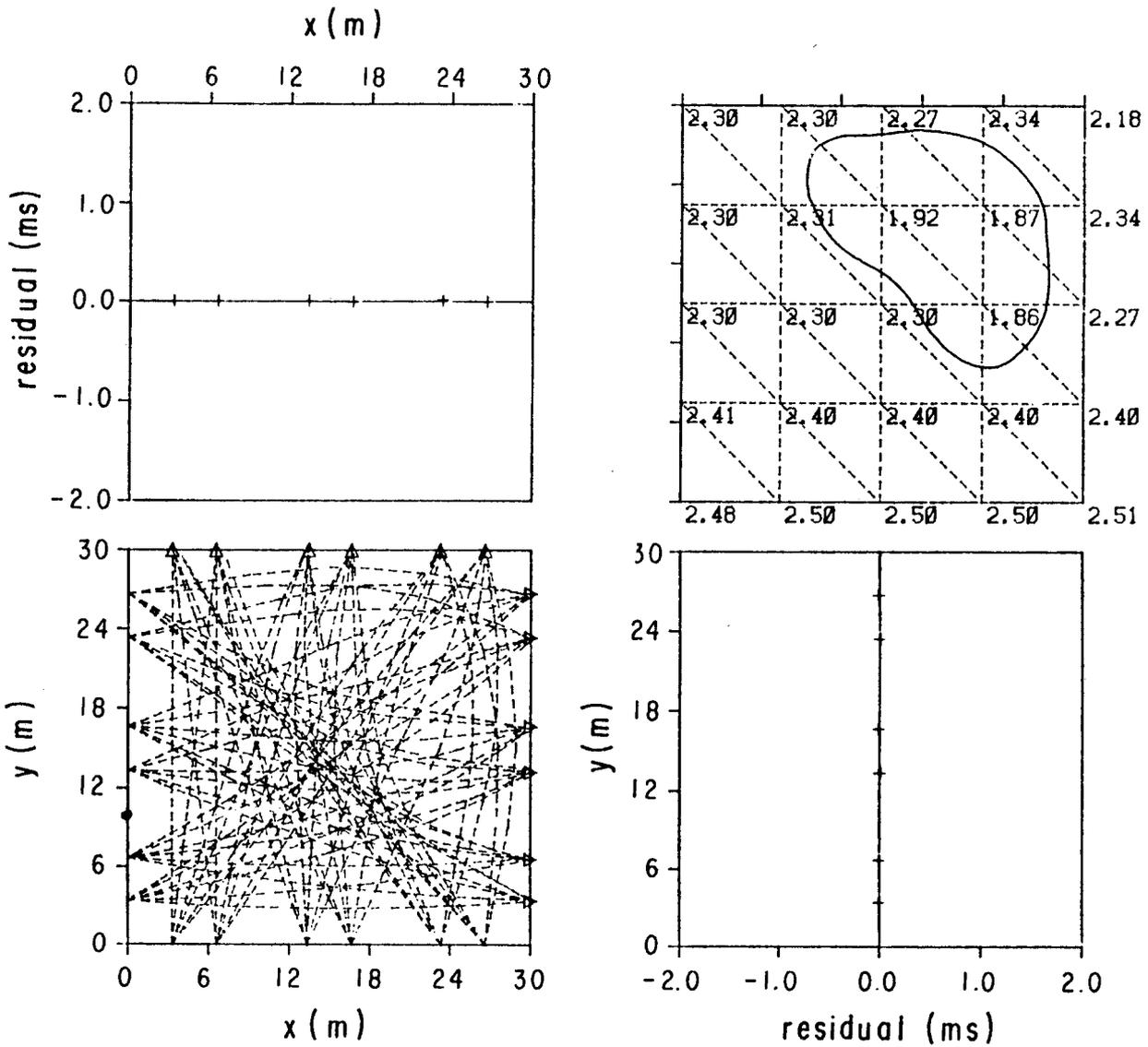


Fig. 5b. La curva de nivel corresponde a una velocidad de 2.2 km/s. En la búsqueda de una solución se discretiza el medio con 25 parámetros. Gráficas correspondientes a la solución estable que se obtiene en tres iteraciones, utilizando un factor de estabilización que filtra el 10% de las componentes de la DVS de la solución mínimo-cuadrática. La curva de nivel corresponde a una velocidad de 2.2 km/s.

La variación del parámetro de estabilización global  $\alpha$  y de los puntuales (los elementos de las matrices de covariancias) permite obtener muchas "soluciones" del problema inverso. Para seleccionar, se estudia el comportamiento de estas soluciones con el propósito de obtener, a la vez que una solución estable y con sentido físico, una que satisfaga los datos. Esto último se mide a través de la conducta aleatoria de los residuales que debe estar acorde con el modelo del ruido observacional. El uso de pruebas estadísticas produce formas más cuantitativas de este análisis de residuales.

Creemos importante desarrollar algunos conceptos básicos relativos a la evaluación de soluciones. En el caso inestable, desempeña un papel importante el concepto de resolución del estimador (lineal), que se define por

$$\mathbf{R} = \mathbf{H} \mathbf{A} \quad (15)$$

de modo que, usando (11) y (14),

$$\delta \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{R} \delta \mathbf{x}^* + \mathbf{H} \mathbf{e} \quad (16)$$

donde  $\delta \mathbf{x}^*$  es el valor "exacto" de la incógnita. Esta expresión demuestra que la bondad de la estimación depende de cuánto se acerca la resolución al operador identidad (primer término) y de cómo se propaga el error de las observaciones a través del operador pseudo-inverso  $\mathbf{H}$  (segundo término). En problemas sobredeterminados y estables, se prefiere generalmente utilizar estimadores no recursivos e insesgados para los cuales  $\mathbf{R} = \mathbf{I}$ . Gracias a esta propiedad, se puede calcular la matriz de covariancias del error de la solución a través de  $\mathbf{H} \mathbf{C}_{yy} \mathbf{H}^T$ .

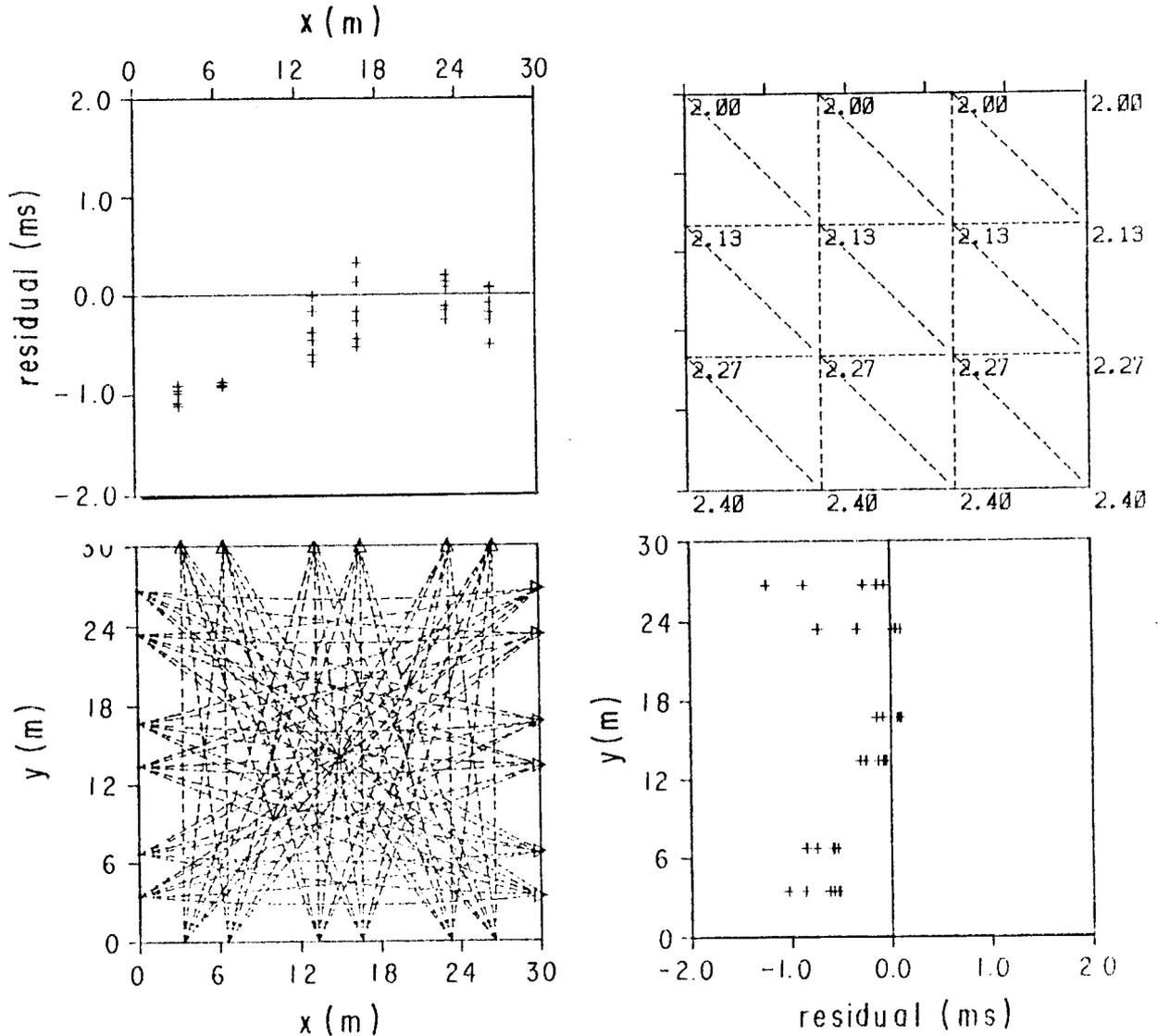


Fig. 6a. Resultados a partir de los datos generados por el modelo representado en la figura 4. En la búsqueda de una solución, se discretiza el medio con 16 parámetros. Trayectorias y residuales para el mismo modelo inicial que el representado en la figura 5a.

En nuestro caso, podemos intentar derivar a partir de (16) una expresión para la matriz de covariancia del error de la solución. Al hacerlo aparecen términos que representan la correlación entre los errores de la información nueva y de la antigua (es decir, de la información que produjo la solución inicial). Además, resultan términos que contienen  $\delta x^*$ , que obviamente no podemos conocer. Todo esto hace lógicamente imposible un cálculo estricto de la matriz de covariancia del error de la solución. Sólo una solución recursiva no estabilizada, es decir con  $\alpha = 1$ , que postula un conocimiento exacto de las matrices  $C_{yy}$  y  $C_{x_0}$ , además de una ausencia de correlación entre la información nueva y antigua, permite obtener una expresión que actualiza la matriz de covariancia del error de la solución, como es

$$C_{x_i} = (H A - I) C_{x_{i-1}} (H A - I)^T + H C_{yy} H^T \quad (17)$$

la cual puede usarse aproximadamente en el caso de una estabilización pequeña. Esta no es la situación general en geofísica. Como mostraremos en las secciones siguientes, típicamente debemos filtrar alrededor del 80% de las componentes de la DVS de la solución.

La teoría anterior es válida sólo para el caso discreto. Esto es obvio, ya que en el caso continuo debemos tener una cantidad infinita de información para estimar una función, a menos que se conozca el grado de "suavidad" de la solución. Como éste no es el caso, se utiliza comúnmente una táctica basada en tres acciones formalmente independientes en las que a) se suaviza el vector de solución, lo que representa obtener un promedio corrido (filtro) de la solución inestable; b) se fija el valor de componentes de la solución inicial cuando no hay la sensibilidad correspondiente, y c) se

fija el valor de componentes de la solución inicial para romper la correlación entre elementos no-sucesivos del vector de incógnitas. La primera acción equivale a buscar una longitud de resolución adecuada para realizar el promedio corrido. Las tres acciones pueden considerarse como un proceso empírico de búsqueda del grado de suavización que, con la mayor simplicidad posible, satisfaga los datos y los requerimientos del modelo matemático. Si la función-incógnita es realmente suave, la estabilización nos puede aproximar a la solución verdadera a través de un estimador insesgado. La dificultad, por supuesto, es que nosotros no conocemos el grado de suavización de nuestra función incógnita por lo que en la práctica hacemos un número alto

de experimentos numéricos cambiando los parámetros de regularización y observando la conducta de la función solución y del vector de residuales.

Los criterios para evaluar los residuales son, primero, la falta de conductas sistemáticas y, segundo, el que la amplitud de sus oscilaciones debe alcanzar un nivel acorde al que tiene el ruido. Es posible que nuestra apreciación del nivel del ruido observacional esté equivocada. En este caso, en un proceso empírico de prueba y error, nuestra estimación previa del nivel de error podrá mejorarse agregando más incógnitas al proceso de inversión.

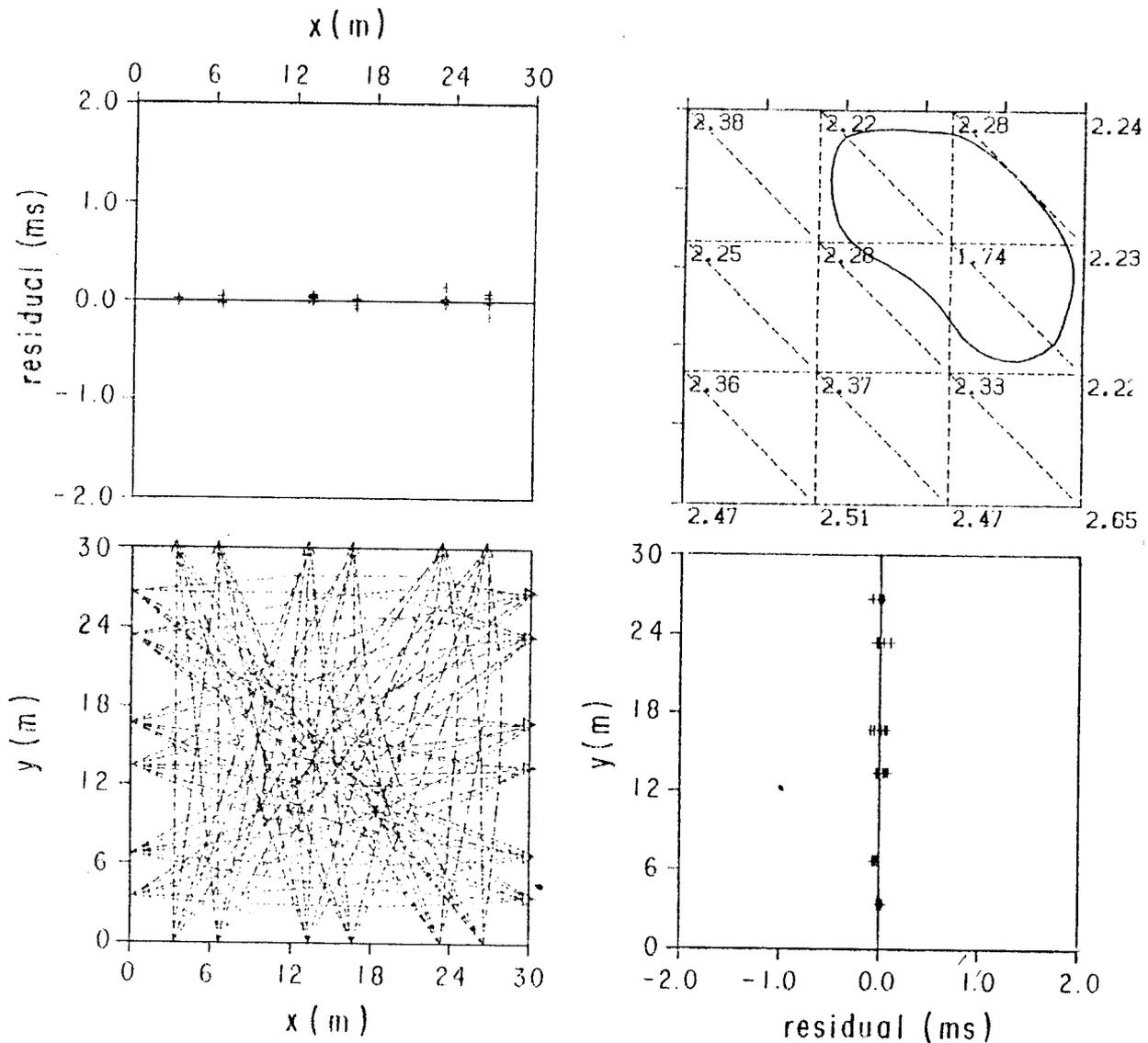


Fig. 6b. Gráficas correspondientes a una solución estable que se obtiene después de tres iteraciones. En la estabilización, se filtra el 60% de las componentes de la DVS de la solución mínimo-cuadrática. La curva de nivel corresponde a una velocidad de 2.2 km/s.

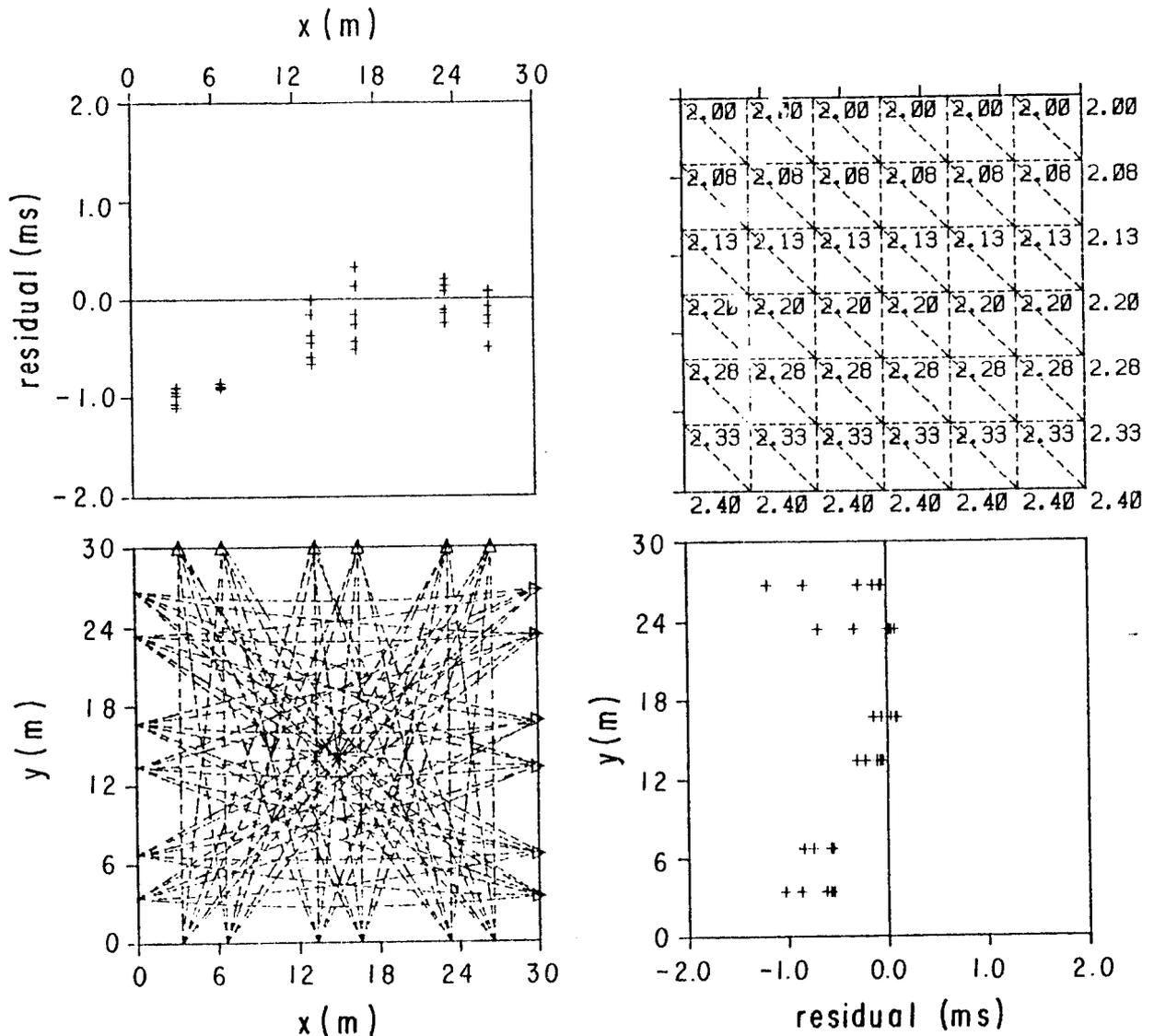


Fig. 7a. Resultados a partir de los datos generados por el modelo representado en la figura 4. La discretización tiene 49 parámetros. Trayectorias y residuales para un modelo inicial que corresponde al representado en las figuras 5a y 6a.

El procedimiento parte con un modelo inicial. Este se obtiene ya sea usando un modelo previo, producto de información independiente, o un modelo simple que satisfaga globalmente los datos. Un criterio de simplicidad para este último efecto consiste en construir, como solución inicial, una estructura homogénea tal que los residuales oscilen dando aproximadamente un promedio nulo. Esto se puede hacer con facilidad en nuestro procedimiento a través de ensayos y en forma interactiva. Al conseguir esto, se gasta la información contenida en las primeras componentes de la DVS del vector de datos (o sea, de sus "frecuencias" más bajas). Debido a la posible existencia de mínimos locales de la función criterio (12), la solución depende en general de la solución inicial, por lo que es conveniente variar ésta. Por lo demás, la solución también depende de la misma función criterio, es decir del tipo de norma y de función de

regularización que pueden ser distintos a las usadas en (12).

Por todo lo dicho en esta sección y dada la cantidad limitada de experimentos numéricos que podemos realizar, se debe enfatizar que es difícil eliminar un factor subjetivo en la selección de una solución "preferida" en el caso inestable.

### IMPLEMENTACION Y VALIDACION DEL PROCEDIMIENTO

El procedimiento total se ha implementado a través de una serie de pasos interactivos que consisten en la solución del problema directo, el cálculo de las derivadas parciales, la solución del problema inverso y la evaluación de la solución.

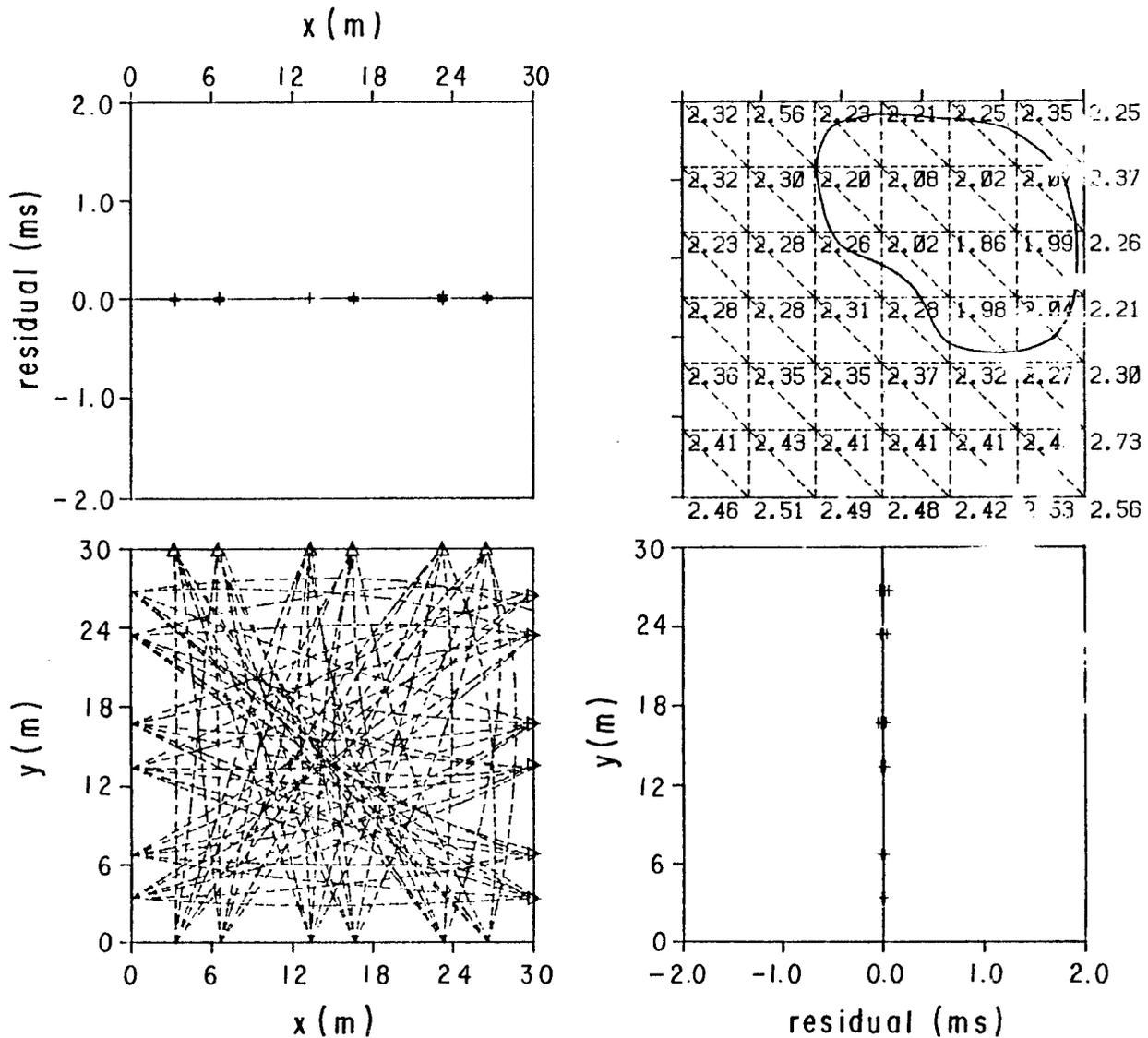


Fig. 7b. La discretización tiene 49 parámetros. Gráficas correspondientes a una solución estable obtenida en tres iteraciones y filtrando entre el 40% y el 50% de los componentes de la DVS de la solución mínimo-cuadrática. La curva de nivel corresponde a una velocidad de 2.2 km/seg.

Los cálculos se realizan con variables reales de doble precisión, lo que en una PRIME-750 significa trece cifras significativas; los resultados de cálculos intermedios se almacenan con su precisión numérica total. Las matrices se manejan como vectores en la codificación; con ello se optimiza el uso del tiempo de computación en las lecturas, escrituras y cálculos correspondientes. El paquete de subrutinas para el problema directo fue escrito por Madrid *et al.* (1983) y Madrid (1986); el paquete para el problema inverso, por Frez (1986). La DVS se obtiene resolviendo el problema de valores característicos para las matrices simétricas  $A^T A$  ó  $AA^T$  (donde la matriz de derivadas parciales  $A$  está implícitamente normalizada) dependiendo, respectivamente, de que haya más datos que incógnitas o viceversa. La pérdi-

da en precisión por no trabajar directamente con la matriz  $A$  se compensa con la ganancia en eficiencia al usar algoritmos muy probados en la literatura (Wilkinson y Reinsch, 1971). Esto es particularmente cierto en nuestro caso en que se necesita, como veremos, sólo unos pocos elementos de la DVS. La precisión relativa para la convergencia de los cálculos de la DVS es de una unidad en  $10^9$ .

En nuestro procedimiento, primero se aplica la DVS, ordenándose los elementos de la descomposición de  $A$  de acuerdo a la magnitud, de mayor a menor, de sus valores singulares. Luego, se realiza el análisis espectral del problema. Este consiste en el estudio de la conducta, en fun-

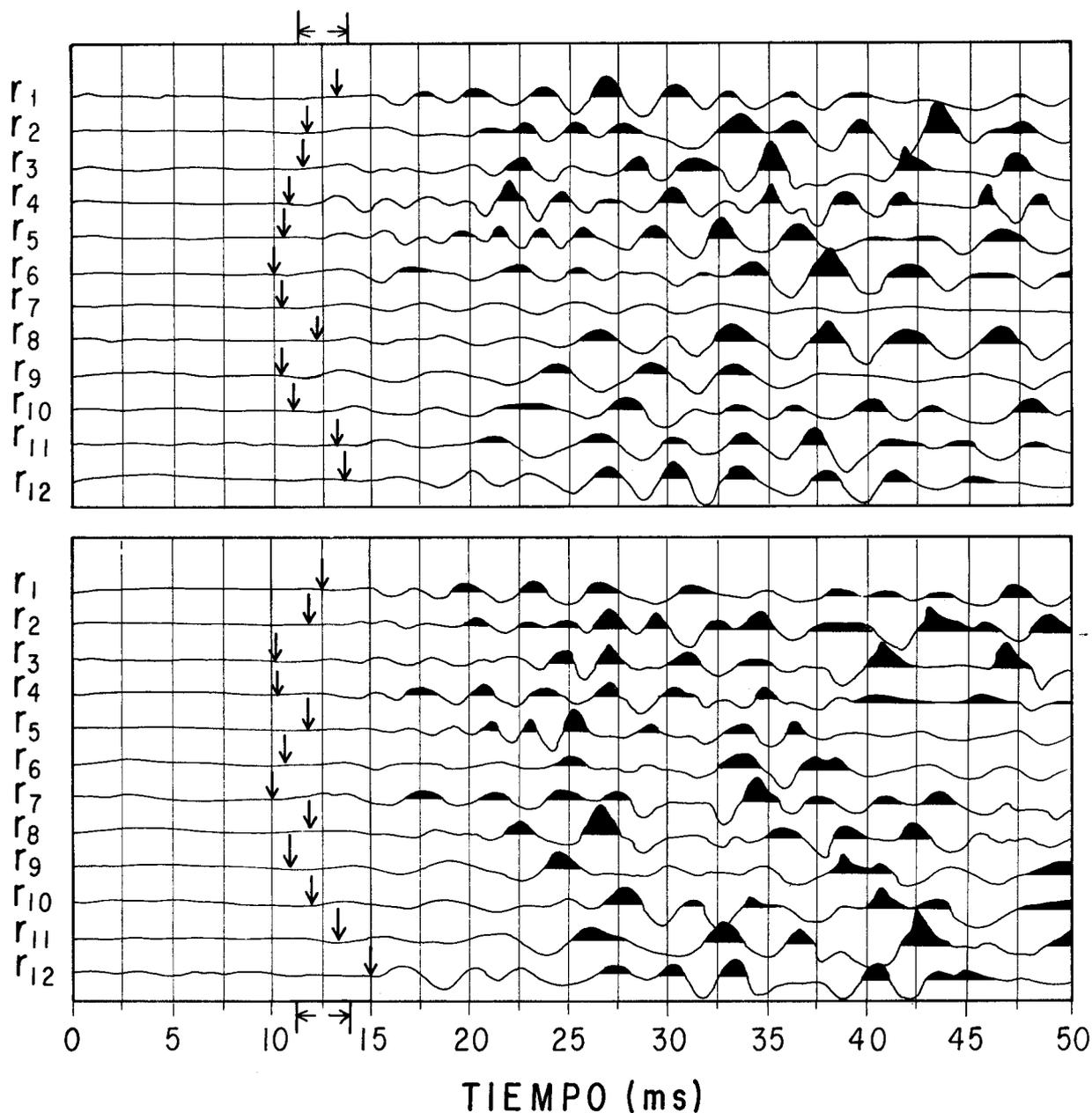


Fig. 8a. Ejemplo de sismogramas observados típicos. Sismogramas correspondientes a dos detonaciones que fueron registradas en los geófonos  $r_1$  al  $r_{12}$ . La estimación de los primeros arribos, señalados con una flecha, fue obtenida visualmente. Las flechas horizontales indican la incertidumbre, en promedio, de la determinación de los tiempos de arribo.

ción del índice de orden  $i$  de los valores singulares  $\{\lambda_i\}$ , del valor absoluto de la proyección, en el espacio barrido por las columnas de la matriz  $U$ , del vector de datos  $\{ |u_i^T r| \}$ , y del valor absoluto de la proyección, en el espacio barrido por las columnas de la matriz  $V$ , del vector solución  $\{ |v_i^T \delta x| \}$ . Debido a la normalización de la matriz  $A$ , todo valor de  $\{ |u_i^T r| \}$  menor que 1.0 representa un dato en que predomina el ruido y puede, en principio, ser desechado. Los

conjuntos  $\{ u_i^T r \}$  o  $\{ v_i^T \delta x \}$  son los coeficientes de la DVS, tomada ésta como un desarrollo de tipo Fourier, del vector de datos y del vector de soluciones, respectivamente. Por lo tanto, el decrecimiento de estos coeficientes indica la convergencia de las series correspondientes mientras que una tendencia constante o creciente señala inestabilidad. Lo anterior se puede justificar matemáticamente tomando en cuenta el carácter continuo y finito de las funciones a las cuales se aplican los desarrollos de tipo Fourier.

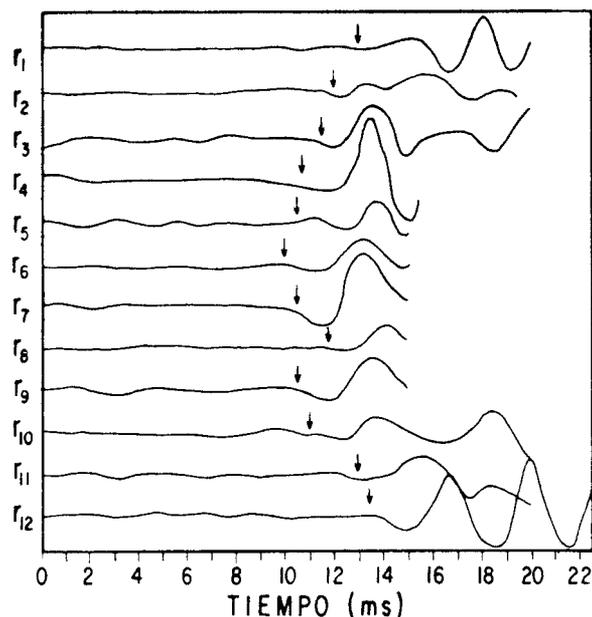


Fig. 8b. Amplificación vertical de los sismogramas correspondientes a la primera detonación y que son mostrados en la figura 8a. La amplificación permite una mejor determinación del tiempo de arribo.

El programa tiene forma modular, en el sentido de que las gráficas correspondientes a una iteración aparecen automáticamente en la pantalla de una terminal de alta resolución. Así, en un procedimiento interactivo, es posible modificar el modelo inicial, el factor global de estabilización y la matriz de covariancias de los errores de la solución inicial, para luego observar los resultados correspondientes.

La validación del procedimiento consta de dos clases de experimentos numéricos que simulan las condiciones del caso de aplicación que se presenta en la sección siguiente. En estos experimentos numéricos se considera un área de forma cuadrada que es discretizada con una malla de celdas triangulares (de áreas iguales) donde las fuentes y receptores están en el perímetro del cuadrado. Las variables utilizadas en los experimentos numéricos son el número de nodos de la malla (o sea el número de incógnitas), el contraste de velocidades que definen las zonas de baja velocidad y el nivel de error de los datos.

### Primer grupo de experimentos

El propósito aquí es investigar el impacto del ruido observacional y de la solución inicial en las estimaciones. Para ello, utilizamos diferentes niveles de error. El modelo que genera los datos (figura 1) consiste en una distribución homogénea de velocidad (2.3 km/s) que rodea un cuerpo de forma elipsoidal. Este cuerpo tiene una velocidad de 2.2 km/s en su parte más externa, valor que disminuye a 1.9 km/s en la zona central. A esta distribución, se le agrega, en su parte inferior, un rectángulo con un gradiente de velocidad en la dirección  $Oy$ . Este tipo de estructura es relativa-

mente simple, teniendo once grados de libertad que se miden por el número de parámetros independientes que aparecen en su representación analítica.

Doce fuentes y doce receptores son colocados en el perímetro del cuadrado en la disposición que muestra la figura 2. Se generan trayectorias sólo entre las fuentes y sensores que están en paredes opuestas del cuadrado. De este modo resultan 72 trayectorias que muestrean el interior del cuadrado. El vector de datos se contamina con ruido gaussiano de promedio nulo y una desviación estándar que define niveles de error del 1%, 5% y 10% respecto al promedio de los tiempos de recorrido. En términos no-relativos, esto significa errores de 0.14, 0.7 y 1.4 ms. Utilizamos en la inversión un modelo inicial que tiene una distribución casi homogénea de velocidades con una velocidad de 2.0 km/s en la parte superior del cuadrado y que aumenta a 2.05 km/s en su parte inferior. La discretización queda determinada por una malla con 49 nodos.

Si los datos no tienen ningún ruido (salvo el computacional), una solución estable se acerca a la exacta en tres iteraciones, usando un factor de estabilización que filtra entre el 40% y el 50% de las componentes de la DVS de la solución mínimo-cuadrática. Cuando el error es 0.14 ms (figura 2a), el proceso de regularización produce una solución cercana a la solución exacta en tres iteraciones, con el mismo factor de estabilización que para el caso en que no se agregó ruido (figura 2b). Aumentando el ruido a 0.7 ms en los datos sintéticos (figura 2c), la solución aparece distorsionada, pero la posición y forma de la zona de baja velocidad, además del contraste de velocidad correspondiente, se recuperan satisfactoriamente; para obtener esta solución, hemos necesitado tres iteraciones, con un factor  $\alpha$  que filtra del 70% al 90% de las componentes de la DVS de la solución mínimo-cuadrática (figura 2d). Al utilizarse un error de 1.4 ms la estabilización que se requiere para obtener una solución estable es tal que las soluciones resultantes coinciden básicamente con el modelo inicial. En otras palabras, en este caso el modelo "verdadero" no es recuperable.

El siguiente experimento mide la importancia de la selección del modelo inicial en la inversión. Un modelo inicial resulta de ajustar a los datos, por prueba y error, una estructura homogénea de tal forma que los residuales, con un promedio muy pequeño, oscilan alrededor del nivel nulo. El modelo inicial y los residuales correspondientes pueden verse en la figura 3a. Los datos se generan con un ruido gaussiano con promedio cero y desviación estándar de 0.7 ms. Una solución estable aparece graficada en la figura 3b, donde podemos observar que la forma, la posición y el contraste de la zona de baja velocidad quedan determinadas satisfactoriamente. El factor de estabilización que se usa filtra entre el 50% y el 60% de las componentes de la DVS. Se observa que esta solución está más cercana al modelo "verdadero" que la mostrada en la figura 2d, cuyo nivel de ruido es equivalente. Cuando el ruido de los datos corresponden a una desviación estándar de 1.4 ms, la zona de baja velocidad aparece deformada en la estimación. Además, re-

sultan otras zonas de baja velocidad de carácter espurio que no se pueden eliminar con los filtros de estabilización.

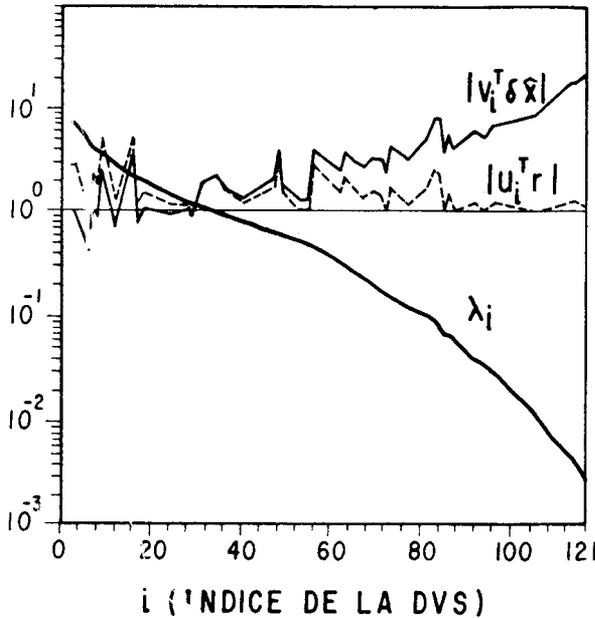


Fig. 9. Análisis espectral (primera iteración) del problema de aplicación. Se dibujan, en función del índice que ordena a los elementos de la DVS,  $|u_i^T r|$ , el valor absoluto de la proyección del vector de datos sobre los vectores-columnas de la matriz  $U$ ;  $|v_i^T \delta x|$ , el valor absoluto de la proyección del vector-solución sobre los vectores columnas de la matriz  $V$ , y a los valores singulares  $\lambda_i$ . Se incluyen sólo aquellas componentes significativas, para las que  $|u_i^T r| > 1.0$ . El modelo inicial corresponde a una distribución casi homogénea con valores de 2.5 km/s obtenida por prueba y error, de tal manera que ajustara globalmente a los datos. Esto hace que la información residual asociada a las primeras componentes de la DVS sea pequeña.

### Segundo grupo de experimentos

En estas pruebas, se investiga la influencia en la solución del número y la distribución de las celdas. El modelo que genera los datos de entrada (figura 4) contiene una zona aproximadamente elipsoidal de baja velocidad (1.9 km/s), rodeada por un medio de velocidad uniforme (2.3 km/s) y un gradiente de velocidad en la parte inferior del modelo. La geometría resultante es, así, semejante a la usada en los experimentos anteriores. Esta distribución de velocidad es descrita en los cálculos directos por una malla con 25 nodos. El modelo inicial tiene un gradiente constante de velocidades; este gradiente tiene la dirección  $Oy$  con un rango de velocidades que va de 2.0 a 2.4 km/s (figura 5a). En la inversión, la descripción de la distribución de velocidad tiene 16, 25 y 49 parámetros. En estos experimentos se ignora el efecto del ruido observacional. Los resultados de las tres discretizaciones ensayadas señalan que la solución

"verdadera" puede recuperarse cuando se discretiza con 25 parámetros (la malla tiene un paso de 7.5 m); los resultados se ilustran en la figura 5b.

Si el modelo se discretiza con 16 parámetros y el paso de la malla aumenta a 10 m (figura 6a), es aún posible obtener una sugerencia de la existencia de la zona de baja velocidad (figura 6b) y del gradiente que contiene el modelo "verdadero".

Si la discretización del modelo tiene 49 nodos (figura 7a), las estimaciones de la posición, la forma y el contraste de la zona de baja velocidad resultan satisfactorias (figura 7b). Una inspección de las figuras 5b, 6b y 7b muestra, además, que la estimación del resto del campo de velocidades es también adecuada con la excepción de puntos ubicados en el perímetro, donde los errores tienden a ser altos. Si los valores de  $\alpha$  filtran el 90% de las componentes en la primera iteración, en la siguiente se cambia el valor de  $\alpha$  para incluir el 50% de las componentes de la solución sin que ello modifique la estabilidad del resultado.

Los resultados de los experimentos descritos hasta aquí comprueban, en primer lugar, la corrección del álgebra de los algoritmos y de la codificación utilizada en el procedimiento. En segundo lugar, demuestran que modelos relativamente simples pueden ser recuperados satisfactoriamente suponiendo niveles de error semejantes a los que se consiguen con observaciones típicas de campo. Esto se puede discutir ya que hemos modelado los errores como gaussianos, un modelo de error que no es el más apropiado. El uso de tiempos de arribo de buena calidad hace más realista esta hipótesis. En otro aspecto, hemos comprobado que la redundancia implícita en la existencia de un alto número de incógnitas (a través del número de nodos de la malla de discretización) se elimina gracias al filtrado de estabilización. La mencionada redundancia recarga el uso de almacenamiento en la computadora pero, dadas las dimensiones de nuestro problema (reducidas, por el uso de la aproximación circular y el algoritmo utilizado para el cálculo de la DVS), ello no es una dificultad seria en nuestra aplicación del procedimiento. Finalmente, los resultados de los experimentos numéricos muestran que es posible estimar zonas de baja velocidad si el nivel de ruido no es mayor de [1.0-1.5] ms para las condiciones que definen los experimentos numéricos descritos en esta sección.

### APLICACION DEL PROCEDIMIENTO

El procedimiento se aplica a observaciones tomadas en terrenos de la Planta Termoeléctrica Mérida II, Yucatán (México). Las mediciones (Aranda et al., 1985) fueron llevadas a cabo por la Comisión Federal de Electricidad (CFE). El objetivo del estudio era localizar zonas someras (10-20 m de profundidad) de baja velocidad que pueden asociarse ya sea con oquedades en la roca calcítica o con lentes de arena. Estas zonas débiles pueden producir daños en la cimentación de las construcciones de la planta.

Tabla 1. Tiempos de arribo leídos de los sismogramas analógicos.

Tabla 1a. Tiempos de arribo (en ms) registrados en los geófonos  $r_1$  al  $r_{12}$ . Las fuentes y los sensores estaban situados en los lados opuestos del cuadrado (área estudiada), a lo largo del eje  $Ox$ .

	$r_1$	$r_2$	$r_3$	$r_4$	$r_5$	$r_6$	$r_7$	$r_8$	$r_9$	$r_{10}$	$r_{11}$	$r_{12}$
$f_1$	11.0	09.9	10.0	11.5	10.5	13.0	13.5	14.0	14.0	14.4	14.6	15.5
$f_2$	13.0	12.0	11.5	12.0	11.5	12.0	14.0	14.4	14.5	14.6	15.0	17.0
$f_3$	12.7	12.0	11.5	12.0	12.0	15.5	14.0	14.0	14.1	13.9	14.0	15.5
$f_4$	13.0	10.3	09.6	11.0	10.5	12.5	11.7	10.6	11.5	11.9	11.6	13.5
$f_5$	11.6	10.4	10.5	10.1	10.4	13.0	11.5	12.0	12.0	11.7	11.5	13.0
$f_6$	10.5	10.0	10.0	11.0	10.0	10.0	10.7	10.5	11.5	10.5	11.5	12.0
$f_7$	12.0	10.5	10.6	10.9	10.0	11.2	11.0	11.3	11.0	11.5	11.9	12.5
$f_8$	11.5	10.5	10.5	10.0	10.0	10.5	10.5	10.5	10.5	10.0	11.5	12.0
$f_9$	12.0	11.2	11.0	10.6	10.0	11.4	11.0	10.5	11.0	10.5	11.5	12.5
$f_{10}$	19.5	16.1	17.0	17.0	16.5	17.4	12.6	12.5	13.9	13.7	14.5	15.1
$f_{11}$	16.0	15.0	15.0	14.5	13.5	13.7	13.0	12.2	12.5	13.5	14.3	14.5
$f_{12}$	16.5	16.0	15.6	15.0	13.5	16.0	15.0	14.0	13.5	13.5	12.5	14.0
$f_{13}$	16.5	14.5	14.5	14.5	14.0	14.5	14.0	14.0	14.3	13.0	14.0	14.5
$f_{14}$	13.4	14.5	13.8	12.4	11.8	14.0	12.0	12.5	13.0	10.9	11.7	12.5
$f_{15}$	17.7	16.5	15.5	16.0	16.5	16.0	15.0	13.5	13.4	13.0	13.0	14.5

Tabla 1b. Tiempos de arribo (en ms) registrados en los geófonos  $r_1$  al  $r_{12}$ . Este grupo de datos corresponde al caso en que las fuentes y los sensores se localizan en los lados opuestos del cuadrado, a lo largo del eje  $Oy$ .

	$r_1$	$r_2$	$r_3$	$r_4$	$r_5$	$r_6$	$r_7$	$r_8$	$r_9$	$r_{10}$	$r_{11}$	$r_{12}$
$f_1$	12.0	14.0	12.5	12.0	12.0	13.0	12.0	15.0	13.5	15.0	17.0	21.0
$f_2$	11.5	11.0	10.5	10.0	09.6	10.3	10.5	12.0	12.0	12.5	13.5	16.5
$f_3$	11.5	10.2	10.5	10.0	09.5	10.5	10.0	11.5	10.5	11.0	13.0	15.0
$f_4$	12.0	10.6	10.5	10.0	10.5	10.2	10.6	12.0	10.6	11.2	13.4	14.0
$f_5$	12.5	12.0	10.5	10.5	11.5	10.3	10.0	11.8	10.7	12.1	13.1	14.5
$f_6$	13.0	12.0	11.5	10.7	10.5	10.0	10.5	11.8	10.5	11.0	13.0	13.5
$f_7$	14.6	14.5	13.0	12.5	12.7	12.2	11.6	12.6	13.0	13.0	13.5	14.5
$f_8$	16.5	14.5	13.5	13.0	15.0	12.9	12.6	13.5	12.5	13.0	14.0	15.5
$f_9$	16.6	15.0	14.0	13.6	13.5	12.5	12.0	13.5	12.5	12.7	14.5	14.6
$f_{10}$	19.0	17.0	14.5	14.5	13.5	13.1	13.0	14.0	13.0	13.5	14.0	14.8
$f_{11}$	18.5	14.6	13.6	14.0	13.0	13.0	12.0	12.2	11.5	12.5	13.7	13.2
$f_{12}$	19.0	15.0	15.0	14.5	14.0	13.5	12.5	12.5	12.0	12.6	13.0	13.5
$f_{13}$	20.5	16.1	15.3	15.0	14.5	13.3	13.1	12.8	12.5	13.0	13.7	14.5
$f_{14}$	18.0	14.5	13.5	14.0	12.5	12.2	11.5	12.0	10.5	11.5	12.5	12.4

Un sondeo típico consta de un cuadrado de 30 m por lado, que se explora por medio de un arreglo de 15 fuentes y 12 receptores ubicados en el perímetro del cuadrado. En las distribuciones usadas, las fuentes y receptores están en los lados opuestos del cuadrado, ordenándose en la misma forma que en los experimentos numéricos (figura 2). Cada explosión se registra en todos los receptores, los cuales son del

tipo Mark con una frecuencia de resonancia de 28 Hz. Los registros son analógicos; ejemplos de ellos aparecen en la figura 8. El tiempo de los primeros arribos se determinó visualmente en los sismogramas. En la estimación del error en los tiempos así estimados, se toma en cuenta el error en el cronometraje de la explosión y la calidad del arribo en el sismograma. En promedio, el error que toma en

cuenta ambos efectos se estima en 1.5 ms. Con un tiempo de arribo promedio cercano a los 15 ms (ver también Tabla 1), resulta un error relativo aproximado al 10%. De acuerdo con lo encontrado en los experimentos numéricos de la sección anterior, deberemos incluir una fuerte estabilización en la inversión.

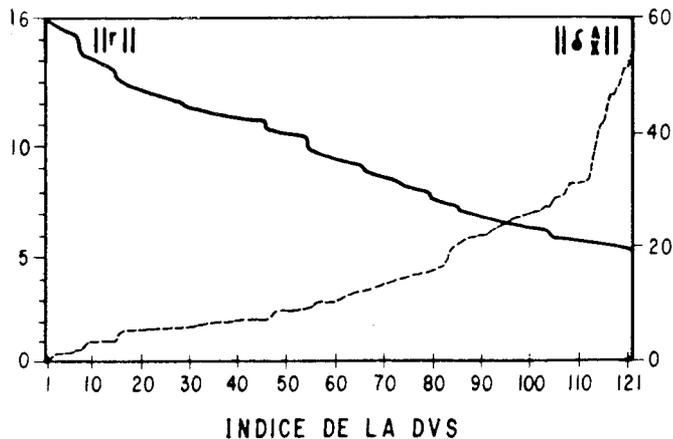


Fig. 10. Norma de la perturbación del vector-solución,  $\|\delta\hat{x}\|$ , y norma del vector de residuales  $\|r\|$ , en función del índice de la DVS para el caso de aplicación (primera iteración). Se usa el mismo modelo inicial que en la figura 9.

Es importante determinar la frecuencia predominante del primer arribo con lo que se obtiene la longitud de onda característica de la observación. Con esta información, es fácil discretizar adecuadamente el área de estudio ya que dicha longitud característica nos indica la longitud mínima de las heterogeneidades que pueden ser reconocidas por la señal sísmica. Las frecuencias predominantes en la señal están entre los 400 y 500 Hz lo que, para velocidades del orden de 2.5 km/s, dan una longitud de onda de 5 a 6 m.

La solución inicial en el proceso de inversión se forma ajustando, por prueba y error, un modelo homogéneo a los datos. Esta selección del modelo inicial es la más simple que podemos hacer, ya que no contamos con un conocimiento previo de las velocidades en el área de estudio, y es la que puede darnos un mejor resultado de acuerdo a los experimentos numéricos de la sección anterior. Una velocidad media de 2.5 km/s resultó ser, en el sentido anotado, la más adecuada.

A continuación, se dan detalles de un caso típico. La sección correspondiente fue discretizada como una malla de 121 nodos. Los tiempos de arribo, leídos de los sismogramas analógicos, aparecen en la Tabla 1. La figura 9 muestra los valores singulares  $\lambda_i$ , el valor absoluto de las proyecciones sobre los vectores singulares correspondiente del vector de datos  $\{u_i^T r\}$  y del vector de solución  $\{v_i^T \delta x\}$  en función del índice de la descomposición espectral. Los resultados indican una rápida divergencia en la descomposi-

ción espectral correspondiente. Los picos que rebasan el nivel de ruido corresponden a componentes que contribuyen significativamente a la solución, si es que el nivel de ruido está bien estimado. En la figura 9 se han eliminado aquellas componentes en que  $|u_i^T r|$  y  $|v_i^T \delta x| < 1.0$ . Puede observarse que la contribución de la primera componente es pobre debido a que el modelo inicial utilizado es un modelo homogéneo que se ajustó a los datos produciendo, por lo tanto, un gasto de la información que contiene esta componente. La figura 10 ilustra la conducta de las normas de los vectores solución y de residuales, ambos en función del índice de la DVS, con  $\alpha = 0$ . Más allá de la vigésima componente singular, el desarrollo de ambas funciones es claramente divergente. Diferentes valores de  $\alpha$  fueron probados hasta conseguir una solución estable que, a la vez, presentara un máximo mejoramiento de los residuales. El factor  $\alpha$  elegido es del orden del valor del segundo valor singular. Este factor se aplica en las dos o tres sucesivas iteraciones en las que se obtiene convergencia (figura 11). La solución óptima que se obtiene de este modo se presenta en la figura 12a.

En varios experimentos, se probaron mallas de discretización de diferente número de nodos (121, 49, 25 y 16). Esto se hizo con el objeto de estudiar la resolución de las heterogeneidades que aparecen en la estimación y eliminar las espurias. En las figuras 12b, 12c y 12d se muestran las soluciones discretizadas a través de 49, 25 y 16 parámetros, respectivamente. Las diferentes soluciones provienen del uso de factores de estabilización que empiezan a filtrar a partir del segundo valor singular. Nuevamente, dos iteraciones han sido suficientes para encontrar convergencia.

Los residuales lineales y no-lineales de la solución inicial aparecen en las figuras 13a y 13b. Debe recordarse que la solución inicial se forma ajustando los datos, por prueba y error, a un modelo homogéneo. También se dibujan los residuales correspondientes a los modelos estimados para 121, 49 y 25 parámetros (figuras 13c, 13d y 13e). En las gráficas, los residuales se pueden separar en dos grupos: el primero corresponde a los geófonos situados a lo largo del eje  $Ox$  (observación 1 a 180, 12 geófonos y 15 fuentes); el segundo corresponde a los geófonos sobre el eje  $Oy$  (observación 181 a 348, 12 geófonos y 14 fuentes). Algunos residuales iniciales altos persisten en los diferentes modelos obtenidos. Esto indica errores sistemáticos, ya sea en los datos o en la estimación. Por otro lado, se observa la persistencia de tendencias sistemáticas entre grupos de observaciones contiguas, lo que más bien indica sesgo en las estimaciones; por ejemplo, debido a alguna característica de pequeña escala cercana a la posición de las fuentes respectivas. Esto puede explicar la tendencia negativa entre los residuales 60 al 108 (primer grupo) y 190 al 258 (segundo grupo). La persistencia de los altos residuales positivos entre las observaciones 108 a 116 se deben muy probablemente a deficiencias en los datos. Por otro lado, el primer sensor del segundo grupo de observaciones tiene asociados residuales positivos altos; es difícil justificar una zona de baja velocidad de dimensiones tan reducidas que explique esta situación, de tal modo que concluimos que debe haber un

error sistemático en esos tiempos. Además, hacemos notar que un primer arribo con muy pequeña amplitud, debido a una alta atenuación generalmente asociada con una baja velocidad, puede producir errores sistemáticos (tiempos mayores) en la determinación de tiempos de arribo (figura 8).

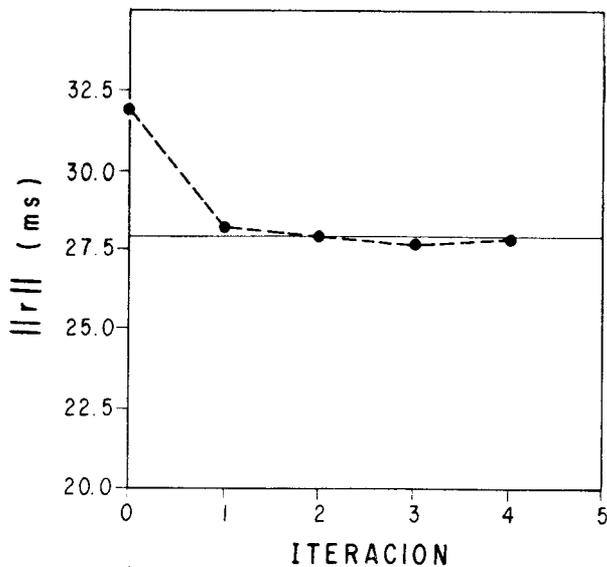


Fig. 11. Norma del vector de residuales  $\|r\|$  en función del índice de la iteración para el ejercicio de aplicación. La línea horizontal corresponde a  $1.5\sqrt{N}$  ms, donde N es el número de datos.

La figura 14 ilustra los valores de la matriz de resolución en la segunda iteración para el caso en que la estructura se discretiza con 121 nodos y el factor  $\alpha$  es igual al segundo valor singular. La matriz presenta claramente dos bandas alrededor de la que está situada en la diagonal principal, con un distanciamiento de 11 parámetros. Es previsible que la banda ubicada en diagonal principal señale los valores más altos en la resolución, salvo cuando se refiere a parámetros localizados en los márgenes del modelo ya que ellos no están adecuadamente muestreados por las trayectorias. Así se explica, primero, que la diagonal principal aparezca periódicamente con valores pequeños asociados con los nodos que se ubican en el perímetro del modelo y, segundo, que la resolución correspondiente a los primeros y últimos once nodos también sea muy baja. El ancho de la banda principal (ancho de resolución) tiene un valor medio de 3 parámetros, es decir, corresponde aproximadamente a 6 m. Este valor concuerda con el ancho de resolución estimado a partir de la longitud de onda predominante en los sísmogramas. Las dos bandas que aparecen alrededor de la diagonal principal se interpretan como correlaciones con las estimaciones de los nodos vecinos en el arreglo bidimensional. Los conjuntos de nodos que corresponden, en posición, a las tres zonas de baja velocidad inferidas, están

señaladas en la figura 14. La resolución alcanzada para estos puntos es aceptable.

Los resultados obtenidos en el presente trabajo son consistentes con los que obtuvieron Aranda *et al.* (1985). Ambas soluciones son comparadas en la figura 15a. Los autores referidos obtienen dos zonas de baja velocidad usando 169 parámetros; cada parámetro corresponde a la velocidad homogénea de una celda rectangular. El método aquí presentado permite obtener soluciones adecuadas con 25 (figura 12c), 49 (figura 12b) y 121 (figura 12a) parámetros. Dentro de dos de las regiones donde se han encontrado las zonas de baja velocidad, se realizaron perforaciones (figura 15b) reportadas por Aranda *et al.* (1985), las cuales muestran la presencia de lentes de arena que pueden explicar las zonas de baja velocidad. Esta posibilidad no se puede comprobar debido a la falta de perforaciones en otros sitios de esta sección.

Se puede discutir la adecuación de un modelo bidimensional a las condiciones experimentales del ejercicio de aplicación. Una estructura tridimensional puede comportarse como bidimensional para los primeros arribos, si es que estos arribos viajan por la capa más superior del terreno, es decir, aproximadamente por los primeros 10 m en profundidad. Aquellos rayos que se internan más profundamente encuentran generalmente capas de velocidad suficientemente alta que los hacen regresar como primeros arribos. En este caso, nuestro modelo contiene errores sistemáticos que serán mayores mientras más profundo viajen los primeros arribos. Por tanto, es probable que, en promedio, las velocidades del modelo hayan quedado subestimadas. Hasta ahora, la única información independiente acerca de la estructura de la región es la contenida en la figura 15 y por esta razón, no podemos controlar más detalladamente los límites de validez de nuestro modelado.

## CONCLUSIONES Y DISCUSION

El propósito de este artículo es presentar un procedimiento que resuelve numéricamente el problema de invertir tiempos de arribos de ondas sísmicas para el caso de una distribución bidimensional de velocidades. En los ejercicios de validación y de aplicación, las fuentes y los sensores se distribuyen en la periferia de un cuadrado en cuyo interior se busca determinar las velocidades. El procedimiento se basa en una discretización del medio a través de una malla compuesta por triángulos. En cada triángulo se supone que la velocidad es función lineal de las coordenadas espaciales y, por lo tanto, los rayos son arcos de circunferencias. El problema directo se linealiza a través de un desarrollo de Taylor a partir de una solución inicial y se busca estimar la perturbación de esta solución inicial. Las derivadas parciales correspondientes se calculan analíticamente. En la solu-

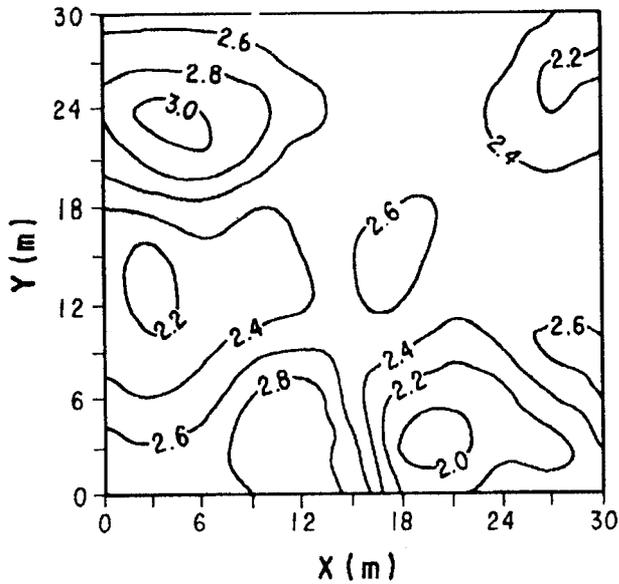


Fig. 12a. Resultados de la inversión a partir de un modelo inicial homogéneo. Los resultados corresponden a discretizaciones que utilizan 121 parámetros. Las velocidades correspondientes a las isólineas están en km/s.

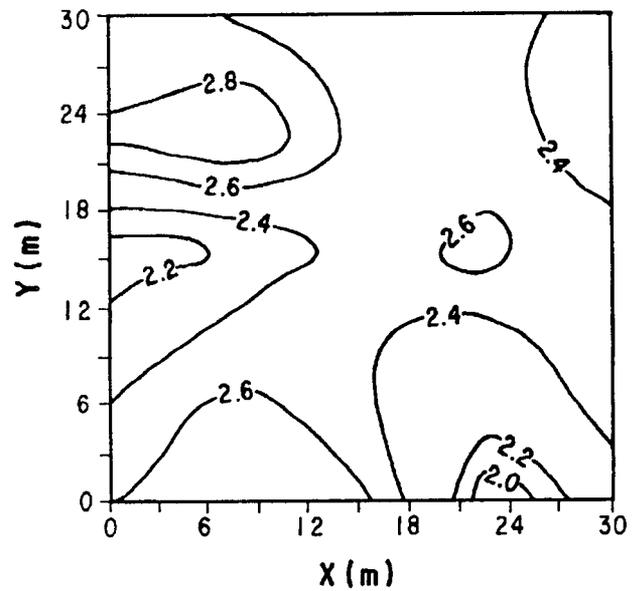


Fig. 12c. Los resultados corresponden a discretizaciones que utilizan 25 parámetros. Las velocidades correspondientes a las isólineas están en km/s.

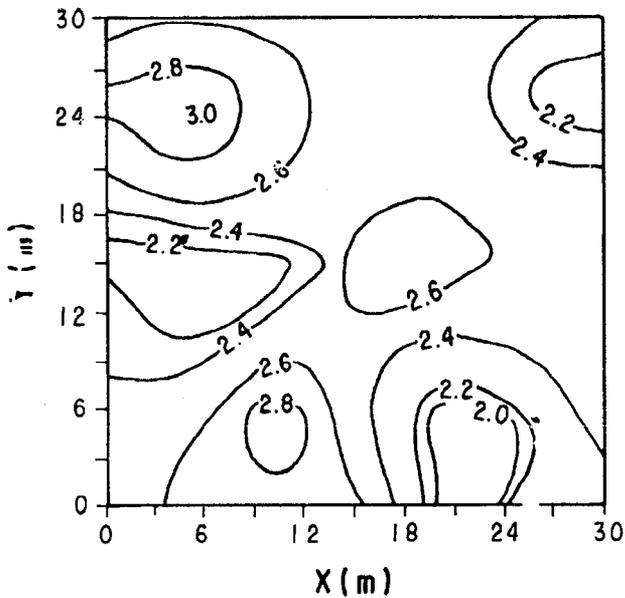


Fig. 12b. Los resultados corresponden a discretizaciones que utilizan 49 parámetros. Las velocidades correspondientes a las isólineas están en km/s.

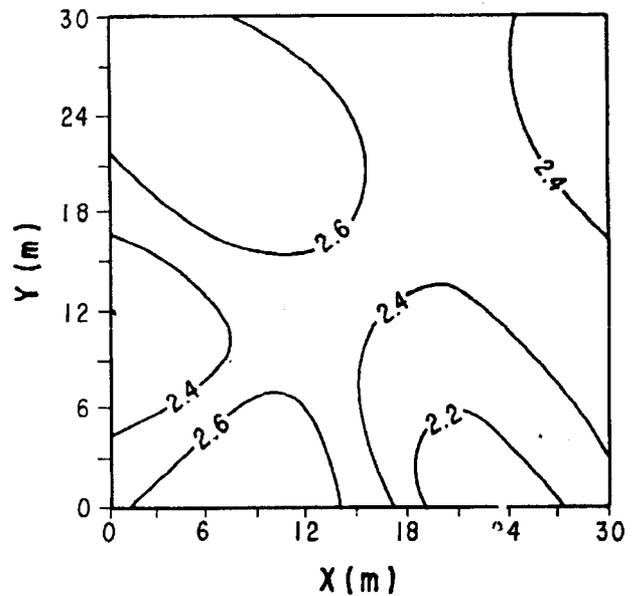


Fig. 12d. Los resultados corresponden a discretizaciones que utilizan 16 parámetros. Las velocidades correspondientes a las isólineas están en km/s.

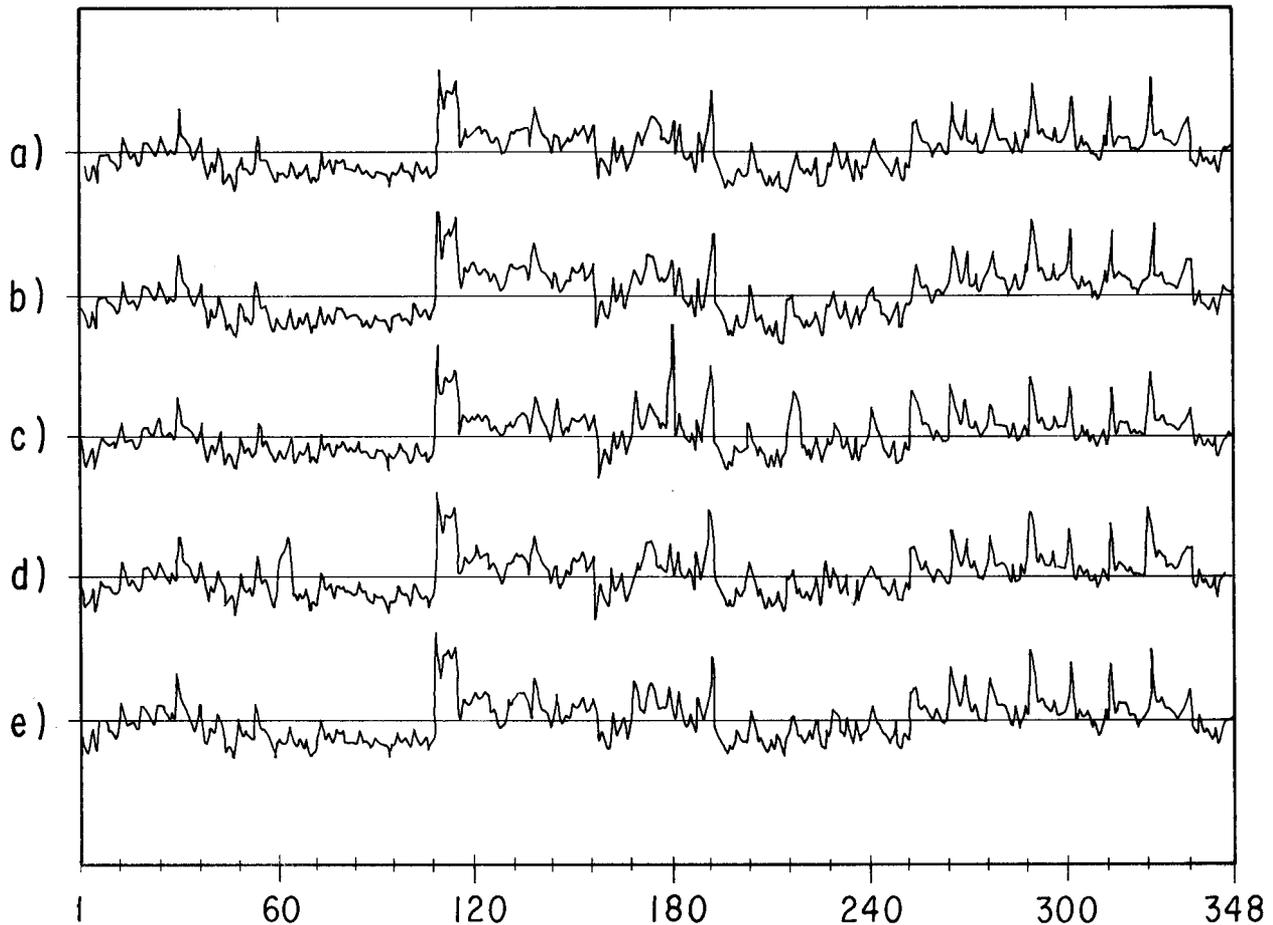


Fig. 13. Residuales iniciales de los tiempos de recorrido lineales (a) y no-lineales (b) para un modelo discretizado con 121 parámetros. Además, se presentan los residuales no-lineales correspondientes a las soluciones con parametrizaciones de 121 (c), 49 (d) y 25 (e) nodos, después de la tercera iteración.

ción del problema lineal inverso, se utiliza la descomposición de valores singulares aplicada sobre una solución regularizada.

La validación numérica del procedimiento permite asegurar, primero, la corrección tanto de las aproximaciones que se han utilizado como de la codificación y, segundo, la viabilidad de estimar cualitativa y cuantitativamente la existencia de zonas de baja velocidad en medios relativamente simples. La sobreparametrización en la descripción numérica del modelo no afecta la eficiencia del procedimiento mientras, obviamente, el nivel de error no cubra la información necesaria para hacer la estimación correspondiente. En este último respecto, el análisis que resulta de aplicar la DVS es de gran importancia.

El procedimiento se aplica a observaciones de tiempo de arribo en un experimento que tuvo como propósito detectar zonas de baja velocidad que pueden ser dañinas en la cimentación de una estructura civil. Diversas pruebas del procedimiento permitieron estimar, a partir de un modelo inicial homogéneo que se construyó con la condición de

que satisfaga globalmente los datos, una estructura que contiene zonas baja velocidad. La existencia de estas zonas parece significativa dada su permanencia en las diferentes soluciones y tomando en cuenta las características de la matriz de resolución. Al mismo tiempo, la solución es consistente con la obtenida por Aranda *et al.* (1985), los que utilizan una malla de celdas rectangulares donde la velocidad se toma como constante y aplican una estimación mínimo-cuadrática estabilizada.

El procedimiento ofrece varias ventajas sobre métodos basados en la discretización a través de celdas rectangulares de velocidad constante. La principal es que permite una disminución notable en el número de parámetros con que se puede representar satisfactoriamente el modelo, haciendo más preciso el cálculo de los rayos y permitiendo que el problema directo y el inverso se puedan resolver con gran exactitud en cada iteración. Otra ventaja es la de calcular las derivadas parciales en forma analítica en cada iteración. El uso combinado de una solución regularizada y la DVS (opción que es relativamente estándar en la literatura) permite

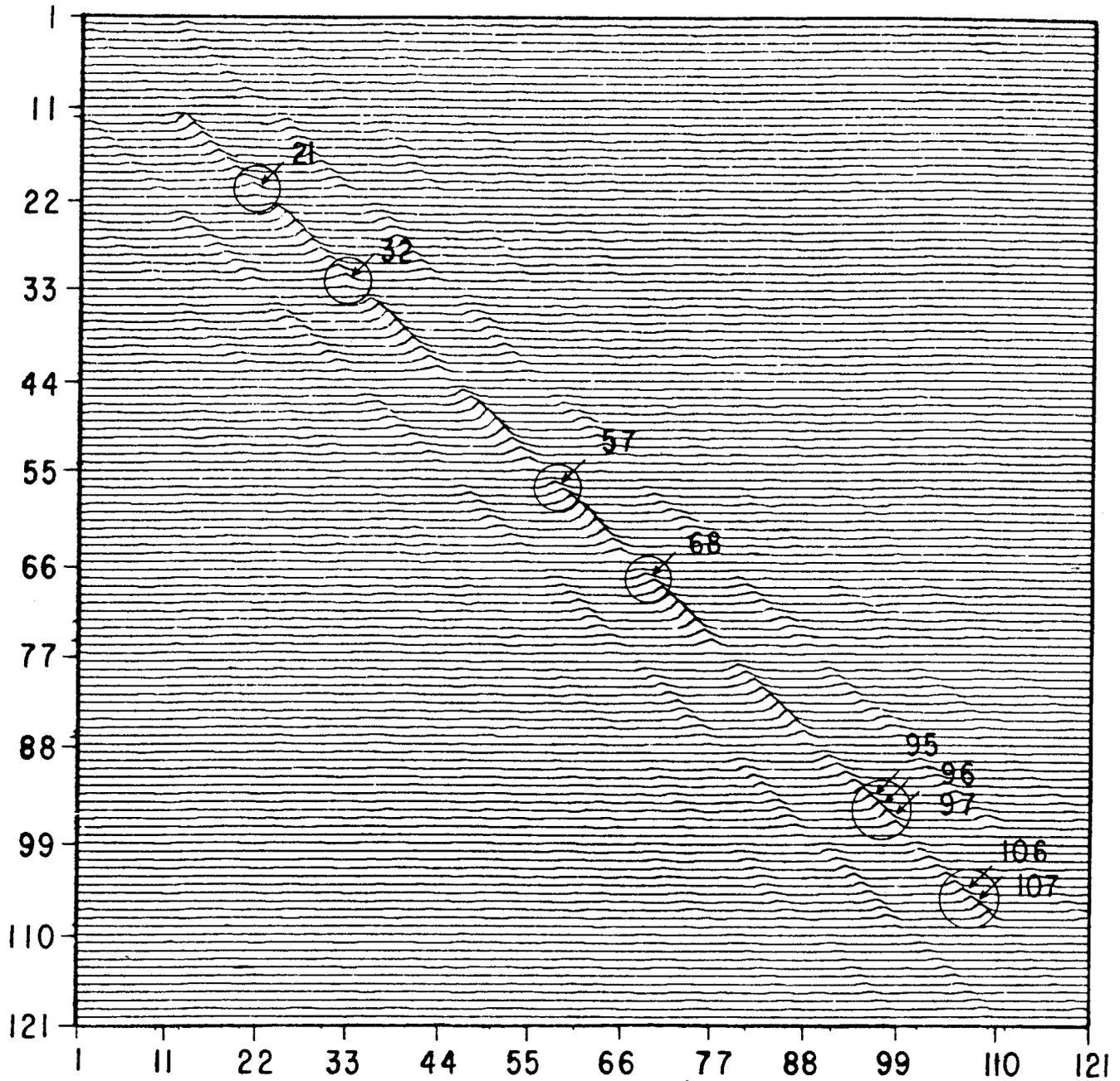


Fig. 14. Representación gráfica de la matriz de resolución para una discretización con 121 parámetros. Se trata de la segunda iteración, a partir del mismo modelo inicial que el usado en las figuras 9 y 10. Los números en las coordenadas corresponden al orden en las incógnitas. Las flechas señalan la resolución de los puntos correspondientes a las zonas de baja velocidad que aparecen estimadas en la figura 12a.

una gran flexibilidad, puesto que el análisis espectral del problema (DVS) define aproximadamente los grados de libertad resolubles en la solución mientras que el mecanismo de regularización evita el uso de un filtro discontinuo, como implicaría la aplicación directa de la DVS. Adicional-

mente, la optimización de la codificación y el uso de un sistema interactivo permite la inspección de gráficas para evaluar la bondad de una solución enfatizando rapidez, exactitud y eficiencia en el procedimiento.

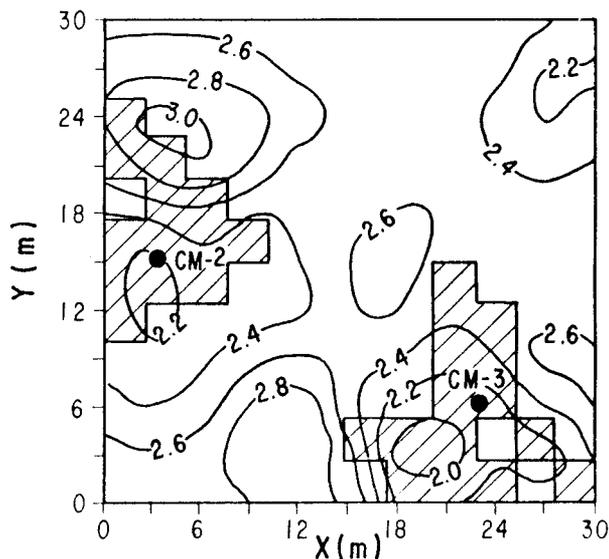


Fig. 15a. Comparación entre el resultado obtenido por Aranda *et al.* (1985) y el reportado en este trabajo. Las isolíneas representan velocidades en km/s. Las zonas de baja velocidad determinadas por Aranda *et al.* (1985) se muestran con bloques achurados. Estas zonas coinciden aproximadamente con dos de las obtenidas en el presente trabajo. CM2 y CM3 indican la posición de dos pozos cuya estratigrafía se muestra en la figura 15b.

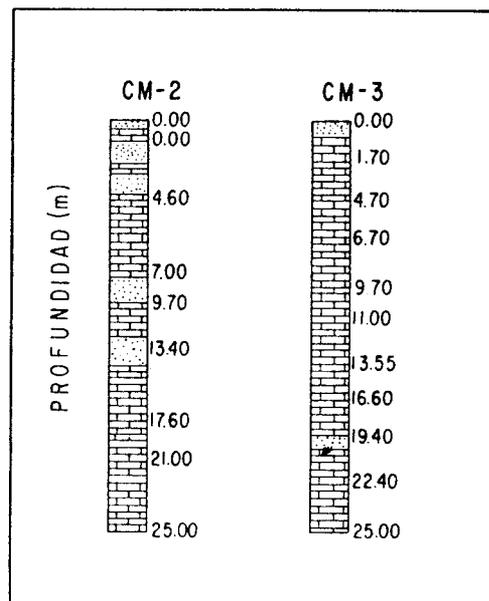


Fig. 15b. Columnas litológicas, hasta 25 m de profundidad, encontradas en la perforación de los pozos CM2 y CM3. En las columnas, los rectángulos representan calizas; mientras que los puntos indican lentes de arena.

### AGRADECIMIENTOS

Se agradece a la Comisión Federal de Electricidad (CFE) el haber puesto a nuestra disposición una base de datos, un subconjunto del cual se ha utilizado en la presente aplicación del procedimiento. También agradecemos a María Elena Zavala por su valiosa ayuda en la edición del artículo. Los cálculos y, parcialmente, las gráficas se hicieron en el Centro de Cálculo de CICESE. Se agradecen, además, las opiniones y correcciones dadas por dos revisores anónimos.

### BIBLIOGRAFIA

AKI, K., 1977. Three dimensional seismic velocity anomalies in the lithosphere. *J. Geophys.*, 43, 235-242.

ARANDA, R., M. BENHUMEA y A. VAZQUEZ, 1985. Estudio geofísico de exploración cársica en las áreas de ampliación de la C. T. Mérida II. Informe Técnico Comisión Federal de Electricidad. 30 pp.

ARIC, K., R. GUTDEUTCH and A. SOILER, 1980. Computation of travel times and rays in a medium of two-dimensional velocity distribution. *Pageoph.*, 118, 796-805.

BISHOP, I. and P. STYLES, 1990. Seismic tomographic imaging of a buried concrete target. *Geophysical Prospecting*, 38, 169-188.

BREGMAN, N. D., R. C. BAILEY and C. H. CHAPMAN, 1989. Crosshole seismic tomography. *Geophysics*, 54, 200-216.

CERVENY, V., I. A. MOLOTKOV, and I. PSENCIK, 1977. Ray Method in Seismology. University Karlova, Praga, 214 pp..

CERVENY, V., 1985. The application of ray tracing to the numerical modeling of seismic wave fields in complex structures. In: Handbook of Geophysical Exploration, Section I: Seismic Exploration. Edited by K. Helbing and S. Treitel. Vol. 15A: Seismic Shear Waves, Part A: Theory. Edited by G. Dohr. Geophysical Press London, 1-24.

DINES, K. A. and R. J. LYTLE, 1979. Computerized geophysical tomography. *Proc. Inst. Electr. Electron. Eng.*, 67, 1065-1073.

FREZ, J., 1986. Teoría de Inversión. Apuntes de Clases, CICESE, Ensenada, México, 120 pp.

- GEBRANDE, H., 1976. A seismic-ray tracing method for two-dimensional inhomogeneous media. *In: Explosion Seismology in Central Europe; Data and results.* Edited by P. Giese and C. Prodehls Skin. Springer-Verlag, Berlin, 162-167.
- IVANSSON, S., 1985. A study of methods for tomographic velocity estimation in the presence of low-velocity zones. *Geophysics*, 50, 969-988.
- MADRID, J. A. y J. C. V. TRASLOSHEROS, 1983. Un modelo sísmico preliminar heterogéneo del campo geotérmico de Cerro Prieto, Baja California Norte. *Geofís. Int.*, 22, 4, 389-417.
- MADRID, J. A., 1986. New formulae for linear travel-time inversion in 2-D heterogeneous media. Theory and results. *Geofís. Int.*, 25, 3, 361-382.
- MADRID, J. A., 1989. A simple linearized method for inversion of travel time data in two-dimensional heterogeneous media. *In: Digital Seismology and Fine Modeling of the Lithosphere.* Edited by: R. Cassinis, G. Nolet and G. F. Panza. PLENUM, New York & London, 383-397.
- MARKS, L. W. and F. HRON, 1978. Ray tracing for complex structured media, Workshop Meeting on Seismic Waves in Lateral Inhomogeneous Media. Liblice, Praga. 20 pp.
- McMECHAN, G. A. J. M. HARRIS and L. M. ANDERSON, 1987. Cross-hole tomography for strongly variable media with applications to scale model data. *Bull. Seis. Soc. Am.*, 77, 1945-1960.
- NEUMANN, G., 1981. Determination of lateral inhomogeneities in reflection seismics by inversion of travel-time residuals. *Geophys. Prosp.*, 29, 161-177.
- WILKINSON, J. H. and D. C. REINSCH, 1971. *Handbook for Automatic Computation.* Springer Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 440 pp.

---

J. C. V. Traslosheros, J. Frez, J. A. Madrid y C. Rebollar.

*División Ciencias de la Tierra,  
Centro de Investigación Científica y de  
Educación Superior de Ensenada. CICESE.  
22830 Ensenada, Baja California, México.*