SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

ALBERT BENVENISTE

Application de deux théorèmes de G. Mokobodzki à l'étude du noyau de Lévy d'un processus de Hunt sans hypothèse (L)

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 7 (1973), p. 1-24

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1973__7__1_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1971/72

APPLICATION DE DEUX THEOREMES DE G.MOKOBODZKI A L'ETUDE DU NOYAU DE LEVY D'UN PROCESSUS DE HUNT SANS HYPOTHESE (L)

A.BENVENISTE

Note des rédacteurs du séminaire : Cet exposé est la première partie d'une thèse de 3e cycle, préparée sous la direction de H.REINHARD et soutenue à Paris en Juin 1972 devant un jury composé de J.NEVEU, A.REVUZ, P.PRIOURET, H.REINHARD. La seconde partie était consacrée aux caractéristiques des fonctionnelles additives, et n'a pas été incluse ici. Bien que ce volume comporte un exposé sur les limites médiales, on a laissé figurer dans celui-ci l'appendice consacré aux " mesures médiales", qui est plus proche du langage du texte.

Table des matières

A.Benveniste
Centre d'Automatique de l'Ecole des Mines
35 rue Saint Honoré
77-Fontainebleau

APPLICATION DE DEUX THEOREMES DE G. MOKOBODZKI A L'ETUDE DU NOYAU DE LEVY D'UN PROCESSUS DE HUNT (SANS HYPOTHESE (L))

L'étude des fonctionnelles additives localement intégrables, et des fonctionnelles additives - martingales de carré intégrable associées à un processus de Hunt, ainsi que l'étude du noyau de Lévy d'un processus de Hunt, ont été introduites par S. WATANABE, qui traite ces questions à l'aide de l'hypothèse de continuité absolue, dite hypothèse (L). L'objet de ce travail, qui reprend la méthode exposée par P.A. MEYER dans [3-1] est de montrer que l'on peut s'en passer en utilisant deux théorèmes de G. MOKOBODZKI. L'un d'eux élimine lui-même l'hypothèse (L) dans l'étude d'une densité relative de deux potentiels comparables, ([8]), l'autre permet de trouver une limite unique d'une suite bornée de fonctions qui converge faiblement pour une famille quelconque de mesures bornées ([13]). (Il est bien connu que c'est un cas fréquent où l'on a recours à l'hypothèse (L), qui permet de remplacer une famille de mesures par une mesure unique, dans les questions de convergence).

Le noyau de Lévy que l'on obtient alors n'est plus un noyau sur la tribu des boréliens, mais sur celle des universellement mesurables.

0 - PRELIMINAIRES ET NOTATIONS

Soit E un espace localement compact à base dénombrable, et soit (P_t) un semi-groupe Markovien sur (E,ξ^*), où ξ^* désigne la complétée universelle de la tribu borélienne ξ sur E. Nous supposerons que $P_0 = I$, et nous ferons les hypothèses suivantes, qui sont les hypothèses droites de MEYER :

(0-1) <u>Pour toute loi μ sur E, il existe un processus de Markov, admettant μ comme loi initiale, (P_t) comme semi-groupe de transition, et dont les trajectoires sont continues à droite</u>.

En suivant [11], on peut alors construire la réalisation canonique continue à droite du semi-groupe (P_t). Nous utiliserons les notations de P.A. MEYER dans [11]. Nous ferons en outre l'hypothèse suivante :

(0-2) <u>Soit f une fonction p-excessive $(p > 0)$. Alors, f est</u>

presque-borélienne et continue à droite sur les trajectoires.

Cette hypothèse entraîne que le processus X est fortement markovien, que les familles $(\mathcal{F}_t^{\mu})$ et $(\mathcal{F}_t)$ sont continues à droite, et que le processus X est normal.

Nous dirons qu'une partie de Ω est négligeable, si elle est P^{μ}-négligeable pour toute loi μ. Nous dirons qu'un processus Z est mesurable, si la fonction $(t,\omega) \to Z(t,\omega)$ est mesurable lorsque $\Omega \times R_+$ est muni de la tribu $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(R_+)$. Enfin, un processus sera dit bien-mesurable (resp. prévisible) si, pour toute loi μ, ce processus est P^{μ}-indistinguable d'un processus bien-mesurable (resp. prévisible), lorsque Ω est muni de la famille croissante de tribus $(\mathcal{F}_t^{\mu})$.

(0-3) Nous désignons par $\mathcal{A}^+$ (resp. $\mathcal{A}^{c+}$) l'ensemble des fonctionnelles additives (en abrégé f.a.) A, dont les trajectoires sont croissantes (resp. croissantes et continues), et qui sont telles que $E^{\cdot}(A_t) < \infty$ pour tout t.
Nous poserons $\mathcal{A} = \mathcal{A}^+ - \mathcal{A}^+$ et $\mathcal{A}^c = \mathcal{A}^{c+} - \mathcal{A}^{c+}$.

On identifiera toujours deux éléments indistinguables de $\mathcal{A}$, et on munira $\mathcal{A}$ des semi-normes

$$\lambda_{x,t}(A) = E^x\left(\int_0^t |dA_s|\right).$$

Si $A \in \mathcal{A}$ (resp. $A \in \mathcal{A}^c$), le processus croissant $\{A\}$ défini par

$$\{A\}_t = \int_0^t |dA_s|$$

appartient à $\mathcal{A}^+$ (resp. à $\mathcal{A}^{c+}$). Il y a identité entre les éléments A de $\mathcal{A}^+$ tels que la fonction $E^{\cdot}(A_t)$ soit bornée pour un $t > 0$, et ceux qui ont un p-potentiel borné pour tout $p > 0$. Enfin, si $A \in \mathcal{A}^+$, la fonction $E^{\cdot}(A_t)$ est, pour tout t, presque-borélienne et finement continue. (c'est une caractéristique, voir [6]).

(0-4) Nous désignerons par $\mathcal{M}$ (resp. $\mathcal{M}^c$) l'ensemble des f.a. M telles que $E^{\cdot}(M_t^{\,2}) < \infty$, $E^{\cdot}(M_t) = 0$ pour tout t. (resp. et continues).

Le processus M est alors une martingale de carré intégrable pour toute loi P^x.

A partir de maintenant, et dans toute la suite, on fera figurer certains résultats sans démonstration. Ce sera le cas lorsque celle rédigée par P.A. MEYER subsiste intégralement, malgré la modification des hypothèses. On fera alors figurer la référence précise : par exemple, (IV, prop. 3) signifiera que la démonstration du théorème énoncé se trouve à la proposition 3 de "Intégrales stochastiques IV".

(0-5) Théorème (IV, Prop. 2,3).

i) Soit ν un temps terminal exact (i.e. tel que le processus $M_t = 1_{\{t<\nu\}}$ soit une fonctionnelle multiplicative exacte).

Alors, si (ν_n) désigne la suite des itérés de ν, le processus B défini par

$$B_t = \sum_{n>0} 1_{\{\nu_n \leq t\}}$$

est une f.a. à valeurs dans $[0, +\infty]$, fortement markovienne.

ii) Si, de plus, ν est effilé en tout point, et si on désigne par Φ la fonction p-excessive $(p > 0)$ $E^{\cdot}(e^{-p\nu})$, par K_u l'ensemble finement fermé $\{\Phi \leq u\}$, $0 \leq u < 1$, alors, la f.a. $1_{K_u}.B$ admet un p-potentiel borné.

Rappelons que, si f est une fonction universellement mesurable positive, et A une f.a. positive, on désigne par $f.A$ la fonctionnelle également positive définie par

$$(f.A)_t = \int_0^t f\circ X_s dA_s \; .$$

En ce qui concerne le ii) de la proposition précédente, on utilisera essentiellement le fait que, $1_{K_u}.B$ ayant un p-potentiel borné, appartient donc à $\mathcal{A}^+$.

(0-6) Définition : Soit $A \in \mathcal{A}$. Nous désignerons par $\mathcal{L}^1(A)$ l'ensemble des fonctions $\mathcal{E}^*$-mesurables f telles que

$$E^{\cdot}\left(\int_0^t |f\circ X_s|\,|dA_s|\right) < \infty$$

pour tout t. Nous noterons $f.A$ la fonctionnelle définie par

$$(f.A)_t = \int_0^t f{\circ}X_s dA_s \ .$$

Cette f.a. appartient évidemment à $\mathcal{A}$.

1 - QUELQUES PROPRIETES DES ESPACES $\mathcal{A}$ et $\mathcal{M}$

Nous continuons à suivre pas à pas P.A. MEYER ([3,1], Int. Stoch. III), en nous contentant de faire figurer seulement les démonstrations des théorèmes qui utilisent l'hypothèse (L) dans [3,1]. Pour les autres, nous continuons à citer la référence.

Voici un résultat très important, pour lequel nous allons utiliser un théorème de G. MOKOBODZKI qui est en fait à lui seul ici à l'origine de la suppression de l'hypothèse (L).

Theorème 1 de G. MOKOBODZKI.

Soient $(\chi,\mathcal{B})$ un espace mesurable, $(V_\lambda)_{\lambda>0}$ une famille résolvante sous-markovienne de noyaux positifs sur $(\chi,\mathcal{B})$. On suppose que $V = \sup_\lambda V_\lambda$ est un noyau borné. Toutes les fonctions de la forme Vf, où f est mesurable positive, sont des fonctions excessives. Le théorème fournit la réciproque suivante :

Soit u une fonction excessive, telle que $(V1-u)$ soit excessive. Il existe alors une fonction mesurable f, $(0 \leq f \leq 1)$, telle que

$$Vf = u.$$

Voici maintenant le théorème annoncé :

(1-1) Théorème : Soient deux f.a. $A \in \mathcal{A}^c$ et $B \in \mathcal{A}^c$, telles que la relation $f.A = 0$ (où f est borélienne bornée) entraîne $f.B = 0$. Il existe alors $h \in \mathcal{L}^1(A)$ telle que $B = h.A$.

Remarques : - c'est dans le premier paragraphe de la démonstration que nous ne pouvons pas suivre MEYER.

- c'est à cause de ce théorème que l'on a été obligé d'élargir $\mathcal{L}^1(A)$ aux fonctions universellement-mesurables. Nous verrons en effet au cours de la démonstration que la suppression de l'hypothèse (L) ne permet plus d'obtenir f borélienne, même si le semi-groupe (P_t) est borélien. La démonstration est faite en plusieurs étapes.

Démonstration :

a) Les f.a. A et B sont positives, $B_t \leq A_t \leq t$ pour tout t. Soit $p > 0$. Les fonctions définies par

$$E^{\cdot}\left(\int_0^{\infty} e^{-ps} dA_s\right) \qquad (\text{resp. } E^{\cdot}\left(\int_0^{\infty} e^{-ps} dB_s\right)) \quad \text{et}$$

$$E^{\cdot}\left(\int_0^{\infty} e^{-ps}(ds - dA_s)\right) \qquad (\text{resp. } E^{\cdot}\left(\int_0^{\infty} e^{-ps}(ds - dB_s)\right))$$

sont excessives par rapport à la résolvante $(U^{p+\lambda})_{\lambda>0}$ associée au processus X. $(U^{p+\lambda})_{\lambda>0}$ définit une résolvante sur l'espace mesurable $(E, \mathcal{E}^b)$ (où $\mathcal{E}^b$ désigne la tribu des presque-boréliens de E.) dont le noyau U^p est borné. On peut donc appliquer le théorème de G. MOKOBODZKI qui donne l'existence d'une fonction presque-borélienne φ_1 (resp. φ_2) telle que

$$E^{\cdot}\int_0^{\infty} e^{-ps} dA_s = E^{\cdot}\int_0^{\infty} e^{-ps} \varphi_1 \circ X_s ds \quad (\text{resp. } E^{\cdot}\int_0^{\infty} e^{-ps} dB_s = E^{\cdot}\int_0^{\infty} e^{-ps} \varphi_2 \circ X_s ds).$$

Les deux f.a. A et $\left(\int_0^t \varphi_1 \circ X_s ds\right)$ (resp. B et $\left(\int_0^t \varphi_2 \circ X_s ds\right)$) étant continues et ayant même p-potentiel, sont indistinguables. Posons alors $h = \varphi_2/\varphi_1$ sur l'ensemble $\{\varphi_1 \neq 0\}$, $h = 0$ sur l'ensemble $\{\varphi_1 = 0\}$. On a alors $B = h.A$.

Remarquons que, jusqu'ici, h est encore presque-borélienne.

b) Les f.a. A et B sont positives, $A \geq B$, A est strictement croissante.

Introduisons le changement de temps (c_t) associé à A. Alors, le processus $\hat{X} = (\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_{c_t}, X_{c_t}, \theta_{c_t}, P^x)$ est un processus de Markov continu à droite, dont l'espace d'états est E, et dont la résolvante associée est

$$W^p f(x) = E^x \int_0^{\infty} e^{-pA_t} f \circ X_t dA_t \; .$$

(On sait, de plus, que ce processus est fortement markovien, mais c'est inutile ici). Par contre, dans le cas où on ne fait plus l'hypothèse (L), A n'est pas nécessairement indistinguable d'une f.a. $\mathcal{F}^o$-mesurable ([1], V, 2-10) et par conséquent, on ne peut affirmer que (W_p) est une résolvante sur $(E,\mathcal{E}^b)$.

On peut néanmoins appliquer le raisonnement fait en a) en se rappelant que $(W^{p+\lambda})_{\lambda>0}$ est une résolvante sur $(E,\hat{\mathcal{E}}^*)$. Il existe donc une fonction $h \in \mathcal{L}^1(\hat{A})$, telle que $h.\hat{A} = \hat{B}$ ($\hat{A}$ et $\hat{B}$ étant définies par $\hat{A}_t = A_{c_t}$, $\hat{B}_t = B_{c_t}$). En revenant à X par changement de temps inverse (ce qui est possible, puisque A est strictement croissante), on voit que $h.A = B$.

On achève alors comme en (III, Th.1).

Signalons maintenant quelques résultats relatifs aux processus associés. Nous dirons que deux éléments A et B de $\mathcal{a}$ sont associés si le processus A-B est une martingale pour toute loi P^x. On sait (voir par exemple [6]) que tout élément A de $\mathcal{a}$ est associé à un élément $\tilde{A}$ de $\mathcal{a}$, prévisible, unique. (Ce résultat, énoncé pour les processus de Hunt dans [6], reste vrai sous les seules hypothèses droites faites jusqu'à maintenant).

Nous allons maintenant reprendre, à propos de l'espace $\mathcal{M}$ des f.a. martingales de carré intégrable, les résultats établis dans ([3,1] Int. Stoch. I) sur l'espace des martingales de carré intégrable.

Nous continuons à utiliser les mêmes notations, en supposant que l'hypothèse suivante est vérifiée :

(1-2) Le semi-groupe (P_t) est un semi-groupe de Hunt dont X désigne toujours la réalisation canonique.

Nous savons que, sous cette hypothèse, la famille de tribus $(\mathcal{F}_t)$ est dépourvue de temps de discontinuité. Nous aurons besoin dans l'immédiat de la conséquence suivante de cette hypothèse : toutes les martingales sont quasi-continues à gauche, ce qui est une hypothèse nécessaire pour pouvoir affirmer que la f.a. $\langle M,M\rangle$ (voir les intégrales stochastiques, plus loin) est continue, ce qui permet d'utiliser le théorème (1-1) pour démontrer le théorème de projection.

Nous aurons besoin ultérieurement de cette autre conséquence: pour qu'un temps d'arrêt de la famille $(\mathcal{F}_t)$ soit prévisible, il faut et suffit que, pour tout $x \in E$, on ait $P^x(X_T \neq X_{T-}, T<\infty) = 0$.

Soit $M \in \mathcal{M}$. Nous poserons

$$\mathcal{S}_{x,t}(M) = [E^x(M_t{}^2)]^{1/2} ,$$

et nous munirons $\mathcal{M}$ des semi-normes $\mathcal{J}_{x,t}$.
Le paragraphe ci-dessous concernant les intégrales stochastiques correspond a (III, Th.,2,3,4).

L'ensemble $\mathcal{M}^c$ des éléments continus de $\mathcal{M}$ n'est pas un espace de Fréchet, néanmoins toute suite de Cauchy dans $\mathcal{M}$ (resp. $\mathcal{M}^c$) est convergente dans $\mathcal{M}$ (resp. $\mathcal{M}^c$). D'autre part, si $M \in \mathcal{M}$, nous désignerons par $\langle M,M\rangle$ l'élément unique de $\mathcal{A}^{c+}$ tel que $E^\bullet(M_t^2 - \langle M,M\rangle_t) = 0$ pour tout t. Si M et N sont deux éléments de $\mathcal{M}$, nous définirons la fonctionnelle $\langle M,N\rangle$ qui appartient à $\mathcal{M}^c$ par

$$2\langle M,N\rangle = \langle M + N, M + N\rangle - \langle M,M\rangle - \langle N,N\rangle .$$

Les deux f.a. M et N sont dites orthogonales si $\langle M,N\rangle = 0$.
On a alors le théorème d'intégrale stochastique :

(1-3) Théorème : Soit $M \in \mathcal{M}$. On désigne par $\mathcal{L}^2(M)$ l'ensemble des fonctions f telles que $f^2 \in \mathcal{L}^1(\langle M,M\rangle)$. Si $f \in \mathcal{L}^2(M)$, il existe un élément unique de $\mathcal{M}$ noté $f.M$, qui possède la propriété suivante : si $N \in \mathcal{M}$, on a

$$f \in \mathcal{L}^1(\langle M,N\rangle) \quad \text{et} \quad \langle f.M,N\rangle = f.\langle M,N\rangle .$$

Nous allons maintenant exposer un théorème de projection sur certains sous-espaces de $\mathcal{M}$.

(1-4) Définition : On dit qu'un sous-espace $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}$ est stable si

i) pour toute suite (M_n) d'éléments de $\mathcal{N}$, qui converge vers $M \in \mathcal{M}$, on a $M \in \mathcal{N}$.

ii) pour tout $M \in \mathcal{N}$, et tout $f \in \mathcal{C}_0(E)$, on a $f.M \in \mathcal{N}$.

On a alors aussi $f.M \in \mathcal{N}$ pour $f \in \mathcal{L}^2(M)$ d'après i).
Enonçons maintenant une forme affaiblie du théorème de projection énoncé dans l'article de MEYER.

(1-5) Théorème : Soit $\mathcal{N}$ un sous-espace stable de $\mathcal{M}$, engendré par une famille dénombrable d'éléments de $\mathcal{M}$, et soit $M \in \mathcal{M}$. Il existe alors un élément H de $\mathcal{N}$, unique, tel que $M - H$ soit orthogonal à $\mathcal{N}$. On dit que H est la projection de M sur $\mathcal{N}$.

Cette proposition est démontrée en (III, T 5, paragraphes a) et b)), où l'on n'utilise pas l'hypothèse (L). Le même théorème, lorsque $\mathcal{N}$ est un sous-espace stable quelconque (qui, lui, nécessite l'hypothèse (L)), n'est pas indispensable en raison du caractère dénombrable de $\mathcal{M}$.

Remarquons que, même connaissant l'existence d'une suite (N^k) d'éléments de $\mathcal{M}$, engendrant $\mathcal{M}$ tout entier, (résultat qui ne nécessite que (1-5)), on ne sait pas si tout sous-espace stable est aussi engendré par une famille dénombrable de f.a.; ce résultat nécessite précisément le théorème de projection sous sa forme générale. (voir III).

2 - UN SYSTEME GENERATEUR POUR $\mathcal{M}$

Soit g une fonction borélienne bornée, et p un nombre >0. Nous désignerons par $C^{p,g}$ la f.a.

$$C_t^{p,g} = U^p g_\circ X_t - U^p g_\circ X_0 + \int_0^t (g - pU^p g) o X_s ds.$$

Ces f.a. sont bornées et appartiennent à $\mathcal{M}$. Le théorème suivant, dû à KUNITA-WATANABE, est fondamental. Soit μ une mesure bornée sur E, et $\mathcal{M}'$ l'espace de toutes les martingales de carré intégrable sur l'espace $(\Omega, \mathfrak{F}^\mu, P^\mu)$. On a le théorème suivant :

(2-1) Théorème : (voir III T 6) : <u>Si $M \in \mathcal{M}'$ est orthogonale (pour la loi P^μ) à toutes les martingales $C^{p,g}$ ($p>0$, $g \in \mathcal{C}_0(E)$), M est P^μ-indistinguable de 0</u>.

Remarquons alors que l'application $f \to C^{p,f}$ de $\mathcal{C}_0(E)$ dans $\mathcal{M}$ est continue. En effet, U^p étant un noyau borné, et f appartenant à $\mathcal{C}_0(E)$, on a $E^\cdot(C_t^{p,f})^2 \leq K \|f\|$, où K est une constante. Soit alors (f_n) une suite dense dans $\mathcal{C}_0^\infty(E)$. L'application du théorème de projection amoindri (1-5) nous donne le résultat fondamental suivant :

(2-2) Théorème : i) <u>le sous-espace stable de $\mathcal{M}$ engendré par $C^{p,g}$ est $\mathcal{M}$ tout entier</u>.

ii) <u>Il existe une suite $(C^{p,f_n})_{n>0}$ d'éléments de $\mathcal{M}$, qui engendre comme sous-espace stable $\mathcal{M}$ tout entier</u>.

On en déduit alors, comme le fait P.A. MEYER (III Prop 3), le théorème important suivant :

(2-3) Théorème : il existe une f.a. $M \in \mathcal{M}$, telle que les fonctions $E^{\cdot}(M_t^2)$ soient bornées, et qui possède la propriété suivante :

pour toute loi μ, toute martingale de carré intégrable N pour la loi P^{μ} et la famille $(\mathcal{F}_t^{\mu})$, le processus croissant $\langle N,N \rangle$ est absolument continu par rapport à la f.a. $\langle M,M \rangle$.

Nous aurons besoin dans la suite d'un certain type d'éléments de $\mathcal{A}^+$.

(2-4) Définition : on appellera f.a. du type de Poisson les éléments (p_t) de $\mathcal{A}^+$, purement discontinus, quasi-continus à gauche et à sauts unité. Nous désignerons par ρ l'ensemble des f.a. du type de Poisson.

On peut écrire tout élément p de ρ ainsi : soit ν l'instant du premier saut de p, ν est un temps terminal totalement inaccessible, effilé en tout point, et l'on a $p_t = \sum_{n>0} 1_{\{\nu_n \leq t\}}$.

(2-5) Proposition : (voir (IV T 1)). Soit $p \in \rho$. Alors $\overset{c}{p} \in \mathcal{M}$, et l'on a $\langle \overset{c}{\rho}, \overset{c}{p} \rangle = \tilde{p}$. *

Nous avons vu que la valeur absolue d'un élément de $\mathcal{A}$ appartient encore à $\mathcal{A}$. Etant donnés deux éléments A et B de $\mathcal{A}$ cela nous permet de définir une f.a. c, notée $A \wedge B$, telle que, pour tout ω, la mesure $dc_t(\omega)$ soit la borne inférieure des mesures $dA_t(\omega)$ et $dB_t(\omega)$ sur R. En particulier, si A et B appartiennent à ρ, $A \wedge B$ appartient à ρ et les sauts de $A \wedge B$ sont les sauts communs à A et B. On a alors le résultat suivant (IV Prop. 5) :

---

* Rappelons que la notation $\tilde{A}$ désigne la f.a. prévisible associée à A et que $\overset{c}{A} = A - \tilde{A}$ est une martingale - fonctionnelle additive.

(2-6) Proposition : soient p et p' des éléments de $\wp$. Alors $\langle \overset{c}{p}, \overset{c}{p'} \rangle = (p \wedge p')^{\sim}$.

3 - NOYAU DE LEVY

Nous continuons à supposer que le semi-groupe (p_t) est de Hunt. Nous notons H l'élément de $\mathcal{A}^{c+}$ tel que, pour tout $M \in \mathcal{M}$, le processus croissant $\langle M,M \rangle$ soit absolument continu par rapport à H. La démonstration du théorème suivant est, aux questions de mesurabilité près celle de (IV, Th. 2). Nous rappelons que, si $\mathcal{G}$ est une tribu sur E, la notation $b\mathcal{G}$ (resp. $\mathcal{G}^+$) désigne l'ensemble des fonctions définies sur E, $\mathcal{G}$-mesurables et bornées (resp. et positives).

(3-1) Théorème : il existe un noyau positif n sur $\mathcal{E}^*$, vérifiant les conditions suivantes :

i) pour tout $x \in E$, $n(x, \{x\}) = 0$,

ii) pour tout fonction f, universellement mesurable positive sur $E \times E$, on a

$$E^{\cdot}\Big(\sum_{s \le t} f(X_{s-}, X_s) 1_{\{X_{s-} \neq X_s\}} \Big) = E^{\cdot} \int_0^t dH_s \int_E n(X_s, dy) f(X_s, y).$$

Il existe un seul noyau n ayant ces propriétés.

Nous dirons que n est le noyau de Lévy du processus de Hunt.

Démonstration: a) soit d une distance compatible avec la topologie de E, et introduisons, pour tout entier m, le temps terminal totalement inaccessible effilé en tout point

$$S^m = \inf \{t,\ 1/m > d(X_{t-}, X_t) \ge 1/m+1\} .$$

Soit $(S^m_n)_{n \ge 0}$ la suite des itérés de S^m. En vertu de (0-5), on définit une f.a. quasi-continue à gauche de la façon suivante :

$$\sigma^m_t = \sum_{n > 0} 1_{\{S^m_n \le t\}} ,$$

Si nous désignons par $\mathcal{G}^m$ l'ensemble des parties boréliennes

K de E, telles que $1_K.\sigma^m$ ait un p-potentiel borné pour tout $p > \varrho$, en vertu de (0-5), E est réunion d'une suite d'éléments de $\mathcal{G}^m$. La f.a. $1_K\sigma^m$ étant du type de Poisson, on a

$$(1_K\sigma^m)^\sim = <(1_K\sigma^m)^c, (1_K\sigma^m)^c> ,$$

et $(1_K\sigma^m)^\sim$ est donc absolument continue par rapport à H. On a donc, pour tout t et tout $K \in \mathcal{G}^m$,

(1-a) $$E^\bullet(\sum_{1\le t} 1_{\{1/m > d(X_{s-},X_s) \ge 1/m+1\}}, 1_{\{X_s \in K\}})$$

$$= E^\bullet(1_K\sigma^m)_t = E^\bullet(1_K\sigma^m)^\sim_t = E^\bullet\int_0^t \bar{n}_m(X_s,K)dH_s,$$

où $\bar{n}_m(.,K)$ est un élément de $\mathcal{L}^1(H)$. Si $K \in \mathcal{G}^m$ est réunion d'une suite (K^i) d'ensemble de $\mathcal{G}^m$ disjoints, on a évidemment

$$\sum_i \bar{n}_m(.,K_i) = \bar{n}_m(.,K) ,$$

sauf sur un ensemble de H-potentiel nul. On peut donc considérer E comme réunion d'une suite (K_j) d'éléments de de $\mathcal{G}^m$ disjoints.

b) définition de $\bar{n}^j_m(.,f)$, où $f \in \mathcal{C}_0(E)^+$.

Soit $f \in \mathcal{C}_0(E)^+$; $1_{K_j}f$ est limite uniforme d'une suite croissante de fonctions en escalier (f_n), à support dans K_j, pour lesquels on peut écrire

(1-b) $$E^\bullet(\sum_{s\le t} 1_{\{1/m>d(X_{s-},X_s)\ge 1/m+1\}}, f_n o X_s) = E\int_0^t \bar{n}_m(X_s,f_n)dH_s ,$$

où l'on a posé $\bar{n}_m(.,f_n) = \sum \lambda_i \bar{n}_m(.,A_i)$ si $f_n = \sum_i \lambda_i 1_{A_i}$. On vérifie que, pour $p \in N^i_{;}$ on a

$$|\bar{n}_m(.,f_n) - \bar{n}_m(.,f_p)| \le (\sup_{x\in E} |f_n(x) - f_p(x)|)\bar{n}_m(.,K_j),$$

sauf sur un ensemble de H-potentiel nul. Autrement dit, les fonctions $\bar{n}_m(.,f_n)$ convergent simplement vers une fonction g. Si, de plus, nous avons choisi la suite (f_n) telle que la famille de tribus $(\sigma(f_n))$ soit croissante, la suite $\bar{n}_m(.,f_n)$ est croissante, et on peut donc passer à la limite dans le second membre de (1-b); passant également à la limite dans le premier, on obtient :

$$(1\text{-c})\quad E^\cdot\Big(\sum_{s\leq t} 1_{\{1/m>d(X_{s-},X_s)\geq 1/m+1\}} f\circ X_s\ 1_{K_j}\circ X_s\Big) = E^\cdot\int_0^t g\circ X_s dH_s\ .$$

g n'étant défini qu'à un ensemble de H-potentiel nul près, nous définissons $\bar{n}_m(.,f1_{K_j})$ comme étant une version de g, et nous noterons $\bar{n}_m^j(.,f) = \bar{n}_m(.,f1_{K_j})$.

c) définition de l'opérateur n_m.

Soit $(f_p)_{p\in N}$ une suite dense dans $\mathcal{C}_0(E)$, nous allons, pour tout x, définir une forme linéaire sur $\mathcal{C}_0(E)$, notée $n_m^j(x,.)$ vérifiant

$$(1\text{-d})\quad E^\cdot\Big(\sum_{s\leq t} 1_{\{1/m>d(X_{s-},X_s)\geq 1/m+1\}} f\circ X_s 1_{K_j}\circ X_s\Big) = E^\cdot\int_0^t n_m^j(X_s,f)dH_s\ ,$$

pour tout $f\in\mathcal{C}_0(E)$. Il nous suffit de définir n_m^j sur la suite dense (f_p), c'est ce que nous allons faire.

Nous avons, en b), défini $n_m^j(.,f_1)$. Supposons alors $n_m^j(.,f_p)$ défini pour tout $p\leq p_0$. Définissons alors $n_m^j(.,f_{p_0+1})$ comme étant égal

- à $\bar{n}_m^j(.,f_{p_0+1})$ si f_{p_0+1} n'appartient pas au sous-espace engendré par les $(f_p)_{p\leq p_0}$,

- à $\sum_i \lambda_i n_m^j(.,f_i)$ si $f_{p_0+1} = \sum_i \lambda_i f_i$, $i\leq p_0$.

La forme linéaire $n_m^j(x,.)$ se prolonge alors, pour tout x, en une mesure bornée sur $(E,\mathcal{E})$, et la formule (1-d) se prolonge sur $b\mathcal{E}$.

Nous allons maintenant définir $n_m^j(x,.)$ sur $b\mathcal{E}^*$, et prolonger la formule (1-d) à de telles fonctions. Pour tout x, la mesure bornée positive $n_m^j(x,.)$ se prolonge à $b\mathcal{E}^*$. Soit $f\in b\mathcal{E}^*$, et montrons que $n_m^j(.,f)$, ainsi défini, est universellement mesurable. La fonction $n_m^j(.,1)$, $\mathcal{E}^*$-mesurable et finie, est somme dénombrable de fonctions de la forme

$1_{O_p} n_m^j(.,1)$, où $O_p \in \mathcal{E}^*$, et où $n_m^j(.,1)$ est borné sur O_p. Il nous suffit donc de montrer que la restriction à chaque O_p de $n_m^j(.,f)$, notée $n_m^{j,p}(.,f)$ est universellement mesurable. Soit μ une mesure positive bornée sur E, la mesure sur E définie par $\int_E n_m^{j,p}(x,.)\mu(dx)$ étant une mesure bornée sur E, il existe deux fonctions f_1 et f_2, boréliennes sur E, telles que $f_1 \leq f \leq f_2$ et que

$$\int_E n_m^{j,p}(x,f_1)\mu(dx) = \int_E n_m^{j,p}(x,f_2)\mu(dx),$$

ce qui donne les deux conséquences suivantes : d'une part

$$n_m^{j,p}(.,f_1) \leq n_m^{j,p}(.,f) \leq n_m^{j,p}(.,f_2) ,$$

et d'autre part

$$n_m^{j,p}(.,f_1) = n_m^{j,p}(.,f_2) \ \mu\text{-presque partout,}$$

ce qui suffit puisque ces deux fonctions sont elles-mêmes universellement mesurables. Finalement, $n_m^j(.,f)$ est bien universellement mesurable, et il nous reste à vérifier que la formule (1-d) est bien vérifiée si $f \in b\mathcal{E}^*$. Ceci se fait de même immédiatement en remarquant que, pour x et t fixés, le premier membre de la formule (1-d) définit une mesure positive sur E; on encadre alors f entre deux fonctions boréliennes f_1 et f_2 relatives à cette mesure, auxquelles on applique la formule (1-d), et, l'opérateur n_m^j étant positif sur $b\mathcal{E}^*$, on obtient le résultat cherché.

Posons $n_m = \sum_j n_m^j$. On a ainsi montré l'existence d'un noyau positif sur $\mathcal{E}^*$ vérifiant les conditions suivantes

(1-e) pour tout $K \in \mathcal{C}^m$, $\overline{n}_m(.,K) = n_m(.,K)$, sauf sur un ensemble de H-potentiel nul.

(1-f) $$E^{\cdot}\Big(\sum_{s\leq t} 1_{\{1/m > d(X_{s-},X_s) \geq 1/m+1\}} f\circ X_s\Big) = E^{\cdot}\int_0^t n_m(X_s,f)dH_s ,$$

où $f \in \mathcal{E}^{*+}$.

d) Propriétés de n_m et de n.

Soit maintenant $L \in \mathcal{E}^*$. Les deux f.a. figurant sous les signes $E^\cdot$ dans (1-f) sont associées; le processus $1_L \circ X_{s-}$ étant prévisible, on a

$$(1\text{-g})\quad E^\cdot\Big(\sum_{s\leq t} 1_{\{X_{s-}\in L\}}\, 1_{\{1/m > d(X_{s-},X_s)\geq 1/m+1\}}\, 1_{\{X_s\in K\}}$$

$$= E^\cdot \int_0^t 1_{\{X_{s-}\in L\}}\, n_m(X_s,K)dH_s = E^\cdot \int_0^t 1_L . X_s\, n_m(X_s,K)dH_s\ ,$$

où K est un élément de $\mathcal{E}^*$,

la dernière égalité résultat du fait que l'ensemble $\{X_s \neq X_{s-}\}$ est une réunion dénombrable de graphes de temps d'arrêt. L'argument habituel de classes monotones, et la possibilité de compléter par rapport à toute mesure bornée positive entraîne que, pour toute fonction positive universellement mesurable f sur $E\times E$, on a

$$(1\text{-h})\quad E^\cdot\Big(\sum_{s\leq t} f(X_{s-},X_s)1_{\{1/m>d(X_{s-},X_s)\geq 1/m+1\}}\Big)=E^\cdot\int_0^t dH_s\int_E n_m(X_s,dy)f(X_s,y)$$

Prenons pour f, en particulier, l'indicatrice du complémentaire C de $\{1/m > d'X_{s-},X_s) \geq 1/m+1\}$. Le premier membre étant nul, la fonction $\int_E n_m(.,dy)1_C(.,y)$ est de H-potentiel nul. Autrement dit, au prix d'une modification de n_m sur un ensemble de H-potentiel nul, nous pouvons supposer que la mesure $n_m(x,.)$ est, pour tout $x \in E$, portée par l'ensemble $\{g;\ 1/m > d(x,y) \geq 1/m+1\}$. Nous supposerons cela dans toute la suite.

Enfin, pour obtenir l'existence de n, il suffit de sommer sur m et n a les propriétés demandées.

e) Unicité.

Soit n' un autre noyau satisfaisant à l'énoncé du théorème, désignons par n'_m l'opérateur $n'_m(x,dy) = n'(x,dy)\ f(x,y)$, où $f(x,y) = 1_{\{1/m>d(x,y)\geq 1/m+1\}}$. Le théorème implique alors que

$$E^\cdot\Big(\sum_{s\leq t} f(X_{s-},X_s)\ 1_{\{X_s\in K\}}\Big)$$

$$= E^\cdot \int_0^t n'_m(X_s,K)dH_s = E^\cdot\int_0^t n_m(X_s,K)dH_s\ .$$

Prenons $K \in \mathcal{C}^m$. Toutes ces intégrales sont alors finies, et $n'_m(.,K) = n_m(.,K)$, sauf sur un ensemble de H-potentiel nul. La fin de la démonstration est alors immédiate.

4 - EXEMPLES D'UTILISATION DU NOYAU DE LEVY

Donnons maintenant la définition suivante :

(4-1) Définition : Nous désignerons par Λ^1 l'ensemble des fonctions universellement mesurables f telles que

$$E^{\cdot}\left(\sum_{s\le t} |f(X_{s-},X_s)|\, 1_{\{X_{s-}\neq X_s\}}\right) < \infty$$

pour tout t. Nous désignerons alors par Sf l'élément de $\mathcal{M}$ défini par

$$Sf_t = \sum_{s\le t} f(X_{s-},X_s)\, 1_{\{X_{s-},X_s\}} .$$

L'ensemble des fonctions f telles que $f^2 \in \Lambda^1$ sera noté Λ^2.

Si f est universellement mesurable positive sur $E\times E$ (ou si $f \in \Lambda^1$), nous noterons Nf la fonction universellement mesurable sur E définie par

$$Nf = \int_E n(.,dy)\, f(.,y) \;.$$

La relation ii) du théorème (3-1) s'étend alors aux éléments de Λ^1, et, si $f \in \Lambda^1$, alors Nf est un élément de $\mathcal{L}^1(H)$.

Pour le théorème suivant, on pourra se reporter à MEYER (IV Th.3), aucune difficulté de mesurabilité n'étant introduite ici.

(4-2) Théorème : i) Soit $f \in \Lambda^2$, et f_m défini par

$$f_m = f\; 1_{\{1/m > f \geq 1/m+1\}}\; 1_{\{1/m > d \geq 1/m+1\}} \;.$$

On a $f_m \in \Lambda^1$, et $(Sf_m)^c \in \mathcal{A} \cap \mathcal{M}$. Les f.a. $(Sf_m)^c$ sont deux à deux orthogonales, et la série $\sum_m (Sf_m)^c$ converge dans $\mathcal{M}$ vers un élément de $\mathcal{M}$ que nous appellerons $(Sf)^c$.

ii) <u>Soient f et g deux éléments de Λ^2. Alors,</u> $fg \in \Lambda^1$ <u>et</u> $<(Sf)^c, (Sg)^c> = Nfg.H$.

Exemple : Soient $p > 0$, u_1 et u_2 deux fonctions p-excessives bornées, et, $u = u_1 - u_2$. Posons $f(x,y) = u(y) - u(x)$. MEYER a démontré en (IV, Th.4) que f appartient à Λ^2.

On sait qu'il y a identité entre les sommes compensées de sauts, d'une part, et les martingales de carré intégrable orthogonales à toute martingale continue d'autre part. Nous allons voir ici un résultat analogue pour les éléments de $\mathcal{M}$, pour lequel nous allons utiliser un autre théorème de G. MOKOBODZKI.

Théorème 2 de G. MOKOBODZKI. ([13]).

Ce théorème permet sous certaines conditions de trouver une limite universellement mesurable d'une suite (f_n) relativement à la topologie faible $\sigma(L^1, L^\infty)$ associée à l'ensemble des mesures μ pour lesquelles cette suite converge. Enonçons ce théorème dont la démonstration utilise l'hypothèse du continu.

Désignons par $\beta(N)$ le compactifié de Čech de N. Rappelons que l'ensemble $l^\infty(N)$ des suites bornées de réels s'identifie avec l'ensemble $\mathcal{C}(\beta(N))$ des fonctions continues sur $\beta(N)$.

a) <u>Soit $(X,\mathcal{B})$ un espace mesurable, (f_n) une suite bornée de fonctions numériques bornées $\mathcal{B}$-mesurables sur X. Il existe une mesure θ sur $\beta(N)$, dite mesure médiale, qui vérifie les propriétés suivantes</u> :

i) <u>si</u> $(c_n) \in l^\infty(N)$, <u>on a</u>

$$\liminf \leq <c_n, \theta> \leq \limsup c_n \; .$$

ii) <u>la fonction f sur X définie par</u>

$$f(x) = <f_n(x), \theta>$$

<u>est universellement mesurable sur</u> $(X,\mathcal{B})$.

iii) <u>pour toute mesure μ bornée sur</u> $(X,\mathcal{B})$, <u>on a</u>

$$< \int f_n d\mu, \ \theta> = \int f(x) d\mu(x) \ .$$

b) Si on suppose maintenant les f_n positives, non nécessairement bornées, la relation (a-ii) définit une fonction f, également universellement mesurable, et qui vérifie (a-iii) pour toute mesure μ, positive, σ-finie sur $(X,\mathcal{B})$*. On dit que f est une fonction médiale de la suite (f_n). (* et telle que la suite (f_n) soit relativement compacte dans $L^1(\mu)$ pour la topologie $\sigma(L^1(\mu), L^\infty(\mu))$.)

En fait, sous les hypothèses a), G. MOKOBODZKI appelle fonction médiale de la suite (f_n) toute fonction universellement mesurable f qui vérifie $\liminf \mu(f_n) \leq \mu(f) \leq \limsup \mu(f_n)$, où μ est une mesure bornée. Le théorème exprime que la fonction f ainsi construite est une fonction médiale. Nous avons adopté cette exposition du théorème en vue d'applications. Préparons le terrain par le corollaire suivant de ce théorème, qui en est la formulation adaptée aux applications que nous avons en vue.

(4-3) Corollaire : soit (f_n) une suite de fonctions $\mathcal{B}$-mesurables sur X, on considère la famille $(\mu_i)_{i\in I}$ des mesures positives, non nécessairement σ-finies, telles que la suite (f_n) converge dans $L^p(\mu_i)$ pour tout $i \in I$. $(1 \leq p \leq \infty)$.

Il existe alors une fonction f, universellement mesurable, telle que, pour tout $i \in I$, le suite (f_n) converge vers f dans $L^p(\mu_i)$.

Démonstration : désignons par A l'élément de $\mathcal{B}$ défini par $A = \bigcup_n \{f_n > 0\}$, et considérons les mésures $\nu_i = 1_A \mu_i$, qui sont, elles, σ-finies. Chaque mesure ν_i est donc somme d'une suite de mesure bornées (ν_i^k), et, pour tout entier k et tout $i \in I$, la suite (f_n) converge dans $L^p(\nu_i^k)$, donc dans $L^1(\nu_i^k)$ et dans la topologie faible $\sigma(L^1(\nu_i^k), L^\infty(\nu_i^k))$.

Soit alors θ une mesure médiale sur $\beta(N)$. On a, pour tous i et k, (f_n) étant faiblement relativement compacte dans $L^1(\nu_k^i)$,

$$<\int f_n^+ d\nu_i^k, \ \theta> = \int <f_n^+(x), \ \theta> d\nu_i^k(x) \ ,$$

$$<\int f_n^- d\nu_i^k, \ \theta> = \int <f_n^-(x), \ \theta> d\nu_i^k(x) \ ,$$

et, comme $\lim_n \sup \int |f_n| d\nu_i^k < \infty$, l'ensemble où la fonction $<f_n^+(.), \theta> + <f_n^-(.), \theta>$ n'est pas finie est de ν_i^k-mesure nulle. Soit B cet ensemble. Posons alors

$$g = <f_n^+(.), \theta> - <f_n^-(.), \theta> \text{ sur } B^c$$

$$g = 0 \text{ sur } B.$$

La fonction g est universellement mesurable, et, si on désigne par f_i une limite de la suite (f_n) dans $L^p(\nu_i)$, l'ensemble $\{g \neq f_i\}$ est, pour tout k, de ν_i^k-mesure nulle, donc de ν_i-mesure nulle. Autrement dit, g répond au problème pour la famille des mesures ν_i. Il ne reste plus qu'à poser $f = 1_A g$.

Enonçons alors le théorème annoncé, dont la seule partie nouvelle est le lemme 3, le reste provenant de P.A. MEYER.

(4-4) Théorème : Soit $\mathcal{S}^c$ l'ensemble des f.a. de la forme $(\mathcal{S}f)^c$, où $f \in \Lambda^2$. $\mathcal{S}^c$ est alors l'orthogonal dans $\mathcal{M}$ de l'ensemble $\mathcal{M}^c$ des éléments continus de $\mathcal{M}$.

Démonstration : Les f.a. $(\mathcal{S}f)^c$ sont des sommes compensées de sauts. Elles sont donc orthogonales à toute martingale continue. L'orthogonal $\mathcal{M}^d$ de $\mathcal{M}^e$ contient donc $\mathcal{S}^c$. Pour montrer l'inclusion inverse, procédons en trois lemmes.

Lemme 1 : Le sous-espace stable de $\mathcal{M}$ engendré par $\mathcal{S}^c$ est $\mathcal{M}^d$.

Soit $g \in \mathcal{C}_0(E)$, et $p > 0$. Posons $u = U_g^p, f(x,y)=u(y)-u(x)$ est un élément de Λ^2. La martingale

$$C_t^{p,g} = u.X_t - u_\circ X_0 + \int_0^t (g - pu)_\circ X_s \, ds$$

a les mêmes sauts que Sf, donc que $(Sf)^c$. Autrement dit, $C^{p,g} - (Sf)^c$ appartient à $\mathcal{M}^c$. Soit alors M un élément de $\mathcal{M}^d$, orthogonal à $\mathcal{S}^c$. M est alors orthogonal aux f.a. $C^{p,g}$, donc $M = 0$. Il reste alors à voir que $\mathcal{S}^c$ est un sous-espace stable.

Lemme 2 : Soit $f \in \Lambda^2$, et $g \in b\mathcal{E}$. Soit f' la fonction définie sur $E \times E$ par

$$(x,y) \to g(x)\, f(x,y).$$

On a alors $g.(Sf)^c = (Sf')^c$. (autrement dit $M \in \mathcal{S}^c \Rightarrow g.M \in \mathcal{S}^c$).

Comme $(Sf)^c$ est une somme compensée de sauts, il en est de même de $g.(Sf)^c$, et le saut de cette martingale à l'instant s est

$$g{\circ}X_s - \Delta(Sf)^c_s = g{\circ}X_s - f(X_{s-},X_s)1_{\{X_{s-} \neq X_s\}} =$$

$$= f'(X_{s-},X_s)1_{\{X_{s-} \neq X_s\}} .$$

En effet, si M est une martingale, et $N \in \mathcal{L}^2(M)$ un processus prévisible, on a $\Delta(NM)_s = N_s \Delta M_s$. ([3,1] Int Stoch I, Th 8, ou bien [4], III T 32). Or, on a $f' \in \Lambda^2$ puisque g est bornée. Les deux martingales $(Sf')^c$ et $g(Sf)^c$ sont donc des sommes compensées de sauts qui ont mêmes sauts; elles sont donc égales.

Lemme 3 : Soit (M^p) une suite d'éléments de $\mathcal{S}^c$ qui converge dans $\mathcal{M}$ vers une f.a. M. Alors, $M \in \mathcal{S}^c$.

Introduisons sur $E \times E$ les mesures $\mu_{x,t}$ définies par

$$\mu_{x,t}(f) = E^x \int_0^t Nf{\circ}X_s dH_s ,$$

où f est universellement mesurable positive sur $E \times E$. Choisissons des fonctions $f_p \in \Lambda^2$ telles que $M^p = (Sf_p)^c$. Les f.a. M^p convergeant dans $\mathcal{M}$, la suite (f_p) converge dans $L^2(\mu_{x,t})$ pour tous x, et t. Soit alors f une fonction universellement mesurable sur $E \times E$, qui soit la limite de la suite (f_p) dans $L^2(\mu_{x,t})$ pour tous x et t. Il est immédiat que l'on a $M = (Sf)^c$.

Voici enfin le dernier théorème que nous nous proposons d'énoncer, qui donne une représentation parfaite des f.a. purement discontinues, quasi continues à gauche; la démonstration en est donnée par MEYER en (IV, Th 6.).

(4-5) Théorème : Soit A une f.a. positive, purement discontinue et quasi-continue à gauche. Il existe alors une fonction f sur $E\times E$, universellement mesurable et positive, telle que A soit indistinguable de la f.a.

$$Sf_t = \sum_{s\leq t} f(X_{s-},X_s)1_{\{X_{s-}\neq X_s\}} .$$

Remarque : dans une première rédaction, on avait utilisé pour la démonstration du lemme 3 les filtres rapides, dus également à G. MOKOBODZKI ([7]). Ceux-ci avaient l'inconvénient de fournir une limite mesurable seulement par rapport à la tribu borélienne complétée par les mesures $\mu_{x,t}$, ce qui augmentait d'une façon peu agréable les difficultés de mesurabilité.

A - APPENDICE SUR LES FONCTIONS MEDIALES

La démonstration du corollaire (4-3), telle qu'elle est rédigée, nenécessite pas vraiment l'introduction des mesures médiales, la propriété caractéristique des fonctions médiales pouvant suffire en raison du fait que, si (f_n) converge fortement, alors la suite $(|f_n|)$ converge encore fortement. C'est donc dans le cas où cette propriété n'est plus vérifiée, le cas de la convergence faible, que l'on va voir les possibilités offertes par les mesures médiales.

On va chercher à étendre la formule "de Fubini"

$$(A-1) \qquad < \int f_n d\mu,\ \theta> = \int <f_n(x),\ \theta> d\mu(x) .$$

Supposons pour commencer que μ soit une mesure bornée positive, telle que la suite (f_n), non nécessairement positive, soit faiblement relativement compacte dans $L^1(\mu)$, autrement dit uniformément intégrable. On sait que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier p tel que l'on ait

$$\int |f_n - f_n\, 1_{\{|f_n| \leq p\}}| d\mu < \varepsilon, \quad \text{et ceci pour tout } n.$$

On en déduit que la suite $(\int f_n d\mu)$ appartient à l^∞ et que l'on a, en posant $f_n^p = f_n\, 1_{\{|f_n| \leq p\}}$,

$$|<\int f_n d\mu,\ \theta> - <\int f_n^p d\mu,\ \theta>| < \varepsilon, \quad \text{soit encore}$$

$$|<\int f_n d\mu,\ \theta> - \int <f_n^p(x),\ \theta> d\mu(x)| < \varepsilon,$$

on en déduit facilement que $h^p = <f_n^p(.),\ \theta>$ converge pour la topologie $\sigma(L^1(\mu),\ L^\infty(\mu))$ vers un certain élément $\mathfrak{h}$ de $L^1(\mu)$, dont on examinera les propriétés un peu plus loin.

De cela, on déduit par contre immédiatement que, si la suite (f_n) satisfait à l'hypothèse énoncée plus haut pour $\mu = \varepsilon_x$, et ce pour tout x, la suite (h^p) converge $\sigma(L^1(\varepsilon_x),\ L^\infty(\varepsilon_x))$ pour tout x, donc converge simplement vers une fonction η, <u>universellement mesurable et finie</u>, qu'il est donc toujours légitime d'appeler fonction médiale de la suite (f_n). La formule (A-1) s'étend alors aux mesures μ telles que la suite (f_n) soit faiblement relativement compacte dans $L^1(\mu)$. Autrement dit,

(A-2) <u>Dans le cas où la suite (f_n) est quelconque, on peut encore définir une fonction médiale de cette suite, pourvu que, pour tout point x, la suite $(f_n(x))$ soit bornée</u>.

Précisons maintenant la nature de h. De l'inégalité

$$\int |f_n| d\mu \leq \int |f_n - f_n^p| d\mu + \int |f_n^p| d\mu \ ,$$

on déduit déjà que la suite $(\int |f_n| d\mu)$ est bornée. Ecrivons alors les relations habituelles

$$<\int f_n^+ d\mu, \ \theta> = \int <f_n^+(x), \ \theta> d\mu(x) \ ,$$

$$<\int f_n^- d\mu, \ \theta> = \int <f_n^-(x), \ \theta> d\mu(x) \ .$$

En retranchant ces égalités, et en utilisant le même procédé que dans la démonstration du corollaire (4-5), on en déduit l'existence d'une fonction <u>universellement mesurable et finie</u> f, qui est un représentant de h dans $L^1(\mu)$.

De ce résultat, on déduit immédiatement le corollaire (4-3-bis), qui est exactement le corollaire (4-3) dans lequel on a remplacé partout les convergences fortes par des convergences faibles. En effet, la σ-finitude de μ n'est pas une réelle difficulté, si on utilise la bonne définition de l'uniforme intégrabilité pour une mesure σ-finie, c'est-à-dire celle qui équivaut à la compacité faible.

Enfin, dans tous les cas, toutes ces mesures n'ont même pas besoin d'être positives, puisqu'on peut partout remplacer μ par la mesure $|\mu| = f.\mu$, où $f \in L^\infty(\mu)$ est à valeurs -1 ou $+1$.

Autrement dit, l'existence des fonctions médiales montre qu'on ne travaille en fait qu'avec des fonctions universellement mesurables, les complétions de tribus étant la plupart du temps des fignolages inutiles.

(Bien entendu, l'idée d'utiliser la formule (A-1) pour étendre la notion de fonction médiale est dûe à G. MOKOBODZKI).

B I B L I O G R A P H I E

[1] BLUMENTHAL and GETOOR : Markov Processes and Potential Theory. Acad. Press. 1968.

[3-1],[3-2],[3-3],[3-4] : Séminaires de Probabilités 1,2,3,4 de l'Université de Strasbourg. (Springer V.)

[4] C. DELLACHERIE : Théorie générale des Processus 1969 (Inst. Rech. Math. Strasbourg).

[5] P.A. MEYER : Probabilités et Potentiels : Bloisdell Pub. Co. Boston - Hermann, Paris 1966.

[6] P.A. MEYER : Sur les caractéristiques des fonctionnelles additives : Publ. Inst. Stat. Univ. Paris, vol.16, 1967, p. 51-60.

[7] G. MOKOBODZKI : Ultrafiltres rapides sur N, construction d'une densité relative de deux potentiels comparables. Sém. Choquet-Brelot-Deny, 67/68 n° 12.

[8] G. MOKOBODZKI : Densité relative de deux potentiels comparables, sans ultrafiltre rapide (paru dans [3-4]).

[11] P.A. MEYER : Processus de Markov, Springer V., vol.29, (1967).

[13] G. MOKOBODZKI : Fonction médiale d'une suite de fonctions, exposé fait au séminaire d'Initiation à l'Analyse de la faculté de Paris VI en 1972. (A paraître).