



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 89 за 2017 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Ладонкина М.Е., Неклюдова О.А.,
Тишкин В. Ф.

Использование усреднений
для сглаживания решений в
разрывном методе
Галеркина

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Ладонкина М.Е., Неклюдова О.А., Тишкин В. Ф. Использование усреднений для сглаживания решений в разрывном методе Галеркина // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2017. № 89. 32 с. doi:[10.20948/prepr-2017-89](https://doi.org/10.20948/prepr-2017-89)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2017-89>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук**

М.Е. Ладонкина, О.А. Неклюдова, В.Ф. Тишкин

**Использование усреднений
для сглаживания решений
в разрывном методе Галеркина**

Москва — 2017

Ладонкина М.Е., Неклюдова О.А., Тишкин В.Ф.

Использование усреднений для сглаживания решений в разрывном методе Галеркина

В данной работе рассмотрены хорошо зарекомендовавший себя сглаживающий оператор на основе WENO реконструкции и сглаживающий оператор нового типа, учитывающий скорость изменения решения и скорость изменения его производных. Показано, что предложенный в данной работе сглаживающий оператор теоретически не понижает порядок схемы, это подтверждено численными исследованиями. Проведено сравнение действия данных лимитеров при решении серии тестовых задач.

Ключевые слова: разрывный метод Галеркина, WENO реконструкция, сглаживающий оператор

Marina Eugenievna Ladonkina, Olga Alexandrovna Neklyudova, Vladimir Fedorovich Tishkin

Application of averaging to smooth the solution in DG method

The problem of keeping the high order of the solution and providing it's monotony is of current importance. To solve this problem the usage of smoothing operator is proposed instead of limiting. Theoretically it doesn't demote the order of method.

Key words: Discontinuous Galerkin methods, WENO reconstruction, smoothing operator

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты №16-01-00333 и №17-01-00361_A

Введение

Для решения задач газовой динамики широко применяется метод Галеркина с разрывными базисными функциями [1], который характеризуется высоким порядком точности на гладких решениях. Как известно, для обеспечения монотонности решения, полученного данным методом, необходимо вводить так называемые ограничители наклона, или лимитеры, в особенности в том случае, если решение содержит сильные разрывы. Однако применение лимитеров может отрицательно сказаться на точности получаемого решения [2-4]. Поэтому вопрос сохранения порядка точности решения и обеспечения монотонности решения в настоящий момент остается актуальным.

Наиболее широко используемым является классический лимитер Кокбурна [1]. Этот лимитер легко реализуется в многомерном случае на сетках произвольной структуры. К сожалению, данный лимитер снижает точность получаемого решения. В последнее время активно развиваются различные подходы к решению этой проблемы. Один из подходов к созданию лимитера повышенного порядка точности предложен в работах Криводоновой [5]. Однако данный лимитер хорошо работает только на структурированных сетках. Другой подход к созданию лимитера повышенного порядка точности заключается в использовании WENO-ограничителя [6-10].

В данной работе рассмотрены хорошо зарекомендовавший себя [6] сглаживающий оператор на основе WENO реконструкции и сглаживающий оператор нового типа, учитывающий скорость изменения решения и скорость изменения его производных. Идеи, заложенные при построении данных лимитеров, легко переносятся на многомерный случай и сетки произвольной структуры и теоретически не понижают порядок схемы.

Описание разрывного метода Галеркина для уравнений Эйлера

Мы будем рассматривать уравнения одномерной идеальной газовой динамики, которые можно записать в виде:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = 0,$$

где

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ (E + p)u \end{pmatrix}, \quad (1)$$

величины ρ , u , ε , p соответствуют плотности, скорости, удельной внутренней энергии и давлению газа, а $E = \rho \left(\varepsilon + \frac{u^2}{2} \right)$ – полная энергия на единицу объема.

Для определения давления p будем использовать уравнение состояния идеального газа:

$$p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon, \quad (2)$$

где γ – показатель адиабаты.

Эти уравнения должны быть дополнены начальными и граничными условиями, вид которых зависит от конкретной задачи, и будут конкретизированы далее.

Для применения разрывного метода Галеркина покроем отрезок, на котором ищется решение, сеткой $0 = x_{1/2} \leq x_{3/2} \leq \dots \leq x_{N+1/2} = L$ с шагом $\Delta x_i = (x_{i+1/2} - x_{i-1/2})$.

На каждом интервале $x_{i-1/2} \leq x \leq x_{i+1/2}$ приближенное решение системы уравнений (1) будем искать в виде проекции вектора консервативных переменных $U = (\rho, \rho u, E)$ на пространство полиномов $P(x)$ степени p в базисе $\{\phi_k(x)\}$ с зависящими от времени коэффициентами.

Будем рассматривать случаи представления решения в виде линейных $p = 1$ и квадратичных $p = 2$ полиномов. Тогда решения будут иметь вид:

$$U_h(x, t) = \sum_{k=0}^p U_k(t) \phi_k(x), \quad (3)$$

где p – степень полиномов, а $\phi_k(x)$ – соответствующая базисная функция.

Приближенное решение системы (1) в разрывном методе Галеркина ищется как решение следующей системы [1]:

$$\int_{I_i} \partial_t U_h(x,t) \cdot \phi_k(x) dx - \int_{I_i} F(U_h(x,t)) \partial_x \phi_k(x) dx +$$

$$+ F_{i+1/2} \cdot \phi_k(x_{i+1/2}^l) - F_{i-1/2} \cdot \phi_k(x_{i-1/2}^r) = 0, \quad (4)$$

где $i = 0, \dots, N$, $k = 0, 1, 2$.

В формуле (4) $U_h(x,t) = \begin{pmatrix} \rho_h(x,t) \\ \rho u_h(x,t) \\ E_h(x,t) \end{pmatrix}$ – вектор решения, $\phi_k(x_{i+1/2}^l), \phi_k(x_{i-1/2}^r)$

– базисная функция с номером k на интервале I_i , вычисленная в точках $x_{i+1/2}^l, x_{i-1/2}^r$, а $F_{i+1/2}, F_{i-1/2}$ – дискретные потоки, являющиеся монотонными функциями двух переменных

$$F_{i+1/2} = \Phi(U_h(x_{i+1/2}^l, t), U_h(x_{i+1/2}^r, t)),$$

$$F_{i-1/2} = \Phi(U_h(x_{i-1/2}^l, t), U_h(x_{i-1/2}^r, t)),$$

для которых выполнено условие согласования:

$$\Phi(U_h(x_i, t), U_h(x_i, t)) = F(U_h(x_i, t)).$$

В данной работе в качестве численного потока использовались потоки Русанова–Лакса–Фридрихса (5) [11, 12] и поток Годунова [13]

$$\Phi(U_h(x_{i+1/2}^l, t), U_h(x_{i+1/2}^r, t)) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(F(U_h(x_{i+1/2}^l, t)) + F(U_h(x_{i+1/2}^r, t)) - A \cdot (U_h(x_{i+1/2}^r, t) - U_h(x_{i+1/2}^l, t)) \right), \quad (5)$$

$$A = \max_i \left(|u_{i+1/2}^l| + c_{i+1/2}^l, |u_{i+1/2}^r| + c_{i+1/2}^r \right),$$

где $u_{i+1/2}$ – скорость, $c_{i+1/2}$ – скорость звука.

Построение лимитера для разрывного метода Галеркина на основе WENO реконструкции

Как известно, для обеспечения монотонности решения, полученного разрывным методом Галеркина, необходимо вводить так называемые

ограничители наклона, или лимитеры, в особенности в том случае, если решение содержит сильные разрывы. Ограничитель (лимитер) представляет собой некоторый оператор, действующий на функцию приближенного решения на каждом интервале $x_{i-1/2}, x_{i+1/2}$. Будем, согласно [1], обозначать действие этого оператора на функцию u через $\Lambda \Pi_h u$.

В работе [6] предложен лимитер для РМГ на основе WENO реконструкции, который позволяет сохранять высокую точность метода и не искажает профиль решения. Следуя данной работе, опишем лимитирующую WENO процедуру для РМГ.

На первом этапе следует выявить проблемные ячейки, т.е. те ячейки, в которых может потребоваться лимитирование.

На следующем этапе происходит замена численного решения в проблемных ячейках на реконструированное, причем полиномы, полученные при реконструкции, сохраняют исходное интегральное среднее в ячейке, высокий порядок точности, но менее подвержены осцилляциям.

Для определения проблемных ячеек будем использовать TVBminmod [6] лимитер. Обозначим среднее значение решения u на ячейке как:

$$\bar{u}_j = \frac{1}{\Delta x_j} \int_{I_j} u dx.$$

Так же обозначим

$$\tilde{u}_j = u_{j+1/2}^- - \bar{u}_j, \quad \tilde{\tilde{u}}_j = \bar{u}_j - u_{j-1/2}^+,$$

\tilde{u}_j и $\tilde{\tilde{u}}_j$ преобразуются либо с помощью классического minmod лимитера

$$\begin{aligned} \tilde{u}_j^{\text{mod}} &= \min \text{mod}(\tilde{u}_j, \Delta_+ \bar{u}_j, \Delta_- \bar{u}_j), \quad \tilde{\tilde{u}}_j^{\text{mod}} = \min \text{mod}(\tilde{\tilde{u}}_j, \Delta_+ \bar{u}_j, \Delta_- \bar{u}_j), \\ \Delta_+ \bar{u}_j &= \bar{u}_{j+1} - \bar{u}_j, \quad \Delta_- \bar{u}_j = \bar{u}_j - \bar{u}_{j-1}, \end{aligned}$$

где функция minmod определена (6), или же через преобразованную TVBminmod функцию (7).

$$\min \text{mod}(a_1, \dots, a_N) = \begin{cases} \text{sign}(a_1) \min_{1 \leq j \leq N} |a_j|, & \text{если } \text{sign}(a_1) = \dots = \text{sign}(a_N), \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \quad (6)$$

$$\tilde{m}(a_1, \dots, a_N) = \begin{cases} a_1, & \text{если } |a_1| \leq Mh^2, \\ \text{minmod}(a_1, \dots, a_N), & \text{иначе} \end{cases} \quad (7)$$

где параметр M выбирается соответственно решению задачи.

Чтобы выявить проблемные ячейки, будем считать, что если одна из функций minmod сработала, т.е. вернула значения, отличные от первого аргумента, то ячейка будет помечена проблемной.

Построение новых полиномов на проблемных ячейках с использованием WENO лимитера

Основная идея WENO - лимитера заключается в том, что на проблемной ячейке строится новый полином, который является выпуклой комбинацией исходного полинома и полиномов на соседних ячейках с необходимыми поправками для сохранения интегрального среднего в ячейке.

Предположим в ячейке I_j необходимо провести лимитирование решения. Обозначим реконструируемый на данной ячейке полином через P_1 , полиномы на ячейках слева I_{j-1} справа I_{j+1} от P_1 , через P_0 и P_2 соответственно.

Чтобы сохранялось интегральное среднее значение p_1 на текущей ячейке, делаем следующие преобразования: где

$$\tilde{P}_0(x) = P_0(x) - \bar{P}_0 + \bar{P}_1, \quad \tilde{P}_2(x) = P_2(x) - \bar{P}_2 + \bar{P}_1,$$

$$\bar{P}_0 = \frac{1}{\Delta x} \int_{I_j} P_0(x) dx, \quad \bar{P}_1 = \frac{1}{\Delta x} \int_{I_j} P_1(x) dx, \quad \bar{P}_2 = \frac{1}{\Delta x} \int_{I_j} P_2(x) dx,$$

тогда преобразованный полином будет выглядеть следующим образом:

$$P_1^{new}(x) = \omega_0 \tilde{P}_0(x) + \omega_1 P_1(x) + \omega_2 \tilde{P}_2(x), \quad (8)$$

причем интегральное среднее и порядок точности нового полинома $\bar{P}_1^{new}(x)$ совпадают с исходными для $\bar{P}_1(x)$, если $\omega_0 + \omega_1 + \omega_2 = 1$.

Нормализованные веса вычисляются по формулам

$$\omega_l = \frac{\bar{\omega}_l}{\sum_{k=0}^2 \bar{\omega}_k},$$

где $\bar{\omega}_l$ - ненормализованные нелинейные весовые функции от линейных весов γ_l и так называемых индикаторов гладкости β_l

$$\bar{\omega}_l = \frac{\gamma_l}{(\varepsilon + \beta_l)^r}, \quad \beta_l = \sum_{s=1}^p \int_{I_j} \Delta x_j^{2s-1} \left(\frac{\partial^s}{\partial x^s} P_l(x) \right)^2 dx, \quad l=0,1,2,$$

где p – порядок полинома. Во всех расчетах $\varepsilon=10^{-6}$, $r=2$.

Линейные веса могут быть выбраны любыми положительными числами, сумма которых равна 1. Т.к. для гладкого решения наилучшей ячейкой чаще всего является центральная, соответственно работе [6] даем больший линейный вес именно ей.

$$\gamma_1 \gg \gamma_0, \quad \gamma_1 \gg \gamma_2.$$

В расчетах, представленных ниже, использовались коэффициенты, указанные в первоисточнике: $\gamma_0 = 0.001, \gamma_1 = 0.998, \gamma_2 = 0.001$.

Построение лимитера для разрывного метода Галеркина на основе усреднения решения

В данной работе предлагается иной подход к построению лимитера. Рассмотрим новый полином

$$P_j^{sm} = \bar{P}_j + P_j^0 \left(1 - \max(\alpha_{j+1/2}, \alpha_{j-1/2}) \right), \quad P_j^0 = P_j - \bar{P}_j. \quad (9)$$

Необходимо выбрать критерий для выбора коэффициентов $\alpha_{j+1/2}, \alpha_{j-1/2}$.

Во-первых, рассмотрим порядок отклонения соседних полиномов от среднего арифметического их интегральных средних. Возьмем в качестве одного из коэффициентов

$$\mu_{j+1/2} = \frac{\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+3/2}} (P_j - P_{j+1})^2 dx}{\left(\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+3/2}} (P_j - P_{j+1/2}^{av})^2 dx + \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+3/2}} (P_{j+1} - P_{j+1/2}^{av})^2 dx \right)}, \quad P_{j+1/2}^{av} = \frac{\bar{P}_j + \bar{P}_{j+1}}{2}. \quad (10)$$

Данный коэффициент не понижает порядок полученного полинома.

Обратим внимание, что в разрывном методе Галеркина:

$$\frac{\partial^k P_j}{\partial x^k}(x_j) = \gamma_k u_k^j, \quad \frac{\partial^k P_{j+1}}{\partial x^k}(x_{j+1}) = \gamma_k u_k^{j+1}, \quad (11)$$

где x_j - центр ячейки I_j . Коэффициенты γ определяются выбором базиса в разрывном методе Галеркина.

Заметим, что из равенств (11) следует, что

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^{k-1} P}{\partial x^{k-1}} \right) (x_{j+1/2}) = \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^{k-1} P_{j+1}}{\partial x^{k-1}} (x_{j+1}) - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^{k-1} P_j}{\partial x^{k-1}} (x_j) \right).$$

С другой стороны, производные по времени $\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^{k-1} P}{\partial x^{k-1}} (x_{j+1/2})$ можно определить как:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^k P}{\partial x^k} (x_{j+1/2}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^k P_{j+1}}{\partial x^k} (x_{j+1}) + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^k P_j}{\partial x^k} (x_j) \right).$$

Таким образом можно определить коэффициент $\beta_{j+1/2}$ через скорость изменения решения и его производных

$$\beta_{j+1/2} = \sum_{s=1}^k \frac{\left| \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^{s-1} P_{j+1}}{\partial x^{s-1}} (x_{j+1}) - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^{s-1} P_j}{\partial x^{s-1}} (x_j) \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^s P_{j+1}}{\partial x^s} (x_{j+1}) + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^s P_j}{\partial x^s} (x_j) \right) \right|}{\left| \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^{s-1} P_{j+1}}{\partial x^{s-1}} (x_{j+1}) - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^{s-1} P_j}{\partial x^{s-1}} (x_j) \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^s P_{j+1}}{\partial x^s} (x_{j+1}) + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^s P_j}{\partial x^s} (x_j) \right) \right|}. \quad (12)$$

Составим коэффициент

$$\alpha_{j+1/2} = \mu_{j+1/2} \beta_{j+1/2} \frac{c_{j+1/2} \cdot \Delta t}{\Delta x}, \quad (13)$$

пропорциональный шагу по времени, но не нарушающий размерность.

В коэффициенте присутствует множитель $\frac{1}{\Delta x}$, что теоретически может понизить точность решения, поэтому замена его на множитель $\frac{\rho_1}{\bar{\rho}}$, где

$\rho_h(x) = \sum_{k=0}^p \rho_k(x) \phi_k(x)$ -плотность (1), $\bar{\rho}$ - интегральное среднее, а ρ_1 первая

производная $\rho_h(x)$, теоретически позволит нам сохранить порядок точности схемы:

$$\alpha_{j+1/2} = \mu_{j+1/2} \beta_{j+1/2} \frac{c_{j+1/2} \cdot \Delta t}{\rho / \rho_1}. \quad (14)$$

Исследование порядка точности метода

Для исследования порядка точности описанного лимитера рассмотрим задачу, описанную в работу [2]. Будем использовать простую волну, в которой энтропия $\frac{p}{\rho^\gamma}$ и инвариант Римана $R^+ = u + \frac{2}{\gamma-1}c$ являются постоянными.

Распределение плотности в начальный момент выберем в виде бесконечно гладкой функции:

$$\rho = \begin{cases} 1 + e^{2-2\frac{l^2}{l^2-x^2}}, & |x| < l, \quad x \in [-1, 1], \quad l = 0.2, \quad \gamma = 5/3. \\ 1, & \text{иначе} \end{cases} \quad (15)$$

Остальные гидродинамические параметры определяются из условий постоянства энтропии и инварианта R^+

$$\varepsilon = \rho^{(\gamma-1)}, \quad u = \frac{-2\sqrt{\varepsilon(\gamma-1)\gamma}}{\gamma-1}, \quad E = \rho\varepsilon + \rho\frac{u^2}{2}.$$

Численное решение задачи было получено разрывным методом Галеркина с линейными и квадратичными базисными функциями. На границах области были заданы постоянные граничные условия:

$$\begin{aligned} \rho(-1, t) = 1, \quad u(-1, t) = -\sqrt{10}, \quad E(-1, t) = 6, \\ \rho(1, t) = 1, \quad u(1, t) = -\sqrt{10}, \quad E(1, t) = 6. \end{aligned}$$

Определены порядки точности Od исследуемого метода в нормах L^1 , L^2 и L^4 .

$$\|U^* - U^T\|_{L^p} = \left(\int_{-1}^1 (U^* - U^T)^p \right)^{1/p} \quad (16)$$

$$Od = \log_{1/2} \frac{\|U_h - U^T\|_{L^2}}{\|U_{h/2} - U^T\|_{L^2}} \quad (17)$$

на моменты времени $T = 0.05$ и $T = 0.07$.

Таблица 1а

Без лимитера					T = 0.05
L^1	N	p = 1		p = 2	
		ошибка	порядок	ошибка	порядок
	500	3.13e-05		5.06e-07	
	1000	6.23e-06	2.33	6.28e-08	3.01
	2000	1.34e-06	2.21	7.73e-09	3.02
	4000	3.09e-07	2.11	9.30e-10	3.05
L^2					
	500	1.49e-04		3.10e-06	
	1000	2.80e-05	2.41	3.88e-07	2.99
	2000	5.77e-06	2.27	4.79e-08	3.02
	4000	1.29e-06	2.15	5.73e-09	3.06
C					
	500	1.79e-03		4.46e-05	
	1000	3.39e-04	2.40	5.64e-06	2.98
	2000	6.67e-05	2.34	7.02e-07	3.00
	4000	1.41e-05	2.23	8.36e-08	3.06

Таблица 1б

Без лимитера					T = 0.07
L^1	N	p = 1		p = 2	
		ошибка	порядок	ошибка	порядок
	500	9.35e-05		3.72e-06	
	1000	1.66e-05	2.49	3.07e-07	3.59
	2000	3.09e-06	2.42	3.58e-08	3.10
	4000	6.43e-07	2.26	4.33e-09	3.04
L^2					
	500	7.81e-04		3.82e-05	
	1000	1.63e-04	2.25	3.66e-06	3.38
	2000	2.93e-05	2.48	4.14e-07	3.14
	4000	5.32e-06	2.46	4.97e-08	3.05
C					
	500	1.13e-02		6.72e-04	
	1000	3.62e-03	1.64	8.06e-05	3.06
	2000	6.56e-04	2.46	1.12e-05	2.83
	4000	1.16e-04	2.49	1.33e-06	3.08

Таблица 2а

WENO		T = 0.05			
L^1	N	p = 1		p = 2	
		ошибка	порядок	ошибка	порядок
	500	3.52e-05		1.98e-05	
	1000	6.30e-06	2.48	1.68e-07	6.88
	2000	1.35e-06	2.22	8.09e-09	4.37
	4000	3.10e-07	2.12	9.53e-10	3.08
L^2	500	1.58e-04		1.11e-04	
	1000	2.81e-05	2.49	1.54e-06	6.17
	2000	5.83e-06	2.27	4.85e-08	4.99
	4000	1.29e-06	2.16	5.76e-09	3.07
C	500	1.79e-03		1.36e-03	
	1000	3.40e-04	2.39	3.87e-05	5.13
	2000	6.73e-05	2.33	7.02e-07	5.78
	4000	1.42e-05	2.24	8.36e-08	3.06

Таблица 2б

WENO		T = 0.07			
L^1	N	p = 1		p = 2	
		ошибка	порядок	ошибка	порядок
	500	9.78e-05		4.24e-05	
	1000	1.66e-05	2.55	4.93e-06	3.10
	2000	3.10e-06	2.42	4.52e-08	6.76
	4000	6.46e-07	2.26	4.37e-09	3.37
L^2	500	7.83e-04		2.77e-04	
	1000	1.63e-04	2.25	4.74e-05	2.54
	2000	2.93e-05	2.48	4.65e-07	6.67
	4000	5.34e-06	2.45	4.97e-08	3.22
C	500	1.13e-02		3.48e-03	
	1000	3.62e-03	1.64	8.30e-04	2.06
	2000	6.56e-04	2.46	1.13e-05	6.18
	4000	1.16e-04	2.49	1.33e-06	3.09

Таблица 3а

$k \sim \rho_1 / \bar{\rho}$					$\Gamma = 0.05$
L^1	N	$p = 1$		$p = 2$	
		ошибка	порядок	ошибка	порядок
	500	3.13e-05		5.04e-07	
	1000	6.23e-06	2.33	6.28e-08	3.00
	2000	1.34e-06	2.21	7.73e-09	3.02
	4000	3.09e-07	2.11	9.31e-10	3.05
L^2	500	1.49e-04		3.10e-06	
	1000	2.80e-05	2.41	3.88e-07	2.99
	2000	5.77e-06	2.27	4.79e-08	3.02
	4000	1.29e-06	2.15	5.73e-09	3.06
C	500	1.79e-03		4.46e-05	
	1000	3.39e-04	2.40	5.64e-06	2.98
	2000	6.67e-05	2.34	7.02e-07	3.00
	4000	1.41e-05	2.23	8.36e-08	3.06

Таблица 3б

$k \sim \rho_1 / \bar{\rho}$					$\Gamma = 0.07$
L^1	N	$p = 1$		$p = 2$	
		ошибка	порядок	ошибка	порядок
	500	9.35e-05		3.71e-06	
	1000	1.66e-05	2.49	3.07e-07	3.59
	2000	3.09e-06	2.42	3.58e-08	3.10
	4000	6.43e-07	2.26	4.33e-09	3.04
L^2	500	7.81e-04		3.83e-05	
	1000	1.63e-04	2.25	3.66e-06	3.38
	2000	2.93e-05	2.48	4.14e-07	3.14
	4000	5.32e-06	2.46	4.97e-08	3.05
C	500	1.13e-02		6.73e-04	
	1000	3.62e-03	1.64	8.06e-05	3.06
	2000	6.56e-04	2.46	1.12e-05	2.83
	4000	1.16e-04	2.49	1.33e-06	3.08

Таблица 4а

$k \sim \Delta x$		$T = 0.05$			
L^1	N	$p = 1$		$p = 2$	
		ошибка	порядок	ошибка	порядок
	500	3.13e-05		2.02e-06	
	1000	6.23e-06	2.33	6.60e-08	4.93
	2000	1.34e-06	2.21	7.73e-09	3.09
	4000	3.09e-07	2.11	9.31e-10	3.05
L^2					
	500	1.49e-04		1.28e-05	
	1000	2.80e-05	2.41	3.93e-07	5.02
	2000	5.77e-06	2.27	4.79e-08	3.03
	4000	1.29e-06	2.15	5.73e-09	3.06
C					
	500	1.79e-03		1.65e-04	
	1000	3.39e-04	2.40	5.64e-06	4.87
	2000	6.67e-05	2.34	7.02e-07	3.00
	4000	1.41e-05	2.23	8.36e-08	3.06

Таблица 4б

$k \sim \Delta x$		$T = 0.07$			
L^1	N	$p = 1$		$p = 2$	
		ошибка	порядок	ошибка	порядок
	500	9.35e-05		5.42e-06	
	1000	1.66e-05	2.49	3.12e-07	4.11
	2000	3.09e-06	2.42	3.58e-08	3.12
	4000	6.43e-07	2.26	4.33e-09	3.04
L^2					
	500	7.81e-04		4.05e-05	
	1000	1.63e-04	2.25	3.67e-06	3.46
	2000	2.93e-05	2.48	4.14e-07	3.14
	4000	5.32e-06	2.46	4.97e-08	3.05
C					
	500	1.13e-02		6.74e-04	
	1000	3.62e-03	1.64	8.06e-05	3.06
	2000	6.56e-04	2.46	1.12e-05	2.83
	4000	1.16e-04	2.49	1.33e-06	3.08

Численные эксперименты

Рассмотрим серию тестовых задач одномерной нестационарной газовой динамики [14-21]. Несмотря на простоту постановки, данные задачи отражают все особенности газодинамических течений. Начальные данные и расчетные области заданы в таблицах 5-6.

Таблица 5а

Номер задачи	Значения газодинамических параметров слева			Значения газодинамических параметров справа			Расчетное время
	ρ	u	p	ρ	u	p	
1	1	0	1	0.125	0	0.1	2.0
2	0.445	0.698	3.528	0.5	0	0.571	1.3
3	1	0	1	0.02	0	0.02	0.15
4	3,857	0.920	10.333	1	3.55	1	0.09
5	1	-2	0.4	1	2	0.4	0.15
6	3.857143	2.629369	10.3333	$1+0.2\sin(5x)$	0	1	1.8

Таблица 5б

Номер задачи	L $0 \leq x \leq 0.1$			M $0.1 \leq x \leq 0.9$			R $0.9 \leq x \leq 1$			Расчетное время
	ρ	u	p	ρ	u	p	ρ	u	p	
7	1	0	10^3	1	0	10^{-2}	1	0	10^2	0.038

Таблица 6

Номер задачи	Расчетная область	Положение точки разрыва	Число ячеек
1	$-5 \leq x \leq 5$	$x_0 = 0$	100
2	$-5 \leq x \leq 5$	$x_0 = 0$	100
3	$0 \leq x \leq 1$	$x_0 = 0.5$	100
4	$0 \leq x \leq 1$	$x_0 = 0.5$	100
5	$0 \leq x \leq 1$	$x_0 = 0.5$	100
6	$-5 \leq x \leq 5$	$x_0 = -4$	200
7	$0 \leq x \leq 1$		400

Рассмотрим одномерную систему уравнений Эйлера (1) с уравнением состояния идеального газа. Во всех расчетах показатель адиабаты $\gamma = 1.4$.

Задача 1 (Sod problem). В результате распада разрыва возникает ударная волна, движущаяся в область низкого давления, веер волн разрежения, расширяющийся в область высокого давления, и контактный разрыв.

Задача 2 (Lax problem). В данной задаче возникает такая же конфигурация решения, как и в задаче Сода, состоящая из ударной волны, контактного разрыва с большими перепадами газодинамических параметров, чем в предыдущей задаче, и, в отличие от задачи Сода, менее интенсивного веера волн разрежения.

Задача 3 (Supersonic shock tube). Конфигурация решения данной задачи аналогична двум предыдущим. Возникает ударная волна, веер волн разрежения и контактный разрыв. Однако решение данной задачи позволяет оценить работу вычислительных схем в возникающих областях сверхзвуковых течений.

Задача 4 (Mach 3 problem). Решение представляет собой контактный разрыв и две волны разрежения.

Задача 5 (Einfeldt problem). В результате решения возникают два симметричных веера волн разрежения, распространяющиеся в противоположные стороны, и неподвижный контактный разрыв.

Задача 6 (Woodward-Colella blast waves). Данная задача представляет собой модель взаимодействия двух ударных волн и является одним из общепринятых тестов для проверки работоспособности численных методов решения задач газовой динамики.

Задача 7 (Shock entropy wave interaction) представляет собой взаимодействие ударной волны с энтропийным возмущением. Число Маха ударной волны, движущейся вдоль оси X , составляет величину $M=3.5$. После прохождения ударной волны за фронтом формируется сложное течение, в котором со временем образуется серия ударных волн меньшей амплитуды.

Для выявления дефектных ячеек необходимо определить параметр M в TVB-minmod лимитере. Первая серия расчетов была проведена с параметром $M=0.01$. Данный параметр с избытком определяет ячейки, на которых необходимо провести лимитирование. Следующим шагом было определение критического значения параметра M таким образом, чтобы его дальнейшее увеличение не влияло бы на качество лимитирования, то есть расчет выполнялся бы без лимитера.

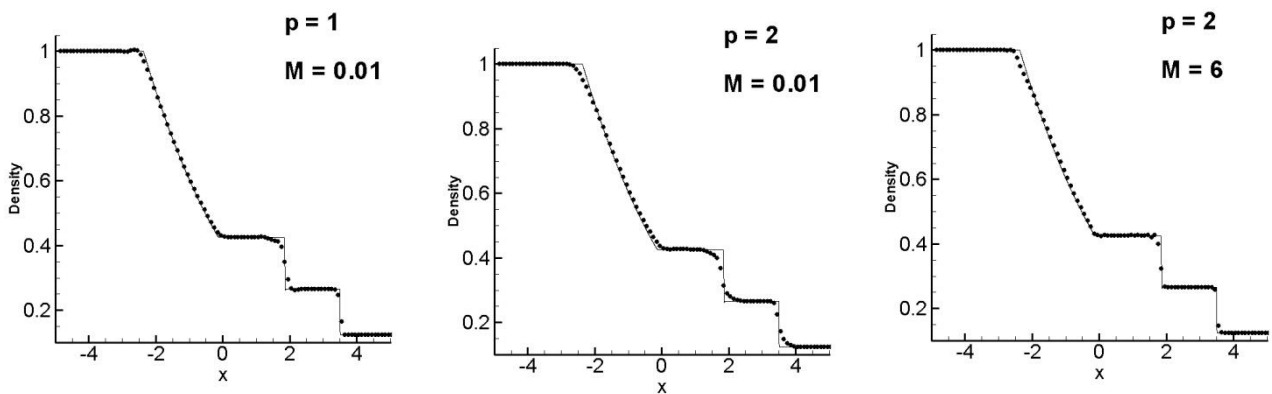


Рис.1.1 Профили плотности в Задаче 1 при использовании усреднения решения с коэффициентом $k \sim \rho_1/\bar{\rho}$

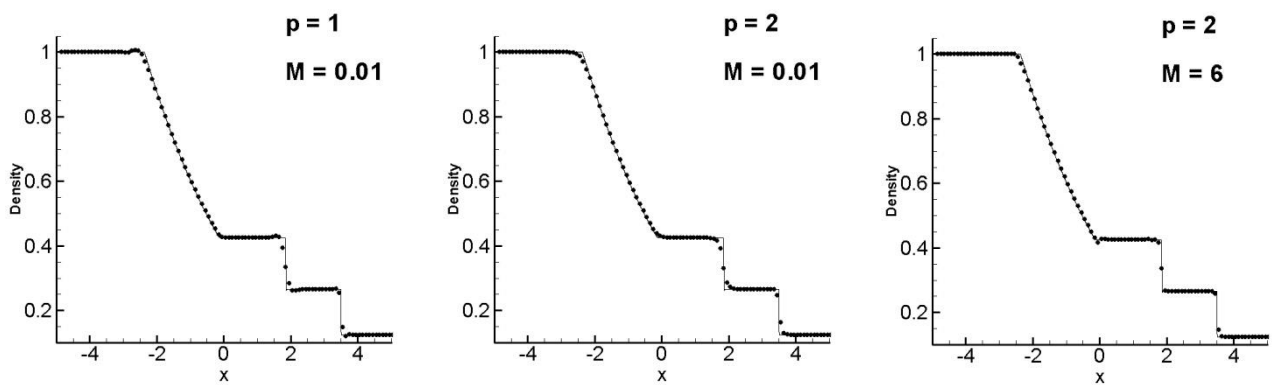


Рис.1.2 Профили плотности в Задаче 1 при использовании усреднения решения с коэффициентом $k \sim \Delta x$

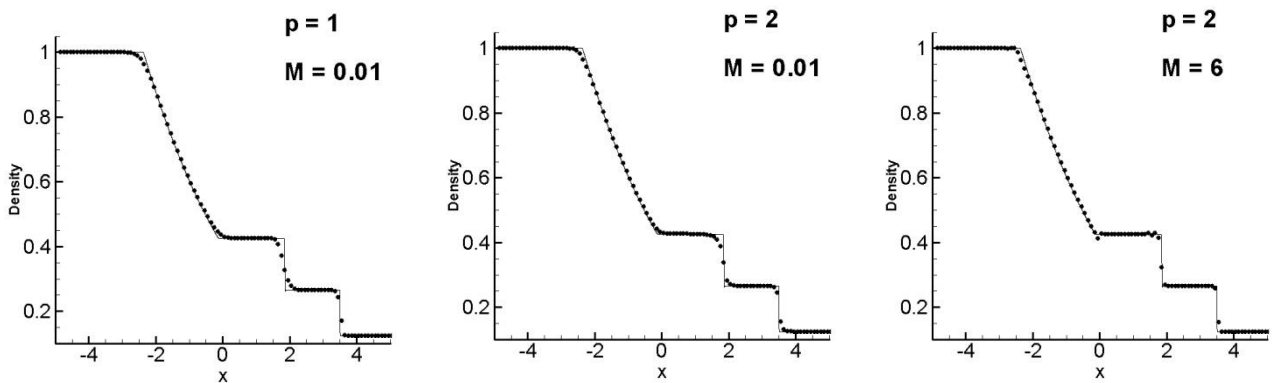


Рис.1.3 Профили плотности в Задаче 1 при использовании WENO лимитера

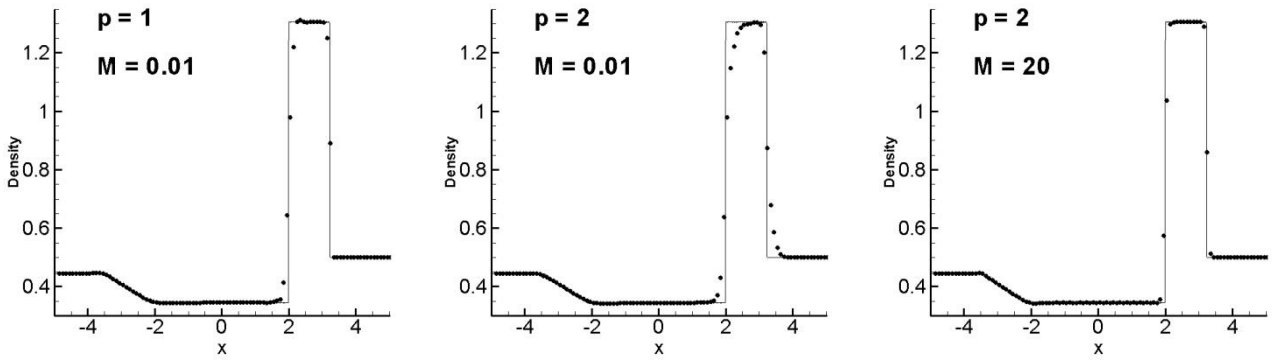


Рис.2.1 Профили плотности в Задаче 2 при использовании усреднения решения с коэффициентом $k \sim \rho_1/\bar{\rho}$

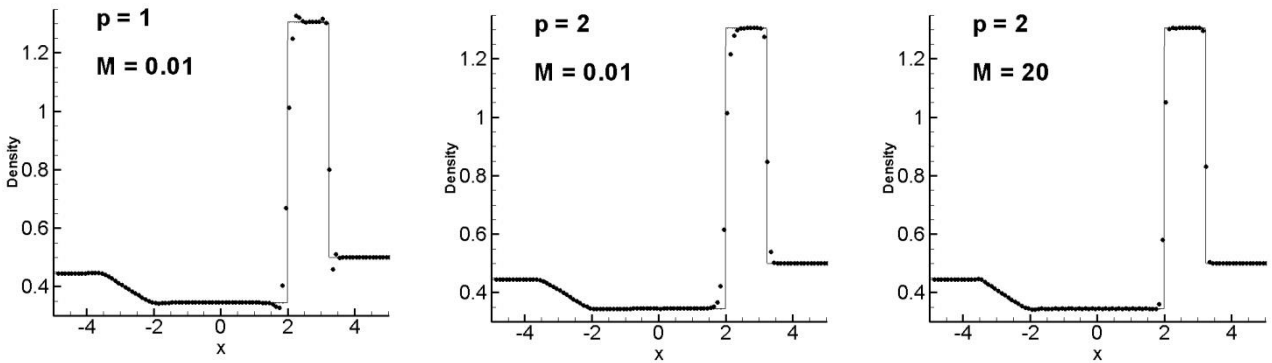


Рис.2.2 Профили плотности в Задаче 2, при использовании усреднения решения с коэффициентом $k \sim \Delta x$

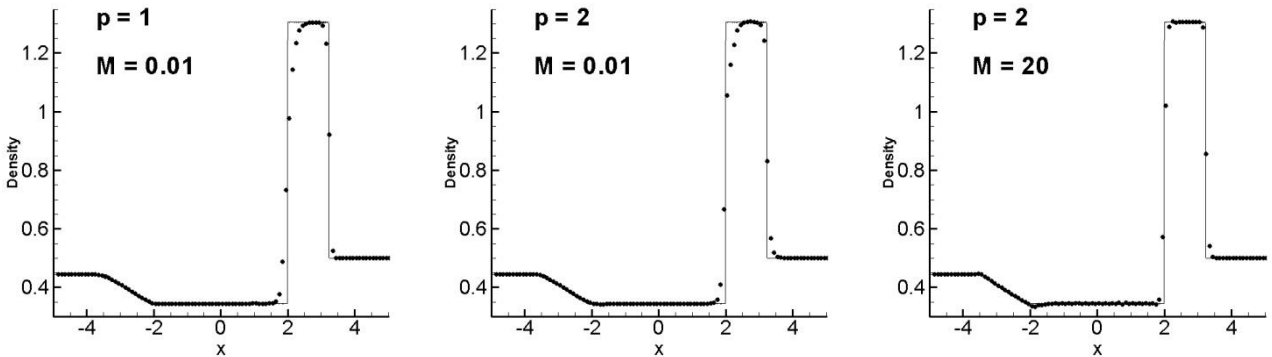


Рис.2.3 Профили плотности в Задаче 2 при использовании WENO лимитера

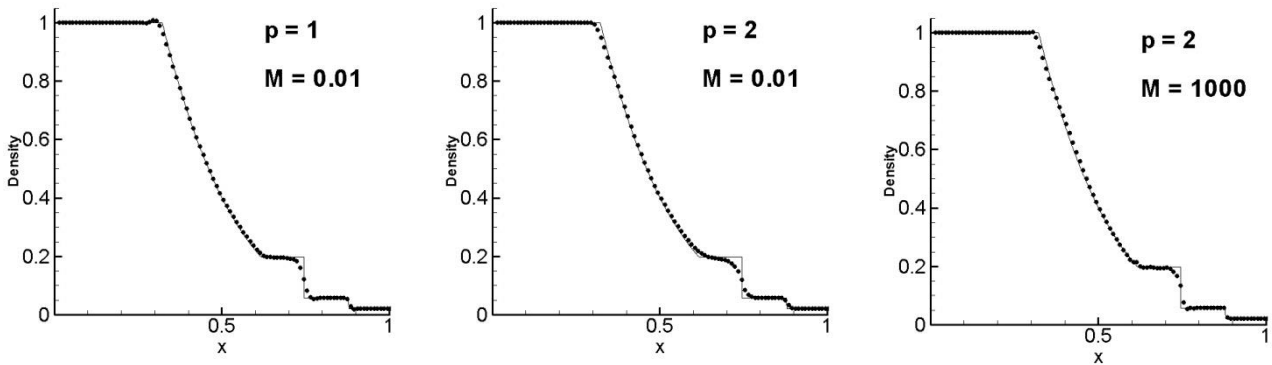


Рис.3.1 Профили плотности в Задаче 3 при использовании усреднения решения с коэффициентом $k \sim \rho_1/\bar{\rho}$

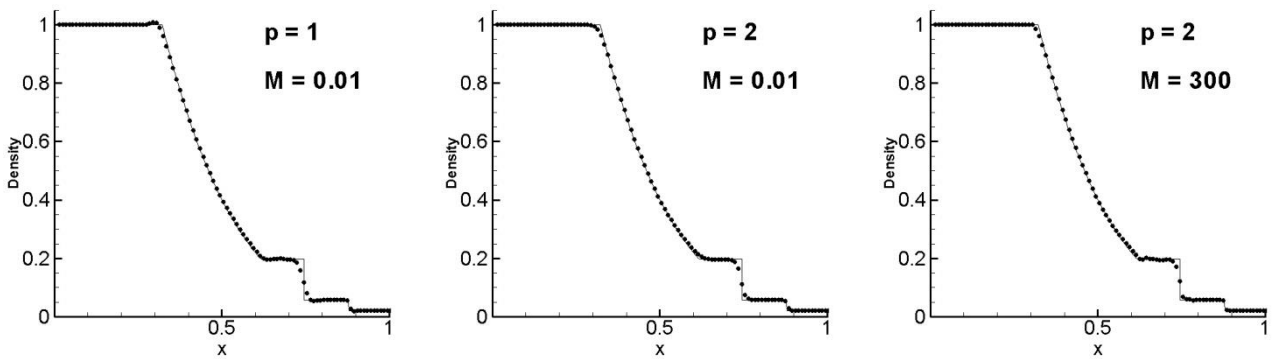


Рис.3.2 Профили плотности в Задаче 3 при использовании усреднения решения с коэффициентом $k \sim \Delta x$

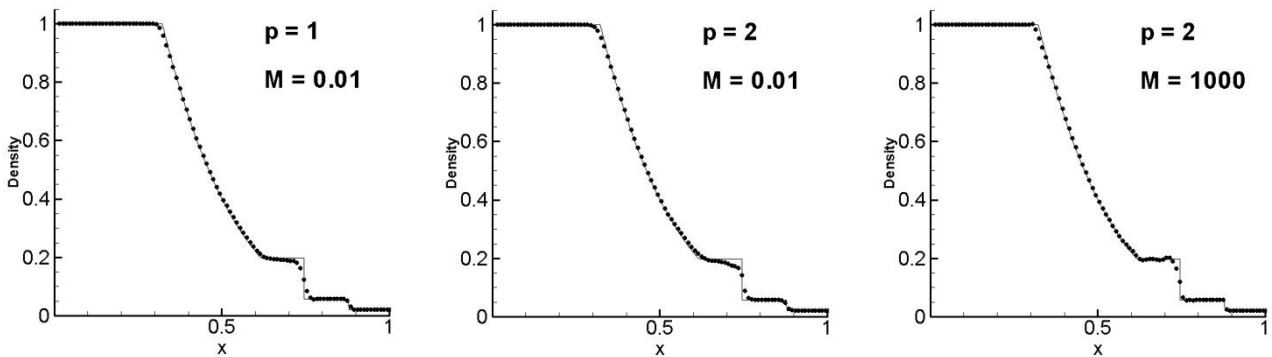


Рис.3.3 Профили плотности в Задаче 3 при использовании WENO лимитера

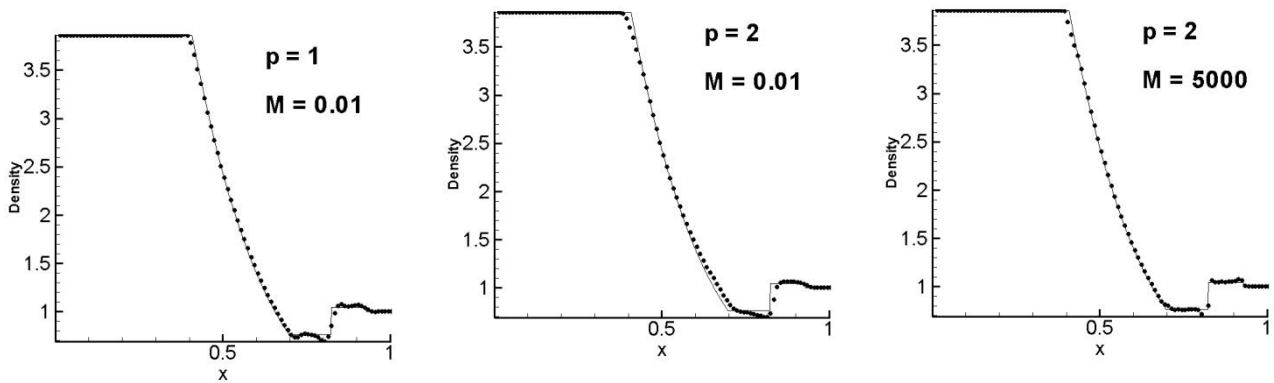


Рис.4.1 Профили плотности в Задаче 4 при использовании усреднения решения с коэффициентом $k \sim \rho_1/\bar{\rho}$

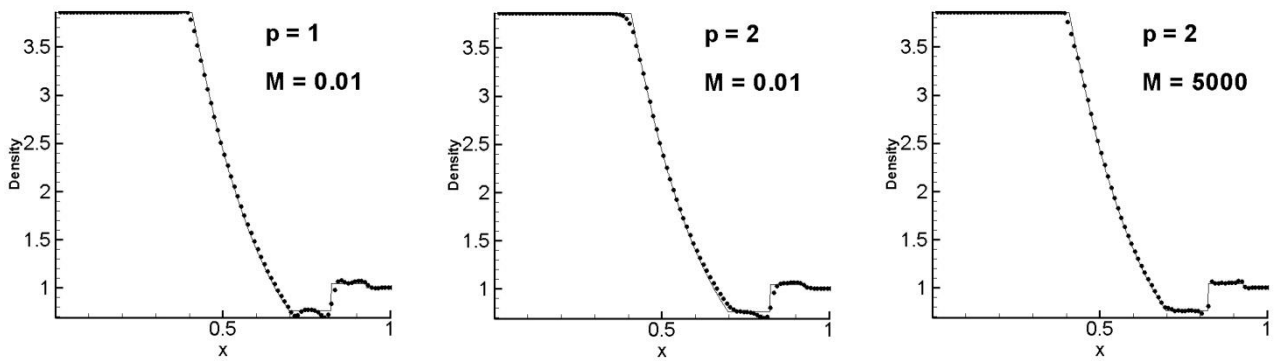


Рис.4.2 Профили плотности в Задаче 4 при использовании усреднения решения с коэффициентом $k \sim \Delta x$

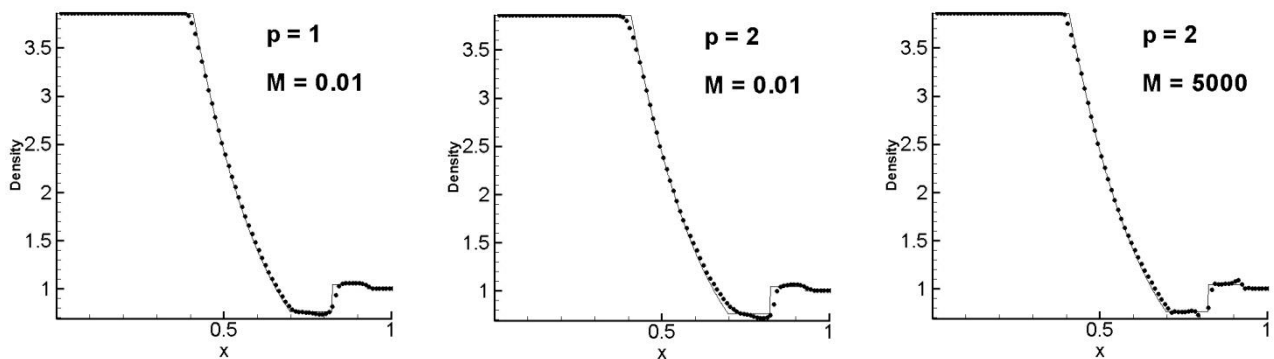


Рис.4.3 Профили плотности в Задаче 4 при использовании WENO-лимитера

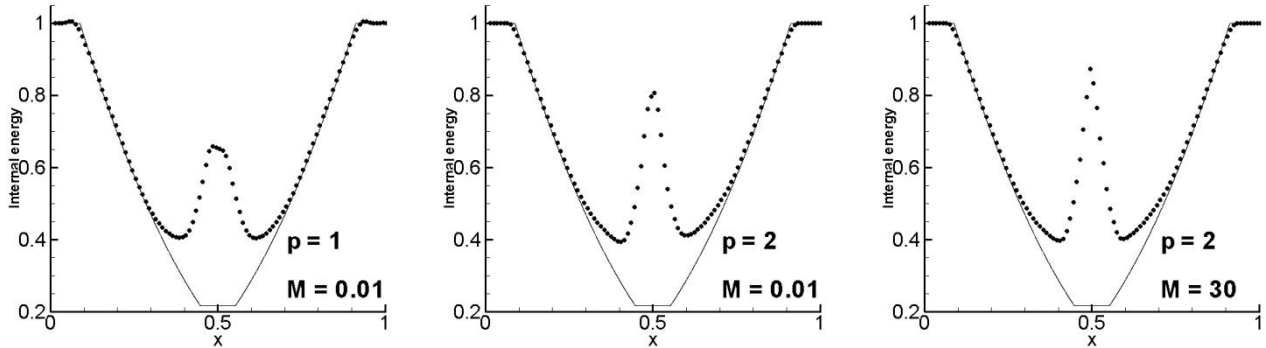


Рис.5.1 Профили внутренней энергии в Задаче 5 при использовании усреднения решения с коэффициентом $k \sim \rho_1/\bar{\rho}$

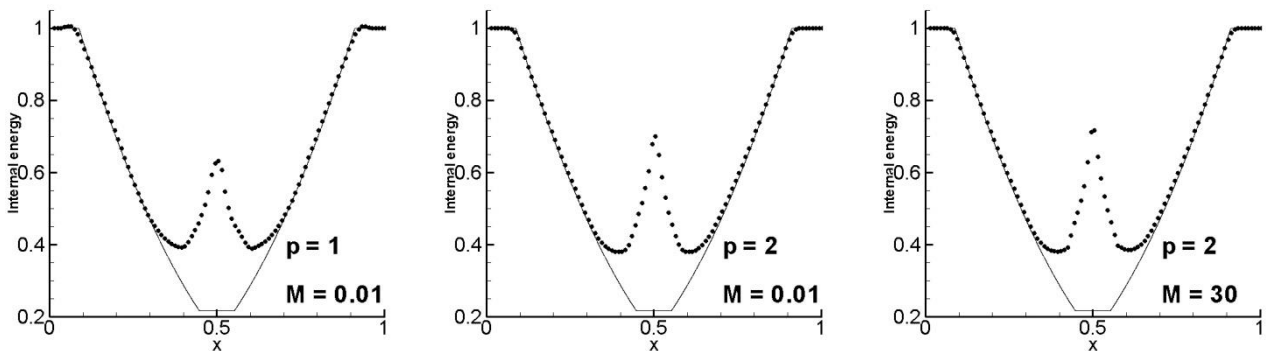


Рис.5.2 Профили внутренней энергии в Задаче 5 при использовании усреднения решения с коэффициентом $k \sim \Delta x$

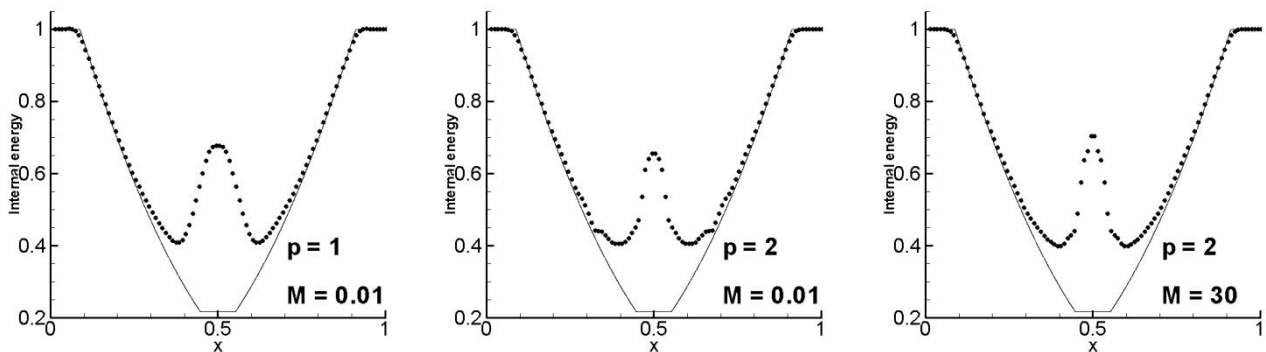


Рис.5.3 Профили внутренней энергии в Задаче 5 при использовании WENO лимитера

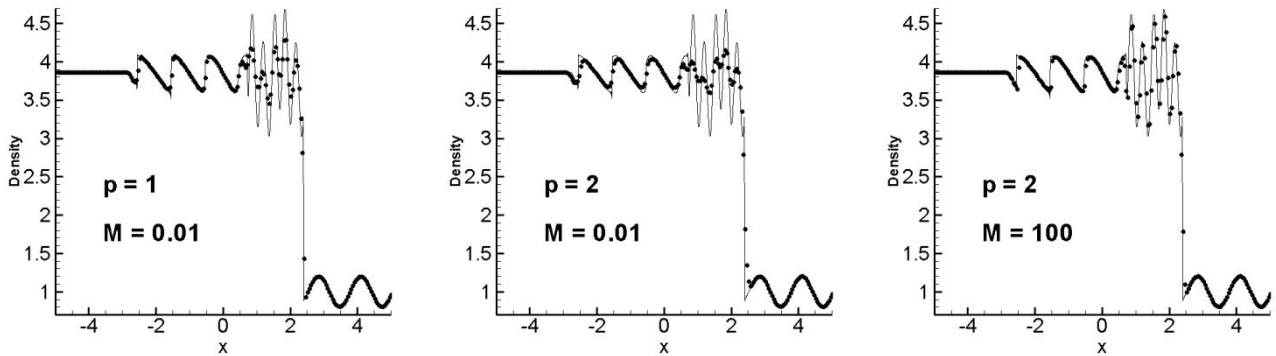


Рис.6.1 Профили плотности в Задаче 6 при использовании усреднения решения с коэффициентом $k \sim \rho_1/\rho$

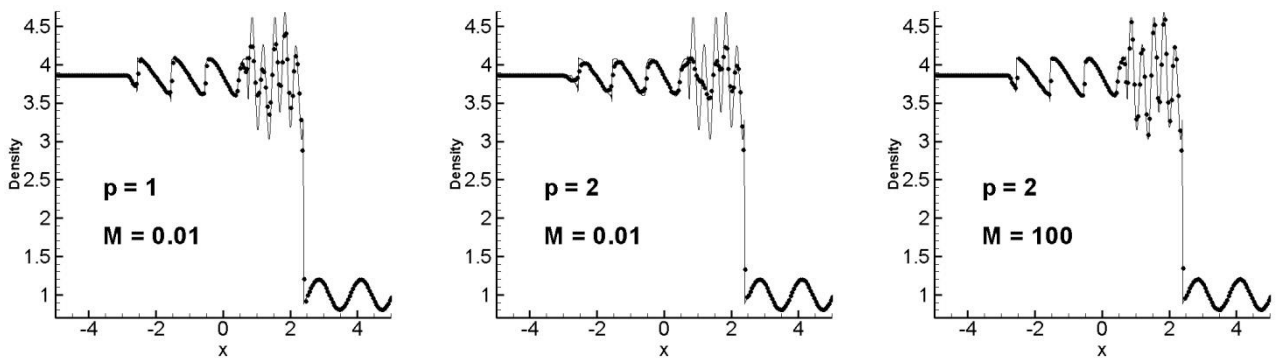


Рис.6.2 Профили плотности в Задаче 6 при использовании усреднения решения с коэффициентом $k \sim \Delta x$

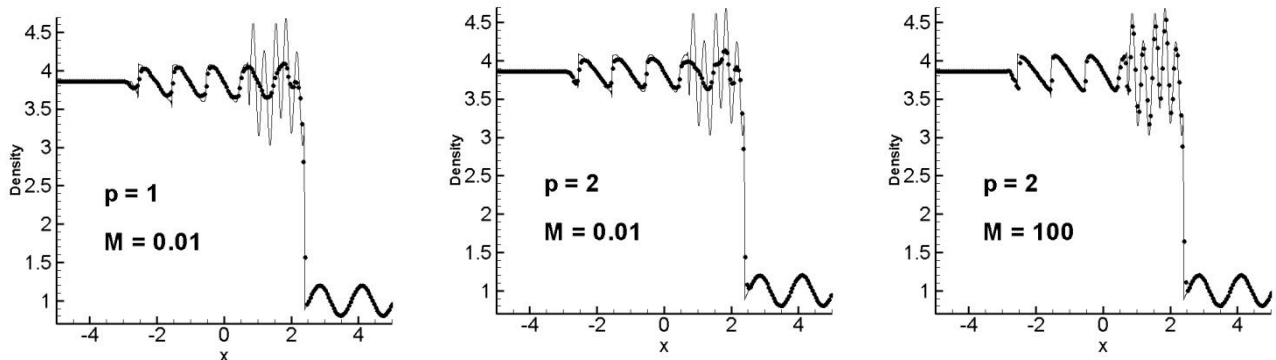


Рис.6.3 Профили плотности в Задаче 6 при использовании WENO лимитера

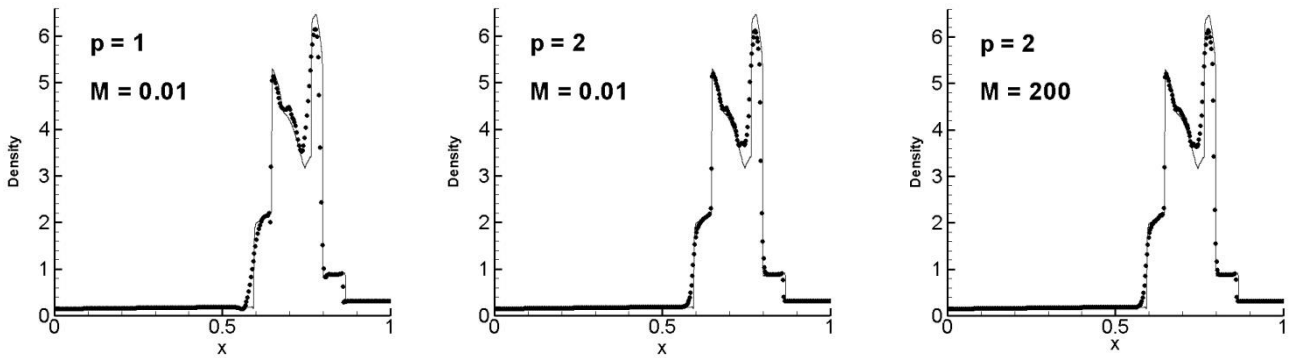


Рис.7.1 Профили плотности в Задаче 7 при использовании усреднения решения с коэффициентом $k \sim \rho_1/\bar{\rho}$

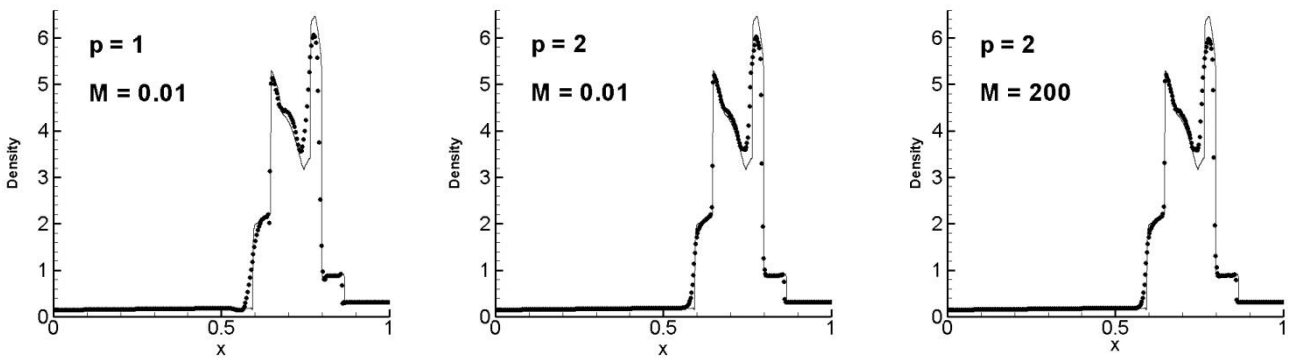


Рис.7.2 Профили плотности в Задаче 7 при использовании усреднения решения с коэффициентом $k \sim \Delta x$

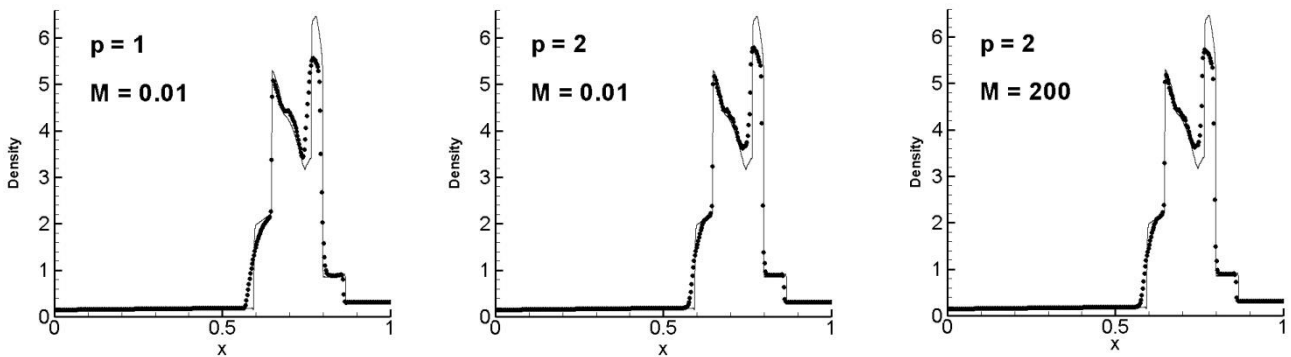


Рис.7.3 Профили плотности в Задаче 7 при использовании WENO лимитера

На рисунках 1-7 представлены результаты расчетов тестовых задач. Как видно из результатов расчетов Задач 1-5, при использовании линейных полиномов нельзя однозначно определить преимущества использования того либо иного лимитера. Однако при решении более сложных задач 6, 7 использование лимитеров на основе усреднений дает лучший результат. При переходе к использованию квадратичных полиномов в некоторых случаях заметно явное улучшение профиля решений (рис. 1.2-4.2) при использовании лимитера на основе усреднений с коэффициентом $k \sim \Delta x$, в то время как использование лимитера типа WENO показало улучшение только в задаче 1. Коэффициент $k \sim \rho_1/\bar{\rho}$ при использовании квадратичных функций делает лимитер более диссипативным.

Следующая серия расчетов заключалась в определении критического значения параметра M . Так, с увеличением параметра M , во всех задачах закономерно наблюдаются более четкие профили в областях разрывов решений (рис.1-7, графики 2 и 3), но в то же время наблюдается и появление осцилляций. При решении задачи 7 увеличение параметра M не привело к значительному улучшению качества решения.

Наиболее сложными для численного решения оказались задача 4 и задача 5. Обе представляют собой распад газодинамического разрыва в виде контактного разрыва и двух волн разряжения. При решении задачи 4 хорошие результаты были получены с использованием лимитера типа WENO на линейных базисных функциях, для квадратичных базисных функций изменение параметра M не привело к заметному улучшению результатов.

Стоит отдельно остановиться на решении Задачи 5. Как известно, данная задача часто используется при тестировании численных методов, и одним из показателей хорошо работающей схемы является точность передачи области контактного разрыва. Практически во всех расчетах наблюдается нефизический всплеск внутренней энергии. Мы рассмотрели несколько численных схем для решения данной задачи. Приведем серию расчетов, выполненных по схеме Годунова первого порядка и разрывному методу Галеркина третьего порядка с квадратичными базисными функциями [2-5].

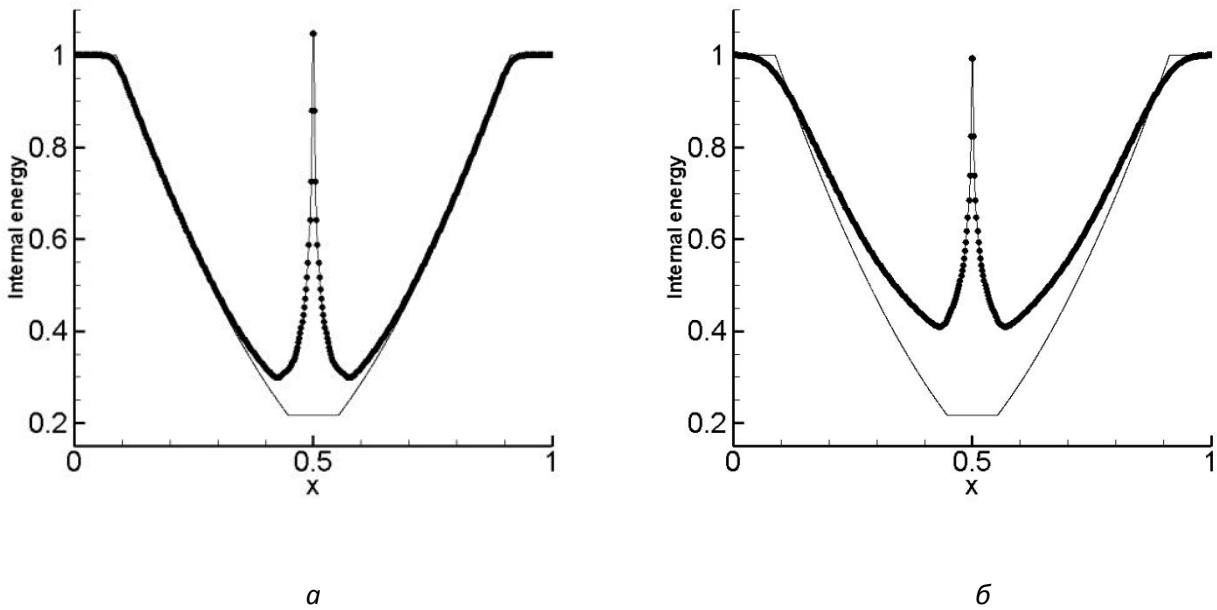


Рис.8 Профили внутренней энергии в Задаче 5, число ячеек: 500
 а) РМГ, $P=2$, поток Годунова, моментный лимитер; б) схема Годунова $P=0$

Добавив в численную аппроксимацию потока (5) псевдотеплопроводность, получим явное уменьшение выброса энтропии

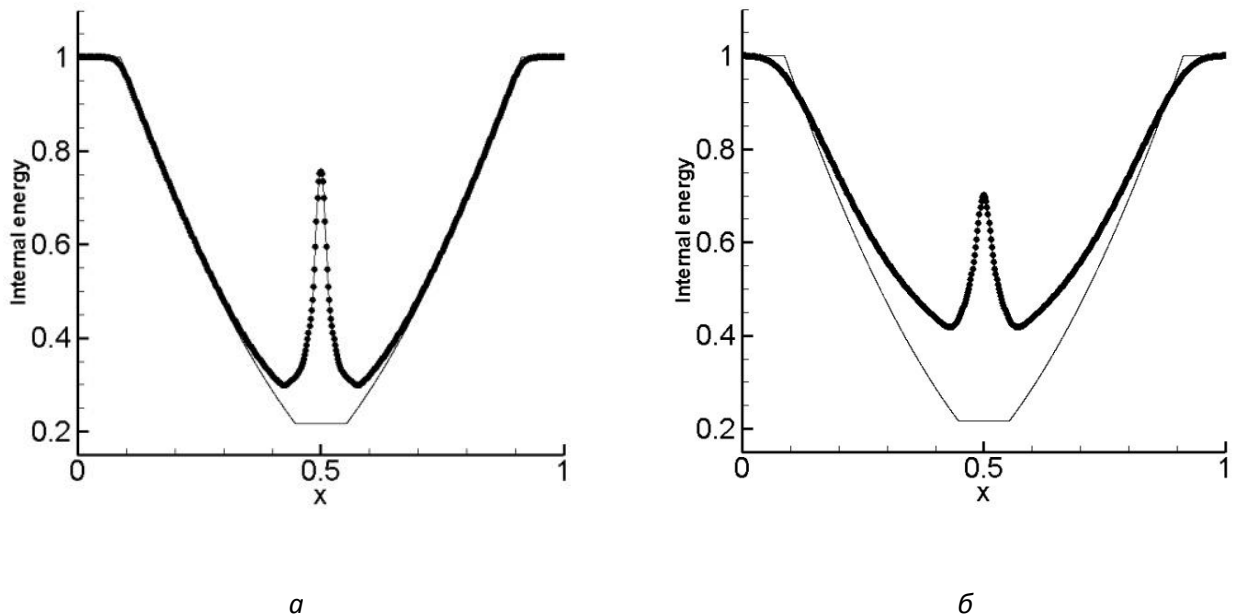


Рис.9 Профили внутренней энергии в Задаче 5
 с учетом псевдотеплопроводности:
 а) моментный лимитер, $P=2$; б) схема Годунова $P=0$

Обратим внимание на задание начальных данных. В данной задаче точка разрыва $x_0 = 0.5$ приходится на границу между ячейками. В области слева от точки разрыва $x \leq x_0$ скорость $u = -0.2$, а в области справа $-u = 0.2$ (рис.10а).

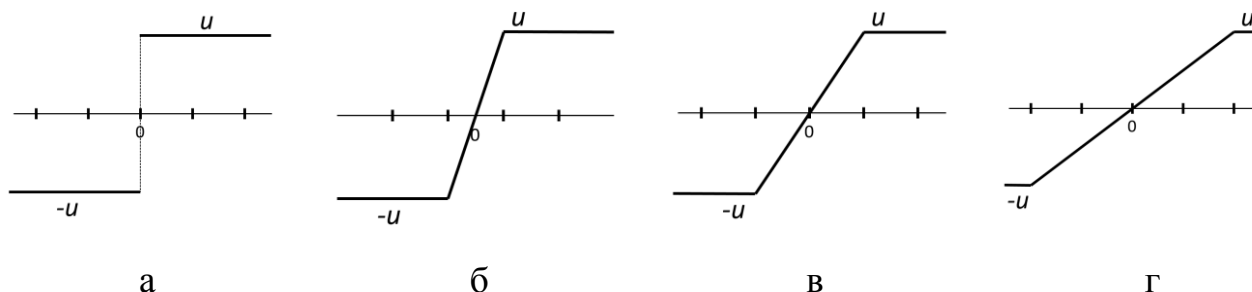


Рис.10 Начальное распределение профиля скорости в Задаче 5

Выберем сетку так, чтобы точка $x_0 = 0.5$ попадала внутрь ячейки, аппроксимировав скорость в этой ячейке, получим $u=0$ (рис.10б). На рис.11 хорошо заметно, что всплеск энтропии практически отсутствует.

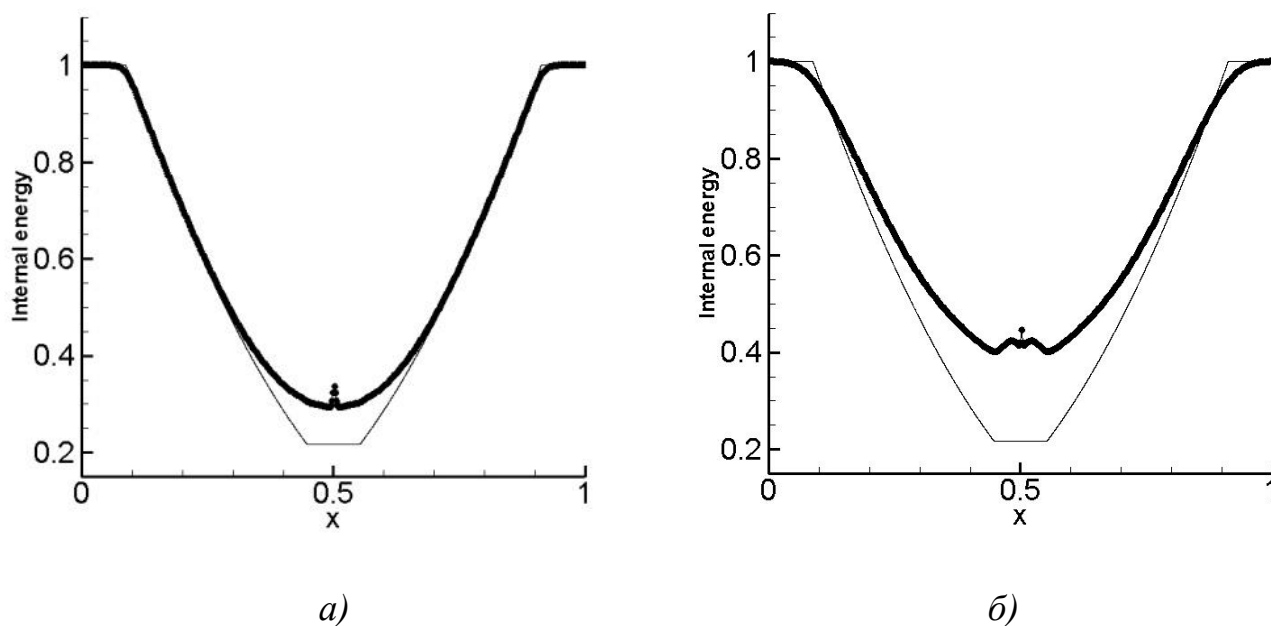


Рис.11 Профили внутренней энергии в Задаче 5, число ячеек: 501
а) моментный лимитер, $P=2$; б) схема Годунова $P=0$.

Поступив аналогичным образом и аппроксимировав профиль скорости в двух ячейках (рис.10в), удастся получить решение, соответствующее физическому. Заметим, что в этом случае добавление в численную схему слагаемого, соответствующего псевдотеплопроводности, не привело к дальнейшему улучшению результатов. Таким образом, установлено, что дефект, возникающий в численном решении Задачи 5, связан не только с выбором численной схемы, а также со способом задания начальных данных.

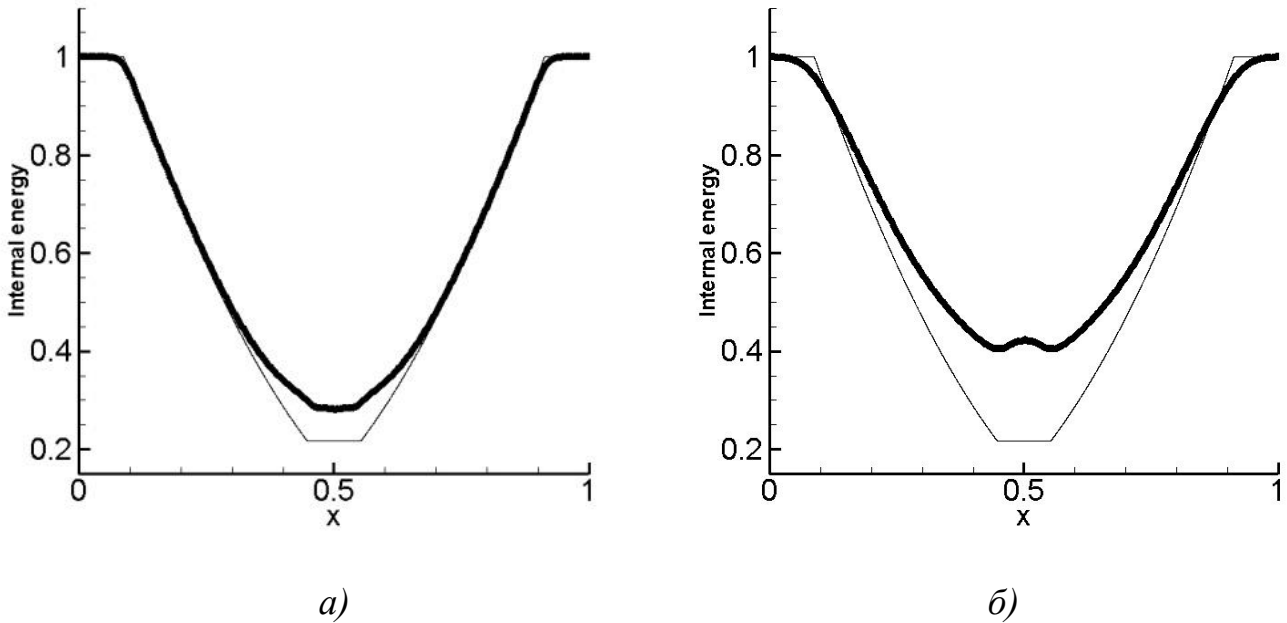


Рис.12 Профили внутренней энергии в Задаче $5N=500$
 а) моментный лимитер, $P=2$; б) схема Годунова $P=0$

На рис.14 приведены результаты расчетов Задачи 5 с исправленным профилем начальной скорости. Как видно из графиков, нам удалось качественно улучшить результат, причем лимитеры на основе усреднений дают более гладкий профиль решения.

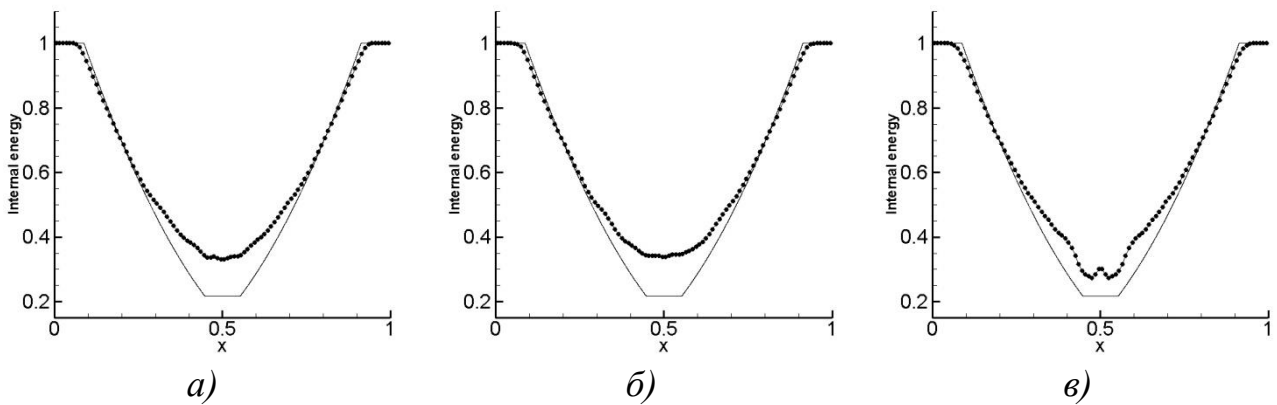
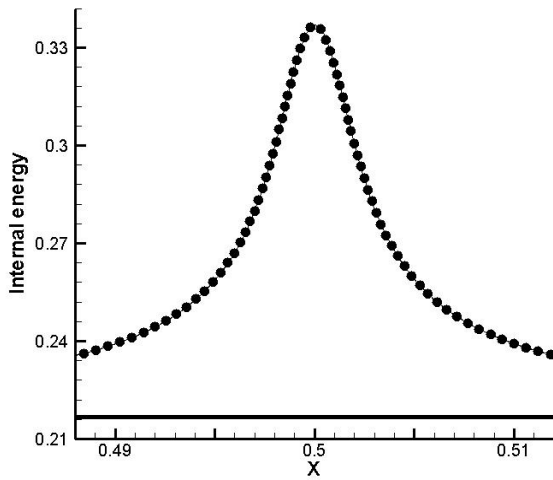
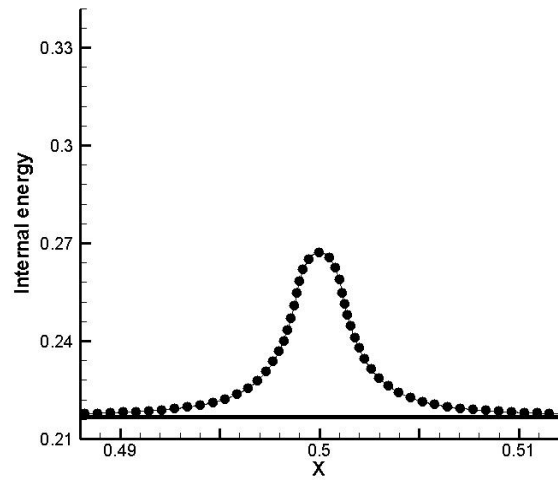


Рис.13 Профили внутренней энергии в Задаче 5, $N=100$
 а) при использовании усреднения решения с коэффициентом $k \sim \rho_1/\rho$;
 б) при использовании усреднения решения с коэффициентом $k \sim \Delta x$;
 в) при использовании WENO лимитера

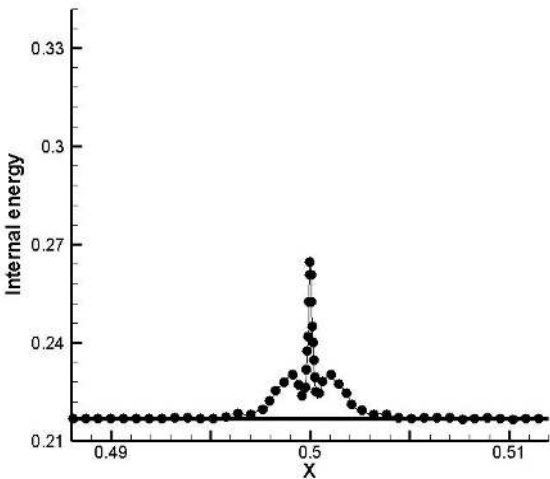
Учитывая проведенное исследование, приведем расчеты Задачи 5 на мелкой сетке с числом ячеек 50000.



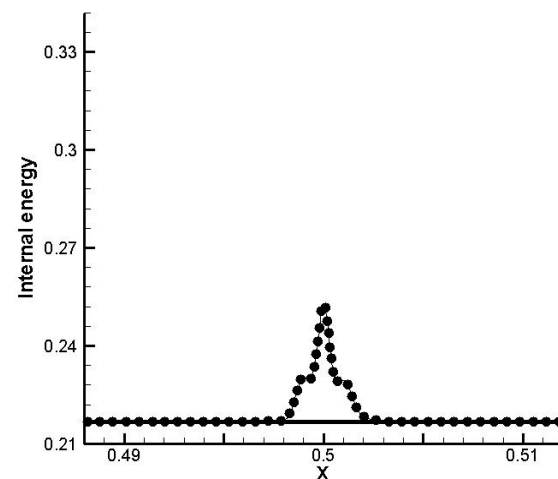
a)



б)



в)



г)

Рис.14 Профили внутренней энергии в Задаче 5, $N=50000$, с интерполяцией профиля скорости в 2 ячейках;

а) схемы Годунова, $P=0$; б) при использовании моментного лимитера, $P=2$;
 в) при использовании WENO лимитера; г) при использовании усреднения решения с коэффициентом $k \sim \Delta x$

Численные результаты показали, что при решении задач разрывным методом Галеркина, использование как лимитера типа WENO, так и лимитера на основе усреднений, позволяет получить высокий порядок точности на гладких решениях, а также четкие, неосциллирующие профили на ударных волнах при условии правильного выбора соответствующих констант для определения дефектных ячеек. Кроме того, оба лимитера достаточно просто реализовать и обобщить на многомерные неструктурированные сетки.

Список литературы

1. Cockburn B. An Introduction to the Discontinuous Galerkin Method for Convection – Dominated Problems, Advanced Numerical Approximation of Nonlinear Hyperbolic Equations// Lecture Notes in Mathematics. 1998. V. 1697. pp. 151-268.
2. Ладонкина М.Е., Неклюдова О.А., Тишкин В.Ф. Исследование влияния лимитера на порядок точности решения разрывным методом Галеркина // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2012. № 34. 31 с.
3. Ладонкина М.Е., Неклюдова О.А., Тишкин В.Ф. Исследование влияния лимитера на порядок точности решения разрывным методом Галеркина // Математическое моделирование. 2012. №24:12. С.124-128. URL : http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=mm&paperid=3234&option_lang=rus
4. Ладонкина М.Е., Неклюдова О.А., Тишкин В.Ф. Использование разрывного метода Галеркина при решении задач гидродинамики // Математическое моделирование 2014. т.25. N1, 17-32 URL: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=mm&paperid=3435&option_lang=rus
5. Krivodonova L. Limiters for High-Order Discontinuous Galerkin Methods // Journal of Computational Physics. 2007. Vol. 226(1):276-296
6. Zhong X., Shu C.-W. A simple weighted essentially nonoscillatory limiter for Runge-Kutta discontinuous Galerkin methods// Journal of Computational Physics. 2013. V.232, Pp. 397-415.
7. Qiu J., Shu C.-W. Runge-Kutta Discontinuous Galerkin Method Using WENO Limiters // SIAM J. Sci. Comput.2006. 26(3), 907929.
8. Shu C.-W. High order WENO and DG methods for time-dependent convection-dominated PDEs: A brief survey of several recent developments // Journal of Computational Physics. 2016. V. 316, Pp. 598- 613.
9. Luo H., Baum J.D., Lohner R. A Hermite WENO-based limiter for discontinuous Galerkin method on unstructured grids // Journal of Computational Physics. 2007. Volume 225 Issue 1, Pp. 686-713.
10. Zhu J., Zhong X., Shu C.-W., Qiu J. Runge-Kutta discontinuous Galerkin method using a new type of WENO limiters on unstructured meshes // Journal of Computational Physics. 2013. V.248, Pp. 200-220.

11. Русанов В.В. Расчет взаимодействия нестационарных ударных волн с препятствиями // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1961. т. I, №2, 267- 279.
12. Lax P.D. Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation // Communications on Pure and Applied Mathematics. 1954. 7, № 1, 159 -193.
13. Годунов С.К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Мат. сборник, 1959. т. 47(89):3, С. 271-306.
14. Harten A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws // Journal of Computational Physics 49 (1983) 357-393.
15. Sod G.A. A survey of several finite difference methods for systems of nonlinear hyperbolic conservation laws // Journal of Computational Physics. 1978. V. 27. N 1. P. 1–31. doi: 10.1016/0021-9991(78)90023-2.
16. Lax P.D. Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation // Communications on Pure and Applied Mathematics. 1954. V. 7. N 1. P. 159–193.
17. Булат П.В., Волков К.Н. Одномерные задачи газовой динамики и их решение при помощи разностных схем высокой разрешающей способности // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики, 2015, т.15, №4, С. 731-740.
18. Arora M., Roe P.L. A well-behaved TVD limiter for high-resolution calculations of unsteady flow // Journal of Computational Physics. 1997. V. 132. N 1. P. 3–11. doi: 10.1006/jcph.1996.5514.
19. Woodward P.R., Colella P. The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks // Journal of Computational Physics. 1984. V. 54. N 1. P. 115–173. doi: 10.1016/0021-9991(84)90142-6.
20. Einfeldt B., Munz C.D., Roe P.L., Sjogren B. On Godunov-type methods near low densities // Journal of Computational Physics. 1991. V. 92. N 2. P. 273–295. doi: 10.1016/0021-9991(91)90211-3.
21. Shu C.-W., Osher S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes II // Journal of Computational Physics, 1989, № 83, p.32–78.

Оглавление

Введение	3
Описание разрывного метода Галеркина для уравнений Эйлера	3
Построение лимитера для разрывного метода Галеркина на основе WENO реконструкции.....	5
Построение новых полиномов на проблемных ячейках с использованием WENO лимитера	7
Построение лимитера для разрывного метода Галеркина на основе усреднения решения.....	8
Исследование порядка точности метода.....	10
Численные эксперименты.....	15
Список литературы.....	29