ACTA ARITHMETICA
LXXXIII.3 (1998)

Applications des entiers à diviseurs denses

par

Eric Saias (Paris)

A la mémoire de Paul Erdős

1. Introduction

1a. *Résultats relatifs aux entiers à diviseurs denses.* Désignons par $P^-(n)$ le plus petit facteur premier de l'entier $n \geq 2$ et posons

$$F(n) = \begin{cases} 1 & (n=1), \\ \max\{dP^-(d) : d \mid n,\ d>1\} & (n \geq 2). \end{cases}$$

Nous appelons *entiers à diviseurs t-denses* les entiers n vérifiant $F(n) \leq nt$. Nous avons choisi cette dénomination en raison de l'identité

$$\frac{F(n)}{n} = \max_{1 \leq i < \tau(n)} \frac{d_{i+1}(n)}{d_i(n)} \qquad (n \geq 2),$$

où $1 = d_1(n) < \ldots < d_{\tau(n)} = n$ désigne la suite croissante de tous les diviseurs de n (voir le Lemme 2.2 de [9]).

L'objet du présent travail est d'étudier deux problèmes distincts, le premier relatif au petit crible d'Erdős et Ruzsa et le second au graphe divisoriel. Pour cela, nous sommes amenés à utiliser les ordres de grandeur exacts de fonctions de répartition liées aux entiers à diviseurs denses, que nous allons donner maintenant.

Posons

$$A(x) = \mathrm{card}\{n : F(n) \leq x\}.$$

Les premiers à étudier cette fonction ont été Schinzel et Szekeres qui ont montré dans [8] que l'on a

$$A(x) = o(x) \quad \text{quand } x \text{ tend vers } +\infty.$$

Ce résultat a été depuis précisé dans un premier temps par Ruzsa [4] qui a établi l'existence d'une constante $c > 0$ pour laquelle

1991 *Mathematics Subject Classification*: 11N25, 05C38, 20B99.

$$A(x) \le \frac{x}{\log^c x},$$

puis par Tenenbaum dont les travaux [9] et [10] montrent que pour $\varepsilon > 0$,

$$\frac{x}{(\log x)(\log\log x)^{5/3+\varepsilon}} \ll_\varepsilon A(x) \ll \frac{x}{\log x} \log\log x.$$

Enfin il résulte facilement de notre travail [7] que l'on a en fait ([1])

$$A(x) \asymp \frac{x}{\log x}. \tag{1}$$

Pour les applications, nous sommes amenés à considérer des fonctions de répartition plus générales. Posons

$$D(x,t) = \operatorname{card}\{n \le x : F(n) \le nt\},$$
$$D'(x,t) = \operatorname{card}\{n \le x : F(n) \le nt \text{ et } n \text{ est sans facteur carré}\}$$

et

$$A(x,t) = \operatorname{card} \mathcal{A}(x,t) \quad \text{avec} \quad \mathcal{A}(x,t) = \{n \le x : F(n) \le xt\}.$$

Posons de plus

$$B(x) = \operatorname{card} \mathcal{B}(x)$$

avec

$$\mathcal{B}(x) = \{n \le x : n \notin \mathcal{A}(x,1) \text{ et } [(d \,|\, n \text{ et } d < n) \Rightarrow d \in \mathcal{A}(x,1)]\}.$$

Il résulte facilement des résultats de [7] que l'on a ([2])

$$D'(x,2t) \asymp D(x,2t) \asymp A(x,t) \asymp x\frac{\log 2t}{\log 2x} \quad \text{pour } x \ge t \ge 1. \tag{2}$$

Par ailleurs, nous montrons au Lemme 6 du présent travail que l'on a

$$B(x) \asymp \frac{x}{\log x}. \tag{3}$$

1b. *Petit crible d'Erdős et Ruzsa.* Soit $\mathcal{E}$ un ensemble d'entiers strictement positifs. On désigne par $F(x,\mathcal{E})$ le nombre d'entiers strictement positifs $\le x$ qui n'ont aucun diviseur dans $\mathcal{E}$. Nous nous intéressons ici au problème soulevé par Erdős et Ruzsa de l'estimation asymptotique de la quantité

$$H(x) = \min F(x,\mathcal{E})$$

([1]) Pour une preuve complète de cette estimation, voir la note ([2]) où la formule plus générale (2) est établie.

([2]) Les estimations de $A(x,t)$ pour $x \ge t \ge 2$ et de $D(x,2t)$ et $D'(x,2t)$ pour $x \ge 2t \ge 2$ résultent directement du Théorème 1 de [7]. De plus, quand $x \ge 4$ et $1 \le t < 2$, on estime $A(x,t)$ en se ramenant au cas général par l'intermédiaire de l'encadrement $A(x/2,2t) \le A(x,t) \le A(x,2t)$. Par ailleurs, quand $x \ge 2$ et $1 \le t \le x < 2t$, on estime $D(x,t)$ et $D'(x,t)$ en se ramenant au cas général par l'intermédiaire des formules $D(x,2t) = D(x,x)$ et $D'(x,2t) = D'(x,x)$. Enfin, les estimations annoncées sont triviales quand x reste borné.

où le minimum porte sur les ensembles $\mathcal{E}$ vérifiant les conditions

$$\sum_{e\in\mathcal{E}} \frac{1}{e} \le 1 \quad \text{et} \quad 1 \notin \mathcal{E}.$$

Dans [4], Ruzsa montre comment déduire de manière élémentaire du théorème des nombres premiers la minoration

(4) $$H(x) \gg x/\log x.$$

Le travail de Ruzsa permet également de majorer $H(x)$ en fonction de $A(x)$ par l'intermédiaire de la formule suivante ([3]) :

(5) $$H(x) \le A(x)(1 + 3\log(2x/A(x))) + \sqrt{x}.$$

Ruzsa conjecture de plus que l'on peut améliorer un certain lemme (voir dans [4] le Lemme 2.8 et la conjecture juste avant le Lemme 2.10) de telle manière à obtenir $H(x) \ll A(x)$ au lieu de (5), ce qui établirait avec (1) et (4) que

(6) $$H(x) \asymp \frac{x}{\log x}.$$

Nous ne savons pas démontrer ou infirmer la conjecture de Ruzsa. Cependant, nous montrons ici que l'on a bien (6). En effet, à l'aide d'une variante de l'argumentation qui mène à (5), on obtient (voir le Lemme 10)

$$H(x) \le \max(A(x), B(x) + \sqrt{x}),$$

les estimations (1), (3) et (4) permettant alors de conclure. On a donc le

Théorème 1. *Il existe deux constantes strictement positives c_1 et c_2 telles que pour $x \ge 2$, on ait*

$$c_1 \frac{x}{\log x} \le H(x) \le c_2 \frac{x}{\log x}.$$

Nous concluons ce chapitre par deux remarques.

Remarque 1. Signalons qu'il résulte facilement du présent travail que

$$\sum_{b\in\mathcal{B}(x)} \frac{1}{b} = 1 + O\left(\frac{1}{\log x}\right).$$

Cela étant, on ne sait pas si pour tout $x \ge 2$ on a $\sum_{b\in\mathcal{B}(x)} 1/b < 1$, comme semble l'indiquer les calculs effectifs des ensembles $\mathcal{B}(x)$ pour les petits x. Il est à noter qu'en cas de réponse positive à cette dernière question, la

([3]) Montrons la formule (5). Si $\sum_{b\in\mathcal{B}(x)} 1/b \le 1$, on a directement $H(x) \le F(x, \mathcal{B}(x)) = A(x)$. Sinon on note $\mathcal{B}'(x)$ une partie maximale de $\mathcal{B}(x)$ telle que $\sum_{b\in\mathcal{B}'(x)} 1/b \le 1$. On a alors $H(x) \le F(x, \mathcal{B}'(x)) \le F(x, \mathcal{B}(x)) + x\sum_{b\in\mathcal{B}(x)\setminus\mathcal{B}'(x)} 1/b = A(x) + S - S'$ avec $S := x\sum_{b\in\mathcal{B}(x)} 1/b \le x + 3A(x)\log(2x/A(x))$ d'après le Lemme 7.1 de [9], et $S' := x\sum_{b\in\mathcal{B}'(x)} 1/b > x - \sqrt{x}$ car tous les entiers de $\mathcal{B}(x)$ sont $> \sqrt{x}$.

démonstration de la majoration de $H(x)$ du Théorème 1 s'obtiendrait alors encore plus simplement en écrivant

$$H(x) \le F(x, \mathcal{B}(x)) = A(x) \asymp x/\log x.$$

Remarque 2. On s'intéresse ici au problème d'obtenir rapidement une minoration de $A(x)$. En interprétant la formule (5) comme une minoration de $A(x)$ en fonction de $H(x)$, on obtient en combinant (5) et (4) la formule

$$A(x) \gg \frac{x}{(\log x)\log\log x},$$

qui est de qualité légèrement inférieure à ce que l'on a obtenu dans [7] (voir la formule (1) ci-dessus). Cependant, il est intéressant de noter que l'on obtient ainsi une minoration de $A(x)$ qui à un facteur $\log\log x$ près est optimale, et cela différemment et plus rapidement que dans [10] ou [7].

1c. *Etude du graphe divisoriel.* Soit $f(x)$ le nombre maximum d'entiers strictement positifs $n_1, \ldots, n_{f(x)}$ deux à deux distincts, inférieurs à x et tels que pour tout i, n_i divise n_{i+1} ou n_{i+1} divise n_i. Soit $g(x)$ le nombre maximum d'entiers strictement positifs $n_1, \ldots, n_{g(x)}$ deux à deux distincts, inférieurs à x et vérifiant $[n_i, n_{i+1}] \le x$ pour tout i. On note que l'on a trivialement $f(x) \le g(x)$.

Le premier résultat concernant la fonction $g(x)$ est dû à Erdős, Freud et Hegyvári. Dans [1] (Theorem 3 et démonstration du Theorem 4), ils ont démontré implicitement que l'on a pour une certaine constante $c > 0$,

$$\frac{x}{\exp(c\sqrt{\log x}\log\log x)} \le g(x) \le (1 - \log 2 + o(1))x \quad (x \to +\infty).$$

En répondant ainsi à une question de Hegyvári, Pomerance [3] a amélioré la majoration en

$$g(x) = o(x) \quad (x \to +\infty).$$

Pour sa part, Pollington [2] a établi la minoration

$$f(x) \ge \frac{x}{\exp((2 + o(1))\sqrt{(\log x)\log\log x}\,)} \quad (x \to +\infty).$$

Dans [10], Tenenbaum éclaire d'un jour nouveau le problème de l'estimation asymptotique des fonctions $f(x)$ et $g(x)$ en montrant le lien qui existe entre celui-ci et la répartition des entiers à diviseurs denses. Plus précisément, il montre que pour x assez grand, on a

$$D'(x/4, 2) \le f(x) \le g(x) \le 2D(x, \log^5 x). \tag{7}$$

En utilisant (2), on en déduit que

$$\frac{x}{\log x} \ll f(x) \le g(x) \ll \frac{x}{\log x}\log\log x.$$

Dans [5], nous nous sommes intéressés à la variante suivante de la fonction $f(x)$. Soit $f^*(x)$ le nombre maximum d'entiers deux à deux distincts de l'intervalle $[\sqrt{x}, x]$, $n_1, \dots, n_{f^*(x)}$, tels que pour tout i, n_i divise n_{i+1} ou n_{i+1} divise n_i. (Notons que l'on a trivialement $f(x) \geq f^*(x)$.) En combinant le résultat démontré à la Proposition de [5] et la formule (2) du présent travail, on obtient

$$f^*(x) \gg \frac{x}{\log x}. \tag{8}$$

Nous montrons ici que l'ordre de grandeur exact des trois fonctions $f^*(x)$, $f(x)$ et $g(x)$ est $x/\log x$.

Théorème 2. *Il existe deux constantes strictement positives c_3 et c_4 telles que pour $x \geq 2$, on ait*

$$c_3 \frac{x}{\log x} \leq f^*(x) \leq f(x) \leq g(x) \leq c_4 \frac{x}{\log x}. \tag{9}$$

Donnons la démarche générale des démonstrations des majorations de (7) et (9). Désignons par (n_i) une suite d'entiers $\leq x$, deux à deux distincts et vérifiant $[n_i, n_{i+1}] \leq x$. Dans [10], Tenenbaum montre que si t est suffisamment grand, il y a très peu d'entiers n_i qui n'appartiennent pas à $\mathcal{A}(x,t)$. De manière quantitative, on obtient rapidement en suivant sa méthode (cf. Lemme 12)

$$\operatorname{card}\{i : n_i \notin \mathcal{A}(x,t)\} \ll x(\log x)/t,$$

d'où, en choisissant $t = \log^2 x$,

$$g(x) \ll A(x, \log^2 x) + x/\log x,$$

ce qui est essentiellement équivalent à la majoration de (7).

Notre contribution est ici de montrer que par une analyse plus approfondie de la structure des suites (n_i), on obtient

$$\operatorname{card}\{i : n_i \notin \mathcal{A}(x,1)\} \ll x/\log x,$$

d'où

$$g(x) \ll A(x,1) + x/\log x \asymp x/\log x.$$

La motivation initiale d'Erdős, Freud et Hegyvári [1] est l'étude du comportement asymptotique du p.p.c.m. de a_i et a_{i+1} où $(a_i)_{i \geq 1}$ est une permutation de $\mathbb{N}^*$. En effet, les deux problèmes sont liés par l'intermédiaire de la formule

$$g(\max_{1 \leq i \leq j} [a_i, a_{i+1}]) \geq j + 1.$$

La majoration de $g(x)$ du Théorème 2 nous permet donc d'en déduire le résultat suivant, qui précise la minoration d'Erdős, Freud et Hegyvári correspondante ([1], Theorem 4).

THÉORÈME 3. *Pour toute permutation* $(a_j)_{j\geq 1}$ *de* $\mathbb{N}^*$, *on a*

$$\limsup_{j\to+\infty} \frac{[a_j, a_{j+1}]}{j\log j} > 0.$$

2. Quelques notations. Les réels x, y, z et t étant donnés, on notera

$$u = \frac{\log x}{\log y}, \quad v = \frac{\log x}{\log z} \quad \text{et} \quad w = \frac{\log x}{\log t}.$$

On désigne par p ou q un nombre premier générique.

On désigne respectivement par (m, n) et $[m, n]$ le p.g.c.d. et le p.p.c.m. de m et n. On désigne par $P^-(n)$ (resp. $P^+(n)$) le plus petit (resp. grand) facteur premier de l'entier $n \geq 2$. On pose de plus $P^-(1) = +\infty$ et $P^+(1) = 1$. On désigne par $P^+(n) = p_1(n) \geq \ldots \geq p_{\Omega(n)}(n) = P^-(n)$ la suite décroissante des facteurs premiers de n. On rappelle que l'on note

$$F(n) = \begin{cases} 1 & (n = 1), \\ \max\{dP^-(d) : d \mid n,\ d > 1\} & (n \geq 2). \end{cases}$$

On note

$$\Psi(x, y) = \operatorname{card}\{n \leq x : P^+(n) \leq y\}$$

et

$$\Theta(x, y, z) = \operatorname{card}\{n \leq x : P^+(n) \leq y \text{ et } P^-(n) > z\}.$$

On note

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x, y, z, t) &= \{n \leq x : P^+(n) \leq y,\ P^-(n) > z \text{ et } F(n) \leq xt\}, \\ \mathcal{A}(x, z, t) &= \mathcal{A}(x, x, z, t), \\ \mathcal{A}(x, t) &= \mathcal{A}(x, x, 1, t) \quad \text{et} \quad \mathcal{A}(x) = \mathcal{A}(x, x, 1, 1) \end{aligned}$$

avec les cardinaux

$$A(x, y, z, t) = \operatorname{card} \mathcal{A}(x, y, z, t), \qquad A(x, z, t) = \operatorname{card} \mathcal{A}(x, z, t),$$
$$A(x, t) = \operatorname{card} \mathcal{A}(x, t) \quad \text{et} \quad A(x) = \operatorname{card} \mathcal{A}(x).$$

On note également

$$\mathcal{B}(x, t) = \{n \leq x : n \notin \mathcal{A}(x, t) \text{ et } [(d \mid n \text{ et } d < n) \Rightarrow d \in \mathcal{A}(x, t)]\}$$

et

$$\mathcal{B}(x) = \mathcal{B}(x, 1)$$

avec les cardinaux

$$B(x, t) = \operatorname{card} \mathcal{B}(x, t) \quad \text{et} \quad B(x) = \operatorname{card} \mathcal{B}(x).$$

On note encore

$$\begin{aligned} D(x, y, z, t) &= \operatorname{card}\{n \leq x : P^-(n) > z,\ P^+(n) \leq y \text{ et } F(n) \leq nt\}, \\ D(x, t) &= \operatorname{card}\{n \leq x : F(n) \leq nt\} \end{aligned}$$

et

$$D'(x,t) = \mathrm{card}\{n \le x : F(n) \le nt \text{ et } n \text{ sans facteur carré}\}.$$

On pose enfin $\widetilde{\varrho}(u) = \varrho(\max(u,0))$ où ϱ désigne la fonction de Dickman (voir par exemple [7], §4) et

$$\widetilde{A}(x,y,z,t) = \begin{cases} \dfrac{x}{w\log z}\left(1 - \dfrac{1}{\log_2(\max(w,16))}\right)\widetilde{\varrho}\left(u\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{\log y}}\right)-1\right) & \\ \qquad\qquad (0 < u < 3\log^{1/3} x), \\ \Theta(x,y,z) \qquad\qquad (u \ge 3\log^{1/3} x). \end{cases}$$

3. Majoration de $A(x,y,z,t)$. Notre objectif est ici d'établir la majoration de $A(x,z,t)$ du Lemme 5, ce qui nous permettra d'estimer au paragraphe suivant certaines quantités dépendant de la répartition des entiers de $\mathcal{A}(x)$ (voir les Lemmes 6 et 7). Comme dans [7], nous allons en fait majorer la quantité plus générale $A(x,y,z,t)$.

Pour cela, l'idée consiste à reprendre la preuve de la majoration de $A(x,y,1,t)$ faite dans [7] en effectuant quelques modifications mineures. En particulier dans [7], on a commencé par majorer $D(x,y,1,t)$, puis utilisé un argument élémentaire pour en déduire une majoration de $A(x,y,1,t)$. En fait, ce détour est inutile comme nous allons le montrer ici en majorant directement $A(x,y,z,t)$.

Techniquement, c'est le Lemme 1 ci-dessous qui va nous permettre de reprendre, pour majorer $A(x,y,z,t)$, la méthode qui nous a permis de majorer $A(x,y,1,t)$ dans [7].

Lemme 1. *Pour $x^3 \ge z \ge 3/2$ et $y \ge 2$, on a*

$$\Theta(x,y,z) \ll \frac{\Psi(x,y)}{\log z}.$$

Démonstration. Cela résulte facilement du Théorème 5 de [6].

Les deux résultats suivants constituent les deux lemmes clefs de la procédure de majoration. (On rappelle pour le Lemme 3 que l'on note $u = (\log x)/\log y$ et $w = (\log x)/\log t$.)

Lemme 2. *Pour $x \ge 1$, $y \ge 1$, $z \ge 1$ et $t \ge 1$, on a*

$$A(x,y,z,t) = 1 + \sum_{z<p\le\min(y,\sqrt{xt})} A(x/p,p,z,t).$$

Lemme 3. *Il existe une constante $w_0 \ge 16$ telle que sous les conditions $x \ge z \ge 3/2$, $y \ge 2$, $t \ge 2$, $w \ge w_0$ et $0 < u < 3\log^{1/3} x$, on ait*

$$\widetilde{A}(x,y,z,t) \ge 1 + \sum_{z<p\le\min(y,\sqrt{xt})} \widetilde{A}(x/p,p,z,t).$$

On obtient la formule du Lemme 2 en classant les entiers comptés dans $A(x,y,z,t)$ suivant leur plus grand facteur premier.

Démonstration (du Lemme 3). Désignons par $\mu(x)$ le réel défini pour x suffisamment grand par

$$\log^{2/3}(x/\mu(x)) = 3\log\mu(x) \quad \text{et} \quad 2 \le \mu(x) \le x.$$

En utilisant le Lemme 1 pour la seconde inégalité, pour une constante c convenable on a

$$\begin{aligned}1 + \sum_{z<p\le\min(y,\sqrt{xt})} \widetilde{A}(x/p,p,z,t) & \\ &\le \Theta(x,\mu(x),z) + \sum_{\mu(x)<p\le\min(y,\sqrt{xt})} \widetilde{A}(x/p,p,z,t) \\ &\le \frac{c\Psi(x,\mu(x))}{\log z} + \sum_{\mu(x)<p\le\min(y,\sqrt{xt})} \widetilde{A}(x/p,p,z,t).\end{aligned}$$

Il suffit alors de reprendre la preuve du Lemme 9 de [7] pour conclure.

Lemme 4. *Sous les conditions* $x^3 \ge z \ge 3/2$, $y \ge 2$ *et* $t \ge 2$, *on a*

$$A(x,y,z,t) \ll \widetilde{A}(x,y,z,t).$$

La méthode de démonstration est identique à celle de la Proposition 1 de [7]. Elle consiste dans un premier temps à établir de manière directe la majoration demandée dans un certain domaine en x, y, z, t, puis à établir cette majoration dans le domaine complémentaire à l'aide d'une récurrence qui utilise les Lemmes 2 et 3. Voyons cela.

Démonstration (du Lemme 4). Soit w_0 une constante convenable pour le Lemme 3. On suppose que x, y, z et t vérifient les hypothèses du lemme. On distingue plusieurs cas.

1^{er} *cas* : $u \ge 3\log^{1/3} x$. On a alors $A(x,y,z,t) \le \Theta(x,y,z) = \widetilde{A}(x,y,z,t)$.

2^{e} *cas* : $0 < u < 3\log^{1/3} x$ et $x^3 \ge z > x$. On a alors $A(x,y,z,t) = 1 \ll \widetilde{A}(x,y,z,t)$.

3^{e} *cas* : $0 < u < 3\log^{1/3} x$ et $w < w_0$. On sait alors (voir les Lemmes 3 et 2(iv) de [7]) que $\Psi(x,y) \ll x\varrho(u) \ll x\widetilde{\varrho}(u-1)/(u+1)$. D'où avec le Lemme 1,

$$\begin{aligned}A(x,y,z,t) \le \Theta(x,y,z) &\ll \frac{\Psi(x,y)}{\log z} \ll \frac{x\widetilde{\varrho}(u-1)}{(u+1)\log z} \\ &\ll \frac{x\widetilde{\varrho}(u-1)}{w\log z} \ll \widetilde{A}(x,y,z,t).\end{aligned}$$

Cela achève la première étape de la preuve.

Soit $c \geq 1$ une constante pour laquelle on ait

$$A(x,y,z,t) \leq c\widetilde{A}(x,y,z,t) \tag{10}$$

dans chacun des trois cas étudiés. Montrons maintenant par récurrence sur $k \geq 0$ que l'on a l'inégalité (10) sous l'hypothèse

$$x^3 \geq z \geq 3/2, \quad y \geq 2, \quad t \geq 2 \quad \text{et} \quad x \leq 2^k. \tag{H$_k$}$$

D'après le travail fait ci-dessus, on peut omettre l'étape d'initialisation de la récurrence et supposer que l'on a

$$x \geq z, \quad w \geq w_0 \quad \text{et} \quad 0 < u < 3\log^{1/3} x.$$

On suppose également, d'une part que sous la condition (H_k) on a (10), et d'autre part que l'hypothèse (H_{k+1}) est vérifiée. Alors, l'inégalité $x \leq 2^{k+1}$ entraîne que pour tout nombre premier p, on a $x/p \leq 2^k$. De plus, comme $w \geq w_0 \geq 16 > 3$ et $x \geq z$, l'inégalité $p \leq \sqrt{xt}$ entraîne $(x/p)^3 \geq z$. Donc les quadruplets $(x/p, p, z, t)$ tels que $z < p \leq \min(y, \sqrt{xt})$ vérifient la condition (H_k). En utilisant successivement le Lemme 2, l'hypothèse de récurrence appliquée aux $(x/p, p, z, t)$ et le Lemme 3, on obtient

$$\begin{aligned} A(x,y,z,t) &= 1 + \sum_{z<p\leq\min(y,\sqrt{xt})} A(x/p,p,z,t) \\ &\leq c\Big(1 + \sum_{z<p\leq\min(y,\sqrt{xt})} \widetilde{A}(x/p,p,z,t)\Big) \leq c\widetilde{A}(x,y,z,t). \end{aligned}$$

Cela achève la preuve du Lemme 4.

Lemme 5. *Sous les conditions $x \geq z \geq 1$ et $t \geq 1$, on a*

$$A(x,z,t) \ll \frac{x\log(2\min(x,t))}{(\log 2x)\log 2z}.$$

Démonstration. On a $A(x,z,t) \leq A(2x, 2x, \max(z,3/2), 2t)$. On conclut en appliquant le Lemme 4 à cette dernière quantité.

4. Etude des ensembles $\mathcal{A}(x,t)$ et $\mathcal{B}(x,t)$. Rappelons que l'on note $p_1(n) \geq p_2(n) \geq \ldots \geq p_{\Omega(n)}(n)$ la suite décroissante des facteurs premiers de n de telle sorte que $n = \prod_{k=1}^{\Omega(n)} p_k(n)$. Il est facile de vérifier que l'on a

$$\mathcal{A}(x,t) = \{1\} \cup \{2 \leq n \leq x : \max_{1\leq k\leq\Omega(n)} p_1(n)\ldots p_{k-1}(n)p_k(n)^2 \leq xt\}$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(x,t) = \{2 \leq n \leq x : \max_{1\leq k<\Omega(n)} &p_1(n)\ldots p_{k-1}(n)p_k(n)^2 \leq xt \\ &< p_1(n)\ldots p_{\Omega(n)-1}(n)p_{\Omega(n)}(n)^2\}. \end{aligned}$$

C'est sous cette forme que nous allons dorénavant considérer ces ensembles.

Lemme 6. *Pour $x \ge 2$, on a*

$$B(x) \asymp x/\log x.$$

D é m o n s t r a t i o n. Les nombres premiers p vérifiant $\sqrt{x} < p \le x$ sont éléments de $\mathcal{B}(x)$. Donc en utilisant le postulat de Bertrand pour les x petits et le théorème des nombres premiers pour les x grands, on a

$$B(x) \ge \pi(x) - \pi(\sqrt{x}) \asymp x/\log x.$$

En écrivant de manière unique tout élément b de $\mathcal{B}(x)$ sous la forme $b = ap$ avec $a \in \mathcal{A}(x)$ et $\sqrt{x/a} < p \le P^-(a)$ et en notant $a = qa'$ avec $q = P^-(a)$, on obtient

$$\begin{aligned} B(x) &= \sum_{a \in \mathcal{A}(x)} \sum_{\sqrt{x/a} < p \le \min(P^-(a), x/a)} 1 \\ &= \pi(x) - \pi(\sqrt{x}) + \sum_{q \le \sqrt{x}} \sum_{\substack{a' \in \mathcal{A}(x) \\ a' \le x/q^2 \\ q \le P^-(a')}} \sum_{\sqrt{x/(a'q)} < p \le q} 1 \\ &\le \pi(x) + \sum_{q \le \sqrt{x}} A(x/q^2, q-0, q^2)\pi(q) \\ &\ll \pi(x) + x \sum_{q \le \sqrt{x}} \frac{1}{q(\log q)\log(2x/q^2)} \end{aligned}$$

d'après le Lemme 5 et le théorème des nombres premiers. On montre que la dernière expression est $\ll x/\log x$ en effectuant une sommation d'Abel et en réutilisant le théorème des nombres premiers.

Lemme 7. *On pose*

$$Q_1(x) = \sum_{a \in \mathcal{A}(x)} \frac{1}{a \log^3(x/a)},$$

$$Q_2(x) = \sum_{\substack{a \in \mathcal{A}(x) \\ aP^-(a)^2 > x}} \frac{1}{a \log^{3/2}(x/a)},$$

et

$$Q_3(x) = \sum_{\substack{a \in \mathcal{A}(x) \\ aP^-(a)^2 \le x}} \frac{P^-(a)^2}{\sqrt{\log(P^-(a))}}.$$

On a alors pour $x \ge 2$,

$$Q_1(x) \ll \frac{1}{\log x}, \quad Q_2(x) \ll \frac{1}{\log x} \quad \textit{et} \quad Q_3(x) \ll \frac{x}{\log x}.$$

Démonstration. Les calculs sont standards. Pour $Q_1(x)$, on effectue une sommation d'Abel qui permet de se ramener à la majoration d'intégrales dépendant de $A(x,z,t)$. Le Lemme 5 permet alors de se ramener à la majoration d'intégrales banales. Pour les sommes $Q_2(x)$ et $Q_3(x)$, on commence par classer les entiers a suivant leur plus petit facteur premier q comme dans la démonstration du Lemme 6. On obtient alors une somme double en q et en a' avec $a' = a/q$. On effectue une sommation d'Abel pour transformer la somme en a' en une intégrale dépendant de $A(x,z,t)$. On majore par le Lemme 5 et on effectue une nouvelle sommation d'Abel pour transformer la somme en q en une intégrale dépendant de $\pi(x)$. Le théorème des nombres premiers permet alors de se ramener à la majoration d'intégrales banales. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que l'on obtient bien ainsi les majorations annoncées.

Lemme 8. *Soient x et t deux réels tels que $x \geq 2$ et $1 \leq t < x$. Soit n un entier $\leq x$ et n'appartenant pas à $\mathcal{A}(x,t)$. Alors, il existe un unique diviseur b de n qui soit élément de $\mathcal{B}(x,t)$.*

Démonstration. Soit $n \leq x$, $n \notin \mathcal{A}(x,t)$. Il existe un entier $i \leq \Omega(n)$ tel que $p_1(n)\ldots p_{i-1}(n)p_i(n)^2 > xt$. Soit i_0 le plus petit de ces entiers. On obtient un entier b convenable en choisissant $b = p_1(n)\ldots p_{i_0}(n)$. Pour démontrer le caractère unique de cet entier b, il suffit de prouver que les diviseurs d de n, distincts de b, n'appartiennent pas à $\mathcal{B}(x,t)$. Il est clair que les diviseurs de n qui sont multiple ou diviseur propre de b n'appartiennent pas à $\mathcal{B}(x,t)$. Nous allons montrer que dans les autres cas de figure, le diviseur d de n appartient à $\mathcal{A}(x,t)$, et donc pas à $\mathcal{B}(x,t)$. Posons $n = bm$ et

$$\frac{d}{(d,b)} = q_1\ldots q_k \qquad \text{avec } q_1 \geq \ldots \geq q_k.$$

On a $q_1 \leq q_1\ldots q_k \leq m \leq x/b < P^-(b)$. Pour montrer que $d \in \mathcal{A}(x,t)$, il suffit donc de vérifier que $(d,b) \in \mathcal{A}(x,t)$ et que

$$\text{pour tout } i,\ 1 \leq i \leq k, \qquad (d,b)q_1\ldots q_{i-1}q_i^2 \leq x.$$

La première assertion résulte du fait qu'ici, (d,b) est un diviseur propre de b. Pour la seconde, on a

$$(d,b)q_1\ldots q_{i-1}q_i^2 \leq bq_1\ldots q_{i-1}q_i \leq \frac{bd}{(b,d)} = [b,d] \leq n \leq x,$$

ce qui conclut.

Le Lemme 2.1 de [4] correspond au cas particulier où $t = 1$ du lemme suivant.

Lemme 9. *Soient x et t deux réels tels que $x \geq 2$ et $1 \leq t < x$. Pour toute paire $\{b_1, b_2\}$ d'éléments distincts de $\mathcal{B}(x,t)$, on a $[b_1, b_2] > xt$.*

Démonstration. Les deux entiers b_1 et b_2 sont éléments de $\mathcal{B}(x,t)$ donc de $\mathcal{B}(xt,1)$, et par ailleurs diviseurs de $n=[b_1,b_2]$. Donc d'après le Lemme 8, si $[b_1,b_2]\le xt$ alors $b_1=b_2$.

5. Démonstration du Théorème 1. Le Théorème 1 résulte de la combinaison de la minoration (4), du résultat suivant appliqué à l'ensemble $\mathcal{E}=\mathcal{B}(x)$ (ce qui est justifié par le Lemme 9) et des majorations $F(x,\mathcal{B}(x))=A(x)\ll x/\log x$ et $B(x)\ll x/\log x$, qui résultent des Lemmes 5 et 6.

Lemme 10. *Soit $x\ge 2$. Pour tout ensemble d'entiers $\mathcal{E}$ de l'intervalle $[\sqrt{x},x]$ vérifiant*

$$(m\in\mathcal{E},\ n\in\mathcal{E}\ \text{et}\ m\ne n)\Rightarrow([m,n]>x), \tag{11}$$

on a

$$H(x)\le\max(F(x,\mathcal{E}),\operatorname{card}\mathcal{E}+\sqrt{x}).$$

Démonstration. Si $\sum_{e\in\mathcal{E}}1/e\le 1$, on a $H(x)\le F(x,\mathcal{E})$. Sinon, on procède comme dans [4] et [9] en considérant une partie maximale $\mathcal{E}'$ de $\mathcal{E}$ vérifiant $\sum_{e\in\mathcal{E}'}1/e\le 1$. On a alors

$$H(x)\le F(x,\mathcal{E}')\le F(x,\mathcal{E})+\sum_{e\in\mathcal{E}\setminus\mathcal{E}'}\left[\frac{x}{e}\right].$$

Or on a d'une part d'après (11),

$$F(x,\mathcal{E})=[x]-\sum_{e\in\mathcal{E}}\left[\frac{x}{e}\right]\le x\biggl(1-\sum_{e\in\mathcal{E}}\frac{1}{e}\biggr)+\operatorname{card}\mathcal{E},$$

et d'autre part,

$$\sum_{e\in\mathcal{E}\setminus\mathcal{E}'}\left[\frac{x}{e}\right]\le x\sum_{e\in\mathcal{E}\setminus\mathcal{E}'}\frac{1}{e}\le x\biggl(\sum_{e\in\mathcal{E}}\frac{1}{e}-1\biggr)+\sqrt{x}$$

car tous les entiers de $\mathcal{E}$ sont $\ge\sqrt{x}$.

6. Nouvelles notations et résultats préliminaires relatifs aux chaînes. On appellera ici *chaîne d'entiers $\le x$ de longueur l* tout l-uplet d'entiers strictement positifs deux à deux distincts $\mathcal{C}=(n_i)_{1\le i\le l}$, telle que pour tout i $(1\le i<l)$, on a $[n_i,n_{i+1}]\le x$. On note $l(\mathcal{C})$ la longueur de la chaîne $\mathcal{C}$.

Pour une telle chaîne $\mathcal{C}=(n_i)_{1\le i\le l}$, on appellera *$t$-composante* de $\mathcal{C}$ toute chaîne extraite $\mathcal{O}=(n_i,n_{i+1},\dots,n_j)$ avec $1\le i\le j\le l$ vérifiant les trois conditions suivantes :

- $n_\alpha\notin\mathcal{A}(x,t)$ pour $i\le\alpha\le j$,
- $i=1$ ou $n_{i-1}\in\mathcal{A}(x,t)$,
- $j=l$ ou $n_{j+1}\in\mathcal{A}(x,t)$.

Si $i \neq 1$, l'entier n_{i-1} sera appelé *élément d'entrée* de la t-composante $\mathcal{O}$. On notera $n_{i-1} = e(\mathcal{O})$.

LEMME 11. *Soient x et t deux réels tels que $x \geq 2$ et $1 \leq t < x$. Soient $\mathcal{C}$ une chaîne d'entiers $\leq x$ et $\mathcal{O}$ une t-composante de $\mathcal{C}$. Alors il existe un unique entier b de $\mathcal{B}(x,t)$ qui divise tous les entiers de $\mathcal{O}$. On notera dorénavant $b(\mathcal{O})$ cet entier b.*

Démonstration. D'après le Lemme 8, chaque élément d'une t-composante donnée admet un unique entier de $\mathcal{B}(x,t)$ comme diviseur, et, d'après le Lemme 9, tous ces entiers sont égaux.

Pour toute chaîne $\mathcal{C} = (n_i)_{1\leq i\leq l}$ on notera $\chi_t(\mathcal{C})$ l'ensemble de ses t-composantes $(n_\alpha)_{i\leq\alpha\leq j}$ telles que $i \neq 1$.

Les deux lemmes suivants constituent une généralisation du travail effectué par Tenenbaum [10] pour majorer $g(x)$.

LEMME 12. *Soient x et t deux réels tels que $x \geq 2$ et $1 \leq t \leq x$. Soit $\mathcal{C}$ une chaîne d'entiers $\leq x$. On a*

$$\#\{n \in \mathcal{C} : n \notin \mathcal{A}(x,t)\} \ll \frac{x\log x}{t}.$$

Démonstration. Pour toute t-composante $\mathcal{O}$ de $\chi_t(\mathcal{C})$, on a

$$e(\mathcal{O})P^-(b(\mathcal{O})) \leq [e(\mathcal{O}), b(\mathcal{O})] \leq x.$$

Donc d'après le Lemme 11,

$$\begin{aligned}\sum_{\mathcal{O}\in\chi_t(\mathcal{C})} l(\mathcal{O}) \leq x \sum_{\mathcal{O}\in\chi_t(\mathcal{C})} \frac{1}{b(\mathcal{O})} &\leq \frac{1}{t} \sum_{\mathcal{O}\in\chi_t(\mathcal{C})} P^-(b(\mathcal{O})) \\ &\leq \frac{x}{t} \sum_{\mathcal{O}\in\chi_t(\mathcal{C})} \frac{1}{e(\mathcal{O})} \ll \frac{x\log x}{t}.\end{aligned}$$

Par ailleurs, il y a au plus une t-composante de $\mathcal{C}$ qui n'appartient pas à $\chi_t(\mathcal{C})$. Si elle existe, notons-la $\mathcal{O}_0$. On a alors

$$l(\mathcal{O}_0) \leq \frac{x}{b(\mathcal{O}_0)} < \sqrt{\frac{x}{t}} \ll \frac{x\log x}{t},$$

ce qui permet de conclure.

On désignera par $g(x,t)$ le cardinal maximum d'un ensemble $\mathcal{U} = \bigcup_{1\leq\alpha\leq t} \mathcal{C}_\alpha$ où $(\mathcal{C}_\alpha)_{1\leq\alpha\leq t}$ désigne une famille de t chaînes d'entiers $\leq x$. Notons que $g(x) = g(x,1)$.

LEMME 13. *On a uniformément pour $x \geq 3$ et $\log x \leq t \leq x$,*

$$g(x,t) \ll x\frac{\log t}{\log x}.$$

D é m o n s t r a t i o n. C'est clair si $t > x^{1/3}$. Supposons donc $t \le x^{1/3}$. Soit $(\mathcal{C}_\alpha)_{1\le\alpha\le t}$ une famille de t chaînes d'entiers $\le x$ telle que $\#\bigcup_{1\le\alpha\le t}\mathcal{C}_\alpha = g(x,t)$. Notons $\mathcal{U} = \bigcup_{1\le\alpha\le t}\mathcal{C}_\alpha$. On a

$$\#\mathcal{U}\cap\mathcal{A}(x,t^3) \le A(x,t^3) \ll x\frac{\log t}{\log x}$$

d'après le Lemme 5. On a aussi d'après le Lemme 12,

$$\#\{n\in\mathcal{U} : n\notin\mathcal{A}(x,t^3)\} \ll x(\log x)/t^2 \le x/\log x,$$

ce qui permet de conclure.

Dorénavant, on ne travaillera qu'avec des 1-composantes. Pour simplifier, on écrira donc composante à la place de 1-composante et on notera $\chi(\mathcal{C})$ à la place de $\chi_1(\mathcal{C})$.

Nous sommes amenés de plus à donner de nouvelles notations. Pour toute chaîne $\mathcal{C}$ et toute composante $\mathcal{O}$ de $\chi(\mathcal{C})$, on pose

$$a(\mathcal{O}) = (e(\mathcal{O}), b(\mathcal{O})) \quad \text{et} \quad r(\mathcal{O}) = b(\mathcal{O})/a(\mathcal{O})$$

et pour tout a de $\mathcal{A}(x)$, on note

$$\chi(\mathcal{C},a) = \{\mathcal{O}\in\chi(\mathcal{C}) : a(\mathcal{O}) = a\}, \qquad \mathcal{R}(\mathcal{C},a) = \{r(\mathcal{O}) : \mathcal{O}\in\chi(\mathcal{C},a)\}$$

et

$$k(a,r) = \operatorname{card}\{\mathcal{O}\in\chi(\mathcal{C}) : a = a(\mathcal{O}) \text{ et } r = r(\mathcal{O})\}.$$

Lemme 14. *Soient $\mathcal{C}$ une chaîne d'entiers $\le x$ et $a\in\mathcal{A}(x)$. Pour tout élément r de $\mathcal{R}(\mathcal{C},a)$, on a*

$$\max\left(\frac{x}{aP^-(a)}, \left(\frac{x}{a}\right)^{\Omega(r)/(\Omega(r)+1)}\right) < r \le \frac{x}{a}.$$

D é m o n s t r a t i o n. Pour une certaine composante $\mathcal{O}$ de $\mathcal{C}$, on a $r = b(\mathcal{O})/a \le x/a$. Posons par ailleurs $k = \Omega(r)$. On a alors

$$\begin{aligned}\min(a^k r^{k+1}, (arP^-(a))^k) &\ge \min((arP^-(r))^k, (arP^-(a))^k)\\ &= (arP^-(ar))^k > x^k.\end{aligned}$$

Lemme 15. *Soient $\mathcal{C}$ une chaîne d'entiers $\le x$ et $a\in\mathcal{A}(x)$. On a*

$$\#\mathcal{R}(\mathcal{C},a) \le \#\chi(\mathcal{C},a) < \min(P^-(a), \sqrt{x/a}).$$

D é m o n s t r a t i o n. L'inégalité $\#\mathcal{R}(\mathcal{C},a) \le \#\chi(\mathcal{C},a)$ résulte clairement de la définition de $\mathcal{R}(\mathcal{C},a)$.

Soit $\mathcal{O}$ une composante de $\chi(\mathcal{C},a)$. On a

$$\frac{e(\mathcal{O})}{a} = \frac{[e(\mathcal{O}), b(\mathcal{O})]}{ar(\mathcal{O})} \le \frac{x}{ar(\mathcal{O})} < \min(P^-(a), \sqrt{x/a})$$

d'après le Lemme 14. Cela permet de conclure car les éléments d'entrée des composantes de $\chi(\mathcal{C},a)$ sont deux à deux distincts.

Pour achever ces préliminaires, nous donnons sans démonstration le résultat suivant, qui découle facilement du théorème des nombres premiers.

Lemme 16. *Il existe une constante C telle que pour toute partie finie non vide $\mathbb{P}$ de l'ensemble des nombres premiers, on ait*

$$\sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p} \le C \frac{\log\left(1+\dfrac{\#\mathbb{P}}{\min\mathbb{P}}\log(\max\mathbb{P})\right)}{\log(\min\mathbb{P})}.$$

7. Démonstration du Théorème 2. D'après (8), pour démontrer le Théorème 2, il suffit de montrer que $g(x) \ll x/\log x$, ce que nous allons faire maintenant.

Soit $\mathcal{C} = (n_i)_{1\le i\le g(x)}$ une chaîne d'entiers $\le x$ de longueur $g(x)$. L'ensemble des entiers de $\mathcal{C}$ qui sont éléments de $\mathcal{A}(x)$ sont en nombre $O(x/\log x)$ d'après le Lemme 5. Par ailleurs, si n_1 est élément d'une composante $\mathcal{O}_0$, la longueur de celle-ci, $l(\mathcal{O}_0)$, vérifie

$$l(\mathcal{O}_0) \le x/b(\mathcal{O}_0) < \sqrt{x}.$$

De plus, on a

$$\operatorname{card} \bigcup_{\mathcal{O}\in\chi(\mathcal{C})} \mathcal{O} \le \sum_{a\in\mathcal{A}(x)} (S(x,a)+T(x,a))$$

avec

$$S(x,a) = \sum_{\substack{r\in\mathcal{R}(\mathcal{C},a)\\ k(a,r)>\log^3(x/a) \text{ ou } r>(x/a)^{2/3}}} \frac{x}{ar}$$

et

$$T(x,a) = \sum_{\substack{r\in\mathcal{R}(\mathcal{C},a)\\ r\le(x/a)^{2/3}}} g(x/ar, \log^3(x/a)).$$

Or d'une part, en utilisant les Lemmes 14, 15 et 7, on obtient

$$\begin{aligned}
&\sum_{a\in\mathcal{A}(x)} S(x,a)\\
&\quad\le \sum_{a\in\mathcal{A}(x)} \left(\sqrt{x/a}\,\#\{r\in\mathcal{R}(\mathcal{C},a) : k(a,r)>\log^3(x/a)\} + (x/a)^{1/3}\#\mathcal{R}(\mathcal{C},a)\right)\\
&\quad\ll \sum_{a\in\mathcal{A}(x)} \frac{\sqrt{x/a}}{\log^3(x/a)}\#\chi(\mathcal{C},a) \le xQ_1(x) \ll \frac{x}{\log x}.
\end{aligned}$$

Et d'autre part, en utilisant successivement le Lemme 13, le Lemme 14, le Lemme 16, les Lemmes 14 et 15 et pour finir le Lemme 7, on obtient

$$\frac{1}{x}\sum_{a\in\mathcal{A}(x)} T(x,a)$$
$$\ll \sum_{a\in\mathcal{A}(x)} \frac{\log\log(2x/a)}{a\log(x/a)} \sum_{\substack{r\in\mathcal{R}(\mathcal{C},a)\\ r\le (x/a)^{2/3}}} \frac{1}{r} \le \sum_{a\in\mathcal{A}(x)} \frac{\log\log(2x/a)}{a\log(x/a)} \sum_{p\in\mathcal{R}(\mathcal{C},a)} \frac{1}{p}$$
$$\ll \sum_{a\in\mathcal{A}(x)} \frac{\log\log(2x/a)}{a\log(x/a)\log(\min\mathcal{R}(\mathcal{C},a))} \log\left(1+\frac{\#\mathcal{R}(\mathcal{C},a)}{\min\mathcal{R}(\mathcal{C},a)}\log(\max\mathcal{R}(\mathcal{C},a))\right)$$
$$\ll \sum_{a\in\mathcal{A}(x)} \frac{\log\log(2x/a)}{a\log^2(x/a)} \log\left(1+\min\left(1,\frac{aP^-(a)^2}{x}\right)\log(x/a)\right)$$
$$\ll Q_2(x)+\frac{Q_3(x)}{x} \ll \frac{1}{\log x}.$$

Cela achève la preuve du Théorème 2.

Bibliographie

[1] P. Erdős, R. Freud and N. Hegyvári, *Arithmetical properties of permutations of integers*, Acta Math. Hungar. 41 (1983), 169–176.

[2] A. D. Pollington, *There is a long path in the divisor graph*, Ars Combin. 16-B (1983), 303–304.

[3] C. Pomerance, *On the longest simple path in the divisor graph*, Congr. Numer. 40 (1983), 291–304.

[4] I. Z. Ruzsa, *On the small sieve II. Sifting by composite numbers*, J. Number Theory 14 (1982), 260–268.

[5] E. Saias, *Sur l'utilisation de l'identité de Buchstab*, dans : Séminaire de Théorie des Nombres de Paris 1991–92, S. David (ed.), Birkhaüser, 1993, 217–245.

[6] —, *Entiers sans grand ni petit facteur premier III*, Acta Arith. 71 (1995), 351–379.

[7] —, *Entiers à diviseurs denses 1*, J. Number Theory 62 (1997), 163–191.

[8] A. Schinzel et G. Szekeres, *Sur un problème de M. Paul Erdős*, Acta Sci. Math. (Szeged) 20 (1959), 221–229.

[9] G. Tenenbaum, *Sur un problème de crible et ses applications*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) 19 (1986), 1–30.

[10] —, *Sur un problème de crible et ses applications*, 2. *Corrigendum et étude du graphe divisoriel*, ibid. 28 (1995), 115–127.

Laboratoire de Probabilités
Université Paris VI
4, Pl. Jussieu
75252 Paris Cedex 05, France
E-mail: saias@ccr.jussieu.fr

Reçu le 4.2.1997
et révisé le 9.5.1997 (3128)