

ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

ANNICK TRUFFERT

**Applications des méthodes de représentation intégrale et
d'approximations inf-convolutives à l'épi convergence**

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4^e série, tome 14,
n° 2 (1987), p. 169-197

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1987_4_14_2_169_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze* » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

Applications des méthodes de représentation intégrale et d'approximations inf-convolutives à l'épi convergence

ANNICK TRUFFERT

Introduction

L'objet de ce travail est l'épi-convergence des suites de fonctionnelles intégrales; les propriétés qui en découlent sont importantes pour les applications en optimisation, par exemple: approximations et perturbations en optimisation stochastique (cf. G. Salinetti et R. Wets [S-W]), problèmes d'homogénéisation en mécanique (cf. H. Attouch [A]), conditions d'optimalité et dérivées généralisées (cf. R.T. Rockafellar [R3] et E. Giner [G3]).

Deux questions se posent:

- (1) L'épi-limite forte d'une suite de fonctionnelles intégrales est-elle encore une fonctionnelle intégrale?
- (2) Peut-on caractériser l'intégrande limite à partir de la suite des intégrandes correspondantes?

Ce type de questions a fait l'objet de nombreux travaux; citons entre autres ceux de J.L. Joly et F. De Thelin [J-T], et E. Giner [G2] et dans le cadre de la théorie de la Γ -convergence développée par E. De Giorgi [D] ceux de P. Marcellini et C. Sbordone [M-S] et de G. Buttazzo et G. Dal Maso [B-D1], [B-D2].

On résoud (§1) la première question dans le cadre général des *espaces intégraux topologiquement décomposable* (extension naturelle de ceux de R.T. Rockafellar (68), (72) [R1] et (75) [R2], E. Giner (76) [G1] et A. Kozek (77), [Ko]) que l'on suppose de plus *métrisables*. On vérifie (Th. 1.3) que l'additivité d'une suite de fonctionnelles se conserve par épi-convergence et l'on utilise la coïncidence entre fonctionnelle additive s.c.i. et fonctionnelle intégrale s.c.i., lorsque la topologie est *absolument continue* (§1 (3)) d'après un résultat de A. Bourass et l'auteur [B-T] (82) (cf. également G. Buttazzo et G. Dal Maso [B-D3] (82) et A. Fougères et l'auteur [F-T2] (84)).

On précise également ces résultats grâce aux conditions de croissance caractéristiques de la propriété de l'épi-limite inférieure d'une suite de

fonctionnelles intégrales, obtenues dans L_φ par A. Fougères [F2] et dans L_0 par l'auteur (Th. 1.5).

La deuxième question est résolue (§2) dans les espaces intégraux de type Orlicz L_φ avec Δ_2 -condition (contenant les L_p si $1 \leq p < +\infty$); lorsque la suite de fonctionnelles intégrales est équi-s.c.i., l'intégrande limite s'interprète en terme de convergence faible des intégrandes; dans le cas général, on s'y ramène en utilisant les techniques d'approximations inf-convolutives de A. Fougères et l'auteur [F-T1] qui assurent l'équi-locale lipschitzité des approximées; on obtient alors la formule générale:

$$L_\varphi\text{-}\lim_e I_{f_n} = I_f \text{ avec } f = \sup_p \sigma - \lim_n (f_n \nabla \varphi_p)$$

(Th. 2.2 et Prop. 2.8).

Enfin, dans le cas particulier où l'épi-limite "ponctuelle" des intégrandes existe, on s'intéresse (§3) aux conditions de passage de l'épi-limite sous l'intégrale

$$L_\varphi\text{-}\lim_e I_{f_n} = I_{\lim_e f_n}$$

exposées en (83) par E. Giner (version antérieure de [G2]) qu'on étend partiellement (Th. 3.1 et 3.2), via une extension du lemme de Fatou (de type Vitali) obtenue en (83) par l'auteur (cf. aussi les travaux, parus en (84) de E. Balder [Ba] pour les fonctions à valeurs dans \mathbb{R}^n) et les méthodes d'approximations inf-convolutives déjà citées [F-T1].

Je remercie H. Attouch et A. Fougères pour l'intérêt qu'ils ont bien voulu porter à ce travail et pour leurs diverses remarques et suggestions.

0. - Définitions et notations préalables

0.1. Soient:

- $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré par une mesure μ positive, σ -finie, sans atome.
- X un Banach séparable, de tribu borélienne associée B_X , de norme $|\cdot|$.
- $L_0(\Omega, X)$ l'e.v.t. semi-normé des fonctions mesurables, muni de la topologie de μ -convergence (i.e. convergence en mesure sur les parties de mesure finie): $L_0(\Omega, X)$ l'espace quotient de $L_0(\Omega, X)$ par la relation d'égalité μ -p.p.

0.2. - Pour tout $\alpha \in L_0(\Omega, \mathbb{R})$, on note:

- α_+ (resp. α_-) la partie positive (resp. négative) de α .
- $\int_{\Omega}^* \alpha d\mu$ (resp. $\int_{*\Omega} \alpha d\mu$) l'intégrale supérieure (resp. inférieure) de α .

On rappelle que $\int_{\Omega}^* \alpha d\mu \leq \int_{*\Omega} \alpha d\mu$ avec égalité dès que $-\infty < \int_{*\Omega} \alpha$ ou $\int_{\Omega}^* \alpha < +\infty$

(on note alors $\int_{\Omega} = \int_{\Omega}^* = \int_{*\Omega}$).

0.3. - A toute *intégrande* $h: \Omega \times X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ (i.e. application $\mathcal{T} \otimes B_X$ -mesurable) on associe:

- l'opérateur *intégrand* (encore noté h):

$$h: u \in L_0(\Omega, X) \rightarrow h(u) = h(\cdot, u(\cdot)) \in L_0(\Omega, \overline{\mathbb{R}}),$$

- la *fonctionnelle intégrale* I_h qui a tout $u \in L_0(\Omega, X)$ associe $I_h(u)$ égal à l'intégrale supérieure de $h(u)$.

On dit que h ou I_h est *intégralement propre* sur un s.e.v. L de $L_0(\Omega, X)$ si pour tout $u \in L$, $I_h(u) = \int_{*\Omega} h(u) d\mu$.

0.4. - Pour toute *fonction de Young* $\varphi: \Omega \times X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ (i.e. intégrande convexe normale paire continue et nulle en zéro, coercive) on note L_φ l'espace vectoriel, engendré par le domaine de la fonctionnelle intégrale I_φ , que l'on munit de la topologie de la φ -norme: $\|\cdot\|_\varphi$ étant la jauge du convexe $\{I_\varphi(\cdot) \leq 1\}$.

φ vérifie une Δ_2 -condition si:

$$\exists a \in L_1(\Omega, \mathbb{R}), \exists b > 0: \forall \omega (\mu\text{-p.p.}), \forall x: \varphi(\omega, 2x) \leq b\varphi(\omega, x) + a(\omega),$$

c'est le cas des $\varphi_p = \frac{1}{p} |\cdot|^p$ pour tout $1 \leq p < +\infty$, qui définissent les espaces L_p .

0.5. - *Limites épigraphiques* [A]

DEFINITION 0.5.1.

- Soit (E, \mathcal{C}) un espace topologique; on note pour tout $u \in E$, $\vartheta_{\mathcal{C}}(u)$ l'ensemble des \mathcal{C} -voisinages de u .

- A toute suite $(F_n)_n$ de fonctions de E dans $\overline{\mathbb{R}}$, on associe les deux fonctions limites suivantes:

a) la *C-épi-limite inférieure* notée $\mathcal{C}\text{-}\underline{\lim}_e F_n$ (ou plus simplement $E\text{-}\underline{\lim}_e F_n$ lorsqu'il n'y a aucun risque de confusion sur la topologie considérée) est définie par:

$$\mathcal{C}\text{-}\underline{\lim}_e F_n(u) = \sup_{V \in \vartheta_{\mathcal{C}}(u)} \underline{\lim}_n \inf_{v \in V} F_n(v)$$

b) la *C-épi-limite supérieure* notée $\mathcal{C}\text{-}\overline{\lim}_e F_n$ (ou $E\text{-}\overline{\lim}_e F_n$) est la fonction définie par:

$$\mathcal{C}\text{-}\overline{\lim}_e F_n(u) = \sup_{V \in \vartheta_{\mathcal{C}}(u)} \overline{\lim}_n \inf_{v \in V} F_n(v).$$

- On dit que la suite $(F_n)_n$ est *C-épi-convergente en u* si:

$$\mathcal{C}\text{-}\underline{\lim}_e F_n(u) = \mathcal{C}\text{-}\overline{\lim}_e F_n(u),$$

leur valeur commune est notée $\mathcal{C}\text{-}\lim_e F_n(u)$.

Lorsque l'égalité est vérifiée en tout point u de E , la suite est dite \mathcal{C} -épi-convergente et la fonction $u \in E \rightarrow \mathcal{C}\text{-}\lim_e F_n(u)$ est appelée la \mathcal{C} -épi-limite de la suite $(F_n)_n$ (notée $\mathcal{C}\text{-}\lim_e F_n$ ou $E\text{-}\lim_e F_n$).

PROPOSITION 0.5.2. Si (E, \mathcal{C}) admet une base dénombrable de voisinages en tout point, alors:

$$\forall u \in E \quad \mathcal{C}\text{-}\underline{\lim}_e F_n(u) = \min_{\{u_n \rightarrow u\}} \underline{\lim}_n F_n(u_n)$$

$$\text{et } \mathcal{C}\text{-}\overline{\lim}_e F_n(u) = \min_{\{u_n \rightarrow u\}} \overline{\lim}_n F_n(u_n).$$

Une suite $(u_n)_n$ est dite réalisante de $\mathcal{C}\text{-}\underline{\lim}_e F_n$ en u (resp. $\mathcal{C}\text{-}\overline{\lim}_e F_n$, $\mathcal{C}\text{-}\lim_e F_n$) si elle \mathcal{C} -converge vers u et si $\mathcal{C}\text{-}\underline{\lim}_e F_n(u) = \underline{\lim}_n F_n(u_n)$ (resp. $\mathcal{C}\text{-}\overline{\lim}_e F_n(u) = \overline{\lim}_n F_n(u_n)$, $\mathcal{C}\text{-}\lim_e F_n(u) = \lim F_n(u_n)$).

PROPOSITION 0.5.3. Les épi-limites inférieure et supérieure d'une suite de fonctions sont \mathcal{C} -s.c.i. sur E .

On a de plus:

$$E\text{-}\underline{\lim}_e F_n = E\text{-}\underline{\lim}_e \overline{F}_n^{\mathcal{C}} \text{ et } E\text{-}\overline{\lim}_e F_n = E\text{-}\overline{\lim}_e \overline{F}_n^{\mathcal{C}}$$

où $\overline{F}_n^{\mathcal{C}}$ désigne la régularisée \mathcal{C} -s.c.i. de F_n .

PROPOSITION 0.5.4. L'épi-limite inférieure (resp. supérieure) d'une suite $(f_n)_n$ d'intégrandes de $\Omega \times X$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ est encore une intégrande notée $\underline{\lim}_e f_n$ (resp. $\overline{\lim}_e f_n$) pour la tribu P -complétée de τ :

$$\underline{\lim}_e f_n(\omega, x) = [|\cdot| \cdot \underline{\lim}_e f_n(\omega, \cdot)](x)$$

$$\text{et } \overline{\lim}_e f_n(\omega, x) = [|\cdot| \cdot \overline{\lim}_e f_n(\omega, \cdot)](x).$$

0.6 - Approximations inf-convolutives dans un espace intrinsèque [F-T1]

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v. semi-normé; on appelle référentiel toute fonction $\phi \in \overline{\mathbb{R}}^E$ convexe, paire continue et nulle en zéro, coercive; et semi-norme intrinsèque (associée à ϕ) $\|\cdot\|_\phi$: la jauge de la section unité de ϕ .

La semi-norme intrinsèque est équivalente à la semi-norme initiale de E .

Si ϕ est une fonction de Young sur $\Omega \times X$ alors $\varphi(\omega, \cdot)$ est une référentiel sur X pour μ -presque tout $\omega \in \Omega$ et I_φ est par définition même un référentiel sur L_φ .

On a le résultat d'approximation suivant:

LEMME [F-T1; 4.2]. Soit $(F_n)_n$ une suite de fonctions sur E ; si Φ est un référentiel sur E tel que $\underline{\lim}_n F_n \nabla \phi(cu_0) > -\infty$ avec $c > 0$ et $u_0 \in E$ alors

pour tout $u \in u_0 + \text{Int dom}\phi(c, \cdot)$ on a :

$$E\text{-}\varliminf_e F_n(u) = \sup_p \varliminf_n F_n \nabla \phi_p(u)$$

$$\text{et } E\text{-}\overline{\varliminf}_e F_n(u) = \sup_p \overline{\varliminf}_n F_n \nabla \phi_p(u)$$

où pour tout entier $p: \phi_p = \phi(p \cdot)$ et

$$F_n \nabla \phi_p: u \rightarrow \inf_{v \in E} (F_n(v) + \phi_p(u - v))$$

$F_n \nabla \phi_p$ est appelée *approximation-inf-convolutive d'ordre p de F_n* .

1. - Représentation des épi-limites de fonctionnelles intégrales

Soit L un sous-espace vectoriel de $L_0(\Omega, X)$ muni d'une topologie \mathcal{C} , tel que:

- (1) $u1_A \in L$ pour tout $u \in L$ et tout $A \in \mathcal{C}$ (1_A désigne la fonction caractéristique de A).
- (2) (L, \mathcal{T}) est un groupe topologique métrisable.
- (3) L'application $(u, A) \in L \times \mathcal{T} \rightarrow u1_A \in L$ est séparément continue au sens suivant:

$$u_n \xrightarrow{L} u \implies u_n 1_A \xrightarrow{L} u 1_A \text{ pour tout } A \in \mathcal{T}$$

$$1_{A_n} \xrightarrow{L_0} 1_A \implies u 1_{A_n} \xrightarrow{L} u 1_A \text{ pour tout } u \in L$$

- (4) Il existe $\alpha \in L_0(\Omega, \mathbb{R}_+^*)$ telle que L_∞^α s'injecte continuellement dans (L, \mathcal{C}) où L_∞^α est l'espace de Banach de boule unité $L_\infty^\alpha(1) = \{u: |u| \leq \alpha \text{ p.p.}\}$

DEFINITION 1.1. $F: L \rightarrow]-\infty, +\infty]$ est une *fonctionnelle additive* sur L si pour tout $u \in L$ l'application $F(u1 \cdot): A \in \mathcal{T} \rightarrow F(u1_A) \in \mathbb{R}$ est additive sur \mathcal{T} . F est à *variation additives* si pour tout élément u de son domaine sa *variation en u* $F_u: v \in L \rightarrow F(u+v) - F(u)$, est une fonctionnelle additive. On a le résultat suivant:

THEOREME 1.2. Soit (L, \mathcal{C}) un espace topologique vérifiant les quatre propriétés ci-dessus et $(F_n)_n$ une suite de fonctions sur L à valeurs dans $]-\infty, +\infty]$ telle que:

- 1) pour tout entier n , F_n est à variations additives
- 2) $(F_n)_n$ \mathcal{C} -épi-converge vers F et F est propre sur L .

Alors F est la restriction à L d'une fonctionnelle intégrale associée à une intégrande normale propre.

D'autre part il y a unicité de l'intégrande représentante à une fonction d'intégrale nulle près.

REMARQUES

- 1) Si la topologie \mathcal{C} n'est pas métrisable on peut "représenter" l'épi-limite séquentielle d'une suite de fonctionnelles à variations additives dans la mesure où celle-ci est séquentiellement \mathcal{C} -s.c.i. propre sur L . La démonstration suit la même démarche que celle donnée plus loin, en utilisant dans les divers lemmes techniques non pas les suites réalisantes (cf. 0.5.2) mais les suites réalisantes à ε près.
- 2) Une fonctionnelle intégrale intégralement propre sur L (0.3) est, lorsqu'elle est propre, une fonctionnelle à variations additives; si de plus $f(0) = 0$ p.p. alors c'est une fonctionnelle additive. Plus généralement, si F est une fonctionnelle additive, nécessairement $F(0) = 0$ et F est à variations additives compte tenu du lemme suivant (dont la démonstration sera donnée plus loin):

LEMME 1.2.1. *F est à variations additives si et seulement si il existe $u_0 \in \text{dom}F$ tel que la variation de F en u_0 soit additive.*

Compte tenu du théorème de représentation intégrale non linéaire dû à A. Bourass et l'auteur [B-T] (cf. également [H], [K] et [F-T2]):

LEMME 1.2.2. *Toute fonctionnelle additive, \mathcal{C} séquentiellement s.c.i. propre sur L , se représente sur L par une fonctionnelle intégrale associée à une intégrande normale propre unique à l'égalité μ p.p. près.*

Le Théorème 1.2 se déduit alors du résultat plus général suivant:

THEOREME 1.3. *Soit $(F_n)_n$ une suite de fonctionnelles à variations additives sur L , dont l'épi-limite inférieure est propre; pour tout élément u_0 de L en lequel l'épi-limite de la suite $(F_n)_n$ existe et est finie la variation en u_0 de l'épi-limite inférieure (resp. supérieure) est sur-additive (resp. sous-additive).*

DEMONSTRATION de 1.2. Soit F l'épi-limite d'une suite (F_n) de fonctionnelles à variations additives, que l'on suppose propre sur L . Pour tout $u_0 \in \text{dom}F$, la variation en u_0 de F est une fonctionnelle additive (1.3) \mathcal{C} -s.c.i. propre sur L et se représente donc sur L d'après [B-T; 4.3] (cf. 1.2.2) par une fonctionnelle intégrale I_{f_0} avec f_0 intégrande normale propre nulle en zéro (unique μ -p.p.) sur $\Omega \times X$.

L'intégrande $f: \Omega \times X \rightarrow f_0(\omega, x - u_0(\omega)) + \alpha_0(\omega) \in]-\infty, +\infty]$ où α_0 est une fonction intégrale telle que $\int_{\Omega} \alpha_0 d\mu = F(u_0)$, répond au problème.

D'autre part si g est une intégrande telle que $F(u) = \int_{\Omega} g(u) d\mu$ pour tout $u \in L$ alors $\int_{\Omega} [g(u_0 + u) - g(u_0)] d\mu = \int_{\Omega} f_0(u) d\mu$ pour tout $u \in L$ et il existe donc un négligeable N tel que $f_0 = g(\cdot, u_0(\cdot) + \cdot) - g(\cdot, u_0(\cdot))$ sur $(\Omega \setminus N) \times X$, de sorte que

$$f - g = \alpha_0 - g(u_0) \text{ sur } (\Omega \setminus N) \times X$$

avec $\int_{\Omega} [\alpha_0 - g(u_0)] d\mu = F(u_0) - F(u_0) = 0.$

DEMONSTRATION de 1.3. Supposons dans un premier temps que $\mathcal{C} - \lim_e F_n(0) = 0$ et $F_n(0) = 0$ (i.e. les F_n sont additives).

Soient $u \in L$, A, B deux ensembles mesurables disjoints, il faut vérifier les deux inégalités suivantes:

- (i) $\mathcal{C} - \underline{\lim}_e F_n(u1_A + u1_B) \geq \mathcal{C} - \underline{\lim}_e F_n(u1_A) + \mathcal{C} - \underline{\lim}_e F_n(u1_B)$;
 - (ii) $\mathcal{C} - \overline{\lim}_e F_n(u1_A + u1_B) \leq \mathcal{C} - \overline{\lim}_e F_n(u1_A) + \mathcal{C} - \overline{\lim}_e F_n(u1_B)$.
- (i) Soit $(u_n + u1_A + u1_B)_n$ une suite réalisante de $\mathcal{C} - \underline{\lim}_e F_n$ en $(u1_A + u1_B)$ (cf. 0.5.2) on a:

$$\begin{aligned} \mathcal{C} - \underline{\lim}_e F_n(u1_A + u1_B) &= \underline{\lim}_n F_n(u_n + u1_A + u1_B) \\ &= \underline{\lim}_n [F_n((u + u_n)1_A) + F_n((u1_B + u_n)1_{\Omega \setminus A})] \\ &\geq \underline{\lim}_n [F_n((u + u_n)1_A)] + \underline{\lim}_n [F_n((u1_B + u_n)1_{\Omega \setminus A})] \\ &\geq \mathcal{C} - \underline{\lim}_e F_n(u1_A) + \mathcal{C} - \underline{\lim}_e F_n(u1_B). \end{aligned}$$

- (ii) Soient $(u_n + u1_A)_n$ et $(v_n + u1_B)_n$ deux suites réalisant respectivement $\mathcal{C} - \overline{\lim}_e F_n(u1_A)$ et $\mathcal{C} - \overline{\lim}_e F_n(u1_B)$ on a:

$$\begin{aligned} \mathcal{C} - \overline{\lim}_e F_n(u1_A) + \mathcal{C} - \overline{\lim}_e F_n(u1_B) &= \overline{\lim}_n F_n(u_n + u1_A) \\ &\quad + \overline{\lim}_n F_n(v_n + u1_B) \\ &\geq \overline{\lim}_n [F_n(u_n + u1_A) + F_n(v_n + u1_B)] \\ &\geq \overline{\lim}_n [F_n(u_n 1_{\Omega \setminus A} + v_n 1_A) + F_n((u_n + u)1_A + (v_n + u1_B)1_{\Omega \setminus A})] \\ &\geq \underline{\lim}_n [F_n(u_n 1_{\Omega \setminus A} + v_n 1_A)] + \overline{\lim}_n [F_n((u_n + u)1_A + (v_n + u1_B)1_{\Omega \setminus A})] \\ &\geq \mathcal{C} - \underline{\lim}_e F_n(0) + \mathcal{C} - \overline{\lim}_e F_n(u1_A + u1_B) \end{aligned}$$

puisque $(u_n 1_{\Omega \setminus A} + v_n 1_A)$ et $((u_n + u)1_A + (v_n + u1_B)1_{\Omega \setminus A})_n$ convergent respectivement vers 0 et $u1_A + u1_B$. L'inégalité (ii) résulte alors du fait que $\mathcal{C} - \underline{\lim}_e F_n(0) = 0$.

On achève la démonstration en utilisant un lemme technique concernant les variations des épi-limites. La démonstration sera donnée pour la commodité du lecteur en annexe 1.

LEMME 1.3.1. Soit (E, τ) un groupe topologique métrisable; soient $(H_n)_n$ une suite de fonctions propres sur E et u_0 un point en lequel l'épi-limite des H_n existe et est finie.

Pour tout suite $(u_n^0)_n$ réalisante en u_0 (cf. 0.5.2), la variation en u_0 de l'épi-limite inférieure (resp. supérieure) des H_n est égale à l'épi-limite inférieure

(resp. supérieure) des variations en u_n^0 des H_n , soit:

$$\begin{aligned} [\tau\text{-}\underline{\lim}_e H_n]_{u_0} &= \tau\text{-}\underline{\lim}_e [H_n]_{u_n^0} \\ (\text{resp. } [\tau\text{-}\overline{\lim}_e H_n]_{u_0} &= \tau\text{-}\overline{\lim}_e [H_n]_{u_n^0}) \end{aligned}$$

en particulier $\tau \cdot \lim_e [H_n]_{u_n^0}(0) = 0$.

Réciproquement s'il existe une suite $(u_n^0)_n$ convergeant vers u_0 pour laquelle

$$\tau\text{-}\underline{\lim}_e [H_n]_{u_n^0}(0) = 0$$

alors

$$\tau\text{-}\underline{\lim}_e H_n(u_0) = \underline{\lim}_n H_n(u_n^0) \text{ et } \tau\text{-}\overline{\lim}_e H_n(u_0) = \overline{\lim}_n H_n(u_n^0).$$

FIN DE LA DEMONSTRATION de 1.3. Soient $u_0 \in L$ tel que $\mathcal{C}\text{-}\lim_e F_n(u_0) \in \mathbb{R}$ et $(u_n^0)_n$ une suite réalisante en ce point d'après 1.3.1 $[\mathcal{C}\text{-}\underline{\lim}_e F_n]_{u_0} = \mathcal{C}\text{-}\underline{\lim}_e [F_n]_{u_n^0}$ et $[\mathcal{C}\text{-}\overline{\lim}_e F_n]_{u_0} = \mathcal{C}\text{-}\overline{\lim}_e [F_n]_{u_n^0}$ comme les $[F_n]_{u_n^0}$ sont des fonctionnelles additives d'après 1.2.1 on en déduit que $A \rightarrow [\mathcal{C}\text{-}\underline{\lim}_e F_n]_{u_0}(u|_A)$ (resp. $A \rightarrow [\mathcal{C}\text{-}\overline{\lim}_e F_n]_{u_0}(u|_A)$) est sur-additive (resp. sous-additive) compte tenu de la première partie de la démonstration et du fait que $\mathcal{C}\text{-}\lim_e [F_n]_{u_n^0}(0) = 0$ (Lemme 1.3.1).

DEMONSTRATION de 1.2.1. Supposons que la variation de F en u_0 soit additive et considérons $u_1 \in \text{dom } F$; pour montrer que l'application $A \in \mathcal{T} \rightarrow F_{u_1}(u|_A)$ est additive il suffit de vérifier, pour tout ensemble A mesurable l'égalité:

$$F_{u_1}((u - u_1)|_A) = F_{u_0}((u - u_0)|_A) - F_{u_0}((u_1 - u_0)|_A).$$

Or

$$\begin{aligned} F_{u_1}((u - u_1)|_A) &= F(u|_A + u_1|_{\Omega \setminus A}) - F(u_1) \\ &= F(u|_A + u_1|_{\Omega \setminus A} + u_0 - u_0) - F(u_1) \\ &= F_{u_0}((u - u_0)|_A + (u_1 - u_0)|_{\Omega \setminus A}) + F(u_0) - F(u_1) \\ &= F_{u_0}((u - u_0)|_A) + F_{u_0}((u_1 - u_0)|_{\Omega \setminus A}) - F_{u_0}(u_1 - u_0) \\ &= F_{u_0}((u - u_0)|_A) + F_{u_0}((u_1 - u_0)|_A). \end{aligned}$$

Applications à l'épi-limite de fonctionnelles intégrales dans les L_φ et L_0 .

Nous considérons désormais $L = L_\varphi$ (resp. L_0) avec φ fonction de Young vérifiant une Δ_2 -condition (0.4) et nous supposons la mesure μ sans atome.

Dans ce cas, la propriété de l'épi-limite d'une suite de fonctionnelles intégrales en un point suffit pour l'avoir en tout point, et l'on a:

THEOREME 1.4. Soit $\varphi: \Omega \times X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ une fonction de Young vérifiant une Δ_2 -condition (0.4) et soit $(I_{f_n})_n$ une suite de fonctionnelles intégrales épi-convergente en φ -norme sur L_φ (resp. pour la topologie de la convergence en mesure locale sur L_0). S'il existe un point $u_0 \in L_\varphi$ (resp. L_0) pour lequel $L_\varphi\text{-}\lim_e I_{f_n}(u_0) \in \mathbb{R}$ (resp. $L_0\text{-}\lim_e I_{f_n}(u_0) \in \mathbb{R}$) alors il existe une intégrande normale propre f telle que:

$$\forall u \in L_\varphi: L_\varphi\text{-}\lim_e I_{f_n}(u) = I_f(u) \in]-\infty, +\infty[$$

$$\text{(resp. } \forall u \in L_0: L_0\text{-}\lim_e I_{f_n}(u) = I_f(u) \in]-\infty, +\infty[).$$

REMARQUE. Lorsque φ ne vérifie pas de Δ_2 -condition le résultant est encore vrai pour une suite de fonctionnelles intégrales épi-convergente en φ -norme sur l'espace sous jacent au domaine de I_φ .

Le Théorème 1.4 découle immédiatement de 1.2 et des conditions de croissance caractéristiques de la propriété de l'épi-limite inférieure des I_{f_n} dans L_φ (resp. dans L_0). Dans le cas de L_φ elles ont été obtenues par A. Fougères (communication au Congrès de Catane, (83)).

LEMME 1.4.1. [F2] Soient $(I_{f_n})_n$ une suite de fonctionnelles intégrales, intégralement propres sur L_φ et $u_0 \in L_\varphi$.

Si $-\infty < L_\varphi\text{-}\underline{\lim}_e I_{f_n}(u_0) \leq L_\varphi\text{-}\overline{\lim}_e I_{f_n}(u_0) < +\infty$ alors il existe $c > 0$ tel que $\underline{\lim}_n I_{f_n \nabla \varphi_c}(u_0) > -\infty$, et $L_\varphi\text{-}\underline{\lim}_e I_{f_n}$ est propre sur $u_0 + \text{Int dom } I_\varphi(c \cdot)$, donc sur tout L_φ dans le cas Δ_2 où les conditions de croissance suivantes sont vérifiées:

$$f_n(\omega, x) \geq -\varphi(\omega, cx) + a_n(\omega) \text{ où } \underline{\lim}_n \int_\Omega a_n d\mu > -\infty.$$

On obtient un résultat analogue dans le cas de l'épi-limite inférieure en mesure des I_{f_n} en s'appuyant sur un lemme de "disjonction" dû à A. Fougères et ses conséquences sur la régularisée s.c.i. en mesure d'une fonctionnelle intégrale.

LEMME DE DISJONCTION 1.4.2. [F2] Pour toute suite $(\alpha_n)_n$ de fonctions intégrales telle que $\lim_n \int \alpha_n d\mu = -\infty$ (resp. $+\infty$) il existe une sous partition $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de Ω et une suite extraite n_k telle que $\lim_k \int_{A_k} \alpha_{n_k} d\mu = -\infty$ (resp. $+\infty$).

COROLLAIRE 1.4.3. [F2] Soit $f: \Omega \times X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une intégrande telle qu'il existe u_0 mesurable pour lequel $f(u_0)$ est intégrable et telle que $\inf_x f(\omega, x)$ ne soit pas intégrable alors la régularisée s.c.i. en mesure de la fonctionnelle intégrale associée à f vaut $-\infty$ sur la fermeture en mesure du domaine de I_f et $+\infty$ à l'extérieur.

THEOREME 1.5. Soit $(I_{f_n})_n$ une suite de fonctionnelles intégrales dont l'épi-limite supérieure en mesure n'est pas indentiquement égale à $+\infty$ (i.e. il existe $u_0 \in L_0$ et une suite $(u_n^0)_n$ convergeant en mesure vers u_0 telle que $\varliminf_n I_{f_n}(u_n^0) < +\infty$).

L'épi-limite inférieure en mesure des I_{f_n} est propre si et seulement si

$$\varliminf_n \int_{\Omega} \inf_x f_{n_-}(\omega, x) d\mu > -\infty \quad (\text{où } f_{n_-} = \inf(f_n, 0))$$

en d'autres termes il existe une suite de fonctions intégrables négatives α_n , bornée dans L_1 telle que pour n suffisamment grand on ait:

$$\forall \omega \mu\text{-p.p.}, \forall x \in X, \quad f_n(\omega, x) \geq \alpha_n(\omega).$$

DEMONSTRATION de 1.5. La condition est évidemment suffisante; supposons donc que $\varliminf_n \int \inf_x f_{n_-}(\omega, x) d\mu = -\infty$ et montrons que nécessairement $L_0\text{-}\varliminf_e I_{f_n}$ n'est pas propre.

Deux cas se présentent:

- ou bien il existe une suite extraite n_k pour laquelle $\inf_{x \in X} f_{n_k}(\omega, x)$ n'est intégrable pour aucun entier k ;
- ou bien $\inf_{x \in X} f_n(\omega, x)$ est intégrable pour n suffisamment grand.

1er cas.

Il existe n_k telle que $\inf_x f_{n_k}(\omega, x) \notin L_1$ pour tout entier k . Si $L_0\text{-}\varliminf_e I_{f_n}(u_0) > -\infty$ alors $f_n(u_n^0)$ est intégrable pour n suffisamment grand. D'après 1.4.3 on a alors pour tout entier k ($\geq k_0$):

$$\overline{I_{f_{n_k}}}^{\mu} = \begin{cases} -\infty & \text{sur } \text{dom } I_{f_{n_k}}^{\mu} \\ +\infty & \text{ailleurs} \end{cases}$$

et comme

$$\begin{aligned} L_0\text{-}\varliminf_e I_{f_n}(u_0) &\stackrel{0.5.3}{=} L_0\text{-}\varliminf_e \overline{I_{f_n}}^{\mu}(u_0) \leq L_0\text{-}\varliminf_e \overline{I_{f_{n_k}}}^{\mu}(u_0) \\ &\leq \varliminf_k \overline{I_{f_{n_k}}}^{\mu}(u_{n_k}^0) \\ L_0\text{-}\varliminf_e I_{f_n}(u_0) &= -\infty \text{ car } I_{f_{n_k}}(u_{n_k}^0) < +\infty \text{ dès que } k \geq k_0 \end{aligned}$$

ce qui est en contradiction avec ce qui précède.

2ème cas.

$\inf_{x \in X} f_{n_-}(\omega, x)$ est intégrable pour tout $n \geq n_0$ et

$$\varliminf_{n \geq n_0} \int_{\Omega} \inf_{x \in X} f_{n_-}(\omega, x) d\mu = -\infty.$$

D'après le lemme de disjonction 1.4.2 il existe une sous-partition $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de Ω et une suite extraite n_k telle que

$$\lim_k \int_{A_k} \inf_{x \in X} f_{n_k}(\omega, x) d\mu = -\infty.$$

Comme $f_{n_k}(u_{n_k}^0)$ est intégrable pour tout entier k , on est donc dans les conditions d'application du théorème de passage de l'inf sous le signe intégral [R1] (cf. également [F1; 1.1] et [B-V; I 1.4]) et l'on a:

$$\lim_k \inf_{u \in L_0} \int_{A_k} f_{n_k}(u) d\mu = -\infty.$$

Il existe une suite extraite (k_p) et, pour tout entier p une fonction mesurable u_p , telles que:

$$\int_{A_{k_p}} f_{n_{k_p}}(u_p) d\mu \leq -p.$$

Considérons pour tout entier p l'ensemble mesurable:

$$B_p = \left\{ \omega \in \Omega \setminus f_{n_{k_p}}(\omega, u_p 1_{A_{k_p}}(\omega)) \leq 0 \right\}$$

$(A_{k_p} \cap B_p)_p$ est encore une sous-partition de Ω et $(u_p 1_{A_{k_p} \cap B_p})_p$ converge donc vers 0 en mesure; on obtient les inégalités:

$$\begin{aligned} L_0\text{-}\underline{\lim}_e I_{f_n}(0) &\leq L_0\text{-}\underline{\lim}_p I_{f_{n_{k_p}}}(0) \leq \underline{\lim}_p I_{f_{n_{k_p}}}(u_p 1_{A_{k_p} \cap B_p}) \\ &\leq \underline{\lim}_p I_{f_{n_{k_p}}}(u_p 1_{A_{k_p}}) \leq \underline{\lim}_p \int_{A_{k_p}} f_{n_{k_p}}(u_p) d\mu \end{aligned}$$

et donc $L_0\text{-}\underline{\lim}_e I_{f_n}(0) = -\infty$.

COROLLAIRE PRATIQUE. Soient $\varphi: \Omega \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction de Young vérifiant une Δ_2 -condition et $(f_n)_n$ une suite d'intégrandes sur $\Omega \times X$, telle que la suite $(I_{f_n})_n$ des fonctionnelles intégrales associées épi-converge dans L_φ (resp. L_0); si les f_n vérifient les conditions de croissance:

$$\forall \omega(\mu\text{-p.p.}) \forall x, \forall n : f_n(\omega, x) \geq -\varphi(\omega, cx) + a_n(\omega)$$

avec $c > 0$ et $\underline{\lim}_n \int_\Omega a_n d\mu > -\infty$ (resp. mêmes conditions avec $\varphi = 0$) alors l'épi-limite des I_{f_n} dans L_φ (resp. L_0) est une fonctionnelle intégrale associée à une intégrande normale f qui vérifie la condition de croissance:

$$\forall \omega(\mu\text{-p.p.}) \forall x : f(\omega, x) \geq -\varphi(\omega, c_0 x) + a(\omega)$$

avec $c_0 > 0$ et a intégrable (resp. même condition avec $\varphi = 0$).

2. - Epi-convergence forte des fonctionnelles integrales et convergence faible des integrandes

Soient:

- $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré par une mesure μ -positive σ -finie sans atome, où \mathcal{T} est dénombrablement engendrée par \mathcal{T}_0 .
- X un Banach réflexif séparable; D un dénombrable dense dans X .
- $\varphi: \Omega \times X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ une fonction de Young vérifiant une Δ_2 -condition (0.4).

DEFINITION 2.1. Une suite d'intégrandes $(f_n)_n$ de $\Omega \times X$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ converge faiblement dans L_φ s'il existe une intégrande f (notée $\sigma - \lim f_n$) intégralement propre dans L_φ telle que pour tout ensemble A mesurable et tout $u \in L_\varphi$ on ait

$$(*) \quad \int_A f(u) d\mu = \lim_n \int_A f_n(u) d\mu.$$

REMARQUE. Il y a unicité (μ -p.p.) de la limite faible d'une suite d'intégrandes.

Lorsque la suite $(I_{f_n})_n$ est équicontinue dans L_φ , on peut caractériser plus simplement la limite faible de la suite $(f_n)_n$.

PROPOSITION 2.1'. Soient α une fonction mesurable strictement positive telle que L_∞^α soit inclus dans L_φ et, $(f_n)_n$ une suite d'intégrandes sur $\Omega \times X$, telle que $(I_{f_n})_n$ soit équicontinue dans L_φ . $(f_n)_n$ converge faiblement vers f dans L_φ si et seulement si:

- (i) $\forall x \in X, f(\cdot, \alpha(\cdot)x) = \sigma(L_1, L_\infty) - \lim_n f_n(\cdot, \alpha(\cdot)x)$;
- (ii) f est une intégrande de Carathéodory vérifiant la condition de croissance suivante: $\exists b > 0, a \in L_1(\Omega, \mathbb{R}_+)$ tels que

$$\forall x \in X, \forall \omega (\mu\text{-p.p.}) \quad |f(\omega, x)| \leq b\varphi(\omega, x) + a(\omega).$$

REMARQUES. 1) L'existence de telles fonctions α est assurée par [F2]; dans le cas $L_\varphi = L_p$ avec $1 \leq p < +\infty$ ($\varphi(\omega, x) = \frac{1}{p}|x|^p$) et lorsque la mesure est bornée, on peut évidemment choisir $\alpha \equiv 1$.

2) D'après [F2], (ii) équivaut à la continuité de I_f dans L_φ .

3) Dans (i) il suffit en fait de vérifier que la propriété est vraie pour tout élément de D dénombrable dense dans X .

4) Lorsque $|f_n| \leq b\varphi + a$ (resp. f_n convexe) pour tout n ($b > 0, a \in L_1(\Omega, \mathbb{R}_+)$) toute intégrande vérifiant (i) satisfait la condition de croissance de (ii) (resp. est convexe et il suffit dans (ii) de la supposer s.c.i.).

DEMONSTRATION. Si $(f_n)_n$ converge faiblement vers f dans L_φ alors (i) est vérifié car, pour tout $x \in X$, $\alpha(\cdot)x$ est élément de L_∞^α et donc a fortiori de L_φ ; d'autre part $(I_{f_n})_n$ converge simplement vers I_f dans L_φ et, puisque $(I_{f_n})_n$ est équicontinue on en déduit la continuité de I_f dans L_φ , encore équivalente à (ii) d'après [F2].

Réciproquement, on utilise le lemme d'approximation suivant (dont la démonstration sera donnée en annexe 2).

LEMME Séparabilité de L_φ : Tout élément u de L_φ est limite en φ -norme d'une suite $(u_p)_p$ de L_∞^α de la forme: $u_p = \alpha \sum_{0 \leq k \leq p} x_k^p 1_{A_k^p}$ où pour tout entier p les x_k^p sont dans D , dénombrable dense de X et les A_k^p sont dans \mathcal{T}_0 et, deux à deux disjoints ($k = 0, 1, \dots, p$).

Soient $u \in L_\varphi$ et $(u_p)_p$ la suite approximante donnée par le lemme.

Pour tout ensemble mesurable A et tous entiers n, p on a l'inégalité:

$$\left| \int_A f_n(u) d\mu - \int_A f(u) d\mu \right| \leq \left| \int_A (f_n(u) - f_n(u_p)) d\mu \right| + \left| \int_A (f_n(u_p) - f(u_p)) d\mu \right| + \left| \int_A (f(u_p) - f(u)) d\mu \right|.$$

Compte tenu de la continuité de I_f (ii) et de l'équicontinuité de $(I_{f_n})_n$ il nous suffit pour conclure de remarquer que la propriété (i) s'étend (par additivité) aux éléments de la forme $\alpha \sum_{1 \leq j \leq \ell} x_j 1_{A_j}$ ($x_j \in D, A_j \in \mathcal{T}_0$) et donc aux u_p .

On se propose de faire le lien entre l'épi-convergence en φ -norme d'une suite de fonctionnelles intégrales I_{f_n} et la convergence faible des approximées inf-convolutives des f_n :

$$f_n \nabla \varphi_p: (\omega, x) \in \Omega \times X \rightarrow f_n(\omega, \cdot)(x) = \inf_{x'} [f_n(\omega; x') + \varphi_p(\omega, x - x')]$$

où pour tout entier p : $\varphi_p: (\omega, x) \in \Omega \times X \rightarrow \varphi(\omega, px)$.

On a le résultat suivant:

THEOREME 2.2. Soient $u_0 \in L_\varphi$, p_0 un entier non nul et $(f_n)_n$ une suite d'intégrandes de $\Omega \times X$ dans \mathbb{R} vérifiant les conditions de croissance C.C.E. (u_0, p_0) i.e. il existe une suite $(a_n)_n$ équi-intégrable telle que:

$$\forall \omega(\mu-p.p.), \forall x, \forall n \quad f_n(\omega, x) \geq -\varphi_{p_0}(\omega, u_0(\omega) - x) + a_n(\omega).$$

S'il existe une suite $(u_n^0)_n$ pour laquelle $(f_n(u_n^0))_n$ et $(\varphi(u_n^0))_n$ sont équi-intégrables, alors il existe une suite extraite n_k telle que:

1) pour tout entier $p \geq p_0$ $(f_{n_k} \nabla \varphi_p)_k$ converge faiblement dans L_φ ;

2) la suite $(I_{f_{n_k}})_k$ épi-converge dans L_φ et sa limite est donnée par:

$$L_\varphi\text{-}\lim_e I_{f_{n_k}}(u) = \int_\Omega \sup_p \sigma - \lim_k (f_{n_k} \nabla \varphi_p)(u) d\mu, \text{ pour tout } u \in L_\varphi.$$

REMARQUE. 1) Ici 2.1' s'applique puisque les $I_{f_n} \nabla \varphi_p$ sont pour tout $p \geq p_0$ équi-localement lipschitziennes dans L_φ .

2) On verra plus loin (2.8) que la convergence faible des approximées entraîne l'épi-convergence forte des fonctionnelles intégrales. Sous les hypothèses de 2.2 il faut en général extraire une sous-suite pour obtenir la convergence faible des intégrandes approximées et même lorsque la suite initiale des fonctionnelles intégrales épi-converge; il suffit de considérer l'exemple donné par H. Attouch dans [A; 2.7.1]:

$$f_n: (\omega, x) \in [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow a_n(\omega)x^2, \text{ avec } a_{2n} = b_n \text{ et } a_{2n+1} = c_n$$

tels que:

$$\sigma(L_\infty, L_1)\text{-}\lim b_n = \sigma(L_\infty, L_1)\text{-}\lim c_n$$

mais

$$\sigma(L_\infty, L_1)\text{-}\lim \frac{pb_n}{p+2b_n} \neq \sigma(L_\infty, L_1)\text{-}\lim \frac{pc_n}{p+2c_n} \quad (p \in \mathbb{N}^*).$$

Si $\varphi(\omega, x) = \frac{1}{2}|x|^2$, les approximées inf-convolutives de f sont définies par:

$$f_n \nabla \varphi_p(\omega, x) = \frac{pa_n(\omega)}{p+2a_n(\omega)} x^2,$$

$(f_n \nabla \varphi_p)_n$ ne converge pas faiblement dans $L_2([0, 1])$ bien que la suite $(I_{f_n})_n$ épi-converge vers I_f où f est définie par:

$$f(\omega, x) = \sigma(L_\infty, L_1)\text{-}\lim a_n(\omega)x^2.$$

Le théorème 2.2 permet entre autre de calculer effectivement l'épi-limite forte de certaines suites de fonctionnelles intégrales. Nous allons en donner un exemple, suggéré par R. Wets.

EXEMPLE. Soit $f_n: \Omega \times \mathbb{R}^2 \rightarrow]-\infty, +\infty]$

$$(\omega, (x, y)) \rightarrow \begin{cases} a_n(\omega)ny & \text{si } x \leq 0 \text{ et } \frac{x}{n} \leq y \leq 0 \\ +\infty & \text{ailleurs} \end{cases}$$

où les a_n sont mesurables et satisfont les conditions $0 \leq \lambda_0 \leq a_n(\omega) \leq \Lambda_0 < +\infty$ pour presque tout $\omega \in \Omega$ et pour tout entier n .

Si $|(x, y)|_{\mathbb{R}^2} = |x| + |y|$, pour tout $n \geq 2$ et $p \geq 2\Lambda_0$ on a alors:

$$\begin{aligned} f_n \nabla p | \cdot |_{\mathbb{R}^2}(\omega, (x, y)) &= \inf_{\substack{x' \leq 0 \\ \frac{x}{n} \leq y' \leq 0}} [a_n(\omega)ny + p(|x - x'| + |y - y'|)] \\ &= \begin{cases} a_n(\omega)x + p \left| y - \frac{x}{n} \right| & \text{si } x \leq 0 \\ p(|x| + |y|) & \text{si } x > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Si la suite $(a_n)_n$ est $\sigma(L_\infty, L_1)$ -convergente vers a , la suite $(f_n \nabla p | \cdot |_{\mathbb{R}^2})$ converge (pour tout $p \geq 2\Lambda_0$) faiblement dans $L_1(\Omega, \mathbb{R}^2)_n$ vers f^p définie sur $\Omega \times \mathbb{R}^2$ par

$$\begin{aligned} f^p(\omega, (x, y)) &= \begin{cases} a(\omega)x + p|y| & \text{si } x \leq 0 \\ p(|x| + |y|) & \text{si } x > 0 \end{cases} \\ \text{et } L_1\text{-}\lim_e I_{f_n}(u_1, u_2) &= \begin{cases} \int_{\Omega} au_1 d\mu & \text{si } u_1 \leq 0 \text{ et } u_2 = 0 \\ \Omega & \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

La démonstration de 2.2 s'appuie essentiellement sur les propriétés des approximations inf-convolutives $I_{f_n} \nabla I_{\varphi_p}$ étudiées par A. Fougères et l'auteur dans [F-T1] que l'on rappelle ici, pour la commodité du lecteur dans le cadre d'un espace intégral L_φ séparable, avec Δ_2 condition, pour une suite d'intégrandes f_n vérifiant les conditions de croissance C.C.M. (u_0, p_0) (définies comme précédemment, en considérant une suite $(a_n)_n$ telle que $\varliminf_n \int a_n d\mu > -\infty$).

LEMME 2.4.1. [F-T1; 4.2] *Pour tout $u \in L_\varphi$ on a les égalités:*

$$\begin{aligned} L_\varphi\text{-}\lim_e I_{f_n}(u) &= \sup_p \lim_n I_{f_n} \nabla I_{\varphi_p}(u) \\ \text{et } L_\varphi\text{-}\overline{\lim}_e I_{f_n}(u) &= \sup_p \overline{\lim}_n I_{f_n} \nabla I_{\varphi_p}(u). \end{aligned}$$

LEMME 2.5.2. [F-T1; 4.4] *S'il existe une suite $(u_n^0)_n$ bornée dans L_φ telle que $\overline{\lim}_n I_{f_n}(u_n^0) < +\infty$, on peut extraire une sous-suite $(I_{f_{n_k}})_k$ de $(I_{f_n})_n$ pour laquelle les approximations d'ordre $p > p_0$ épi-convergent dans L_φ et: $L_\varphi\text{-}\lim_e (I_{f_{n_k}} \nabla I_{\varphi_p}) = \lim_k (I_{f_{n_k}} \nabla I_{\varphi_p})$.*

LEMME 2.5.3. [F-T1; 3.4] *Sous les hypothèses du Lemme 2.5.2, il existe un entier n_0 tel que la famille $((u, \lambda) \rightarrow I_{f_n} \nabla I_{\varphi_\lambda}(u))_{n \geq n_0}$ soit équi-localement lipschitzienne sur $L_\varphi \times]p_0, +\infty[$.*

Ce dernier résultat est fondamental car il nous ramène à l'étude d'une suite de fonctionnelles intégrales équi-s.c.i. sur L_φ , et l'équi-s.c.i. assure la coïncidence des notions d'épi-convergence et de convergence simple pour cette suite [W; 5.2], [B-M; 1.5].

On peut dans ce cas établir directement le lien entre épi-convergence des fonctionnelles intégrales et convergence faible des intégrandes correspondantes.

THEOREME 2.7 *Soit $(I_{f_n})_n$ une suite de fonctionnelles intégrales équi-s.c.i. dans L_φ . Si $(f_n)_n$ converge faiblement dans L_φ alors $(I_{f_n})_n$ épiconverge dans L_φ et l'on a pour tout $u \in L_\varphi$*

$$L_\varphi\text{-}\lim_e I_{f_n}(u) = \lim_n I_{f_n}(u) = I_{\sigma\text{-}\lim f_n}(u).$$

La réciproque est vraie si l'on suppose l'existence d'un $u_0 \in L_\varphi$ pour lequel la suite $(f_n(u_0))_n$ est $\sigma(L_1, L_\infty)$ -convergente.

La démonstration de 2.7 sera donnée plus loin (2.9); pour l'instant nous allons démontrer 2.2 à partir de 2.7 et des lemmes précédents.

DEMONSTRATION de 2.2. a) *Pour tout $u \in L_\varphi$ et tous entiers n et p : $I_{f_n} \nabla I_{\varphi_p}(u) = I_{f_n \nabla \varphi_p}(u)$. Puisque $f_n(u_n^0)$ est intégrable et que φ vérifie une Δ_2 -condition ($L_\varphi = \text{dom } I_\varphi$), $f_n(u_n^0) + \varphi_p(u - u_n^0)$ est encore intégrable. On est donc dans les conditions d'applications du théorème de passage de l'inf sous l'intégrale ([R1] et plus particulièrement dans ce cas [F1; 1.1]) et l'on a:*

$$I_{f_n} \nabla I_{\varphi_p}(u) = I_{f_n \nabla \varphi_p}(u).$$

b) 2.5 et ce qui précède assure l'existence d'une suite extraite n_k pour laquelle la suite $(I_{f_{n_k} \nabla \varphi_p})_k$ est, pour tout $p > p_0$, épi-convergente dans L_φ .

Par hypothèse il existe une suite $(u_n^0)_n$ telle que $(f_n(u_n^0))_n$ et $(\varphi(u_n^0))_n$ soient équi-intégrales il en sera de même de $(\varphi_p(u_0 - u_n^0))_n$ en utilisant la convexité et la condition Δ_2 (0.4) vérifiée par φ , et donc également de $(f_{n_k} \nabla \varphi_p(u_0))_k$ compte tenu des inégalités:

$$a_{n_k} \leq f_{n_k} \nabla \varphi_{p_0}(u_0) \leq f_{n_k} \nabla \varphi_p(u_0) \leq f_{n_k}(u_{n_k}^0) + \varphi_p(u_0 - u_{n_k}^0).$$

L'équi-intégrabilité des suites $(f_{n_k} \nabla \varphi_p(u_0))_k$ nous permet alors d'extraire pour chaque entier $p > p_0$, une suite $n_{k_p}^p$ pour laquelle $(f_{n_{k_p}^p} \nabla \varphi_p(u_0))_{k_p}$ est $\sigma(L_1, L_\infty)$ -convergente.

Par un procédé de diagonalisation on peut construire une suite extraite, encore notée n_k telle que $(f_{n_k} \nabla \varphi_p(u_0))_k$ soit $\sigma(L_1, L_\infty)$ -convergente pour chaque $p > p_0$.

En appliquant 2.7 aux suites $(I_{f_{n_k} \nabla \varphi_p})_k$ équi-localement lipschitziennes dans L_φ on en déduit que $(f_{n_k} \nabla \varphi_p)_k$ converge faiblement dans L_φ pour tout entier $p > p_0$.

Le théorème 2.2 se déduit alors immédiatement du résultat suivant.

PROPOSITION 2.8. *Soient $u_0 \in L_\varphi$, p_0 un entier non nul et $(f_n)_n$ une suite d'intégrandes de $\Omega \times X$ dans \mathbb{R} vérifiant les conditions de croissance C.C.M. (u_0, p_0) , tels qu'il existe une suite $(u_n^0)_n$ convergente vers u_0 pour laquelle $\overline{\lim}_n I_{f_n}(u_n^0) < +\infty$.*

Si pour tout entier $p > p_0$, la suite $(f_n \nabla \varphi_p)_n$ converge faiblement dans L_φ alors $(I_{f_n})_n$ épiconverge dans L_φ et l'on a pour tout $u \in L_\varphi$:

$$L_\varphi\text{-}\lim_e I_{f_n}(u) = I_{\text{Sup } \sigma\text{-}\lim_n (f_n \nabla \varphi_p)}(u).$$

DEMONSTRATION. Le passage de l'inf-convolution sous le signe intégral se justifie comme au a) de la démonstration précédente: pour n suffisamment grand et $p > p_0$ $I_{f_n} \nabla I_{\varphi_p} = I_{f_n \nabla \varphi_p}$.

a) $\sigma\text{-}\lim_n (f_n \nabla \varphi_p)(u)$ est intégrable pour tout $u \in L_\varphi$ et tout $p > p_0$.

Soit $p > p_0$; d'après 2.6 $(I_{f_n \nabla \varphi_p})_{n \geq n_0}$ est équi-localement lipschitzienne sur L_φ et puisque $(f_n \nabla \varphi_p)_n$ converge faiblement dans L_φ on a, d'après 2.7 les égalités:

$$L_\varphi\text{-}\lim_e I_{f_n \nabla \varphi_p} = \lim_n I_{f_n \nabla \varphi_p} = I_{\sigma\text{-}\lim_n (f_n \nabla \varphi_p)}(u).$$

Comme les f_n satisfont les conditions de croissance C.C.M. (u_0, p_0) :

$$\lim_n I_{f_n \nabla \varphi_p}(u_0) > -\infty,$$

pour tout $p > p_0$, et l'on a:

$$-\infty < L_\varphi\text{-}\lim_e I_{f_n \nabla \varphi_p}(u_0) = \lim_n I_{f_n \nabla \varphi_p}(u_0) \leq \overline{\lim}_n I_{f_n}(u_n^0) < +\infty,$$

ce qui assure 1.6.2 la propriété de $L_\varphi\text{-}\lim_e I_{f_n \nabla \varphi_p}$ et donc celle de $I_{\sigma\text{-}\lim_n (f_n \nabla \varphi_p)}$ sur L_φ .

D'autre part si $u \in L_\varphi$:

$$I_{\sigma\text{-}\lim_n (f_n \nabla \varphi_p)}(u) = \lim_n I_{f_n \nabla I_{\varphi_p}}(u) \leq \overline{\lim}_n I_{f_n}(u_n^0) + I_{\varphi_p}(u - u_0) < +\infty$$

car I_{φ_p} est continue sur L_φ en raison de la Δ_2 -condition.

b) Soit $u \in L_\varphi$; la suite $(\sigma\text{-}\lim_n (f_n \nabla \varphi_p)(u))_{p > p_0}$ est croissante en p , minorée par $\sigma\text{-}\lim_n (f_n \nabla \varphi_{p_0+1})(u)$ qui est intégrable d'après ce qui précède.

En appliquant le théorème de Beppo-Levi on obtient:

$$I_{\text{Sup } \sigma\text{-}\lim_n (f_n \nabla \varphi_p)}(u) = \sup_{p > p_0} I_{\sigma\text{-}\lim_n (f_n \nabla \varphi_p)}(u) = \sup_{p > p_0} \lim_n I_{f_n \nabla I_{\varphi_p}}(u).$$

Compte tenu de 2.4, la suite $(I_{f_n})_n$ est épi-convergente en u et

$$L_\varphi\text{-}\lim_e I_{f_n}(u) = I_{\text{Sup } \sigma\text{-}\lim_n (f_n \nabla \varphi_p)}(u).$$

2.9. Il nous reste à vérifier 2.7. Pour cela on est amené à faire le lien entre convergence faible des intégrandes et convergence simple des fonctionnelles intégrales correspondantes, la convergence faible des intégrandes f_n vers f entraîne évidemment la convergence simple des I_{f_n} vers I_f dans L_φ , réciproquement on a le résultat suivant.

PROPOSITION. Soient f_n et f des intégrandes de $\Omega \times X$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ telles que:

- (i) $(I_{f_n})_n$ converge simplement vers I_f dans L_φ ;
 - (ii) il existe $u_0 \in L_\varphi$ tel que $f(u_0) = \sigma(L_1, L_\infty)\text{-}\lim_n f_n(u_0)$.
- Alors $(f_n)_n$ converge faiblement vers f dans L_φ .

DEMONSTRATION. Soient $u \in L_\varphi$, $A \in \mathcal{T}$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_A f_n(u) d\mu = \int_\Omega f_n(u 1_A + u_0 1_{\Omega \setminus A}) d\mu - \int_{\Omega \setminus A} f_n(u_0) d\mu$$

passant à la limite en n on obtient:

$$\lim_n \int_A f_n(u) d\mu = \int_\Omega f(u 1_A + u_0 1_{\Omega \setminus A}) d\mu - \int_{\Omega \setminus A} f(u_0) d\mu = \int_A f(u) d\mu.$$

DEMONSTRATION de 2.7. Si la suite $(f_n)_n$ converge faiblement dans L_φ , $(I_{f_n})_n$ converge simplement vers $I_{\sigma\text{-}\lim_n f_n}$ dans L_φ , et l'on a donc, compte tenu de l'équi-s.c.i. des I_{f_n} :

$$L_\varphi\text{-}\lim_e I_{f_n}(u) = \lim_n I_{f_n}(u) = I_{\sigma\text{-}\lim_n f_n}(u)$$

pour tout $u \in L_\varphi$.

Réciproquement si la suite (I_{f_n}) épi-converge dans L_φ et si $(f_n(u_0))_n$ est $\sigma(L_1, L_\infty)$ -convergente $L_\varphi\text{-}\lim_e I_{f_n}(u_0) \in \mathbb{R}$ et il existe donc d'après 1.6.1 une unique $(\mu\text{-p.p.})$ intégrande f normale propre telle que:

$$L_\varphi\text{-}\lim_e I_{f_n} = I_{f \uparrow L_\varphi} \text{ et } f(u_0) = \sigma(L_1, L_\infty)\text{-}\lim_n f_n(u_0);$$

comme $L_\varphi\text{-}\lim_e I_{f_n} = \lim_n I_{f_n}$ sur L_φ , on en déduit d'après 2.9 que la suite $(f_n)_n$ converge faiblement vers f dans L_φ .

2.10. - Application à l'épi-limite séquentielle faible

On suppose de plus que L_φ est réflexif (donc φ et φ^* vérifient une Δ_2 -condition); nécessairement I_φ est fortement coercive dans L_φ [G; 5.2.13] (i.e.

$$\lim_{\|u\|_\varphi \rightarrow +\infty} \frac{I_\varphi(u)}{\|u\|_\varphi} = +\infty).$$

En combinant 2.7 et les propriétés de continuité de la transformation de Fenchel-Young relativement à l'épi-convergence (cf. par exemple [J], [J-T], [M] et [A]) on obtient le résultat suivant.

THEOREME 2.10.1 Soit $f_n: \Omega \times X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une suite d'intégrandes convexes normales nulles en zéro telle que: $\exists c > 0, \exists a \in L_1(\Omega, \mathbb{R}_+): \forall \omega(\mu\text{-p.p.}), \forall x, \forall n: f_n(\omega, x) \geq c\varphi(\omega, x) + a(\omega)$.

Les assertions suivantes sont équivalentes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(i) } I_f = \text{séq-}\sigma(L_\varphi, L_{\varphi^*})\text{-}\lim_e I_{f_n} \\ \text{(ii) } I_{f^*} = L_{\varphi^*}\text{-}\lim_e I_{f_n^*} \\ \text{(iii) } f^* = \sigma\text{-}\lim f_n^* \end{array} \right.$$

DEMONSTRATION. (i) \iff (ii) f étant nulle en zéro, $I_{f^*} = (I_f)^*$ [R1], [R2] et l'équivalence résulte de [A; 3.13].

(ii) \iff (iii) L'hypothèse d'équicoercivité des I_{f_n} assure l'équi-locale lipschitzité des $I_{f_n^*}$.

2.7 nous permet alors de conclure ($f_n^*(0) = 0$).

EXEMPLE 2.10.2. Soit $f_n: \Omega \times X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ définie par $f_n(\omega, x) = a_n(\omega)|x|^p$ où $1 \leq p < +\infty$ et les a_n sont mesurables et satisfont les conditions: $0 < \lambda_0 \leq a_n(\omega) \leq \Lambda_0 < +\infty$ presque tout $\omega \in \Omega$ et pour tout entier n .

Si la suite $(a_n)_n$ est $\sigma(L_\infty, L_1)$ -convergente vers a (par exemple si les a_n oscillent de plus en plus rapidement entre deux valeurs lorsque n tend vers l'infini), la suite $(f_n)_n$ converge faiblement dans L_p et $\sigma\text{-}\lim f_n(\omega, x) = a(\omega)|x|^p$ d'où $L_p\text{-}\lim_e I_{f_n}(u) = \int_\Omega a|u|^p d\mu$.

D'autre part si $1 < p < +\infty$ et si la suite $\left(\left(\frac{1}{a_n}\right)^{q-1}\right)_n$ est $\sigma(L_\infty, L_1)$ -convergente vers a' avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors la suite des polaires f_n^* est faiblement convergente dans L_q

$$\sigma\text{-}\lim f_n^*(\omega, y) = \frac{1}{qp^{q-1}} a'(\omega)|y|^q = f^*(\omega, y)$$

$$\text{où } f(\omega, x) = \frac{1}{(a'(\omega))^{p-1}} |x|^p$$

$$\text{et } \text{séq-}\sigma(L_p, L_q)\text{-}\lim_e I_{f_n}(u) = \int_\Omega \frac{1}{a'^{p-1}} |u|^p d\mu.$$

3. - Passage de l'épi-limite sous l'intégrale

Soient:

- $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré par une mesure μ -positive σ -finie sans atome.
- X un Banach séparable.
- $\varphi: \Omega \times X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ une fonction de Young.

On dit qu'une suite $(u_n)_n$ d'éléments de L_φ est φ -équi-intégrable si pour tout entier p la suite $(\varphi(pu_n))_n$ est équi-intégrable. D'après [B-V; A1] ce sont encore les suites φ -équicontinues au sens de E. Giner [G; 2.1].

On note E_φ l'espace vectoriel sous-jacent au domaine de I_φ ; comme la mesure est non atomique, c'est d'après [G; 2.1.3] l'ensemble des éléments u φ -équi-intégrables.

$E_\varphi = \text{dom } I_\varphi \neq L_\varphi$ dès que φ vérifie une Δ_2 -condition.

Soient $(f_n)_n$ une suite d'intégrandes sur $\Omega \times X$, $u_0 \in L_\varphi$ et $c > 0$; comme au paragraphe précédent on dira que les f_n satisfont les conditions de croissance C.C.E(u_0, c) (resp. C.C.M(u_0, c) et C.C.m(u_0, c), s'il existe une suite $(a_n)_n$ de $L_0(\Omega, \mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ équi-intégrable (resp. minorée en intégrale i.e. $\liminf_n \int a_n d\mu > -\infty$) et minorée ponctuellement (au sens où $\liminf_n a_n > -\infty$ p.p.) telle que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \omega (\mu\text{-p.p.}), \forall x : f_n(\omega, x) \geq -\varphi(\omega, c(u_0(\omega) - x)) + a_n(\omega);$$

en d'autres termes, si les $f_n \nabla \varphi_c(u_0)$ ont des parties négatives équi-intégrables (resp. bornées dans L_1) et équi-minorées ponctuellement.

THEOREME 3.1. *Passage de l'épi-limite sous l'intégrale.*

Soit $(f_n)_n$ une suite d'intégrandes sur $\Omega \times X$, épi-convergente pour μ -presque tout $\omega \in \Omega$, vérifiant les conditions de croissance C.C.E(u_0, c) et C.C.m(u_0, c) en un point u_0 de E_φ .

S'il existe une suite φ -équi-intégrable $(u_n^0)_n$ telle que $(f_n(u_n^0))_n$ soit équi-intégrable alors la suite $(I_{f_n})_n$ est épi-convergente dans L_φ en tout point de E_φ et:

$$\forall u \in E_\varphi, L_\varphi\text{-}\lim_e I_{f_n}(u) = I_{\lim_e f_n}(u)$$

en particulier pour tout $u \in L_\varphi$, si φ vérifie une Δ_2 -condition.

Pour les points de $u_0 + \text{Int dom } I_\varphi(c \cdot) \setminus E_\varphi$ on ne pourra affirmer le résultat que sous des hypothèses localisées à savoir:

THEOREME 3.2.2. *Soit $(f_n)_n$ une suite d'intégrandes sur $\Omega \times X$ vérifiant les conditions de croissance C.C.E(u_0, c) et C.C.m(u_0, c) avec $u_0 \in L_\varphi$; considérons un point u de $u_0 + \text{Int dom } I_\varphi(c \cdot)$ pour lequel $\lim_e f_n(u)$ existe μ -presque partout; s'il existe une suite $(u_n^0)_n$ convergente vers u telle que $(f_n(u_n^0))_n$ soit équi-intégrable alors la suite $(I_{f_n})_n$ est épi-convergente en u et:*

$$L_\varphi\text{-}\lim_e I_{f_n}(u) = I_{\lim_e f_n}(u).$$

Ces deux théorèmes résultent de la combinaison des inégalités épigraphiques inférieure et supérieure, que l'on démontre en s'appuyant d'une part sur les propriétés des approximations inf-convolutives dans les espaces intrinsèques étudiées par A. Fougères et l'auteur dans [F-T1] (cf. 0.6) et d'autre part sur un lemme de type Fatou-Vitali:

LEMME 3.3. *Propriété de Fatou-Vitali* [T1; 1.5]

Pour toute suite $(\alpha_n)_n$ de fonctions intégrables telle que $(\alpha_n^-)_n$ (resp. $(\alpha_n^+)_n$) soit équi-intégrable on a:

$$\int \liminf_n \alpha_n d\mu \leq \liminf_n \int \alpha_n d\mu$$

(resp. $\int \limsup_n \alpha_n d\mu \geq \limsup_n \int \alpha_n d\mu$).

Un théorème concernant l'inégalité épigraphique inférieure a déjà été donné dans [T]; on en donne ici une version simplifiée.

Soit L un sous-espace vectoriel de L_0 , que l'on munit d'une topologie \mathcal{C} plus fine que celle induite sur L , par la topologie de convergence en mesure locale:

THEOREME 3.4. *Inégalité épigraphique inférieure* [T1; 2.3] [G2]

Soient $(f_n)_n$ une suite d'intégrandes sur $\Omega \times X$ et $u \in L$.

(H_u) Si pour toute suite $(u_n)_n$ \mathcal{C} -convergente vers u , $(f_n(u_n))_n$ est équi-intégrable alors

$$\text{sép-}\mathcal{C}\text{-}\liminf_e I_{f_n}(u) \geq I_{\lim_e f_n}(u).$$

Lorsque $(L, \mathcal{C}) = (L_\varphi, \|\cdot\|_\varphi)$, les conditions de croissance C.C.E(u_0, c) sont suffisantes pour que les hypothèses (H_u) soient vérifiées en tout point u de $u_0 + \text{Int dom } I_\varphi(c)$.

DEMONSTRATION de 3.4. Il suffit de vérifier l'inégalité:

$$I_{\lim_e f_n}(u) \leq \liminf_n I_{f_n}(u_n)$$

pour toute suite $(u_n)_n$ \mathcal{C} -convergente vers u .

Si $\liminf_n I_{f_n}(u_n) = +\infty$, l'inégalité est trivialement vérifiée, dans le cas contraire les $f_n(u_n)$ sont intégrables pour n suffisamment grand (en raison de l'hypothèses H_u).

Il existe une suite extraite n_p telle que:

$$\liminf_n I_{f_n}(u_n) = \lim_p I_{f_{n_p}}(u_{n_p}).$$

Comme \mathcal{C} est plus fine que la topologie induite sur L par celle de la convergence en mesure locale on peut extraire de u_{n_p} une sous suite $u_{n_{p_k}}$ convergeant μ -presque partout vers u . On obtient les inégalités:

$$I_{\lim_e f_n}(u) \leq I_{\lim_k f_{n_{p_k}}}(u) \leq \int \liminf_k f_{n_{p_k}}(u_{n_{p_k}}) d\mu$$

et donc, compte tenu de 3.3 et de l'hypothèse H_u , les suivantes:

$$I_{\underline{\lim}_e f_n}(u) \leq \lim_k I_{f_{u_{pk}}}(u_{n_{pk}}) = \underline{\lim}_n I_{f_n}(u_n).$$

THEOREME 3.5. Inégalité épigraphique supérieure

Soit $(f_n)_n$ une suite d'intégrandes sur $\Omega \times X$ vérifiant les conditions de croissance C.C.M(u_0, c) et C.C.m(u_0, c) avec $u_0 \in L_\varphi$.

1) Si u_0 appartient à E_φ et s'il existe $(u_n^1)_n$ et $(u_n^2)_n$ deux suites φ -équi-intégrables telles que $f_n(u_n^1)$ soit intégrable pour tout entier n et $(f_n(u_n^2)_+)_n$ soit équi-intégrables alors:

$$\forall u \in E_\varphi \quad L_\varphi\text{-}\overline{\lim}_e I_{f_n}(u) \leq I_{\overline{\lim}_e f_n}(u).$$

2) En tout point u de $u_0 + \text{Int dom } I_\varphi(c \cdot)$ pour lequel existent deux suites $(u_n^1)_n$ et $(u_n^2)_n$ convergentes vers u telles que $f_n(u_n^1)$ soit intégrable pour tout entier n et $(f_n(u_n^2)_+)_n$ soit équi-intégrable on a:

$$L_\varphi\text{-}\overline{\lim}_e I_{f_n}(u) \leq I_{\overline{\lim}_e f_n}(u).$$

REMARQUES. 1) On retrouve le même type d'hypothèses localisées qui apparaissent dans le cas de l'espace L_∞^α traité dans [T1; 3]. Il n'est pas nécessaire dans ce cas, de supposer que les f_n vérifient les conditions de croissance C.C.m(u_0, c) qui sont faites pour assurer l'égalité (presque partout) suivante:

$$\overline{\lim}_e f_n(u) = \sup_{p.p.} \overline{\lim}_p f_n \nabla \varphi_p(u), \quad u \in L_\varphi$$

en effet lorsque φ est la fonction de Young définie sur $\Omega \times X$ par $\varphi(\omega, x) = \delta_{B_{\alpha(\omega)}}(x)$ (où $B_{\alpha(\omega)}$ désigne la boule de centre 0 et de rayon $\alpha(\omega)$ dans X et δ sa fonction indicatrice), on retrouve la définition même de l'épi-limite supérieure des intégrandes f_n .

2) Si dans la pratique, on exhibera généralement une suite $(u_n^0)_n$ pour laquelle $(f_n(u_n^0))_n$ soit équi-intégrable (auquel cas il suffira de prendre $u_n^1 = u_n^2 = u_n^0$), l'exemple suivant:

$$f_n(\omega, x) = -\varphi(\omega, cx) + a_n(\omega)$$

où les a_n sont négatives, bornées dans L_1 mais non équi-intégrables vérifient les hypothèses de 3.5 pour $u_n^1 = u_n^2 = 0$ bien que pour toute suite $(u_n)_n$, les $f_n(u_n)$ ne soient jamais équi-intégrables.

DEMONSTRATION de 3.5. 1) Soit $u \in E_\varphi$. Comme les f_n vérifient les conditions de croissance C.C.M(u_0, c) et que $u \in u_0 + \text{Int dom } I_\varphi(c \cdot)$, on a, d'après [F-T1; 4.2] (cf. 0.6) l'égalité suivante:

$$L_\varphi\text{-}\overline{\lim}_e I_{f_n}(u) = \sup_p \overline{\lim}_n I_{f_n} \nabla I_{\varphi_p}(u).$$

L'hypothèse de φ -équi-intégrabilité de la suite $(u_n^1)_n$ assure l'intégrabilité de $\varphi_p(u - u_n^1)$ pour tous entiers n et p (u est φ -équi-intégrable puisque dans E_φ), et donc de $f_n(u_n^1) - \varphi_p(u - u_n^1)$ compte tenu du choix de $(u_n^1)_n$.

En appliquant le théorème de passage de l'inf-convolution sous le signe intégral [F1; 1.1] on obtient l'égalité:

$$L_\varphi\text{-}\overline{\lim}_e I_{f_n}(u) = \sup_p \overline{\lim}_n I_{f_n \nabla \varphi_p}(u).$$

Comme $f_n \nabla \varphi_p(u)_+ \leq f_n(u_n^2)_+ + \varphi_p(u - u_n^2)$ équi-intégrable pour tout entier p on a d'après 3.3:

$$L_\varphi\text{-}\overline{\lim}_e I_{f_n}(u) \leq \sup_p I_{\overline{\lim}_n f_n \nabla \varphi_p}(u) \leq I_{\text{Sup}_p \overline{\lim}_n f_n \nabla \varphi_p}(u)$$

la première partie du théorème résulte donc de ce que d'après [F-T1; 4.2] (cf. 0.6)

$$\overline{\lim}_e f_n(u) = \sup_{p.p.} \overline{\lim}_n f_n \nabla \varphi_p(u)$$

compte tenu du fait que les f_n satisfont les conditions C.C.m(u_0, c).

2) Soit $u \in u_0 + \text{Int dom } I_\varphi(c)$. Comme précédemment, le choix de $(u_n^1)_n$ assure, compte tenu de [F-T1; 4.2], l'égalité:

$$L_\varphi\text{-}\overline{\lim}_e I_{f_n}(u) = \sup_p \overline{\lim}_n I_{f_n \nabla \varphi_p}(u)$$

et le choix de $(u_n^2)_n$, l'équi-intégrabilité pour tout entier p , de $(f_n \nabla \varphi_p(u)_+)_n$ car ces deux suites sont convergentes vers u . On procède donc de façon analogue à la première partie pour vérifier l'inégalité épigraphique supérieure en u .

Il nous reste à vérifier la propriété de Fatou-Vitali, on va montrer le résultat plus général suivant:

THEOREME 3.6 [T1; 1.1]. Soit $(\alpha_n)_n$ une suite de fonctions intégrables telles que $\int_{\Omega^*} \underline{\lim}_n \alpha_n d\mu > -\infty$; une condition suffisante (et nécessaire lorsque $\underline{\lim}_n \alpha_n$ est intégrable) pour avoir l'égalité:

$$\int_{\Omega} \underline{\lim}_n \alpha_n d\mu = \lim_n \int_{\Omega} \inf \left(\underline{\lim}_n \alpha_n, \alpha_n \right) d\mu$$

(donc a fortiori $\leq \underline{\lim}_n \int_{\Omega} \alpha_n d\mu$) est que $(\alpha_n)_n$ soit équi-intégrable.

DEMONSTRATION de 3.3. D'après 3.6 il suffit de vérifier l'inégalité lorsque

$$\int_{\Omega^*} \underline{\lim}_n \alpha_n d\mu = -\infty \text{ et } \int_{\Omega}^* \underline{\lim}_n \alpha_n d\mu = +\infty$$

(si $\int_{\Omega} \varliminf_n^* \alpha_n d\mu < +\infty$, l'inégalité est trivialement vérifiée).

En appliquant le lemme de Fatou à la suite $(\alpha_n^+)_n$ on obtient

$$+\infty = \int_{\Omega} \varliminf_n^* \alpha_n d\mu \leq \int_{\Omega} \varliminf_n^* \alpha_n^+ d\mu \leq \liminf_n \int_{\Omega} \alpha_n^+ d\mu$$

et l'on en déduit que $\liminf_n \int_{\Omega} \alpha_n^+ d\mu = +\infty$. Comme la mesure μ est sans atome, la suite équi-intégrable $(\alpha_n^-)_n$ est bornée et donc $\varliminf_n \int_{\Omega} \alpha_n^- d\mu > -\infty$ et de ce fait $\varliminf_n \int_{\Omega} \alpha_n d\mu = +\infty$.

Pour démontrer 3.6 on utilisera les deux résultats suivants, dont la démonstration est élémentaire et laissée au soin du lecteur.

LEMME 3.7. *Pour toute suite $(c_n)_n$ de nombres réels on a :*

$$(i) \forall c \in \overline{\mathbb{R}}, \inf \left(c, \varliminf_n c_n \right) = \varliminf_n \inf(c, c_n)$$

$$(ii) \varliminf_n c_n = \liminf_n \left(\varliminf_n c_n, c_n \right),$$

en particulier pour toute suite $(\alpha_n)_n$ de fonctions mesurables, $\varliminf_n \alpha_n$ n'est autre que la limite simple de la suite $\left(\inf \left(\varliminf_n \alpha_n, \alpha_n \right) \right)_n$.

LEMME 3.8. *Soit $(\alpha_n)_n$ une suite de fonctions intégrables, si il existe α_0 intégrable telle que $(\inf(\alpha_0, \alpha_n))_n$ soit équi-intégrable alors $(\inf(\alpha, \alpha_n))_n$ est équi-intégrable pour tout fonction α intégrable.*

DEMONSTRATION de 3.6. a) Supposons dans un premier temps que $\alpha = \varliminf_n \alpha_n$ est intégrable d'après 3.8, $(\alpha_n)_n$ équi-intégrable $\iff (\inf(\alpha, \alpha_n))_n$ est équi-intégrable

$$\begin{aligned} &\iff \alpha = L_1 - \liminf_n (\alpha, \alpha_n) \text{ d'après Vitali et 3.7} \\ &\iff \int \alpha d\mu = \liminf_n \int_{\Omega} \inf(\alpha, \alpha_n) d\mu. \end{aligned}$$

b) Puisque $\int \alpha d\mu > -\infty$, $\inf(p\beta_0, \alpha)$ est intégrable pour tout entier p et pour toute fonction β_0 positive et intégrable.

Posons pour tous entiers n et p

$$\beta_n^p = \inf(p\beta_0, \alpha, \alpha_n) = \inf[\inf(p\beta_0, \alpha), \alpha_n];$$

$(\alpha_n)_n$ étant équi-intégrable, $(\beta_n^p)_n$ l'est encore pour tout entier p d'après 3.8 et $\underline{\lim}_n \beta_n^p = \inf(p\beta_0, \alpha)$ d'après 3.7 (i) et est donc intégrable; on peut donc pour chaque entier p appliquer a) à la suite $(\beta_n^p)_n$; soit:

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \int_{\Omega} \inf(p\beta_0, \alpha) d\mu \leq \underline{\lim}_n \int_{\Omega} \inf(p\beta_0, \alpha, \beta_n^p) d\mu \leq \underline{\lim}_n \int_{\Omega} \inf(\alpha, \alpha_n) d\mu.$$

Pour conclure il suffit de remarquer que $\int_{\Omega} \alpha d\mu = \lim_P \int_{\Omega} \inf(p\beta_0, \alpha) d\mu$ d'après le théorème de convergence monotone.

Annexe I

DEMONSTRATION de 1.3.1. 1) Soit $(u_n^0)_n$ une suite réalisante en u_0 :

$$\tau\text{-}\underline{\lim}_e H_n(u_0) = \lim_n H_n(u_n^0)$$

montrons que:

$$\tau\text{-}\underline{\lim}_e [H_n]_{u_n^0}(u) = [\tau\text{-}\underline{\lim}_e H_n]_{u^0}(u)$$

où u est un point quelconque de E .

Soit $(u_n)_n$ une suite réalisante de $\tau\text{-}\lim_e [H_n]_{u_n^0}$ en u :

$$\begin{aligned} \tau\text{-}\underline{\lim}_e [H_n]_{u_n^0}(u) &= \underline{\lim}_n [H_n]_{u_n^0}(u_n) \\ &= \underline{\lim}_n H_n(u_n^0 + u_n) - \underline{\lim}_n H_n(u_n^0) \\ &\geq \tau\text{-}\underline{\lim}_e H_n(u_0 + u) - \tau\text{-}\underline{\lim}_e H_n(u_0) \\ &\geq [\tau\text{-}\underline{\lim}_e H_n]_{u_0}(u), \end{aligned}$$

pour montrer l'autre inégalité, considérons une suite $(v_n)_n$ réalisante de $\tau\text{-}\underline{\lim}_e H_n$ en $u + u_0$:

$$\begin{aligned} [\tau\text{-}\underline{\lim}_e H_n]_{u_0}(u) &= \tau\text{-}\underline{\lim}_e H_n(u + u_0) - \tau\text{-}\underline{\lim}_e H_n(u_0) \\ &= \underline{\lim}_n H_n(v_n) - \lim_n H_n(u_n^0) \\ &= \underline{\lim}_n H_n(v_n) - H_n(u_n^0) \\ &= \underline{\lim}_n [H_n]_{u_n^0}(v_n - u_n^0) \\ &\geq \tau\text{-}\underline{\lim}_e [H_n]_{u_n^0}(u). \end{aligned}$$

On montre de manière analogue l'égalité entre épi-limite supérieure des variations et variation de l'épi-limite supérieure.

2) Réciproquement si $\tau\text{-}\underline{\lim}_e [H_n]_{u_n^0}(0) = 0$ alors $\underline{\lim}_n [H_n]_{u_n^0}(u_n) \geq 0$ pour toute suite $(u_n)_n$ τ -convergente vers 0. Soit $(u_n)_n$ une suite τ -convergente vers u_0 , on a:

$$0 \leq \underline{\lim}_n [H_n]_{u_n^0}(u_n - u_n^0) = \underline{\lim}_n [H_n(u_n) - H_n(u_n^0)]$$

et donc $\underline{\lim}_n H_n(u_n^0) \leq \underline{\lim}_n H_n(u_n)$. $(u_n^0)_n$ est de ce fait une suite réalisante de $\tau\text{-}\underline{\lim}_e H_n$ en u_0 .

D'autre part si $(u_n)_n$ est une suite réalisante de $\tau\text{-}\overline{\lim}_e H_n$ en u_0 , alors:

$$\begin{aligned} \tau\text{-}\overline{\lim}_e H_n(u_0) &= \overline{\lim}_n ([H_n]_{u_n^0}(u_n - u_n^0) + H_n(u_n^0)) \\ &\geq \overline{\lim}_n H_n(u_n^0) + \underline{\lim}_n [H_n]_{u_n^0}(u_n - u_n^0) \geq \overline{\lim}_n H_n(u_n^0) \end{aligned}$$

$(u_n^0)_n$ est donc une suite réalisante de $\tau\text{-}\overline{\lim}_e H_n$ en u_0 .

Annexe II

Soient:

- $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré par une mesure μ -positive σ -finie sans atome où \mathcal{T} est dénombrablement engendrée par \mathcal{T}_0 .
- X un Banach séparable, D un dénombrable dense de X .
- $\varphi: \Omega \times X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ une fonction de Young, bornée sur les bornés de X (i.e. $\forall \omega(\mu\text{-p.p.}) \forall r > 0 \sup_{|x| < r} \varphi(\omega, x) < +\infty$).
- E_φ l'espace vectoriel sous-jacent au domaine de I_φ (cf. §3).
- α une fonction mesurable strictement positive telle que L_∞^α soit inclus dans E_φ (l'existence de telle fonction α est assurée par [T2; 1.3.3]).

On a le résultat suivant:

THEOREME. *Tout élément u de E_φ est limite en φ -norme d'une suite $(\overline{u}_p)_p$ de L_∞^α de la forme: $\overline{u}_p = \alpha \sum_{0 \leq k \leq p} x_k^p 1_{A_k^p}$ où pour tout entier p , les x_k^p sont dans D , les A_k^p sont dans \mathcal{T}_0 et deux à deux disjoints ($k = 0, \dots, p$).*

En particulier, E_φ muni de la φ -norme est séparable et donc a fortiori L_φ lorsque φ vérifie une Δ_2 -condition.

DEMONSTRATION. a) *On suppose que u est dans L_∞^α . D'après [F-T; 1.2] et [F-T; 1.4.5] appliqués à $\Delta = \bigcup_{x \in D} \text{Gr}(x\alpha)$ et $\Gamma = \Omega \times X$, pour tout entier n , il existe une \mathcal{T} -partition $(A_n^k)_{k \in \mathbb{N}}$ de Ω et une suite $(x_n^k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de D telles que u soit limite dans L_∞^α (a fortiori en φ -norme) de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où pour tout n :*

$$u_n = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} x_n^k 1_{A_n^k}.$$

Posons pour tous entiers n et p , $u_n^p = \alpha \sum_{0 \leq k \leq p} x_n^k 1_{A_n^k}$ pour tout n , on a

$$\|u_n - u_n^p\|_{\varphi} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$$

en effet, $u_n - u_n^p = u_n 1_{B_n^p}$ avec $B_n^p = \bigcup_{k > p} A_n^k$ et puisque $u_n \in E_{\varphi}$, $\varphi(\lambda u_n)$ est intégrable pour tout $\lambda \geq 0$ et

$$\int_{\Omega} \varphi(\lambda(u_n - u_n^p)) d\mu = \int_{B_n^p} \varphi(\lambda u_n) d\mu \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$$

car

$$\bigcap_p \downarrow B_n^p = \emptyset.$$

A présent on utilise la densité de \mathcal{T}_0 dans \mathcal{T} pour l'écart $(A, B) \rightarrow \mu(A \Delta B)$, pour déterminer une suite $(\bar{u}_n^p)_p$ équivalente en φ -norme à $(u_n^p)_p$ et de la forme voulue.

Soient n et p fixés; comme les αx_n^k ($k = 0, \dots, p$) sont dans E_{φ} , $\varphi(p \alpha x_n^k)$ est intégrable pour tout $k \leq p$ et il existe donc $\eta > 0$ tel que:

$$\mu(A) \leq \eta \implies \sup_{0 \leq k \leq p} \left[\int_A (p \alpha x_n^k) d\mu \right] \leq \frac{1}{p+1}.$$

Il existe des éléments $\bar{A}_n^0, \dots, \bar{A}_n^p$ de \mathcal{T}_0 , deux à deux disjoints tels que:

$$\forall k \leq p \quad \mu(A_n^k \Delta \bar{A}_n^k) \leq \eta;$$

posons $\bar{u}_n^p = \alpha \sum_{0 \leq k \leq p} x_n^k 1_{\bar{A}_n^k}$

$$\int_{\Omega} \varphi(p(u_n^p - \bar{u}_n^p)) d\mu = \sum_{0 \leq k \leq p} \int_{A_n^k \Delta \bar{A}_n^k} \varphi(p \alpha x_n^k) d\mu \leq 1$$

et donc

$$\|u_n^p - \bar{u}_n^p\|_{\varphi} \leq \frac{1}{p}.$$

b) Si $u \in E_{\varphi}$, alors u est limite en φ -norme d'une suite $(u_n)_n$ d'éléments de L_{∞}^{α} (par exemple $u_n = u 1_{\Omega_n}$ où $\Omega_n = \{\omega \in \Omega / |u(\omega)| \leq n \alpha(\omega)\}$) on applique à chaque u_n la première partie de la démonstration et l'on obtient la suite cherchée par diagonalisation.

BIBLIOGRAPHIE*

- [A] H. ATTOUCH, *Variational convergences for functions and operators*, Coll. Research Notes in Math., Pitman Editors (London), (1984).
- [B] E. BALDER, *A unifying note on Fatou's lemma in several dimensions*, Mathematics of Operators Research, **9**, 267-275, (1984).
- [B-M] M.L. BERNARD-MAZURE, *Equi-Sci Γ -convergence et convergence simple*, T.S.A.C. Montpellier **7**, (1981).
- [B-T] A. BOURASS - A. TRUFFERT, *Ensembles fermés décomposables dans les espaces intégraux de type Orlicz*, T.S.A.C. Montpellier **15**, (1981).
- [B-V] A. BOURASS - M. VALADIER, *Condition de croissance associée à l'inclusion des sections*, (d'après A. Fougères - R. Vaudène) A.V.A.M.A.C. **3**, (1984).
- [B-D1] G. BUTTAZZO - G. DAL MASO, *Γ -limit of a sequence of non convex and non équi-lipschitz integral functionals*, Ricerche Mat. **27**, 235-251, (1978).
- [B-D2] G. BUTTAZZO - G. DAL MASO, *Γ -limit of integral functionals*, J. Analyse Math. **37**, 145-185, (1980).
- [B-D3] G. BUTTAZZO - G. DAL MASO, *On Nemyckii operators and integral representation of local functionals*, to appear in Rend. Mat. (preprint Scuola Normale Superiore, Pisa (1982)).
- [D] E. DE GIORGI, *Convergence problems for functionals and operators*, Proc. Int. Meeting on "Recent Methods in Non linear Analysis", Rene (78) Ed. De Giorgi, Megenes, Mosco. Pitagora, Bologna, 131-188, (1979).
- [F1] A. FOUGERES, *Comparaison de fonctionnelles intégrales sur les sélections d'une multiapplication mesurable: (I) théorème d'approximation et condition de croissance liée à l'inclusion des sections*, T.S.A.C. Montpellier **9**, (1982).
- [F2] A. FOUGERES, *l.s.c. regularisation and epi-convergence (strong and in measure) of integral functional: conditions of Growth and Fatou-Vitali*, (à paraître).
- [F-T1] A. FOUGERES - A. TRUFFERT, *Regularisation s.c.i. et Γ -convergence. Approximation inf-convolutives associées à un référentiel*, A.V.A.M.A.C. **08-15**, (1984).
- [F-T2] A. FOUGERES - A. TRUFFERT, *Δ -integrands and essential infimum, Nemyckii representation of l.s.c. operators on décomposable spaces and Radon-Nikodym-Hiai representation of measure functionals*, A.V.A.M.A.C. **13**, (1984).
- [G1] E. GINER, *Décomposabilité et dualité des espaces d'Orlicz*, T.S.A.C. **17**, (1977). C.R.A.S. **Tome 284**, Série A, 41, (1977).
- [G2] E. GINER, *Limites inférieure et supérieure d'ensembles décomposables. Application à l'épi-convergence des fonctionnelles intégrales*, (version préliminaire), (à paraître sous une forme ultérieure).
- [G3] E. GINER, *Sous-différentiabilité des fonctionnelles intégrales (II)*, (à paraître).

* T.S.A.C.: Travaux du Séminaire d'Analyse Convexe (Montpellier)

A.V.A.M.A.C.: Laboratoire d'Analyse Variationnelle et Applications en Mécanique. Automatique et Contrôle (Perpignan)

- [H] F. HIAI, *Representation of additive functionals on vector valued normed Köthe spaces*, Kodai Math. J.e., 300-313, (1979).
- [J] J.L. JOLY, Thèse d'Etat - Grenoble (1970), *Une famille de topologies sur l'ensemble des fonctions convexes pour lesquelles la polarité est bicontinue*, J. Math. pures et appl. **52**, 421-441, (1973).
- [J-T] J.L. JOLY - F. DE THELIN, *Convergence d'intégrales convexes dans les espaces L^p* , Jour. of Math. Anal. and App. Vol. 54 **1**, (1976).
- [K] H.A. KLEI, *Représentation intégrale de fonctions additives*, Thèse de 3ème cycle, Paris, (1979).
- [Ko] A. KOZEK, *Orlicz spaces of functions with values in Banach spaces*, Ann. Soc. Math. Pol. Séries I Commentationes Mathematicae XIX, (1977).
- [M-S] P. MARCELLINI - C. SBORDONE, *Dualità e perturbazione di funzionali integrali*, Recherche Math. **26**, 383-421, (1977).
- [M] U. MOSCO, *On the continuity of the Young-Fenchel transformation*, J. Math. Anal. Appl. **35**, 518-535, (1971).
- [R1] R.T. ROCKAFELLAR, *Integrals which are convex functionals (I)*, Pac. J. Math. **24**, 525-539, (1968) and **39**, 439-469, (1971).
- [R2] R.T. ROCKAFELLAR, *Integral functionals, normal integrands and measurable multifunctions*, In Nonlinear operators and the Calculus of Variations, Bruxelles (1975). Lect. Notes in Math. **543**.
- [R3] R.T. ROCKAFELLAR, *Maximal monotone relations and the second derivatives of non smooth functions*, to appear in annales l'Institut Poincaré, Analyse non Linéaire (1985).
- [S-W] G. SALINETTI - R. WETS, *On the convergence in distribution of measurable multifunctions, normal integrands, stochastic processes and stochastic infima*, (à paraître).
- [T1] A. TRUFFERT, *Propriété de Fatou-Vitali: Applications à l'épi-convergence des fonctionnelles intégrales. D'après E. Giner*, T.S.A.C. Montpellier **9**, (1983).
- [T2] A. TRUFFERT, *Intégrales normales et espérance conditionnelle (II): existence, unicité, régularité*, T.S.A.C. Montpellier **8**, (1983).
- [W] R. WETS, *Convergence of convex functions variational inequalities and convex optimisation problems*, In Variational inequalities and complementary problems, eds. R. Colthe, F. Giannessi, J.L. Lions, Wiley and sons chichesters (UK), 375-403, (1980).