

ENGENHARIA MATEMÁTICA

2º CICLO (MESTRADO)



FACULDADE DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE DO PORTO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA



www.fc.up.pt/dmat/engmat

Applications of Second Order Cone Programming

Raquel Reis
Janeiro 2013

Agenda

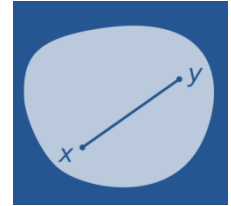
- Programação convexa
- Programação cônica de segunda ordem
 - Formalização de um problema de SOCP
 - Problemas que podem ser expressos como SOCP
 - Máximo de normas
 - Problemas com restrições hiperbólicas
 - Aplicações reais
 - Dual de um SOCP
 - Algumas considerações
 - Algoritmo de redução do potencial Primal-Dual
 - Pontos iniciais estritamente admissíveis
 - Conclusões
- Referências

Programação convexa

- Conjunto convexo

Um conjunto é convexo se o segmento de recta que une dois pontos desse conjunto pertence ao conjunto, ie,

C é convexo se $\{x_1, x_2 \in C \Rightarrow \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 \in C, \alpha \in [0,1]\}$.



- Programação / Otimização

- Função objectivo a ser maximizada / minimizada;
- Conjunto de restrições a serem cumpridas.

- Programação convexa

- Função objectivo e restrições de desigualdade são convexas;
$$f_i(\theta x + (1 - \theta)y) \leq \theta f_i(x) + (1 - \theta)f_i(y)$$
- Restrições de igualdade são funções afins.

Programação Cônica de Segunda Ordem

- Um **cone** é um conjunto não vazio

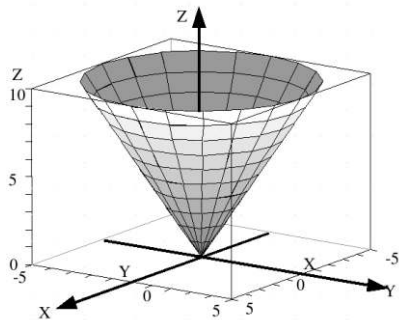
$$C \subset \mathbb{R}^n: \forall x \in C, \alpha x \geq 0, \text{ com } \alpha \geq 0.$$

Além disso, se C é convexo, então C é chamado **cone convexo**.

- Um **cone de segunda ordem** é um cone normado na norma Euclidiana, isto é,

$$C_k = \{(x, t) | x \in \mathbb{R}^{k-1}, t \in \mathbb{R}, \|x\|_2 \leq t\} \subseteq \mathbb{R}^k$$

Um cone de segunda ordem define um conjunto convexo.



$$x^2 + y^2 \leq z^2$$

Programação Cônica de Segunda Ordem

Um problema SOCP é escrito na forma

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & f^T x \\ \text{Sujeita a} & \|A_i x + b_i\| \leq c_i^T x + d_i, i = 1, \dots \\ & Fx = g \end{array}$$

- A restrição $\|A_i x + b_i\| \leq c_i^T x + d_i$ é chamada de restrição do cone quadrático
- Como a função objectivo é linear, o problema é convexo se as restrições definirem um conjunto convexo
- Variável de otimização: $x \in \mathbb{R}^n$
- Constantes do problema: $f \in \mathbb{R}^n, A_i \in \mathbb{R}^{(n_i-1) \times n}, b_i \in \mathbb{R}^{n_i-1}, c_i \in \mathbb{R}^n, d_i \in \mathbb{R}, F \in \mathbb{R}^{m \times n}, g \in \mathbb{R}^m$

Programação Cônica de Segunda Ordem

Problemas que podem ser reformulados como SOCP:

- Programação linear (PL) e PL robusta;
- Problemas de mínimos quadrados (PMQ) e PMQ robustos;
- Programação quadrática (PQ) e PQ robusta
- Problemas que envolvem soma ou máximos de normas
- Problemas com constrangimentos hiperbólicos

Problemas que podem ser reformulados como SOCP

- Máximo de normas

Tem-se o problema

$$\text{Minimizar} \quad \max_{i=1, \dots, p} \|A_i x + b_i\|$$

Introduz-se uma única variável t

$$\text{Minimizar} \quad t$$

$$\text{sujeita a} \quad \|A_i x + b_i\| \leq t, i = 1, \dots, p$$

Variáveis de otimização: $x \in \mathbb{R}^n$ e $t \in \mathbb{R}$

Problemas que podem ser reformulados como SOCP

- Restrições hiperbólicas

$$\omega^2 \leq xy, x \geq 0, y \geq 0 \iff \left\| \begin{bmatrix} 2\omega \\ x - y \end{bmatrix} \right\| \leq x + y \quad (1)$$
$$\left(\sqrt{4w^2 + x^2 + y^2 - 2xy} \right)^2 \leq (x + y)^2$$
$$4w^2 + x^2 + y^2 - 2xy \leq x^2 + y^2 + 2xy$$
$$w^2 \leq xy$$

E mais genericamente, quando ω é um vector

$$\omega^T \omega \leq xy, x \geq 0, y \geq 0 \iff \left\| \begin{bmatrix} 2\omega \\ x - y \end{bmatrix} \right\| \leq x + y \quad (2)$$

Problemas que podem ser reformulados como SOCP

Exemplo: Maximizar a média harmónica de funções afins

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & \sum_{i=1}^p \frac{1}{a_i^T x + b_i} \\ \text{Sujeita a} \quad & a_i x + b_i > 0, i = 1, \dots, p \\ & c_i^T x + d_i \geq 0, i = 1, \dots, q \end{aligned}$$

Introduzem-se novas variáveis t_i :

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & \sum_{i=1}^p t_i \\ \text{Sujeita a} \quad & t_i (a_i^T x + b_i) \geq 1, i = 1, \dots, p \\ & c_i^T x + d_i \geq 0, i = 1, \dots, q \end{aligned}$$

E através de **(1)**:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & \sum_{i=1}^p t_i \\ \text{Sujeita a} \quad & \left\| \begin{bmatrix} 2 \\ a_i^T x + b_i - t_i \end{bmatrix} \right\| \leq a_i^T x + b_i + t_i, i = 1, \dots, p \\ & c_i^T x + d_i \geq 0, i = 1, \dots, q \end{aligned}$$

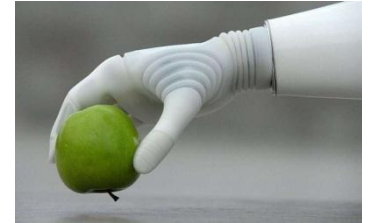
Programação Cônica de Segunda Ordem

Aplicações reais

- Mão mecânica
- Arranjos de antenas;
- Modelação de filtros FIR;
- Otimização de carteiras de investimento;
- Problemas de gestão
- Problemas de localização de instalações

Programação Cônica de Segunda Ordem

Aplicação real – Mão mecânica



Problema: Agarrar um objecto de forma estável, o mais suave possível

$$F_i: \begin{cases} v_i^T F_i v_i & \text{normal à superfície} \\ (I - v_i v_i^T) F_i & \text{tangente à superfície} \end{cases}$$

v_i – é o vector normal à superfície no i – ésimo ponto de contato
 F_i – força aplicada no ponto

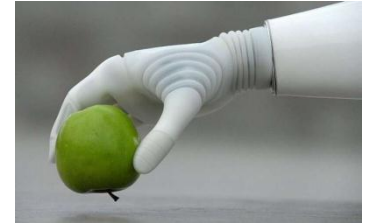
A componente tangente ocorre pelo atrito estático e a sua magnitude não pode exceder o produto da magnitude normal com o coeficiente de atrito μ .

Restrição do cone quadrático nas variáveis F_i :

$$\|(I - v_i v_i^T) F_i\| \leq \mu v_i^T F_i, I = 1, \dots, N$$

Programação Cônica de Segunda Ordem

Aplicação real – Mão mecânica



O equilíbrio estático do corpo é caracterizado por:

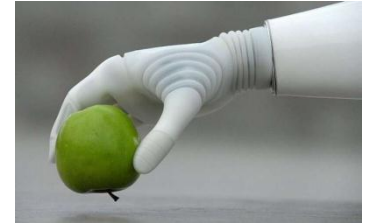
$$\sum_i^N F_i + F_{ext} = 0$$
$$\sum_i^N p_i \times F_i + T_{ext} = 0$$

Impõem-se limites nas forças de contato, por exemplo, um limite superior $v_i^T F_i \leq F_{\max}$ na componente normal

Objectivo: Encontrar F_i que satisfaçam as restrições de atrito, as restrições de equilíbrio estático e os limites nas forças de contacto.

Programação Cônica de Segunda Ordem

Aplicação real – Mão mecânica



Surge assim o SOCP:

Minimizar t

sujeita a $v_i^T F_i \leq t, i = 1, \dots, N$

$$\|(I - v_i v_i^T) F_i\| \leq \mu v_i^T F_i, i = 1, \dots, N$$

$$\sum_i^N F_i + F_{ext} = 0$$

$$\sum_i^N p_i \times F_i + T_{ext} = 0$$

Programação Cônica de Segunda Ordem

Relembrando o problema, agora referido como Primal

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && f^T x \\ &\text{Sujeita a} && \|A_i x + b_i\| \leq c_i^T x + d_i, i = 1, \dots \\ &&& Fx = g \end{aligned}$$

$$f \in \mathbb{R}^n, A_i \in \mathbb{R}^{(n_i-1) \times n}, b_i \in \mathbb{R}^{n_i-1}, c_i \in \mathbb{R}^n, d_i \in \mathbb{R}, F \in \mathbb{R}^{m \times n}, g \in \mathbb{R}^m$$

Dual de um SOCP

$$\begin{aligned} &\text{Maximizar} && -\sum_{i=1}^N (b_i^T z_i + d_i w_i) \\ &\text{Sujeito a} && \sum_{i=1}^N (A_i^T z_i + c_i w_i) = f \\ &&& \|z_i\| \leq w_i \end{aligned}$$

As variáveis duais são $z_i \in \mathbb{R}^{n-1}$ e $w \in \mathbb{R}^n$.

O dual de um SOCP é ainda um SOCP.

Dual de um SOCP – algumas considerações

- O primal SOCP é admissível (“feasible”) se existir x que satisfaça todas as restrições.
- O primal SOCP é estritamente admissível se existir x que satisfaça as restrições com desigualdades estritas.
- Os vectores z e w são duais admissíveis se satisfizerem as restrições.
- Os vectores z e w são duais estritamente admissíveis se além das restrições, satisfizerem $\|z_i\| < w_i, i = 1, \dots, N$
- Diz-se que o dual SOCP é (estritamente) admissível, se existirem z_i, w (estritamente) admissíveis.

Dual de um SOCP – algumas considerações

Sejam

p^* - valor ótimo do primal SOCP

d^* -valor ótimo do dual SOCP

Tem-se que se

$p^* = +\infty \rightarrow$ o problema não é admissível

$d^* = -\infty \rightarrow$ o problema não é admissível

A diferença entre os objetivos do dual e do primal é chamada intervalo de dualidade (“duality gap”) associado a x, z, w e é denotada por

$$\eta(x, z, w) = f^T x + \sum_{i=1}^N (b_i^T z_i + d_i w_i)$$

Se o primal e o dual são estritamente admissíveis então existem pontos admissíveis do primal e do dual onde as funções atingem os mesmos valores ótimos. Neste caso, $\eta = 0$.

Algoritmo Primal-Dual de redução do potencial

Dados x, z, w estritamente admissíveis e uma tolerância $\mu > 0$

Repetir

1. Encontrar direções de pesquisa duais e primais $\delta x, \delta z, \delta w$
2. Encontrar $p, q \in \mathbb{R}$ que minimizam $\varphi(x + p\delta x, z + q\delta z, w + q\delta w)$
3. Actualização das variáveis: $x := x + p\delta x, z := z + q\delta z, w := w + q\delta w$.

Até $\eta(x, z, w) \leq \mu$.

Onde $\eta(x, z, w)$ é a diferença entre os objetivos do primal e do dual e $\varphi(x, z, w)$ é a função potencial primal-dual.

Programação Cônica de Segunda Ordem

Pontos iniciais estritamente admissíveis - Restrição de limites nas variáveis primais

Torna-se fácil encontrar pontos duais estritamente admissíveis em SOCPs quando as restrições primais incluem limites nas variáveis, ie, limites superiores e inferiores, $l \leq x \leq u$, ou uma restrição de norma, $\|x\| \leq R$.

Exemplo: Incluir uma restrição de norma no SOCP inicial

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & f^T x \\ \text{Sujeito a} & \|A_i x + b_i\| \leq c_i^T x + d_i, i = 1, \dots, N \\ & \|x\| \leq R \end{array}$$

Se R for suficientemente grande a restrição extra não altera a solução, nem o valor ótimo do SOCP.

Programação Cônica de Segunda Ordem

Pontos iniciais estritamente admissíveis - Restrição de limites nas variáveis primais

O dual do problema anterior fica:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & - \sum_{i=1}^N (b_i^T z_i + d_i w_i) - R w_{N+1} \\ \text{Sujeito a} \quad & \sum_{i=1}^N (A_i^T z_i + c_i w_i) + Z_{N+1} = f \\ & \|z_i\| \leq w_i, i = 1, \dots, N + 1 \end{aligned}$$

Os pontos estritamente admissíveis para o problema anterior são calculados da seguinte forma:

- Para $i = 1, \dots, N$ toma-se qualquer z_i e $w_i > \|z_i\|$;
- A variável z_{N+1} advém da restrição de igualdade;
- Para w_{N+1} toma-se qualquer valor maior que $\|z_{N+1}\|$

Programação Cônica de Segunda Ordem

Conclusões

- Otimização Convexa, eficientemente resolvida;
- Possível generalizar Métodos de Ponto Interior da Programação Linear para SOCP;
- Diversas implementações disponíveis, assim como softwares;
- Formulação flexível
- Lida com restrições quadráticas e hiperbólicas, importante para aplicações à engenharia

Referências

- Lobo, M. S.; Vandenberghe, L.; Boyd, S.; Lebret, H.; *Applications of second-order programming*; Linear Algebra and its Applications 284 (1998) 193-238
- Lobo, M. S.; Vandenberghe, L.; Boyd, S.; Lebret, H.; *Second-Order Cone Programming*, SIAM (Julho 1997)
- Trevisoli, D. S. Ehrhardt, M. A. D.; *Estudo e Avaliação de problemas Associados a Cones de Segunda Ordem*; DMA-IAMECC-UNICAMP
- Apontamentos Programação Matemática, Maria do Carmo Miranda Guedes
- Kuo, Yu-Ju; Mittelman, Hands D. Interior Point Method for Second-Order Cone Programming and OT Applications, 2003.