REVISTA MATEMÁTICA de la
Universidad Complutense de Madrid
Volumen 9, número 2: 1996
http://dx.doi.org/10.5209/rev_REMA.1996.v9.n2.17586

Approximation de la solution de viscosité d'un problème d'Hamilton-Jacobi

Philippe BÉNILAN et Mohamed MALIKI

Abstract

We consider the Cauchy problem for a parabolic equation $v_t = \propto (v)\Delta v + \mid \nabla v \mid^2 + F(v)$, where $\propto (v)$ is a "small enough" non negative continuous function; we prove uniform estimate of the modulus of continuity of a classical solution v, existence of viscosity solutions v, and convergence, as $\propto \to 0$ in appropriate sense, of these solutions to the viscosity solution of the Cauchy problem for $v_t = \mid \nabla v \mid^2 + F(v)$.

1 Introduction et notations

On considère le problème suivant:

$$\begin{cases} v_t = \alpha(v)\Delta v + \mid \nabla v \mid^2 + F(v) & \text{sur } Q =]0,T[\times \boldsymbol{R}^N \\ v(0,x) = v_0(x) & \text{sur } \boldsymbol{R}^N, \end{cases} \qquad (PC)_\alpha$$

où $F : \boldsymbol{R}^+ \longrightarrow \boldsymbol{R}$ de classe C^1 avec $F(0) \geq 0, v_0$ bornée uniformément continue sur $\boldsymbol{R}^N$ avec $v_0 \geq 0$ sont des fonctions données et $\alpha : \boldsymbol{R}^+ \longrightarrow \boldsymbol{R}^+$ de classe C^1 une fonction paramètre que l'on fera varier dans une classe de fonctions precisée ci-dessous.

Lorsque $\alpha(v) \equiv 0$, le problème $(PC)_\alpha$ se réduit au problème hyperbolique d'Hamilton-Jacobi:

$$\begin{cases} v_t = \mid \nabla v \mid^2 + F(v) & \text{sur } Q \\ v(0,x) = v_0(x) & \text{sur } \boldsymbol{R}^N. \end{cases} \qquad (PC)_0$$

1991 Mathematics Subject Classification: 35K65, 35B25,35B65.

Servicio Publicaciones Univ. Complutense. Madrid, 1996.

Dans ce travail nous donnons une estimation du module de continuité d'une solution classique du problème $(PC)_\alpha$, uniforme en α variant dans la classe de fonctions considérée. Cette estimation permet d'une part de montrer l'existence d'une famille équicontinue de solutions de viscosité $(v_\alpha)_\alpha$ de $(PC)_\alpha$, et d'autre part d'obtenir le problème $(PC)_0$ comme limite des problèmes $(PC)_\alpha$, quand la fonction α tend vers 0 adéquatement. Le problème a été étudié dans le cas particulier, $F(v) \equiv 0$ et $\alpha(v) = (m-1)v$, où m est un paramètre réel, $m \geq 1$ dans [AV] (pour $N = 1$; cf. aussi [M] par une technique de compacité par compensation), et dans [LSV] (pour $N \geq 2$).

Dans ce cas particulier avec $m \geq 1, (PC)_\alpha$ se réduit à l'équation des milieux poreux $u_t = \Delta u^m$ par la transformation $v = \frac{m}{m-1}u^{m-1}$. Dans le cas général que nous considérons, $(PC)_\alpha$ peut être relié au problème du type milieux poreux

$$\left\{\begin{array}{ll} u_t = \Delta\varphi(u) + G(u) & \text{sur } Q \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{sur } \mathbb{R}^N, \end{array}\right. \qquad (MP)$$

où φ, u, G sont définis par $\frac{dv}{du} = \frac{\varphi'(u)}{u}, \varphi'(u) = \alpha(v), G(u) = \frac{uF(v)}{\varphi'(u)}$, mais plusieurs difficultés apparaîssent.

Une première dificulté provient de la généralité des hypothèses sur $F(v)$: dans le changement d'inconnue $v = \psi(u)$,donnant la relation entre $(PC)_\alpha$ et (MP), en effet même dans le cas $\alpha(v) = (m-1)v$, la fonction $G(u)$ intervenant dans (MP) ne sera pas en général localement lipschitzienne: on ne peut donc pas utiliser la perturbation de l'équation des milieux poreux pour définir la solution de $(PC)_\alpha$. Or si $(PC)_0$ et (MP), lorsque $F(v) \equiv 0$ et $G(u) \equiv 0$ respectivement, définissent des semi-groupes de contraction dans $C_{ucb}(\mathbb{R}^N)$ et $L^1(\mathbb{R}^N)$, le problème $(PC)_\alpha$ lorsque $\alpha(v)$ est non identiquement nulle, ne semble pas pouvoir être abordé par des techniques classiques des semi-groupes non-linéaires.

La deuxième difficulté provient de la généralité que nous considérons sur les fonctions $\alpha(v)$: même dans le cas où $F(v) \equiv 0$, il est nécessaire de mettre en évidence de nouvelles estimations pour obtenir la continuité d'une solution de $(PC)_\alpha$; notons que nous obtiendrons ces estimations pour des fonctions $\alpha(v)$ "sufisamment petites".

Afin de définir la classe de fonctions α que nous considérons, introduisons d'abord les notations que nous utiliserons par la suite : on suposse que $T \in]0, \infty[$ est tel que la solution maximale de l'équation différentielle : $M'(t) = F(M(t))$ sur $]0, T[$, $M(0) = \sup v_0(x)$, soit définie et bornée sur $[0, T[$. On pose

$$M_0 = \sup_{t \in [0,T[} M(t), \quad M_1 = \max_{k \in [0, M_0]} F'(k).$$

Nous considérons la classe $\mathcal{A}$ des fonctions $\alpha \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ vérifiant

$$m_0(\alpha) := \min_{k \in [0, M_0]} (\alpha'(k) + 1) > 0 \tag{1}$$

De plus dans le cas $N \geq 2$, on suppose que

$$\begin{cases} \alpha(0) = 0 \\ \varepsilon(\alpha) := \sup\limits_{k \in [0, M_0], \alpha(k) > 0} \dfrac{\alpha'^2(k) \cdot k}{\alpha(k)} < \dfrac{m_0(\alpha)}{1 + \sqrt{2(N-1)}}. \end{cases} \tag{2}$$

Il est clair que $\alpha(v) \equiv 0$ vérifie ces conditions. On dira qu'une suite (α_n) tend vers 0 si les conditions suivantes sont vérifiées

$$\begin{cases} m_0(\alpha_n) \geq m_0 > 0 \text{ pour tout } n \\ \alpha_n \longrightarrow 0 \text{ dans } C([0, M_0]) \text{ et pour } N \geq 2,\ \varepsilon(\alpha_n) \longrightarrow 0. \end{cases} \tag{3}$$

Notons que dans le cas où $\alpha_m(v) = (m-1)v, m \geq 1$ on a $\alpha_m(0) = 0, m_0(\alpha_m) = m$, et $\varepsilon(\alpha_m) = m - 1$; la condition (2) s'écrit $m < 1 + \frac{1}{\sqrt{2(N-1)}}$; on a (α_n) tend vers 0 quand m tend vers 1.

Dans la deuxième section, nous prouvons une estimation uniforme du gradient d'une solution classique de $(PC)_\alpha$, et l'équicontinuité d'une famille de ces solutions.

Dans la troisième section nous montrons que cette estimation est suffisante pour obtenir l'existence d'une famille équicontinue de solutions de viscosité $(v_\alpha)_\alpha$ de $(PC)_\alpha$ pour $\alpha \in \mathcal{A}$, et d'établir sa convergence vers l'unique solution de viscosité de $(PC)_0$, lorsque la fonction α tend vers 0.

2 Estimation du gradient dans le cas régulier

Dans ce paragraphe on se place dans le cas régulier. On suppose que (α, v_0, F) sont de classe $C^\infty, \alpha > 0$ sur $]0, M_0]$, et $\inf v_0(x) > 0$.

On note $\eta_0 = \inf_{t\in[0,T]} \eta(t)$ où η est la solution de $\eta'(t) = F(\eta(t))$, $\eta(0) = \inf v_0(x)$, qui est définie et strictement positive sur $[0,T]$. Utilisant le principe de comparaison et les résultats classiques sur les équations uniformément paraboliques (cf. [LSU]), il existe un unique $v : \bar{Q} \longrightarrow [\eta_0, M_0]$ de classe C^∞ solution classique de $(PC)_\alpha$.

On suppose évidement que α vérifie les conditions (1), (2); de façon plus précise on suppose

$$\begin{cases} \text{dans le cas} \quad N = 1,\ m_0(\alpha) \geq m_0, \\ \text{dans le cas} \quad N \geq 2,\ m_0(\alpha) - \left(\sqrt{2(N-1)} + 1\right)\varepsilon(\alpha) \geq m_0, \end{cases} \tag{4}$$

où $m_0 > 0$ est fixé.

Théorème 1. *On pose*

$$l = \sqrt{\frac{N-1}{2}}. \tag{5}$$

Il existe une constante $C = C(m_0, M_0, M_1, F(0))$ telle que

$$|\nabla v|^2 \leq \frac{C}{tv^l} \quad sur\ Q \tag{6}$$

Si de plus, v_0 est lipschitzienne sur $\mathbb{R}^N$, alors il existe une constante $C' = C'(m_0, M_0, M_1, F(0), \|\nabla v_0\|_\infty)$ telle que

$$|\nabla v|^2 \leq \frac{C'}{v^l} \quad sur\ \bar{Q} \tag{7}$$

Ce résultat est une extension de celui dans [B] obtenu pour $\alpha(v) = (m-1)v, F(v) \equiv 0$. Pour la preuve nous suivons la même démarche; montrons d'abord le lemme suivant:

Lemme 2. *Soit $H : [\eta_0, M_0] \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$. On suppose que $H_r(k,r) = \frac{\partial H}{\partial r}(k,r) > 0$ sur $[\eta_0, M_0] \times \mathbb{R}^+$ et pour tout $k \in [\eta_0, M_0]$, $H(k,\cdot)$ est un homéomorphisme de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$; on note $A(k,\cdot)$ l'homéomorphisme réciproque. Posons $h(t,x) = H(v(t,x), |\nabla v(t,x)|^2)$.*

1) *Soit M une constante positive telle que:*

$$\begin{cases} M + t^2\Big[H_k F + H_r\frac{(N-1)}{2}\ \frac{\alpha'^2}{\alpha}A^2(v,\frac{M}{t}) - \Big((\alpha'+1)H_k \\ \qquad -2H_rF' + \alpha\left(H_{kk} - \left(\frac{H_k^2}{H_r}\right)_r\right)\Big)A(v,\frac{M}{t})\Big] \leq 0\ sur Q \end{cases} \tag{8}$$

alors

$$h(t,x) \leq \frac{M}{t} \qquad sur\, Q.$$

2) *Soit M' une constante positive telle que:*

$$\begin{cases} H_kF + H_r\frac{(N-1)}{2}\frac{\alpha'^2}{\alpha}A^2(v,M') - \Big[(\alpha'+1)H_k - 2H_rF' \\ \qquad + \alpha\left(H_{kk} - \left(\frac{H_k^2}{H_r}\right)_r\right)\Big] A(v,M') \leq 0\, sur Q \cdot \\ et\, h(0,x) \leq M' \quad sur \quad \mathbb{R}^N \end{cases} \tag{9}$$

alors

$$h(t,x) \leq M' \qquad sur\, \bar{Q}.$$

Dans (8) (resp. (9)), les fonctions α, F et leurs dérivées sont prises en v, et les dérivées considérées de H sont prises en $v, A(v, \frac{M}{t})$ (resp. $A(v,M')$), la fonction v étant prise en (t,x).

Preuve du Lemme 2.

On a

$$\begin{cases} h_t = H_k(\alpha\Delta v + \mid \nabla v\mid^2 + F) + 2H_r(\alpha' \mid \nabla v \mid^2 \Delta v + \alpha \nabla v \cdot \nabla(\Delta v) \\ \quad + \nabla v \cdot \nabla(\mid \nabla v\mid^2) + F' \mid \nabla v \mid^2). \end{cases} \tag{10}$$

D'un autre côté

$$\begin{cases} \nabla h = H_k \nabla v + H_r \nabla(\mid \nabla v \mid^2), \\ \Delta h = H_k\Delta v + 2H_r(\alpha \nabla v \cdot \nabla(\Delta v) + \sum_{i,j} v^2_{x_ix_j}) + H_{kk} \mid \nabla \mid^2 \\ \qquad + 2H_{kr}\nabla v \cdot \nabla(\mid \nabla v\mid^2) + H_{rr} \mid \nabla(\mid \nabla v \mid^2) \mid^2, \end{cases} \tag{11}$$

d'où en remplaçant dans (10), $\nabla(\mid \nabla v\mid^2)$ et $H_k\Delta v + 2H_r\alpha\nabla v \cdot \nabla(\Delta v)$, tirés de (11), on obtient

$$\begin{cases} h_t = \alpha\Delta h + 2\nabla h \nabla v \left[1 - \alpha\left(\frac{H_k}{H-r}\right)_r\right] - \frac{\alpha H_{rr}}{H_r^2} \mid \nabla h \mid^2 + H_v F \\ \qquad + 2H_r(\alpha'\Delta v \mid \nabla v \mid^2 - \alpha \sum_{i,j} v^2_{x_ix_j}) - \mid \nabla v \mid^2 \Big[H_k - 2H_rF' \\ \qquad + \alpha\left(H_{kk} - \left(\frac{H_k^2}{H_r}\right)_r\right)\Big]. \end{cases} \tag{12}$$

où les dérivées de H sont prises en $(v, |\nabla v|^2)$. On a

$$\begin{aligned}
S &:= \tfrac{\alpha'}{\alpha}\left(|\nabla v|^2 \Delta v - \sum_{i,j} v_{x_i} v_{x_j} v_{x_i x_j}\right) - \sum_{i,j} v_{x_i x_j}^2 \\
&= \left[\sum_i \left(\frac{\alpha'}{\alpha}(|\nabla v|^2 - v_{x_i}^2) v_{x_i x_i} - v_{x_i x_i}^2\right)\right] \\
&- \left[\sum_{i \neq j} \left(\frac{\alpha'}{\alpha} v_{x_i} v_{x_j} v_{x_i x_j} + v_{x_i x_j}^2\right)\right] \\
&\leq \tfrac{\alpha'^2}{4\alpha^2} \sum_i (|\nabla v|^2 - v_{x_i}^2)^2 + \frac{\alpha'^2}{4\alpha^2} \sum_{i \neq j} v_{x_i}^2 v_{x_j}^2,
\end{aligned}$$

où on a majoré chaque crochet par l'inégalité de Young ($\pm 2ab - b^2 \leq a^2$). Donc

$$S \leq \frac{N-1}{4} \frac{\alpha'^2}{\alpha^2} |\nabla v|^4,$$

d'où

$$2H_r\left(\alpha' |\nabla v|^2 \Delta v - \alpha \sum_{i,j} v_{x_i x_j}^2\right) = 2H_r(\alpha S + \alpha' \sum_{i,j} v_{x_i} v_{x_j} v_{x_i x_j})$$

$$\leq \; H_r \frac{(N-1)}{2} \frac{\alpha'^2}{\alpha} |\nabla v|^4 - \alpha' \nabla h \nabla v - \alpha' H_v |\nabla v|^2$$

En remplaçant dans (12), et en utilisant $|\nabla v|^2 = A(v,h)$ on obtient l'inégalité

$$\left\{\begin{aligned}
\mathcal{L}(h) &= h_t - \alpha \Delta h + 2\nabla h \cdot \nabla v \left[1 - \tfrac{\alpha'}{2} - \alpha \left(\tfrac{H_k}{H_r}\right)_r\right] - H_k F \\
&+ \tfrac{\alpha H_{rr}}{H_r^2} |\nabla h|^2 - H_r \tfrac{(N-1)}{2} \tfrac{\alpha'^2}{\alpha} A^2(v,h) \\
&+ \left[(\alpha' + 1) H_k - 2H_r F' + \alpha \left(H_{kk} - \left(\tfrac{H_k^2}{H_r}\right)_r\right)\right] A(v,h) \leq 0,
\end{aligned}\right. \tag{13}$$

les dérivées considérées de H étant prises en $(v, A(v,h))$.

Étant donné M ~~> 0 la fonction $\xi(t,x) = \frac{M}{t}$~~ vérifie $\mathcal{L}(\xi) \geq 0$ si et seulement si l'inégalité (8) est vérifiée; puisque $h(0,x) \leq \lim_{t \downarrow 0} \xi(t)$, par principe de comparaison on a $h(t,x) \leq \frac{M}{t}$.

De même, en prenant $\xi(t,x) = M', \mathcal{L}(\xi) \geq 0$ et $h(0,x) \leq \xi(0)$ si et seulement si l'inégalité (9) est vérifiée; par principe de comparaison on a $h(t,x) \leq M'$ sur $\bar{Q}$.

■

Preuve du Théoreme 1.

Considérons d'abord le cas $N = 1$. On utilise le Lemme 2 avec $H(k,r) = \frac{r}{2M_0 - k}$. L'inégalité (8) s'écrit alors

$$1 + t(\frac{F}{2M_0 - v} + 2F') \leq M(\alpha' + 1).$$

En utilisant $F(v) \leq F(0) + M_0 M_1$, (8) est donc vérifiée par

$$M = \frac{(1 + T(\frac{F(0)}{M_0} + 3M_1))}{m_0}.$$

Le Lemme 2 donne:

$$\frac{v_x^2}{(2M_0 - v)} = H(v, v_x^2) \leq \frac{M}{t} \quad sur \quad Q$$

d'où

$$v_x^2(t,x) \leq \frac{C}{t} \quad sur \quad Q, \quad avec \quad C = 2M_0 M.$$

De même (9) s'écrit

$$\frac{F}{2M_0 - v} + 2F' \leq M'(\alpha' + 1), \quad \frac{v_{0,}^2}{2M_0 - v_0} \leq M'.$$

Appliquant le Lemme 2 comme ci-dessus, on a donc

$$v_x^2(t,x) \leq 2 \max(\| v_0' \|_\infty^2, \frac{F(0) + 3M_0 M_1}{m_0}) \quad sur \quad \bar{Q}.$$

Dans le cas $N \geq 2$, on choisit la fonction $H(k,r) = k^l r$. Alors (8) s'écrit

$$1 + t(\frac{lF}{v} + 2F') \leq \frac{lM}{v^{l+1}} \left[(\alpha' + 1) - \frac{(l+1)\alpha}{v} - \frac{N-1}{2t} \frac{\alpha'^2 v}{\alpha} \right].$$

Par définition $\frac{\alpha'^2 v}{\alpha} \leq \varepsilon(\alpha)$ et donc aussi, en intégrant en v, $\frac{\alpha}{v} \leq \varepsilon(\alpha)$; on a alors

$$\left[(\alpha'+1) - \frac{(l+1)\alpha}{v} - \frac{N-1}{2l}\frac{\alpha'^2 v}{\alpha}\right] \geq$$
$$\geq \ m_0(\alpha) - (\sqrt{2(N-1)}+1)\varepsilon(\alpha) \geq m_0.$$

L'inégalité (8) est donc vérifiée par

$$M = \frac{M_0^l(M_0 + T(lF(0) + (l+2M_0)M_0M_1)}{lm_0}$$

ce qui prouve (6) avec $C = M$. De la même manière, on montre (7) avec

$$C' = M_0^l \max(\| \nabla v_0 \|_\infty^2, \frac{lF(0) + (l+2M_0)M_0M_1}{lm_0}).$$

■

Comme application de cette estimation, le résultat suivant donne l'équicontinuité de $(v_\alpha)_\alpha$ pour vérifiant (4) et

$$\mu(\alpha) := \max_{k\in[0,M_0]} \alpha(k) \leq \mu_0 \quad \text{où} \quad \mu_0 \text{ est fixé} .$$

Théorème 3. *On pose*

$$\gamma = 1/(l+2).$$

Étant donné $0 < \tau < T$ (resp. $\tau = 0$), il existe une constante $C = C(\tau, m_0, \mu_0, M_0, M_1, F(0))$ (resp.$C = C(m_0, \mu_0, M_0, M_1, F(0), \| \nabla v_0 \|_\infty)$) telle que

$$| v(t_1, x) - v(t_0, x_0) | \leq C(| x - x_0 |^{2\gamma} + | t - t_0 |^\gamma) \qquad (14)$$

pour tout $\tau \leq t_0 < t_1 \leq T, x_0, x \in \mathbb{R}^N$.

On établira notre résultat en adaptant ceux de [Kr], [G], reliant le module de continuité en t, de la solution classique d'une équation parabolique linéaire, à son module de continuité en x. Ces derniers résultats ne peuvent être directement appliqués dans notre cas: dans l'équation de $(PC)_\alpha$ intervient $| \nabla v |^2$ et au moins dans le cas $N \geq 2$

l'on n'a pas d'estimation uniforme du gradient; également nous cherchons une estimation indépendante de α vérifiant (4), ce que ne nous fournit pas, même dans le cas $N = 1$, les résultats de [Kr] ou [G]. Notre adaptation consiste alors à faire des chois différents des fonctions et des opérateurs utilisés dans la preuve de [G] en exploitant le terme $| \nabla v |^2$, et à s'assurer que le module de continuité trouvé et les constantes intervenant sont indépendantes de la fonction paramètre α.

Preuve.

D'après le Théorème 1, il existe $C_0 = C_0(\tau, m_0, M_0, M_1, F(0))$ (resp. $C_0(m_0, M_0, M_1, F(0), \| \nabla v_0 \|_\infty)$) tel que

$$| v(t,x) - v(t,x_0) | \leq C_0 \, | x - x_0 |^{2\gamma} \tag{15}$$

pour tout $\tau \leq t \leq T, x_0, x \in \mathbb{R}^N$. Il suffit donc de montrer qu'étant donné $x_0 \in \mathbb{R}^N, \tau \leq t_0 \leq t_1 \leq T$, on a

$$| v(t_1,x_0) - v(t_0,x_0) | \leq C_1 \, | t_1 - t_0 |^{\gamma} \tag{16}$$

où C_1 ne dépend pas de x_0, t_0, t_1.

Soient $\rho > 0, C_2 > 0$ des constantes qui seront choisies par la suite. Posons

$$\begin{aligned}
&R =]t_0, t_1[\times B(x_0, \rho), \\
&s = \sup_{t_0 \leq t \leq t_1} | v(t,x_0) - v(t_0,x_0) |, \\
&v_\pm(t,x) = C_2(1 + 2s\rho^{-2})(t - t_0) + s\rho^{-2} \\
&| x - x_0 |^2 + C_0\rho^{2\gamma} \pm (v(t,x) - v(t_0,x_0)).
\end{aligned}$$

On a

$$v_{\pm,t} = \alpha(v)\Delta v_\pm \pm \nabla v_\pm \left(\nabla v_\pm - 4s\rho^{-2}(x - x_0)\right) + f_\pm,$$

avec

$$f_\pm = C_2(1 + 2s\rho^{-2}) \pm 4s^2\rho^{-4}(x - x_0)^2 \pm F(v) - 2\alpha(v)N\, s\rho^{-2}.$$

D'autre part

$v_\pm(t,x) \geq C_0\rho^{2\gamma} \pm (v(t_0,x) - v(t_0,x)) \geq 0 \quad \forall x \in B(x_0,\rho).$
$v_\pm(t,x) \geq s + C_0\rho^{2\gamma} \pm (v(t,x) - v(t_0,x_0)) \geq 0 \quad \forall (t,x) \in [t_0,t_1] \times \partial B(x_0,\rho).$
$f_\pm \geq C_2 - | F(v) | + 2s\rho^{-2}(C_2 - 2s - \mu_0 N)$ sur R.

Choisissant

$$C_2 > \max\left(F(o) + M_0M_1, 4M_0 + N\mu_0\right),$$

on a $f_\pm \geq 0$ sur R, d'où par principe du maximum $v_\pm \geq 0$ sur R. En particulier

$$\pm\left(v(t,x_0) - v(t_0,x_0)\right) \leq C_2(1 + 2s\rho^{-2})(t - t_0) + C_0\rho^{2\gamma}.$$

d'où

$$s \leq C_2(1 + +2s\rho^{-2})(t_1 - t_0) + C_0\rho^{2\gamma}.$$

Choisissant

$$\rho = 2\left(C_2(t_1 - t_0)\right)^{1/2}$$

on obtient

$$s \leq 2\left(C_2(t_1 - t_0) + 2^{2\gamma}C_0C_2^\gamma(t_1 - t_0)^\gamma\right)$$

d'où (16) avec $C_1 = 2\left(C_2T^{1-\gamma} + 2^{2\gamma}C_0C_2^\gamma\right)$.

■

3 Solutions de $(PC)_\alpha$

Dans cette section on donne un résultat d'existence, d'équicontinuité d'une famille $(v^\alpha)_\alpha$ de solution de viscosité $(PC)_\alpha$ et sa convergence vers l'unique solution de viscosité du problème $(PC)_0$ quand la fonction paramètre α tend vers 0.

Rappelons qu'une solution de viscosité de $(PC)_\alpha$ (cf. [CIL], [Ba]) est une fonction $v \in \mathcal{C}(\bar{Q})$ avec $v(0,x) = v_0(x)$ sur $\mathbb{R}^N$, vérifiant

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Pour toute fonction } \varphi \text{ de classe } \mathcal{C}^2(Q) \text{ on a :}\\ \frac{\partial\varphi}{\partial t}(t,x) - \alpha(v(t,x))\Delta\varphi(t,x) - \mid \nabla\varphi(t,x)\mid^2 - F(v(t,x)) \leq 0\\ (\text{ resp. } \geq 0) \text{ en tout point } (t,x) \in Q \text{ où } (v-\varphi) \text{ atteint}\\ \text{un maximum (resp. minimum) local.}\end{array}\right. \tag{17}$$

Lorsque $\alpha \equiv 0$, il existe une unique solution de viscosité v^0 de $(PC)_0$ (cf. [S]). Dans le cas $\alpha \not\equiv 0$, nous ignorons s'il y a ou non unicité d'une solution de viscosité de $(PC)_\alpha$, mais nous prouvons le résultat suivant:

Théorème 4. *Il existe une famille $(v^\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ de fonctions continues sur $\bar{Q}$ telle que*
i) *(v^α) est une solution de viscosité de $(PC)_\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$*
ii) *$(v^\alpha) \longrightarrow v^0$ dans $C(\bar{Q})$ quand $\alpha \longrightarrow 0$ au sens précisé dans la section 1.*

Preuve.
On considère d'abord le cas $N = 1$. On approxime v_0, F, α de la manière suivante. On se donne $\rho \in \mathcal{D}(\boldsymbol{R}), \rho(x) = \rho(-x), supp\rho \subset [-1,+1], \int \rho(x)dx = 1$. On pose

$$v_{0,n} = \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n}(v_0 * \rho_n), \quad \text{où } \rho_n(x) = n\rho(nx), \tag{18}$$

on évidement $v_{0,n} \in C^\infty(\boldsymbol{R})$,

$$\begin{cases} \frac{1}{n} \leq v_{0,n} \leq \sup v_0,\ v_{0,n} \longrightarrow v_0 \text{ dans } C(\boldsymbol{R}), \\ \\ \text{et si } \nabla v_0 \in L^\infty(\boldsymbol{R}), \quad \| \nabla v_0 \|_\infty \leq \| \nabla v_{0,n} \|_\infty . \end{cases} \tag{19}$$

D'autre part on pose

$$F_n(k) = F(0) + \int_0^k G_n(l)dl - \| G_n - G \|_\infty k, \tag{20}$$

où $G_n(k) = \int_0^\infty G(\lambda_n k + \frac{l}{n})\rho(l+1)dl$, avec

$$G(k) = \begin{cases} F'(k) \text{ si } 0 \leq k \leq M_0 \\ F'(M_0) \text{ si } k \geq M_0, \end{cases}$$

et

$$\lambda_n = 1 - \frac{2}{nM_0}.$$

On a $F_n \in C^\infty(\boldsymbol{R}), F_n(0) = F(0), F_n \leq F$, de telle sorte que la solution M_n de $M_n'(t) = F_n(M_n(t)), M_n(0) = \sup v_{0,n}$ vérifie $M_n(t) \leq M_0$ pour tout $t \in [0,T]$. On a aussi $F_n'(k) \leq G_n(k) \leq M_1$ pour $k \in [0, M_0]$ et $F_n \longrightarrow F$ dans $C([0, M_0])$. Enfin on pose

$$\alpha_n(k) = (1-\lambda_n)k + \int_0^\infty \alpha(\lambda_n k + \frac{l}{n})\rho(l+1)dl,$$

on a $\alpha_n \in \mathcal{C}^\infty([0,M_0])$, $\alpha_n'(k)+1 \geq m_0(\alpha)$ $\alpha_n > 0$ sur $]0,M_0]$ et $\alpha_n \longrightarrow \alpha$ dans $\mathcal{C}([0,M_0])$.

On est donc dans les hypothèses de la section 2, et il existe une unique solution $v_n \in \mathcal{C}^\infty(\bar{Q})$, des problèmes de Cauchy correspondants à $(v_{0,n}, F_n, \alpha_n)$; de plus d'après le Théorème 3, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est relativement compact dans $\mathcal{C}(Q)$. Puisque v_n est solution de viscosité des problèmes associés à $(v_{0,n}, F_n, \alpha_n)$, il est clair par passage à la limite que v^α vérifie (17) (cf. [Ba]).

Montrons que $v^\alpha \in \mathcal{C}(\bar{Q})$ avec $v^\alpha(0,x) = v_0(x)$ par une méthode classique de barrières. Considérons $\underline{v}_0, \bar{v}_0 \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ tel que $\underline{v}_0 \leq v_0 \leq \bar{v}_0$, $\underline{v}_{0,n}, \bar{v}_{0,n}$ les approximations correspondantes définies par (18), $\underline{v}_n, \bar{v}_n$ les solutions correspondant à $\left(\underline{v}_{0,n}, F_n\alpha_n\right)$, $(\bar{v}_{0,n}, F_n\alpha_n)$, respectivement.

Par principe de comparaison on a $\underline{v}_n \leq v_n \leq \bar{v}_n$; de plus d'après le Théorème 3, $(\underline{v}_n, \bar{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est relativament compact de $\mathcal{C}(\bar{Q})$; il existe donc une suite extraite (n_k) telle que $(\underline{v}_{n_k}, v_{n_k}, \bar{v}_{n_k}) \longrightarrow (\underline{v}, v^\alpha, \bar{v})$ dans $\mathcal{C}(\bar{Q}) \times \mathcal{C}(Q) \times \mathcal{C}(\bar{Q})$; on a $\underline{v} \leq v^\alpha \leq \bar{v}$ sur Q et donc

$$\underline{v}_0(x) \leq \liminf_{(t,x)\to(0,x)} v^\alpha(t,x) \leq \limsup_{(t,x)\to(0,x)} v^\alpha(t,x) \leq \bar{v}_0(x).$$

Puisque pour tout $R, \delta > 0$, il existe $\underline{v}_0, \bar{v}_0 \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ tel que $\underline{v}_0 \leq v_0 \leq \bar{v}_0$ sur $\mathbb{R}$ et $\underline{v}_0 - \bar{v}_0 \leq \delta$ sur $[-R,+R]$, on a a bien le résultat énoncé. En fait ce raisonnement, montre que v^α est valeur d'adhérence de (v_n) dans $\mathcal{C}(\bar{Q})$.

Enfin considérons une suite $(\alpha^j)_{j\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{A}$ telque $\alpha^j \longrightarrow 0$ dans $\mathcal{C}([0,M_0])$ et $m_0(\alpha^j) \geq m_0 > 0$. Montrons que $v^{\alpha^j} \longrightarrow v^0 \in \mathcal{C}(\bar{Q})$. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, il existe d'aprés le rèsultat précédent, $n_j \geq j$ tel que $| v^{\alpha_j} - v^{\alpha^j_{n_j}} | < \frac{1}{j}$ sur $[0,T] \times [-j,+j]$.

Puisque $\alpha^j_{n_j} \longrightarrow 0$ dans $\mathcal{C}([0,M_0])$ et $m_0\left(\alpha^j_{n_j}\right) \geq m_0$, $\left(v^{\alpha^j_{n_j}}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ est relativement compact dans $\mathcal{C}(\bar{Q})$; en raisonnant comme ci-dessus, tout point d'accumulation est valeur d'adhérence dans $\mathcal{C}(\bar{Q})$ et solution de viscosité de $(PC)_0$; c'est à dire $v^{\alpha^j_{n_j}} \longrightarrow v^0$ dans $\mathcal{C}(\bar{Q})$. Donc $v^{\alpha^j} \longrightarrow v^0$ dans $\mathcal{C}(\bar{Q})$.

La preuve dans le cas $N \geq 2$ est identique; le seul problème est l'approximation de $\alpha \in \mathcal{A}$ par des fonctions $\alpha_n \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ vérifiant

$$m_0(\alpha_n) - \left(\sqrt{2(N-1)}+1\right)\varepsilon(\alpha_n) \geq m_0 > 0.$$

Pour cela notons pour $\delta, \eta > 0$

$$\alpha_\delta(k) = \alpha(k) + \delta k, \quad \psi_\delta(k) = \frac{k^{1/2}\alpha'_\delta(k)}{\sqrt{\alpha_\delta(k)}} = 2k^{1/2}\frac{d}{dk}\sqrt{\alpha_\delta(k)}.$$

$$\begin{cases} \psi_{\delta,\eta} = \psi_\delta * \rho_\eta + \gamma_\delta(\eta) \\ \text{avec } \gamma_\delta(\eta) = \| \psi_\delta * \rho_\eta - \psi_\delta \|_{L^\infty([0,M_0]} \quad \text{et} \quad \rho_\eta(x) = \frac{1}{\eta^N}\Pi_{i=1}^N \rho(\frac{x_i}{\eta}) \end{cases}$$

$$\alpha_{\delta,\eta}(k) = \left(\int_0^k \frac{\psi_{\delta,\eta}(r)}{2r^{1/2}}dr\right)^2 = k\left(\int_0^1 \psi_{\delta,\eta}(kr^2)dr\right)^2.$$

Puisque $\psi_{\delta,\eta} \geq \psi_\delta$ sur $[0, M_0]$, on a $\alpha_{\delta,\eta} \geq \alpha_\delta > 0$ sur $]0, M_0]$. Puisque $\psi_{\delta,\eta} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+)$, on a aussi $\alpha_{\delta,\eta} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+)$. La fonction ψ_δ est continue sur $\mathbb{R}^+$ avec $\psi_\delta(0) = (\alpha'(0) + \delta)^{1/2}$ et donc

$$\psi_{\delta,\eta} \longrightarrow \psi_\delta \text{ dans } \mathcal{C}(\mathbb{R}^+) \text{ quand } \eta \longrightarrow 0 \text{ pour tout } \delta > 0;$$

ainsi

$$\alpha_{\delta,\eta} \longrightarrow \alpha_\delta \text{ dans } \mathcal{C}(\mathbb{R}^+) \text{ quand } \eta \longrightarrow 0 \text{ pour tout } \delta > 0.$$

On a

$$\alpha'_{\delta,\eta} = \frac{\psi_{\delta,\eta}\sqrt{\alpha_{\delta,\eta}}}{k^{1/2}} \geq \frac{\psi_\delta\sqrt{\alpha_\delta}}{k^{1/2}} = \alpha'_\delta \geq \alpha'$$

et donc $m_0\left(\alpha'_{\delta,\eta}\right) \geq m_0(\alpha')$. D'un autre côté

$$\frac{\alpha'^2_{\delta,\eta}(k)k}{\alpha_{\delta,\eta}(k)} = \psi^2_{\delta,\eta} \leq (\psi_\delta + 2\gamma_\delta(\eta))^2.$$

d'où

$$\varepsilon(\alpha_{\delta,\eta} \leq \left(\varepsilon(\alpha)^{1/2} + \delta^{1/2} + \gamma_\delta(\eta)\right)^2.$$

Il existe donc α_n dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+) \cap \mathcal{A}$ vérifiant (4) telle que $\alpha_n \longrightarrow \alpha$ dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}^+)$.

■

Bibliographie

[AV] D. G. Aronson, J. L. Vázquez, *The porous medium equation as a finite-speed approximation to a Hamilton Jacobi equation.* Ann. Inst. Henri Poincaré, ol. 4, n$^{\underline{o}}$ 3, 1987, 203-230.

[B] Ph. Bénilan, *Evolution equation and accretive operators*, Spring 1981, University of Kentucky, Lecture Notes taken by S. Lenhardt.

[Ba] G. Barles, *Solution de viscosité des équations d'Hamilton-Jacobi*, Mathématiques et Application, Springer, 1994.

[CIL] M. G. Grandall, H. Ishii, P. L. Lions, *User's guide to viscosity solutions of second order* P.D.E. Bull. Amer. Math. Soci. 27 (1992), 1-67.

[G] B. H. Gilding, *Hölder continuity of solutions of parabolic equations*, J. Lond. Math. Soci. (2), 13 (1976), 103-106.

[Kr] S. N. Kruzhkov, *Results concerning the nature of the continuity of solutions of parabolic equations and some of their applications*, Math. Zametki, 6 (1969), 97-108 (Transl. Math. Notes 6 (1969), 517-523).

[LSU] O. A. Ladyzenskya, V. A. Solonnikov, N. N. Ural'ceva, *Linear and quasilinear equations of parabolic type.* Trans. Math. Monos. vol. 23, Amer. Math. Soci., Providence B. I. 1968.

[LSV] P. L. Lions, P. E. Souganidis, J. L. Vázquez, *The relation between the porous medium equation and the Eikonal equations in several space dimension*, Rev. Math. Iberoam, vol. 3, n$^{\underline{o}}$ 3 (1987), 275-310.

[Ma] P. Marcati, *A result on hyperbolic aspect in the theory of porous media*, Bolle. Math. Ita. (7), 3.A (89), 69-75.

[S] P. E. Souganidis, *Existence of viscosity solution of Hamilton-Jacobi equations*, J. Diff. Equa. 56, 345-390 (1985).

Laboratoire de Mathématiques
URA CNRS 741
Université de Franche-Comté
Route de Gray, 25030
Besançon cedex
France

Recibido: 21 de Abril de 1995