CHRISTIANE HESPEL

Approximation de séries formelles par des séries rationnelles

RAIRO – Informatique théorique, tome 18, nº 3 (1984), p. 241-258.
<http://www.numdam.org/item?id=ITA_1984__18_3_241_0>

R.A.I.R.O. Informatique théorique/Theoretical Informatics
(vol. 18, n° 3, 1984, p. 241 à 258)

APPROXIMATION DE SÉRIES FORMELLES PAR DES SÉRIES RATIONNELLES (*)

par Christiane HESPEL [1]

Communiqué par J. BERSTEL

Résumé. — *Étant donnée une série formelle en variables non commutatives sur un alphabet fini X, à coefficients dans un corps K, nous proposons une construction de série rationnelle approximante au sens de la valuation X-adique, et qui soit de rang minimal.*

Abstract. — *We consider a formal power series in non commutative variables over a finite alphabet X, with coefficients in a field K. We give a construction of a rational power series approximant in the sense of the X-adic valuation, which is of minimal rank.*

INTRODUCTION

La notion de série formelle en variables non commutatives a été introduite par M. P. Schutzenberger [28] en liaison avec divers sujets d'informatique théorique tels que les automates et les langages formels.

Rappelons qu'on appelle série formelle en variables non commutatives sur X, à coefficients dans un corps K, toute application :

$$s : X^* \to K,$$

qui associe à tout mot f de X^*, une multiplicité ou coefficient (s, f) dans K.

Dans la théorie des séries formelles, comme en théorie des langages, il est naturel de s'intéresser en priorité aux objets construit par des procédés finis tels que : expression rationnelle, K-automate de type fini, système d'équations algébriques.

Un certain nombre de problèmes issus de la théorie des langages tels que les langages avec coefficients d'ambiguïté, les problèmes arithmétiques de la théorie des langages [2], l'étude des processus stochastiques [12], ont recours à l'utilisation des séries formelles en variables non commutatives.

De même, les séries formelles sont un outil utile pour la résolution de problèmes combinatoires tels que l'énumération des graphes planaires [6], les

(*) Reçu en juin 1982, révisé en juin 1983.

[1] I.N.S.A. Rennes, 20, avenue des Buttes-de-Coësmes, 35043 Rennes Cedex.

permutations et les réarrangements dans les monoïdes [4] et l'étude des systèmes dynamiques [10].

Deux principales familles de séries formelles ont été étudiées, (*voir* [27]) : les séries rationnelles [30] ainsi que leur sous-famille formée des séries reconnaissables [8] et les séries algébriques [5].

Les séries rationnelles ont été introduites et développées d'abord par M. P. Schutzenberger, montrant ainsi que certaines propriétés des séries rationnelles en une variable, trouvent leur bonne généralisation en variables non commutatives.

Dans un premier temps, M. P. Schutzenberger généralise le théorème de Kleene [20] qui établissait l'équivalence des langages reconnaissables et rationnels, en démontrant l'équivalence de la reconnaissabilité et de la rationalité des séries formelles propres [29]. Il montre ainsi le rôle fondamental joué, pour l'étude des séries formelles, par les représentations matricielles du monoïde libre, notamment les décompositions en représentations irréductibles, obtenant ainsi des résultats fins sur la croissance des coefficients [31].

M. Fliess caractérise, grâce aux matrices de Hankel, les séries rationnelles [9] puis celles à coefficients positifs [12].

D'autre part, G. Jacob généralise, à l'aide des représentations matricielles, la notion de boucle dans les automates finis [19], ce qui lui permet de résoudre des problèmes de décidabilité de la finitude de l'ensemble des coefficients des séries rationnelles.

C. Reutenauer caractérise les séries rationnelles par leur algèbre syntactique : une série est rationnelle si et seulement si son algèbre syntactique est de dimension finie [24]. De plus, il définit la notion de variété de séries rationnelles, généralisant ainsi les variétés de langages au sens de S. Eilengerg [7].

Enfin, certaines propriétés arithmétiques des séries rationnelles déjà étudiées dans le cas d'une variable [26, 1], peuvent être généralisées aux séries formelles à coefficients entiers en variables non commutatives [22, 19, 25].

La famille des séries algébriques a été introduite par M. P. Schutzenberger [28] : les séries algébriques sont définies comme étant les composantes de la solution d'un système d'équations algébriques propres.

Les langages algébriques apparaissent alors comme support de telles séries, qui sont solutions d'un système à coefficients entiers positifs ou nuls [23].

M. Nivat étudie systématiquement la nature de ces solutions [23] mais surtout, il montre que l'étude des séries algébriques dépend de façon fondamentale de l'étude des transductions rationnelles de séries formelles.

A la question : l'image par une transduction rationnelle (resp. algebrico-rationnelle) d'une série rationnelle (resp. algébrique) est-elle une série de même nature, M. Fliess répond partiellement [9] : il montre que si le semi-anneau des coefficients est, soit totalement ordonné de plus petit élément zéro, soit un corps ou un anneau de Krull valués complets, l'image par transduction rationnelle d'une série rationnelle, est rationnelle. Il établit, d'autre part que l'image par transduction algebrico-rationnelle projetée (resp. constructible projetée) d'une série algébrique projetée (resp. constructible projetée) est une série de même nature, et G. Jacob, grâce à la notion de transduction rationnelle régulée, répond à la question posée [16] : il montre que l'image par transduction rationnelle régulée (resp. algébrique régulée) d'une série rationnelle (resp. algébrique) est une série rationnelle (resp. algébrique).

De plus, en établissant la réciproque du théorème de Shamir, G. Jacob fournit une nouvelle caractérisation des séries algébriques [16].

Enfin, W. Wechler observe que ce résultat peut encore s'énoncer ainsi : le langage reconnu par un automate à pile est le support d'une série formelle algébrique et réciproquement [32]. Les résultats obtenus par l'utilisation des transductions rationnelles régulées peuvent être caractérisés tout aussi bien par des notions d'automate à pile : automate à pile « ε-nilpotent » [15], technique reprise et généralisée par W. Kuich dans la notion d'automate à plile « cycle-free » pour l'étude des familles abstraites de séries formelles, généralisant l'étude des « F.A.L. » en théorie des langages [21].

Mais l'étude des séries formelles en variables non commutatives est aussi en lien étroit avec l'algèbre différentielle, ce que montrent notamment les travaux de M. Fliess sur les systèmes analytiques [10, 14].

Le point de départ de cet article est le théorème suivant de M. Fliess [13], qui pose la question d'une approximation par des polynômes ou des séries rationnelles :

THÉORÈME *Toute fonctionnelle causale analytique peut être uniformément approchée par des fonctionnelles régulières (i. e. dont la série génératrice est rationnelle).*

Le propos de cet article est de rechercher une approximation de séries formelles, par des séries rationnelles au sens de la valuation X-adique, qui soit meilleure que celle offerte par des polynômes.

La trame de l'article est la suivante :

Après l'introduction des notations et des généralités (section 1), où nous rappelons en particulier la caractérisation des séries rationnelles par une propriété de leur rang, nous proposons un majorant du rang minimum d'un polynôme approchant une série formelle donnée à un ordre donné (section 2-2). Nous montrons (section 3-3) que ce majorant peut être atteint et que, de plus, pour un ordre donné, il existe des séries formelles telles que le rang de toute série rationnelle approximante ne puisse être inférieur à celui des polynômes approchant ces séries.

Toutefois, nous pensons qu'en dépit de l'exemple étudié en section 2-3, il existe de nombreuses séries formelles pour lesquelles on puisse trouver un approximant rationnel de rang inférieur à celui des approximants polynomiaux et nous proposons des classes de telles séries (section 2-5).

De manière générale, nous calculons le rang minimal d'une série rationnelle approchant une série formelle donnée à un ordre donné (section 2-4) et nous en déduisons une construction de cet approximant rationnel (section 2-6).

I. RANG D'UNE SÉRIE RATIONNELLE

Nous rappelons quelques notations et résultats connus sur les séries rationnelles [17].

1. Séries rationnelles

Soit K un corps et X un alphabet fini de cardinal n; une série formelle sur X est une application s du monoïde libre X^* dans K, et est notée comme une somme formelle :

$$s=\sum\{(s, f)f/f\in X^*\}.$$

Le coefficient du mot f dans la série s, est donc l'image (s, f) de f par l'application s, et le langage support de s est l'ensemble des mots de coefficient non nul.

Si nous notons $\mathrm{Supp}(s)$ le support de s, et $X^{<n}=\{f\in X^*$ tels que, la longueur de f, notée $|f|$, soit inférieure à $n\}$, alors l'ordre de s est l'unique entier $\mathcal{O}(s)$ tel que :

$$\text{et}\ \begin{cases} \mathrm{Supp}(s)\cap X^{<\mathcal{O}(s)}=\emptyset, \\ \mathrm{Supp}(s)\cap X^{<\mathcal{O}(s)+1}\neq\emptyset. \end{cases}$$

Nous dirons qu'une série formelle est propre si son support ne contient pas le mot vide. L'ensemble des séries propres forme un idéal I de l'agèbre $K\ll X\gg$ des séries formelles, vérifiant :

$$\bigcap_n I^n=\{0\}$$

et la topologie I-adique (ou X-adique) ainsi définie sur $K \ll X \gg$ est séparée [17].

Les séries formelles reconnaissables sont les séries reconnues par un K-automate matriciel de dimension finie, i. e. telles qu'il existe :

N, entier strictement positif;

γ, vecteur colonne de K^N;

λ, covecteur de dimension N sur K;

μ, représentation de X^* dans le monoïde des matrices carrées de dimension N sur K;

vérifiant $s=\sum\{\lambda(\mu f)\gamma . f/f \in X^*\}$ [8].

Étant donnée une série formelle propre, il y a équivalence entre la reconnaissabilité et la rationalité [29].

Dans le cas particulier où $X=\{t\}$, alors une série rationnelle $s=\sum_{i \in N} s_i t^i$ peut s'écrire comme le quotient de deux polynômes.

2. Condition sur le rang pour qu'une série formelle soit rationnelle

Notons $K\langle K \rangle$ le sous-ensemble de $K \ll X \gg$ formé des polynômes ou séries de support fini.

En remarquant que toute action à gauche $*$ de X^* sur un K-espace vectoriel E peut être prolongée en une action de $K\langle X \rangle$ à gauche sur E, E se trouve donc muni d'une structure de $K\langle X \rangle$-module à gauche. On appellera K-module sériel à gauche sur X, la donnée d'un triplet $\mathscr{E}=(E, C, l)$ tel que :

E est un $K\langle X \rangle$ module à gauche;

C est un élément de E appelé vecteur initial;

l est une application linéaire de E dans K.

$\mathscr{E}$ définit alors la série formelle $s_{\mathscr{E}}=\sum\{l(f . C) f/f \in X^*\}$.

Une série formelle reconnaissable est donc une série qui peut être définie par un K-module sériel de dimension finie.

A une série formelle s, associons sa matrice de Hankel $H(s)$, indicée par $X^* \times X^*$, définie par $H(s)_{u,\,v}=(s, uv)$ pour u et v dans X^*.

Les colonnes de $H(s)$ s'identifient canoniquement aux séries résiduelles à droite de s, et dualement, les lignes de $H(s)$ s'identifient canoniquement aux séries résiduelles à gauche de s.

Nous définissons le rang de s comme égal au rang de $H(s)$, noté $\operatorname{rg}(s)$. Cette notion de rang permet de caractériser les séries rationnelles : [11].

THÉORÈME *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une série* $s \in K \ll X \gg$ *soit rationnelle est qu'elle soit de rang fini N. Elle est alors reconnue par un K-automate matriciel :*

$$A=(N, \gamma, \lambda, \mu) \text{ de dimension } N.$$

De plus, on peut trouver des mots $\{g_i\}^N$ *et* $\{d_j\}^N$ *de longueur inférieure à N, tels que l'application* χ *de* X^* *dans* $K^{N \times N}$ *définie par :*

$$(\chi^{(f)})_{i,\, j}=(s,\, g_i\, f\, d_j),$$

vérifie $\chi^{(f)}=\chi^{(1)}\mu(f)$ *et que* $\chi^{(1)}$ *soit inversible.*

Une version algorithmique de ce théorème a été présentée par A. Cardon et M. Crochemore [3].

II. RECHERCHE D'UNE SÉRIE RATIONNELLE APPROXIMANTE DE RANG MINIMAL

1. Énoncé du problème

Soient s une série formelle, k et r deux entiers naturels.

Notons $v_k(s)=\{\text{séries } g \text{ rationnelles telles que } \mathcal{O}(g-s)\geqq k\}$ et $\mathrm{App}(k, r, s)=\{\text{séries } g \text{ de } v_k(s) \text{ telles que } \mathrm{rg}(g)\leqq r\}$.

Alors, nous poserons les problèmes du calcul du plus petit entier $r=\rho(s, k)$ tel que $\mathrm{App}(k, r, s)$ soit non vide, de la construction d'une série rationnelle approximante g de rang $\rho(s, k)$ et de la comparaison de $\rho(s, k)$ avec le rang d'un polynôme approximant.

2. Un majorant M du plus petit rang d'un approximant polynomial

Notons $E(l)$ la partie entière d'un nombre réel l.

PROPOSITION 1 : *Soit n le cardinal de l'alphabet fini X. Un majorant du rang minimum d'un polynôme g approchant s à à l'ordre k est :*

$$M=\frac{2-n^{E((k+1)/2)}-n^{E(k/2)}}{1-n}.$$

Preuve : Ordonnons les lignes et les colonnes de $H(s)$, par les mots qui les indicent rangés par longueur croissante et, pour une longueur donnée, dans l'ordre lexicographique.

Notons $H_{\leqq p,\, \leqq q}(s)$ la matrice de Hankel de s restreinte aux lignes d'indices u tels que $|u|\leqq p$ et aux colonnes d'indices v tels que $|v|\leqq q$.

Comme g doit approcher s à l'ordre k, $(\mathcal{O}(s-g) \geqq k)$, alors les matrices de Hankel de s et g restreintes aux mots de longueur inférieure à k, doivent coïncider.

Choisissons g égal au polynôme de degré $k-1$, obtenu en tronquant s. Deux cas sont à distinguer selon la parité de k.

Premier cas : Si $k=2p+1$*;* alors $\operatorname{rg}(g)=\operatorname{rg}(H_{\leqq 2p,\ \leqq 2p}(s))$.

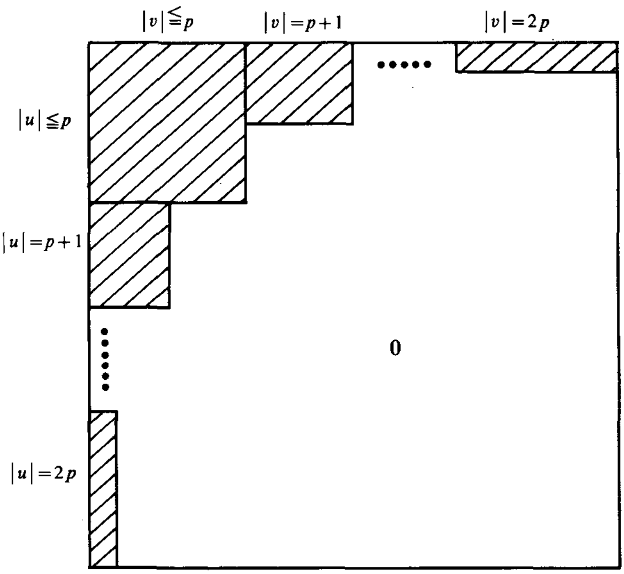

Schéma 1. — $H_{\leqq 2p,\ \leqq 2p}(g)$.

Donc, $\operatorname{rg}(g) \leqq \operatorname{rg}$ des $(1+\ldots+n^p)$ premières colonnes $+ \operatorname{rg}$ des $(n^{p+1}+\ldots+n^{2p})$ dernières colonnes.

Soit :

$$\operatorname{rg}(g) \leqq (1+\ldots+n^p)+(1+\ldots+n^{p-1}).$$

Deuxième cas : Si $k=2p$*;* alors $\operatorname{rg}(g)=\operatorname{rg}(H_{\leqq 2p-1,\ \leqq 2p-1}(s))$.

Donc, $\operatorname{rg}(g) \leqq \operatorname{rg}$ des $(1+\ldots+n^{p-1})$ premières colonnes $+ \operatorname{rg}$ des $(n^p+\ldots n^{2p-1})$ dernières colonnes.

Soit :

$$\operatorname{rg}(g) \leqq (1+\ldots+n^{p-1})+(1+\ldots+n^{p-1}).$$

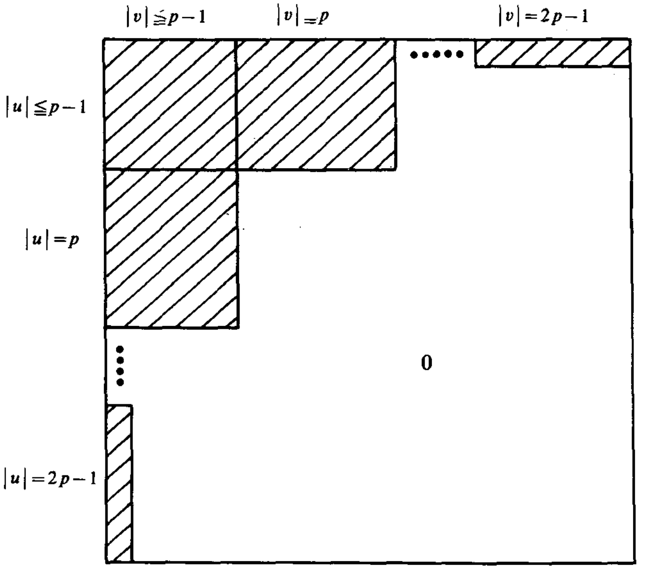

Schéma 2. — $H_{\leqq 2p-1, \leqq 2p-1}(g)$.

3. Existence de série formelle telle que M soit à la fois le plus petit rang d'un approximant polynomial et rationnel, à l'ordre k

Deux cas sont à distinguer suivant la parité de k.

Premier cas : $k = 2p+1$.

Soit la série s_k définie par $(s_k, f) = 1$ pour $f = u^2$ et $|f| \geqq 2p$, $(s_k, f) = 0$ sinon.

Représentons la matrice de Hankel de s_k, restreinte aux mots f tels que $|f| < k$ (schéma 3).

Il est clair que, quel que soit le prolongement des colonnes de ce tableau, le rang ne pourra être en aucun cas, inférieur à

$$(1 + \ldots + n^p) + n^{p-1} + \ldots + n + 1 = M.$$

Deuxième cas : $k = 2p$.

Soit la série s_k définie par $(s_k, f) = 1$ pour $|f| \geqq 2p-1$ et $f = xu^2$ (tels que $x \in X$ $u \in X^*$), $(s_k, f) = 0$ sinon.

Représentons la matrice de Hankel de s_k, restreinte aux mots f, tels que $|f| < k$ (schéma 4).

Comme dans le premier cas, on voit que le rang ne pourra être inférieur à $(1 + \ldots + n^{p-1}) + n^{p-1} + \ldots + n + 1 = M$.

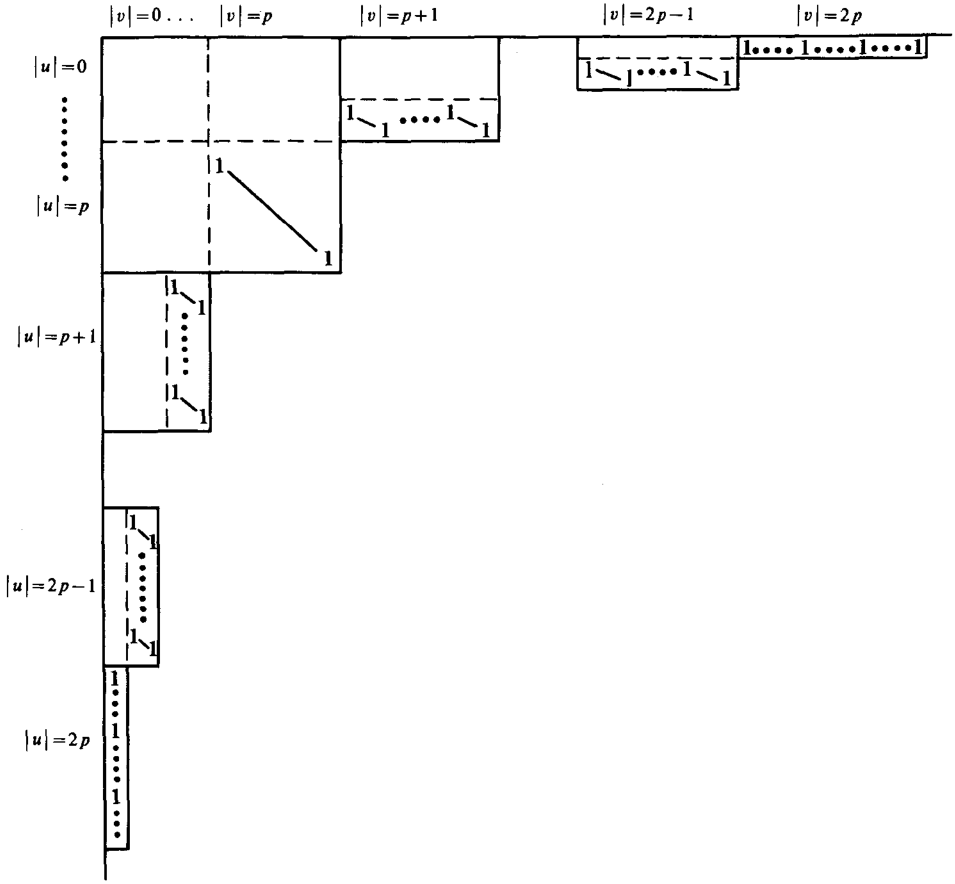

Schéma 3. — $H_{<2p+1,\ <2p+1}(s_{2p+1})$.

4. Calcul du plus petit rang d'un approximant rationnel

Énonçons quelques remarques utiles pour la recherche d'un approximant rationnel.

Proposition 2 : *Soit* $p \in \mathbb{N}^*$; *si les matrices* $H_{\leqq p,\ \leqq p}(s)$ *et* $H_{\leqq p,\ \leqq p+1}(s)$ *ont même rang r, alors il existe une et une seule série rationnelle g vérifiant :*

(i) $\operatorname{rg}(g)=r$;

(ii) $\mathcal{O}(s-g) \geqq 2p+2$.

De plus, toute série rationnelle g vérifiant $\mathcal{O}(s-g) \geqq 2p+1$ *est de rang* $\geqq r$.

Preuve : Soit $\mathcal{D}$ l'espace vectoriel engendré par les colonnes de $H_{\leqq p,\ \leqq p}(s)$ et soit D une base de $\mathcal{D}$.

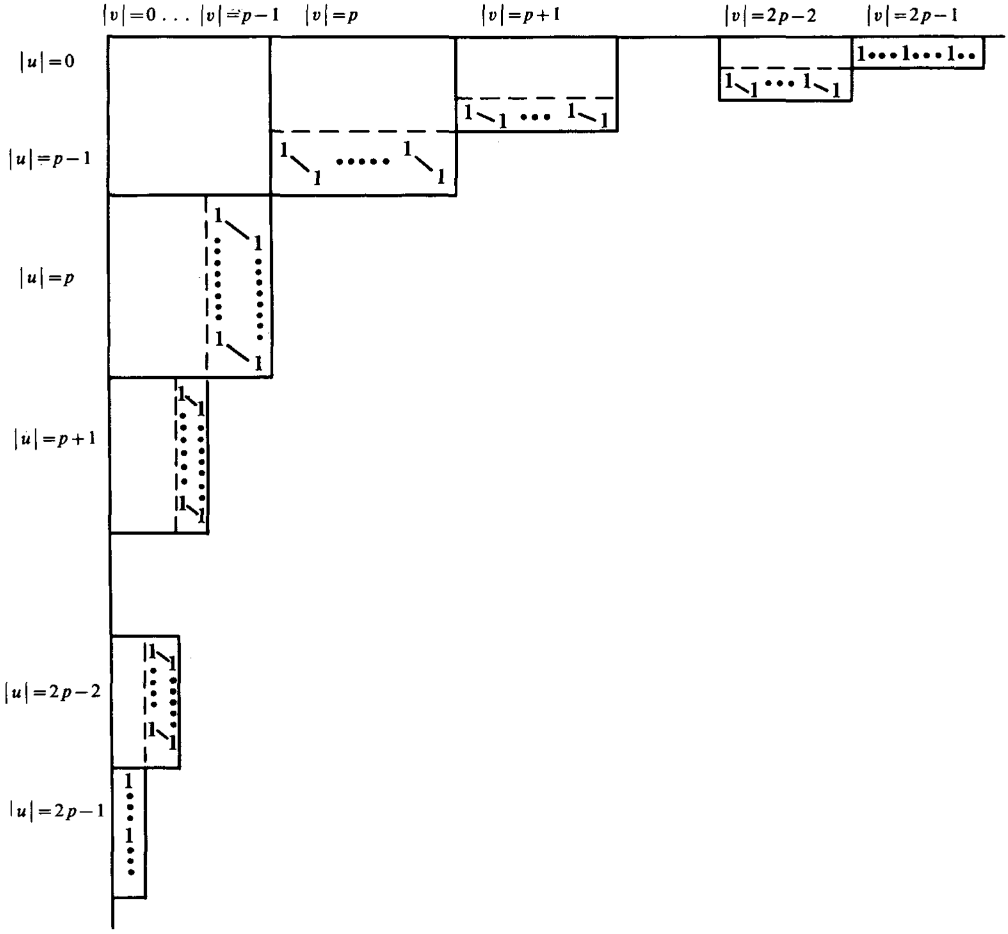

Schéma 4. — $H_{<2p,\ <2p}(s_{2p})$.

$\forall x \in X$, et $\forall v \in X^p$, la colonne d'indice xv de $H_{\leqq p,\ \leqq p+1}(s)$ est combinaison linéaire unique des vecteurs de D.

Cette construction se prolonge en une unique action à gauche de X^* sur $\mathscr{D}$, donc en un unique X-module sériel à gauche.

La série reconnue par ce X-module sériel vérifie :

$$H_{\leqq p,\ \leqq p+1}(s) = H_{\leqq p,\ \leqq p+1}(g).$$

Corollaire 1 : *Si les colonnes d'une matrice de Hankel, d'indice v_j tel que $| v_j | = j$ sont toutes combinaisons linéaires des colonnes d'indices $v_{<j}$ tel que*

$|v_{<j}|<j$, alors les colonnes d'indice $v_{>j}$ tel que $|v_{>j}|>j$, sont aussi combinaisons linéaires des colonnes d'indice $v_{<j}$.

COROLLAIRE 2 : *Si certaines colonnes d'une matrice de Hankel, d'indice v_{j_0} tel que $|v_{j_0}|=j$ sont combinaisons linéaires des colonnes d'indice $v_{<j}$ tel que $|v_{<j}|<j$, alors les colonnes d'indice xv_{j_0} sont combinaisons linéaires des colonnes d'indice $xv_{<j}$, quel que soit x dans X.*

COROLLAIRE 3 : *Si des colonnes d'une matrice de Hankel d'indice v_{j_0} tel que $|v_{j_0}|=j$, sont combinaisons linéaires de certaines colonnes d'indice $v_{\leqq j_1}$ tel que $|v_{\leqq j_1}|\leqq j$, alors les colonnes d'indice xv_{j_0} sont combinaisons linéaires des colonnes d'indice $xv_{\leqq j_1}$, quel que soit x dans X.*

PROPOSITION 3 : *Soit :*

$$j_i(s)=rang\,(H_{\leqq k-1-i,\ \leqq i}(s))-rang\,(H_{\leqq k-1-i,\ \leqq i-1}(s))$$

pour $i=1$ à $k-1$ et soit $j_0(s)=rang\,(H_{\leqq k-1,\ \leqq 0}(s))$.

Alors, le rang minimal d'une série rationnelle g approchant s à l'ordre k est $\rho(s,k)=j_0(s)+\ldots+j_{k-1}(s)$.

Preuve : Explicitons une construction de $H_{\leqq\infty,\ \leqq k-1}(g)$ obtenue par prolongement de la matrice de Hankel de s restreinte aux mots de longueur inférieure ou égale à $k-1$.

Choix des colonnes libres

Par analogie aux notations adoptées pour $H_{\leqq p,\ \leqq q}(s)$, notons :

$\mathscr{B}_{\leqq k-1,\ \leqq 0}$ le système de colonne libre extraite de $H_{\leqq k-1,\ \leqq 0}(s)$ et soit $\mathscr{B}_{\leqq k-1-i,\ \leqq 0}$ sa restriction à $H_{\leqq k-1-i,\ \leqq 0}(s)$;

$\mathscr{B}_{\leqq k-2,\ \leqq 1}$ le système de colonnes libres extraites de $H_{\leqq k-2,\ =1}(s)$, qui avec $\mathscr{B}_{\leqq k-2,\ \leqq 0}$ engendre $H_{\leqq k-2,\ \leqq 1}(s)$ et soit $\mathscr{B}_{\leqq k-2-i,\ \leqq 1}$ sa restriction à $H_{\leqq k-2-i,\ \leqq 1}(s)$.

$\mathscr{B}_{\leqq k-3,\ \leqq 2}$ le système de colonnes libres extraites de $X*\mathscr{B}_{\leqq k-3,\ \leqq 1}$, qui avec $\mathscr{B}_{\leqq k-3,\ \leqq 0}$ et $\mathscr{B}_{\leqq k-3,\ \leqq 1}$ engendrent $H_{\leqq k-3,\ \leqq 2}(s)$ ([2]).

[On note $X*\mathscr{B}_{\leqq p,\ \leqq q}$ le système de colonnes, d'indice xv où $x\in X$ et v indice des colonnes $\mathscr{B}_{\leqq p,\ \leqq q}$, extrait de $H_{\leqq p,\ =q+1}(s)$].

$\mathscr{B}_{\leqq 0,\ \leqq k-1}$ le système de colonnes libres extraites de $X*\mathscr{B}_{\leqq 0,\ \leqq k-2}$ qui, avec $\mathscr{B}_{\leqq 0,\ \leqq 0},\ldots,\mathscr{B}_{\leqq 0,\ \leqq k-2}$ engendrent $H_{\leqq 0,\ \leqq k-1}(s)$ ([2]).

([2]) Ceci est possible d'après le corolaire 3.

Et notons $\mathscr{C}_{\leqq k-i-1,\ \leqq i}$ le système des colonnes restantes de chaque bloc $H_{\leqq k-1-i,\ =i}(s)$.

Alors, à l'ordre des colonnes près, on peut représenter la restriction de la matrice de Hankel de s, aux mots de longueur inférieure ou égale à $k-1$, par le schéma suivant :

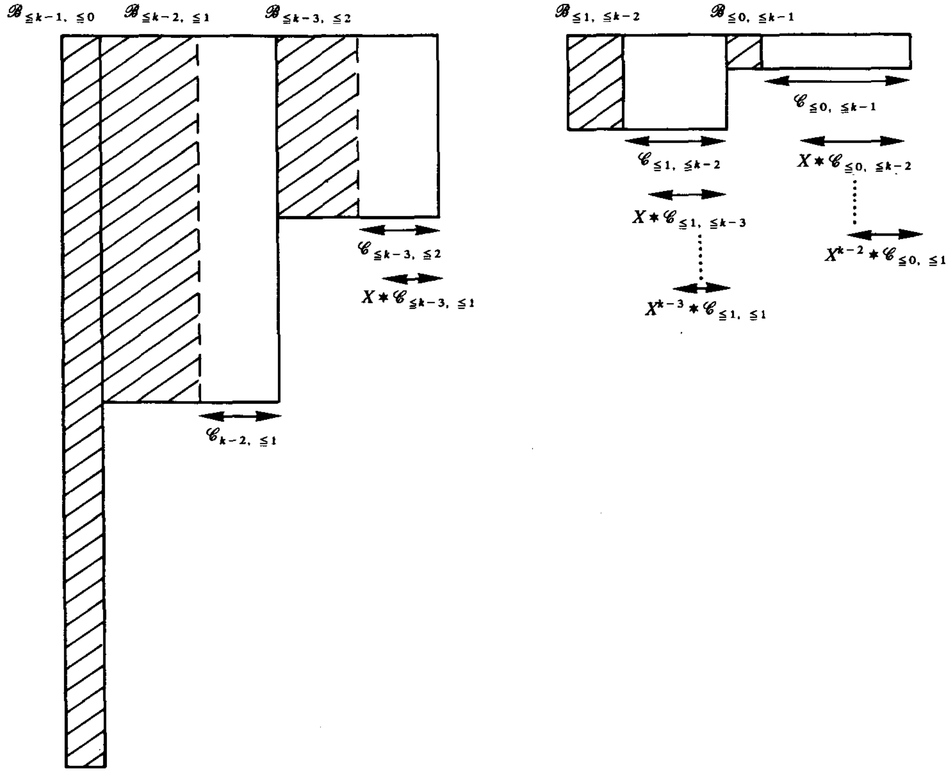

Schéma 5. — Restriction de $H_{\leqq k-1,\ \leqq k-1}(s)$ aux mots de longueur $\leqq k-1$.

Remarques (*cf.* corollaires 2 et 3) : Par construction, on a des chaînes d'inclusions :

$$\mathscr{B}_{\leqq k-2,\ \leqq 1} \subset X * \mathscr{B}_{\leqq k-2,\ \leqq 0},$$

$$\mathscr{B}_{\leqq k-3,\ \leqq 2} \subset X * \mathscr{B}_{\leqq k-3,\ \leqq 1} \subset X^2 * \mathscr{B}_{\leqq k-3,\ \leqq 0}.$$

$$\cdots$$

$$\mathscr{B}_{\leqq 0,\ \leqq k-1} \subset X * \mathscr{B}_{\leqq 0,\ \leqq k-2} \subset \cdots \subset X^{k-1} * \mathscr{B}_{\leqq 0,\ \leqq 0}.$$

De même :

$$\mathscr{C}_{\leqq k-3,\ \leqq 2} \supset X * \mathscr{C}_{\leqq k-3,\ \leqq 1},$$
$$\mathscr{C}_{\leqq 0,\ \leqq k-1} \supset X * \mathscr{C}_{\leqq 0,\ \leqq k-2} \supset \ldots \supset X^{k-2} * \mathscr{C}_{\leqq 0,\ \leqq 1}.$$

Par ailleurs, $\mathscr{B}_{\leqq k-1,\ \leqq 0}$ est réduit à la première colonne si $\mathcal{O}(s) \leqq k-1$. $\mathscr{B}_{\leqq 0,\ \leqq k-1}$ est au plus formé d'une colonne et donc $\mathscr{C}_{\leqq 0,\ \leqq k-1}$ est formé de $n^{k-1}-1$ colonnes au moins et rang $(\mathscr{B}_{\leqq k-1-i,\ \leqq i}) = j_i$.

Montrons que l'on peut « border » le tableau représenté par le schéma 5 en prolongeant les colonnes, de manière à préserver les relations de dépendance linéaire entre les colonnes.

Si $E \subset F$ notons par $E-F$, le complémentaire de F dans E.

— *Nous supposerons d'abord que* $\mathscr{B}_{\leqq 0,\ \leqq k-1}$ *n'est pas vide.*

(1) Prolongeons l'unique colonne de $\mathscr{B}_{\leqq 0, \leqq k-1}$ par des zéros de manière à définir $\mathscr{B}_{\leqq 1,\ \leqq k-1}$.

Alors, $\mathscr{C}_{\leqq 0,\ \leqq k-1} \div X * \mathscr{C}_{\leqq 0,\ \leqq k-2}$ est prolongé dans $H_{\leqq 1,\ \leqq k-1}(g)$ par linéarité.

Par conséquent :

$$X * \mathscr{B}_{\leqq 0,\ \leqq k-2} = (\mathscr{B}_{\leqq 0,\ \leqq k-1}) \cup (\mathscr{C}_{\leqq 0,\ \leqq k-1} \div X * \mathscr{C}_{\leqq 0,\ \leqq k-2})$$

est prolongé lui aussi dans $H_{\leqq 1,\ \leqq k-1}(g)$.

Ce qui signifie que $\mathscr{B}_{\leqq 1,\ \leqq k-2}$ est prolongé dans $H_{\leqq 2,\ \leqq k-2}(g)$ pour former $\mathscr{B}_{\leqq 2,\ \leqq k-2}$.

On poursuit le prolongement des colonnes libres : on suppose donc que :

$\mathscr{B}_{\leqq 1,\ \leqq k-2}$ a été prolongé pour former $\mathscr{B}_{\leqq 2,\ \leqq k-2}, \ldots$, etc.;

$\mathscr{B}_{\leqq k-3,\ \leqq 2}$ a été prolongé pour former $\mathscr{B}_{\leqq k-2,\ \leqq 2}$.

Alors, $\mathscr{C}_{\leqq k-3,\ \leqq 2} \div X * \mathscr{C}_{\leqq k-3,\ \leqq 1}$ est prolongé dans $H_{\leqq k-2,\ \leqq 2}(g)$ par linéarité.

Par conséquent, $X * \mathscr{B}_{\leqq k-3,\ \leqq 1}$ est prolongé dans $H_{\leqq k-2,\ \leqq 2}(g)$.

Ce qui signifie que $\mathscr{B}_{\leqq k-2,\ \leqq 1}$ est prolongé pour former $\mathscr{B}_{\leqq k-1,\ \leqq 1}$.

Enfin, puisque $\mathscr{B}_{\leqq k-1,\ \leqq 1}$ a été construit, alors on prolonge :

$$\mathscr{C}_{\leqq k-2,\ \leqq 1} \div X * \mathscr{C}_{\leqq k-2,\ \leqq 0} = \mathscr{C}_{\leqq k-2,\ \leqq 1}$$

dans $H_{\leqq k-1,\ \leqq 1}(g)$ par linéarité.

Par conséquent $X * \mathscr{B}_{\leqq k-2,\ \leqq 0}$ est prolongé dans $H_{\leqq k-1,\ \leqq 1}(g)$, ce qui signifie que $\mathscr{B}_{\leqq k-1,\ \leqq 0}$ est prolongé pour former $\mathscr{B}_{\leqq k,\ \leqq 0}$.

(2) Complétons la construction :

Le prolongement de $\mathscr{C}_{\leq k-2,\ \leq 1}$ détermine les prolongements de $X*\mathscr{C}_{\leq k-3,\ \leq 1}, \ldots, X^{k-2}*\mathscr{C}_{\leq 0,\ \leq 1}$.

Il en résulte *le prolongement de* $\mathscr{C}_{\leq k-3,\ \leq 2}$ ce qui détermine les prolongements de $X*\mathscr{C}_{\leq k-4,\ \leq 2}, \ldots, X^{k-3}*\mathscr{C}_{\leq 0,\ \leq 2}$, *etc.*

Il en résulte *le prolongement de* $\mathscr{C}_{\leq 1,\ \leq k-2}$ ce qui détermine le prolongement de :

$$X*\mathscr{C}_{\leq 0,\ \leq k-2}.$$

Il en résulte *le prolongement de* $\mathscr{C}_{\leq 0,\ \leq k-1}$.

Cette construction se réitère en prolongeant de nouveau l'unique colonne de $\mathscr{B}_{\leq 1,\ \leq k-1}$ par des zéros pour former $\mathscr{B}_{\leq 2,\ \leq k-1}$, puis en reproduisant la construction précédente.

— *Supposons qu'il existe* i_0 *tel que :* $\mathscr{B}_{\leq 0,\ \leq k-1}, \ldots, \mathscr{B}_{\leq i_0,\ \leq k-1-i_0}$ *soient vides et* $\mathscr{B}_{\leq i_0+1,\ \leq k-2-i_0}$ *non vide.*

Alors, on peut prolonger :

$$\mathscr{C}_{\leq i_0,\ \leq k-1-i_0} - X*\mathscr{C}_{\leq i_0,\ \leq k-2-i_0} = X*\mathscr{B}_{\leq i_0,\ \leq k-2-i_0},$$

dans $H_{\leq i_0+1,\ \leq k-1-i_0}(g)$, par linéarité, ce qui exprime que $\mathscr{B}_{\leq i_0+1,\ \leq k-2-i_0}$ est prolongé dans $H_{\leq i_0+2,\ \leq k-2-i_0}(g)$ pour former $\mathscr{B}_{\leq i_0+2,\ \leq k-2-i_0}$.

La construction se poursuit alors comme dans le premier cas.

En conclusion :

— On peut « border » le tableau représenté par $H_{\leq k-1,\ \leq k-1}(s)$ restreinte aux mots de longueur inférieure ou égale à $k-1$, en prolongeant les colonnes de manière à préserver les relations de dépendance linéaire, ce prolongement pouvant être réitéré indéfiniment.

— D'autre part, ou bien $j_{k-1}=0$; donc $\operatorname{rang}(g)=\operatorname{rang}(H_{\leq\infty,\ \leq k-1}(g))$ (*cf.* corollaire 1), ou bien $j_{k-1}=1$; d'après le choix du prolongement de $\mathscr{B}_{\leq 0,\ \leq k-1}$, alors $\operatorname{rang}(g)=\operatorname{rang}(H_{\leq\infty,\ \leq k-1}(g))$.

Par conséquent, $\operatorname{rang}(g)=\operatorname{rang}(H_{\leq k-1,\ \leq k-1}(g))=j_0+\ldots+j_{k-1}$.

5. Comparaison des approximants polynomiaux et rationnels

On a vu dans le paragraphe 3 que, quel que soit k, on sait construire une série s_k telle que les approximants polynomiaux et rationnels aient le même rang minimal.

Or, pour k donné, la série s_k a la particularité qu'aucun prolongement des colonnes de sa matrice de Hankel, restreinte aux mots f tels que $|f|<k$, ne

fasse « diminuer le rang » (*cf.* schéma 3); en effet, chaque bloc $H_{\leqq k-1-i,\ =i}(s)$ est « indépendant » : chaque colonne d'un bloc $H_{\leqq k-1-i,\ =i}(s)$ n'est pas combinaison linéaire (excepté la combinaison nulle) de colonnes d'autres blocs $H_{\leqq k-1-j,\ =j}(s)$ (pour $i>j$) restreintes aux indices de lignes dans $X^{\leqq k-1-i}$

Par contre, il semble que, pour un ordre $k'=k+2$ par exemple, il existe un approximant rationnel de s_k de rang inférieur au rang d'un approximant polynomial.

Par exemple :

Les séries « épaisses » :

ε_k est une série épaisse pour l'ordre k si et seulement si k étant donné, ε_k vérifie :

$$\operatorname{rg}(H_{\leqq E((k-1)/2),\ \leqq E((k-1)/2)}(\varepsilon_k))=1+n\ldots n^{E((k-1)/2)}.$$

Il en résulte que :

$$\begin{aligned}\operatorname{rg}(H_{\leqq E((k-1)/2),\ \leqq E((k-1)/2)}(\varepsilon_k))&=\operatorname{rg}(H_{\leqq E((k-1)/2),\ \leqq E((k-1)/2)+1}(\varepsilon_k))\\&=1+n+\ldots+n^{E((k-1)/2)}.\end{aligned}$$

Alors, d'après la proposition 2, il existe g série rationnelle vérifiant :

$$\operatorname{rg}(g)=\frac{1-n^{E((k-1)|2)+1}}{1-n}$$

et approchant ε_k à l'ordre k.

Les séries « i-quasi épaisses » :

q_k est une série i-quasi épaisse pour l'ordre k si et seulement si k étant donné, ε_k vérifie :

$$\operatorname{rg}(H_{\leqq E((k-1)/2)-i,\ \leqq E((k-1)/2)+i}(q_k))=\operatorname{rg}(H_{\leqq E((k-1)/2)-i,\ \leqq E((k-1)/2)+i+1}(q_k)).$$

Alors, d'après le corollaire 1, il existe g rationnelle de rang $\leqq\operatorname{rg}(H_{\leqq k-1,\ \leqq E((k-1)/2)+i}(q_k))$, approchant q_k à l'ordre k.

6. Construction explicite d'un approximant rationnel de rang minimal

* *Dans un premier temps, on fait le choix des « colonnes libres » de* $H_{\leqq k-1,\ \leqq k-1}(s)$ restreinte aux mots de longueur inférieure ou égale à $k-1$, comme il est dit dans la démonstration de la proposition 3.

Soit $(\mathscr{B}_{\leqq k-1-i,\ \leqq i})_{0\leqq i\leqq k-1}$ ce système de colonnes libres; les autres colonnes étant notées $(\mathscr{C}_{\leqq k-1-i,\ \leqq i})_{0\leqq i\leqq k-1}$.

∗ *Dans un second temps, on prolonge éventuellement ces colonnes dans* $H_{\leqq k-1,\ \leqq k-1}(g)$, comme il est dit dans la démonstration de la proposition 3 :

On cherche si il existe i_0 tel que :

$$i_0 \in [0,\ k-2] \quad \text{et} \quad \begin{cases} \mathscr{B}_{\leqq i_0,\ \leqq k-1-i_0} & \text{soit vide,} \\ \mathscr{B}_{\leqq i_0+1,\ \leqq k-2-i_0} & \text{non vide;} \end{cases}$$

→ *ou bien* j_0 n'existe pas; alors on prolonge $\mathscr{B}_{\leqq 0,\ \leqq k-1}$ par des zéros pour former $\mathscr{B}_{\leqq 1,\ \leqq k-1}$, puis on prolonge $\mathscr{C}_{\leqq 0,\ \leqq k-1} \div X * \mathscr{C}_{\leqq 0,\ \leqq k-2}$ par linéarité, ce qui fournit un prolongement de $\mathscr{B}_{\leqq 1,\ \leqq k-2}$ en $\mathscr{B}_{\leqq 2,\ \leqq k-2}$, etc.

$\mathscr{B}_{\leqq k-2,\ \leqq 1}$ prolongé en $\mathscr{B}_{\leqq k-1,\ \leqq 1}$ puis on prolonge $\mathscr{C}_{\leqq k-2,\ \leqq 1} \div X * \mathscr{C}_{\leqq k-2,\ \leqq 0}$ par linéarité, ce qui fournit un prolongement de $\mathscr{B}_{\leqq k-1,\ \leqq 0}$ en $\mathscr{B}_{\leqq k,\ \leqq 0}$ et on réitère en prolongeant de nouveau $\mathscr{B}_{\leqq 1,\ \leqq k-1}$ par des zéros pour former $\mathscr{B}_{\leqq 2,\ \leqq k-1}$.

→ *ou bien* i_0 existe; alors on prolonge $\mathscr{C}_{\leqq i_0,\ \leqq k-1-i_0} \div X * \mathscr{C}_{\leqq i_0,\ \leqq k-2-i_0}$ par linéarité ce qui donne un prolongement de $\mathscr{B}_{\leqq i_0+1,\ \leqq k-2-i_0}$ en $\mathscr{B}_{\leqq i_0+2,\ \leqq k-2-i_0}$,

et on poursuit la construction comme dans le premier cas.

On obtient ainsi $j_0+j_1+\ldots+j_{k-1}$ colonnes libres extraites de $H_{\leqq k-1,\ \leqq k-1}(g)$, et engendrant cette matrice.

Ces colonnes libres ont un déterminant non nul, que l'on peut écrire comme un tableau indexé par les lignes g_i et les colonnes d_j, de dimension $j_0+j_1+\ldots+j_{k-1}$.

D'après les travaux de G. Jacob [18] on sait que cela permet de définir entièrement la série rationnelle g associée.

BIBLIOGRAPHIE

1. J. Berstel, *Sur les poles et le quotient de Hadamard de séries N-rationnelles*, C. R. Acad. Sc. Paris, serie A, 272, 1971, p. 1079-1081.
2. J. Berstel, *Contribution à l'étude des propriétés arithmétiques des langages formels*, Thèse, Université de Paris-VII, 1972.
3. A. Cardon, M. Crochemore, *Détermination de la représentation standard d'une série reconnaissable*, R.A.I.R.O., Informatique théorique, vol. 14, n° 4, 1980, p. 371-379.
4. P. Cartier, D. Foata, *Problèmes combinatoires de commutation et réarrangements*, Lect. Notes Math., n° 85, Springer-Verlag, Berlin, 1969.
5. N. Chomsky, M. P. Schutzenberger, *The Algebraic Theory of Context-free Languages*, *in* Computer Programming and Formal Systems, P. Brafford and D. Hirschberg, éd., North Holland, 1963, p. 118-161.

6. R. Cori, J. Richard, *Énumération des graphes planaires à l'aide des séries formelles en variables non commutatives*, Discrete Math., t. 2, 1972, p. 115-162.
7. S. Eilenberg, *Automata, Languages and Machines*, vol. B, New York, Academic Press, 1976.
8. M. Fliess, *Séries reconnaissables, rationnelles et algébriques*, Bull. Soc. Math. Fr, vol. 94, 1970, p. 231-239.
9. M. Fliess, *Sur certaines familles de séries formelles*, Thèse, Université de Paris-VII, 1972.
10. M. Fliess, *Sur la réalisation des systèmes dynamiques bilinéaires*, C. R. Acad. Sc. Paris, série A, 277, 1973, p. 923-926.
11. M. Fliess, *Matrices de Hankel*, J. Maths. Pur. Appl., vol. 53, 1974, p. 197-222.
12. M. Fliess, *Série rationnelles positives et processus stochastiques*, Ann. Inst. H. Poincaré, sect. B, vol. XI, n° 1, 1975, p. 1-21.
13. M. Fliess, *Un outil algébrique : les séries formelles non commutatives*, Mathematical System Theory, G. Marchesini et S. K. Mitter, éd., Lect. Notes Économ. Math. Syst., vol. 131, Springer-Verlag, 1976, p. 122-148.
14. M. Fliess, *Une approche algébrique du développement fonctionnel des solutions d'équations différentielles non linéaires forcées*, Astérisque 75-76, Soc. Math. Fr., 1980, p. 95-103.
15. G. Jacob, *Représentations et substitutions matricielles dans la théorie algébrique des transductions*, Thèse, Université de Paris-VII, 1975.
16. G. Jacob, *Sur un théorème de Shamir*, Inform. Contr., vol. 27, n° 3, 1975, p. 218-261.
17. G. Jacob, *Langages, automates, séries formelles*, Publication 107, Université des Sciences et Techniques de Lille, 1978.
18. G. Jacob, *Réalisation des systèmes réguliers (ou bilinéaires) et séries génératrices non commutatives*, Séminaire d'Aussois, RCP 567, *in* Outils et modèles mathématiques pour l'automatique, l'analyse des systèmes et le traitement du signal, C.N.R.S. Landau, 1980.
19. G. Jacob, *Un théorème de factorisation des produits d'endomorphismes de K^n*, J. Algebra, 63, 1980, p. 389-412.
20. S. C. Kleene, *Representation of Events in Nerve Nets and Finite Automata, in* Shannon, C. E., McCarthy, J. éd., Automata studies, Princeton, N.J. 1956, p. 3-40.
21. W. Kuich, *An Algebraic Characterization of Some Principal Regulated Rational Cones*, J. Comput. System Sc., vol. 25, 1982, p. 377-401.
22. K. Lameche, *Extension d'un théorème de G. Cantor à des séries rationnelles en variables non commutatives*, C. R. Acad. Sc. Paris, série A, 272, 1971, p. 296-298.
23. M. Nivat, *Transductions des langages de Chomsky*, Ann. Inst. Fourier, vol. 18, 1968, p. 339-455.
24. C. Reutenauer, *Séries formelles et algèbres syntactiques*, J. Algebra, vol. 66, 1980, p. 448-483.
25. C. Reutenauer, *Propriétés arithmétiques de séries rationnelles et ensembles denses*, Acta Arith. vol. 39, 1981, p. 133-144.
26. C. Reutenauer, *Sur les éléments inversibles de l'algèbre de Hadamard des séries rationnelles*, Bull. Soc. Math. Fr., vol. 110, 1982, p. 225-232.
27. A. Salomaa et M. Soittola, *Automata-Theoric Aspects of Formal Power Séries*, Springer-Verlag, 1977.

28. M. P. SCHUTZENBERGER, *Un problème de la théorie des automates*, Séminaire Dubreil-Pisot (Algèbre et théorie des Nombres), 13e année, n° 3, Inst. H.-Poincaré, 1960.
29. M. P. SCHUTZENBERGER, *On the Definition of a Family of Automata*, Inform. Contr., vol. 4, 1961, p. 245-270.
30. M. P. SCHUTZENBERGER, *On a Theorem of Jungen*, Proc. Amer. Math. Soc., vol. 13, 1962, p. 885-890.
31. M. P. SCHUTZENBERGER, *Finite Counting Automata*, Inform. Contr., vol. 5, 1962, p. 91-107.
32. W. WECHLER, *An Acceptor for Algebraic Power Series*, Elecktronische Informationsverarbeitung und Kybernetik, EIK 15, 1979, p. 611-619.