

## APPROXIMATION VARIATIONNELLE DES PROBLÈMES AUX LIMITES

par Jean CEA

### Introduction

Dans l'étude d'un problème aux limites menée jusqu'aux applications numériques il y a essentiellement trois stades :

1<sup>er</sup> *stade* : On se préoccupe de savoir si le problème est bien posé, c'est-à-dire, s'il a une solution unique dans un sens classique ou plus souvent dans un sens généralisé (le sens classique étant trop restrictif); supposons que le problème soit posé sous la forme suivante : déterminer  $u$  tel que

$$(I) \quad Au = f \quad \text{dans un ouvert } \Omega \text{ de } \mathbb{R}^n$$

et que

$$(II)_j \quad B_j u = 0 \quad \text{sur la frontière } \Gamma \text{ de } \Omega, \quad j = 1, \dots, J.$$

2<sup>e</sup> *stade* : En général la solution  $u$  ne peut être explicitée, on construit alors des « problèmes approchés », on démontre l'existence et l'unicité de la solution (dite approchée) de chacun de ces problèmes et on montre enfin que ces solutions approchées convergent (dans un certain sens) vers  $u$ .

3<sup>e</sup> *stade* : On résout effectivement le problème approché. Notre travail se situe dans le deuxième stade : nous donnons un procédé convergent d'approximation *systématique* des solutions *faibles* d'une vaste classe de problèmes aux limites elliptiques. (Le cas des problèmes d'évolution fera l'objet d'une publication ultérieure.)

*Chapitre 1* (Théorie générale). *Le problème* (P) dont on cherche une approximation de la solution  $u$  est le suivant : déterminer  $u$  dans  $V$  tel que

$$(III) \quad a(u, \varphi) = L(\varphi) \quad \text{pour tout } \varphi \in V$$

où  $V$  est un espace de Hilbert,  $a(u, \varphi)$  est une forme sesquilinéaire continue sur  $V \times V$  et  $L(\varphi)$  est une forme linéaire continue sur  $V$ . (Dans de nombreux exemples, la solution d'un problème du type précédent vérifie dans un sens faible des équations de la forme (I) et (II)<sub>jj</sub>). Le problème (P) est dit associé au triplet  $\{V, a(u, \varphi), L(\varphi)\}$ . On donne une famille de triplets  $\{V_h, a_h(u_h, \varphi_h), L_h(\varphi_h)\}$  auxquels sont associés les problèmes approchés (P<sub>h</sub>) et une famille d'opérateurs linéaires  $p_h$  et  $r_h$

$$\begin{array}{c} \mathcal{V} \subset V \subset F \\ \begin{array}{ccc} & \searrow & \nearrow \\ r_h & & p_h \\ & V_h & \end{array} \end{array}$$

où  $\mathcal{V}$  est dense dans  $V$  qui est fermé dans l'espace de Hilbert  $F$ . Sous certaines hypothèses « H » (Resp. « K ») les problèmes (P) et (P<sub>h</sub>) ont des solutions uniques  $u$  et  $u_h$  et de plus  $p_h u_h$  converge vers  $u$  dans  $F$  faible (Resp. Fort).

*Chapitre 2* : Nous prenons  $F = V$ ; nous retrouvons la méthode de Galerkin, des résultats de Huet [8] sur les phénomènes de perturbation singulière dans les problèmes aux limites et des résultats de Lions [13] sur l'approximation de certains problèmes par des problèmes de Neumann ou de Dirichlet.

*Le chapitre 3* : essentiellement technique est consacré à l'étude des fonctions étagées en vue du chapitre suivant.

*Chapitre 4* :  $V$  est alors contenu dans  $F$ ; nous donnons un procédé d'approximation systématique des problèmes d'ordre 2, des problèmes de transmissions, d'élasticité et de type mêlé d'ordre  $2m$ . Nous montrons aussi comment en partageant l'ouvert  $\Omega$  en  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  nous pouvons utiliser la méthode de Galerkin (Resp. des différences finies) pour l'approximation de  $u$  dans  $\Omega_1$  (Resp.  $\Omega_2$ ). Des méthodes voisines de celles des chapitres 2 et 4 sont présentées dans [6], [12], [13] et [14].

*Chapitre 5* : lorsque l'espace  $V_h$  est de dimension finie  $N(h)$ , le problème (P<sub>h</sub>) est en fait un système de Cramer de  $N(h)$

équations linéaires à  $N(h)$  inconnues. Nous donnons quelques propriétés des matrices associées aux problèmes  $(P_h)$  et des indications sur la programmation de ces problèmes. Enfin nous donnons quelques-uns des résultats des essais numériques effectués sur ordinateur I.B.M. 704.

Qu'il me soit permis d'exprimer ici toute ma profonde gratitude à M. Lions non seulement pour m'avoir suggéré les méthodes et les applications exposées dans ce travail mais aussi pour les conseils et les encouragements qu'il n'a cessé de me prodiguer.

Je suis heureux d'exprimer ma reconnaissance à M. de Possel qui a bien voulu présider le Jury et qui a facilité mon travail au Centre Blaise Pascal.

Mes remerciements vont également à M. Bruhat qui nous a fait l'honneur de participer au Jury.



## TABLES DES MATIÈRES

<b>CHAPITRE I. — THÉORIE GÉNÉRALE</b> .....	351
1. Problèmes variationnels elliptiques .....	351
2. Généralités sur les approximations .....	353
3. Théorèmes d'approximations .....	354
4. Les problèmes approchés .....	359
<b>CHAPITRE II. — APPROXIMATIONS INTERNES</b> .....	360
1. Plan général d'étude .....	360
2. Rappels et notations .....	361
3. Méthode de Galerkin .....	362
4. Problèmes dans des espaces fixes .....	368
5. Critère général de stabilité .....	374
<b>CHAPITRE III. — LES FONCTIONS ÉTAGÉES</b> .....	378
1. Définitions et notations .....	378
2. Limites de fonctions dérivées .....	380
3. Les espaces $H^m(\Omega, R_h)$ .....	383
4. Traces des fonctions de $H^m(\Omega, R_h)$ .....	387
5. Convergence des traces de fonctions étagées .....	392
6. Une classe de fonctions étagées .....	399
7. Un opérateur de prolongement $\mathcal{F}_h$ .....	400
<b>CHAPITRE IV. — APPROXIMATIONS EXTERNES: MÉTHODE VARIATIONNELLE DES DIFFÉRENCES FINIES</b> .....	402
1. Introduction .....	402
2. Problèmes de Neumann d'ordre 2 .....	404
3. Autres problèmes aux limites d'ordre 2 .....	408
4. Problèmes des transmissions .....	412
5. Problèmes de type mélangé d'ordre $2m$ .....	418
6. Problème d'élasticité .....	420
7. Un autre problème aux limites .....	424

CHAPITRE V. — LES PROBLÈMES APPROCHÉS .....	429
1. Propriétés des matrices des problèmes approchés .....	429
2. Formation des équations approchées .....	432
3. Forme des équations approchées .....	434
4. Programmation .....	438
5. Exemple 1 .....	439
6. Exemple 2 .....	441
BIBLIOGRAPHIE .....	443

## CHAPITRE PREMIER

### THÉORIE GÉNÉRALE

#### 1. Problèmes variationnels elliptiques.

Nous allons rappeler brièvement la position variationnelle des problèmes aux limites elliptiques. On pourra voir une étude systématique de ces problèmes dans [10], [11] et [15].

1.1. — *Position variationnelle des problèmes aux limites elliptiques :*

On donne un triplet

$$\{V, a(u, v), L(v)\}$$

où  $V$  est un espace de Hilbert,  $a(u, v)$  est une forme sesqui-linéaire continue sur  $V \times V$ , i.e. une application :  $u, v \rightarrow a(u, v)$  de  $V \times V$  dans  $\mathbb{C}$  (corps des complexes) qui soit linéaire en  $u$ , semi (ou anti) linéaire en  $v$ , avec

$$|a(u, v)| \leq C_1 \|u\| \cdot \|v\|, \quad C_1 = \text{constante}$$

et enfin, où  $L(v)$  est une forme anti-linéaire continue sur  $V$ <sup>(1)</sup>.

DÉFINITION 1.1. — *La forme  $a(u, v)$  est  $V$ -elliptique si*

$$(1.1) \quad |a(v, v)| \geq \alpha \|v\|_V^2 \quad \text{pour tout } v \in V$$

*le coefficient  $\alpha$  étant un nombre positif indépendant de  $v$ .*

Problème 1.1. — Déterminer  $u$  dans  $V$  vérifiant

$$(1.2) \quad a(u, v) = L(v) \quad \text{pour tout } v \in V.$$

(1) Dans la suite, nous supposons que tout triplet (qu'il dépende d'un paramètre ou non) vérifiera les hypothèses précédentes.

**THÉORÈME 1.1.** — *Si la forme  $a(u, \nu)$  est V-elliptique, alors, le problème 1.1 admet une solution unique.*

1.2. — *Exemple :*

Soit  $\Omega$  un ouvert borné dans  $\mathbb{R}^n$  de frontière  $\Gamma$  qui sera, par exemple, une variété de dimension  $n - 1$ , une fois continûment différentiable,  $\Omega$  étant d'un seul côté de  $\Gamma$ . On désigne par  $H^1(\Omega)$  l'espace des (classes de) fonctions  $u \in L^2(\Omega)$  telles que les  $n$  dérivées (au sens des distributions)  $\frac{\partial u}{\partial x_i}$  soient aussi dans  $L^2(\Omega)$ . Muni du produit scalaire

$$(1.3) \quad (u, \nu) = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} D_i u \cdot \overline{D_i \nu} dx + \int_{\Omega} u \overline{\nu} dx, \quad D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$$

c'est un espace de Hilbert. Si  $\Gamma_1$  est un morceau de  $\Gamma$ ,  $\Gamma_2$  désignant le reste de la frontière, on prend pour  $V$  le sous-espace vectoriel fermé de  $H^1(\Omega)$  des fonctions  $u$  de  $H^1(\Omega)$  nulles sur  $\Gamma_1$ . On prend, d'autre part,

$$(1.4) \quad a(u, \nu) = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} D_i u \cdot \overline{D_i \nu} dx + \lambda \int_{\Omega} u \overline{\nu} dx, \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

et

$$(1.5) \quad L(\nu) = \int_{\Omega} f \overline{\nu} dx + \int_{\Gamma_2} g \cdot \overline{\nu} d\sigma$$

où  $d\sigma$  est « l'élément d'aire » sur  $\Gamma$ ,  $f$  est une fonction donnée dans  $L^2(\Omega)$  et  $g$  est une fonction donnée, définie sur  $\Gamma_2$  et continue par exemple.

Si l'on suppose que  $\operatorname{Re} \lambda (= \text{partie réelle de } \lambda) > 0$ , alors

$$\operatorname{Re} a(\nu, \nu) \geq \inf (I, \operatorname{Re} \lambda) \|\nu\|_V^2$$

et par suite

$$|a(\nu, \nu)| \geq \inf (I, \operatorname{Re} \lambda) \|\nu\|_V^2$$

si bien que la forme sesquilinéaire  $a(u, \nu)$  est V-elliptique, et on a le résultat suivant : l'équation

$$(1.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} D_i u \cdot \overline{D_i \nu} dx + \lambda \int_{\Omega} u \overline{\nu} dx = \int_{\Omega} f \overline{\nu} dx + \int_{\Gamma_2} g \overline{\nu} d\sigma \\ \text{pour tout } \nu \in V \end{array} \right.$$

admet une solution unique  $u$  dans  $V$ .



En utilisant formellement la formule de Green, on interprète facilement le problème précédent, il vient en effet

$$(1.7) \quad \begin{cases} \int_{\Omega} (-\Delta u + u)\bar{\nu} \, dx + \left( \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial n} \bar{\nu} \, d\sigma \right) + \int_{\Gamma_2} \frac{\partial u}{\partial n} \bar{\nu} \, d\sigma \\ = \int_{\Omega} f\bar{\nu} \, dx + \int_{\Gamma_2} g\bar{\nu} \, d\sigma \quad \text{pour tout } \nu \in V \end{cases}$$

où  $\frac{\partial u}{\partial n}$  désigne la dérivée normale extérieure à  $\Gamma$ . Dans (1.7), l'intégrale  $\int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial n} \bar{\nu} \, d\sigma$  est nulle puisque les fonctions  $\nu$  de  $V$  sont nulles sur  $\Gamma_1$ , il s'agit donc du *problème de type mêlé suivant* :

$$(1.8) \quad \begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{sur } \Gamma_2 \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_1. \end{cases}$$

## 2. Généralités sur les approximations.

Pour approcher la solution  $u$  dans  $V$  du problème (P) défini par le triplet

$$\{V, a(u, \nu), L(\nu)\}$$

nous chercherons une suite d'éléments  $u_h^x$  qui converge vers  $u$  (dans un sens à préciser) lorsque  $h$  tend vers zéro.

**DÉFINITION 2.1.** — *Une approximation est dite interne (Resp. externe) lorsque  $u$  est approché par des éléments de  $V$  (Resp. d'un espace contenant  $V$ ).*

*Nous introduirons donc un espace  $F$  contenant  $V$ . Les problèmes voisins (ou approchés)  $(P_h)$  seront définis, en toute généralité, par la donnée de*

$$\{V_h, a_h(u_h, \nu_h), L_h(\nu_h)\}.$$

Pour assurer le lien entre les problèmes (P) et  $(P_h)$  nous introduirons deux opérateurs linéaires  $p_h$  et  $r_h$  :

$$\begin{aligned} r_h &: V \rightarrow V_h \\ p_h &: V_h \rightarrow F \end{aligned}$$

enfin nous approcherons la solution  $u$  de (P) par  $p_h u_h$ ,  $u_h$  étant la solution de  $(P_h)$ , nous obtiendrons ainsi des théorèmes de convergence dans l'espace  $F$ .

### 3. Les théorèmes d'approximations.

3.1. — On donne les triplets

$$\begin{aligned} & \{V, a(u, \nu), L(\nu)\} \\ \text{et} & \{V_h, a_h(u_h, \nu_h), L_h(\nu_h)\} \end{aligned}$$

auxquels sont associés les problèmes (P) et  $(P_h)$ .

*Problème (P).* — Déterminer  $u$  dans  $V$  vérifiant

$$(3.1) \quad a(u, \nu) = L(\nu) \quad \text{pour tout } \nu \in V.$$

*Problème  $(P_h)$ .* — Déterminer  $u_h$  dans  $V_h$  vérifiant

$$(3.2) \quad a_h(u_h, \nu_h) = L_h(\nu_h) \quad \text{pour tout } \nu_h \in V_h.$$

Nous ferons les hypothèses, de  $V$  et  $V_h$ -ellipticité, suivantes

$$(3.3) \quad |a(\nu, \nu)| \geq \alpha \|\nu\|_V^2 \quad \text{pour tout } \nu \in V, \alpha > 0,$$

$$(3.4) \quad |a_h(\nu_h, \nu_h)| \geq \alpha \|\nu_h\|_{V_h}^2 \quad \text{pour tout } \nu_h \in V_h.$$

On donne maintenant un espace  $\mathcal{V}$  et un espace de Hilbert  $F$  tels que :

$$\mathcal{V} \subset V \subset F$$

l'espace  $V$ , n'étant pas nécessairement fermé ou dense dans  $F$ ; puis un opérateur  $p_h \in \mathcal{L}(V_h, F)$  et enfin un opérateur linéaire  $r_h$  de  $\mathcal{V}$  dans  $V_h$ ; nous supposons en outre, que

$$(3.5) \quad \|p_h\|_{\mathcal{L}(V_h, F)} \leq C_0$$

où  $C_0$  est une constante donnée positive.

3.2. — Nous faisons maintenant les hypothèses suivantes :

*Hypothèse (H 1).* — Si la suite des éléments  $u_h$  de  $V_h$  est bornée, i.e

$$(3.6) \quad \|u_h\|_{V_h} \leq C_1$$

compte tenu de (3.5) on a

$$(3.7) \quad \|p_h u_h\|_F \leq C_0 C_1$$

et par conséquent, la suite  $p_h u_h$  est bornée dans  $F$ ; nous savons qu'il est possible d'extraire une sous-suite  $p_{h_i} u_{h_i}$  qui converge faiblement dans  $F$  vers un certain élément  $u^\times$  de  $F^{(1)}$ .

Nous supposons que :

- i)  $u^\times$  est dans  $V$  (et non seulement dans  $F$ );
- ii)  $\lim_{h_i=0} a_{h_i}(u_{h_i}, r_{h_i} \nu) = a(u^\times, \nu)$  pour tout  $\nu \in \mathcal{V}$ .

*Hypothèse (H 2).* — Nous supposons que

- i)  $|L_h(\nu_h)| \leq C_2 \|\nu_h\|_{V_h}$  pour tout  $\nu_h \in V_h$   
 $C_2$  étant une constante donnée
- ii)  $\lim_{h=0} L_h(r_h \nu) = L(\nu)$  pour tout  $\nu \in \mathcal{V}$ .

Nous allons démontrer le

**THÉORÈME 3.1 OU (THÉORÈME GÉNÉRAL DE CONVERGENCE FAIBLE).** — Sous les hypothèses H 1 et H 2, nous avons

$$\lim_{h=0} p_h u_h = u \text{ dans } F \text{ faible }^{(2)}$$

où  $u$  et  $u_h$  désignent les solutions uniques des problèmes (P) et  $(P_h)$ .

*Démonstration.* — Les formes sesquilinéaires  $a(u, \nu)$  et  $a_h(u_h, \nu_h)$  étant  $V$  et  $V_h$ -elliptiques (par hypothèse), les problèmes (P) et  $(P_h)$  admettent des solutions uniques  $u$  et  $u_h$  (Cf. [10]).

Dans l'équation approchée (3.2) faisons  $\nu_h = u_h$ ,

$$(3.8) \quad a_h(u_h, u_h) = L_h(u_h)$$

d'où

$$(3.9) \quad |a_h(u_h, u_h)| = |L_h(u_h)|.$$

Nous majorons et nous minorons respectivement les 2<sup>e</sup> et 1<sup>er</sup> membres de (3.9) à l'aide de (3.4) et de (H2) i) :

$$\alpha \|u_h\|_{V_h}^2 < C_2 \|u_h\|_{V_h}$$

d'où

$$\|u_h\|_{V_h} < \frac{C_2}{\alpha}$$

<sup>(1)</sup> Dans 3.2. il suffit que  $F$  soit un espace de Banach réflexif.

<sup>(2)</sup> Dorénavant dans toutes les questions de convergence nous omettrons  $h = 0$  ou  $h \rightarrow 0$ .

et enfin, compte tenu de (3.5) il vient :

$$(3.10) \quad \|p_h u_h\|_F \leq \frac{C_0 C_2}{\alpha}$$

Nous pouvons donc extraire une sous-suite  $p_{h_i} u_{h_i}$  qui converge, faiblement dans  $F$ , vers un élément  $u^\times$  de  $F$ ; mais d'après l'hypothèse (H 1) nous savons que

i)  $u^\times$  est dans  $V$ .

$$(3.11) \quad ii) \quad \lim a_{h_i}(u_{h_i}, r_{h_i} \varphi) = a(u^\times, \varphi) \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{V}.$$

Dans l'équation approchée

$$a_{h_i}(u_{h_i}, \varphi_{h_i}) = L_{h_i}(\varphi_{h_i}) \quad \text{pour tout } \varphi_{h_i} \in V_{h_i}$$

nous prenons  $\varphi_{h_i} = r_{h_i} \varphi$ ,  $\varphi$  étant un élément quelconque de  $\mathcal{V}$ , il vient

$$(3.12) \quad a_{h_i}(u_{h_i}, r_{h_i} \varphi) = L_{h_i}(r_{h_i} \varphi) \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{V}.$$

Lorsque  $h_i \rightarrow 0$ , compte tenu de (3.11) et de (H 2) ii), l'égalité (3.12) conduit à :

$$a(u^\times, \varphi) = L(\varphi) \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{V}.$$

Mais  $\mathcal{V}$  étant dense dans  $V$ , et le problème (P) admettant une solution unique  $u$ , nous avons

$$u = u^\times.$$

On démontrerait de même que pour toute sous-suite  $p_k u_k$  de  $p_h u_h$ , il existe une sous-suite  $p_{k_i} u_{k_i}$  telle que

$$\lim p_{k_i} u_{k_i} = u \quad \text{dans } F \text{ faible}$$

c'est donc que la suite originelle  $p_h u_h$  converge vers  $u$  dans  $F$  faible.

*Remarque 3.1.* — Lorsque l'approximation est interne (ou encore lorsque  $V = F$ ) l'hypothèse (H 1) i) est automatiquement vérifiée; de plus l'hypothèse (H 1) ii) est équivalente à :

$$(H 1)' \quad ii) \quad \lim \left\{ a_{h_i}(u_{h_i}, r_{h_i} \varphi) - a(p_{h_i} u_{h_i}, \varphi) \right\} = 0 \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{V}.$$

En résumé, dans le cas d'une approximation interne, nous remplacerons l'hypothèse (H 1) par :

*Hypothèse (H 1)'. —* Si la suite des éléments  $u_h$  de  $\mathcal{V}_h$  est bornée, i.e.

$$\|u_h\|_{\mathcal{V}_h} \leq C_1$$

alors

$$\lim \{a_h(u_h, r_h \varphi) - a(p_h u_h, \varphi)\} = 0 \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{V}.$$

3.3. — Nous allons établir maintenant un théorème de convergence forte; nous conservons les données du 3.1 et nous faisons les hypothèses suivantes :

*Hypothèse (K 0).* — *i)* l'espace  $V$  est fermé dans  $F$  :

$$(u, \varphi)_V = (u, \varphi)_F \quad \text{pour tout } u, \varphi \in V;$$

*ii)* la forme sesquilinéaire  $a(u, \varphi)$  est la restriction  $a|_{V \times V}$  d'une forme sesquilinéaire, encore notée  $a(u, \varphi)$ , définie et continue sur  $V \times V$  et sur  $p_h V_h \times p_h V_h$ ; de plus

$$(3.13) \quad |a(u, u)| \geq \alpha \|u\|_F^2 \quad \text{pour tout } u \text{ dans } V \text{ ou dans } p_h V_h.$$

*Hypothèse (K 1).* — Si la suite des éléments  $u_h$  de  $V_h$  est bornée,

$$\|u_h\|_{\mathcal{V}_h} \leq C_1$$

alors

*i)* il existe un élément  $u^\times$  de l'espace  $V$  et une sous-suite  $u_{h_i}$ , tels que :

$$\lim p_{h_i} u_{h_i} = u^\times \quad \text{dans } F \text{ faible}$$

(comme dans 3.2 nous savions, *a priori*, que  $u^\times$  était dans  $F$ );

$$ii) \quad \lim \{a_h(u_h, r_h \varphi) - a(p_h u_h, \varphi)\} = 0 \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{V};$$

$$iii) \quad \lim \{a_h(u_h, u_h) - a(p_h u_h, p_h u_h)\} = 0.$$

*Hypothèse (K 2).* — Nous supposons que

$$i) \quad |L_h(\varphi_h)| \leq C_2 \|\varphi_h\|_{\mathcal{V}_h} \quad \text{pour tout } \varphi_h \in V_h;$$

$$ii) \quad \lim L_h(r_h \varphi) = L(\varphi) \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{V};$$

*iii)* si la suite des éléments  $u_h$  de  $V_h$  est bornée, alors

$$\lim \{L(p_h u_h) - L_h(u_h)\} = 0.$$

Nous allons démontrer le :

**THÉORÈME 3.2 (OU THÉORÈME GÉNÉRAL DE CONVERGENCE FORTE).** — *Sous les hypothèses (K 0), (K 1), (K 2)*

$$\lim p_h u_h = u \quad \text{dans } F \text{ fort}$$

où  $u$  et  $u_h$  désignent les solutions uniques des problèmes (P) et (P<sub>h</sub>).

*Démonstration.* — Il est clair que toutes les hypothèses du théorème de convergence faible sont vérifiées; nous avons donc :

$$(3.14) \quad \lim p_h u_h = u \quad \text{dans } F \text{ faible}$$

et par suite

$$(3.15) \quad \lim a(p_h u_h, u) = a(u, u),$$

$$(3.16) \quad \lim a(u, p_h u_h) = a(u, u),$$

$$(3.17) \quad \lim L(p_h u_h) = L(u).$$

Comme  $L(p_h u_h)$  et  $L_h(u_h)$  ont même limite (voir hypothèse (K 2) iii)) on a

$$(3.18) \quad \lim L_h(u_h) = L(u).$$

Si maintenant, dans les équations (3.1) et (3.2) nous faisons  $v = u$  et  $v_h = u_h$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} a(u, u) &= L(u), \\ a_h(u_h, u_h) &= L_h(u_h) \end{aligned}$$

et par passage à la limite, compte tenu de (3.18), il vient

$$(3.19) \quad \lim a_h(u_h, u_h) = a(u, u)$$

et par conséquent (voir hypothèse (K 1) iii))

$$(3.20) \quad \lim a(p_h u_h, p_h u_h) = a(u, u).$$

Nous avons

$$(3.21) \quad \begin{aligned} &\{a(p_h u_h - u, p_h u_h - u) \\ &= a(p_h u_h, p_h u_h) - a(p_h u_h, u) - a(u, p_h u_h) + a(u, u)\} \end{aligned}$$

si bien que, compte tenu de (3.20), (3.16) et (3.15) il vient

$$\lim a(p_h u_h - u, p_h u_h - u) = 0$$

et puisque  $a(u, v)$  est elliptique

$$\lim \|p_h u_h - u\|_F = 0 \quad \text{C.Q.F.D.}$$

#### 4. Les problèmes « approchés ».

Nous supposons que  $V_h$  est un espace de dimension finie  $N(h)$ ; Soit  $e_h^i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N(h)$  une base de cet espace, l'équation approchée

$$(4.1) \quad a_h(u_h, v_h) = L_h(v_h) \quad \text{pour tout } v_h \in V_h$$

se traduit par

$$a_h(u_h, e_h^j) = L_h(e_h^j) \quad \text{pour tout } j = 1, 2, \dots, N(h).$$

Si

$$u_h = \sum_{i=1}^{N(h)} u_h^i e_h^i.$$

On a

$$a_h(\sum_{i=1}^{N(h)} u_h^i e_h^i, e_h^j) = L_h(e_h^j) \quad \text{pour } j = 1, 2, \dots, N(h)$$

ou encore

$$(4.2) \quad \sum_{i=1}^{N(h)} u_h^i a_h(e_h^i, e_h^j) = L_h(e_h^j) \quad \text{pour } j = 1, \dots, N(h).$$

En résumé, dans le cas où  $V(h)$  est de dimension finie, l'équation approchée (4.1) se met sous la forme (4.2). Il est clair que (4.2) est un système de  $N(h)$  équations à  $N(h)$  inconnues (les composantes de  $u_h$ ); d'autre part, ce système est de Cramer puisque le problème approché admet une solution unique  $u_h$ .

## CHAPITRE II

### APPROXIMATIONS INTERNES

#### 1. Plan général d'étude des approximations internes.

Nous prendrons toujours  $V = F$  et nous nous ramènerons aux théorèmes de convergence du chapitre I suivant le plan qui suit :

*Point D 1.* — Il est consacré au *problème exact* (P) associé au triplet

$$\{V, a(u, v), L(v)\}.$$

On vérifiera que

$$|a(v, v)| \geq \alpha \|v\|_V^2 \quad \text{pour tout } v \in V, \alpha > 0.$$

*Point D 2.* — Il est consacré aux *problèmes approchés* (P<sub>h</sub>) associés aux triplets

$$\{V_h, a_h(u_h, v_h), L_h(v_h)\}$$

on construira les problèmes (P<sub>h</sub>) et on vérifiera que :

$$|a_h(v_h, v_h)| \geq \alpha \|v_h\|_{V_h}^2 \quad \text{pour tout } v_h \in V_h.$$

*Point D 3.* — On définit les opérateurs  $p_h$  et  $r_h$  et l'espace  $\mathcal{V}$ ; on montrera que

$$\|p_h\|_{\mathcal{L}(V_h, V)} \leq C_0.$$

*Point V 1* (sur les *formes sesquilinéaires approchées*). — Il s'agit de vérifier que :

$$\|u_h\|_{V_h} \leq C_1$$

entraîne

$$\lim_{h \rightarrow 0} \{a_h(u_h, r_h v) - a(p_h u_h, v)\} = 0 \quad \text{pour tout } v \in \mathcal{V}$$



et de plus, dans le cas du théorème de convergence forte

$$\lim \{a_h(u_h, u_h) - a(p_h u_h, p_h u_h)\} = 0.$$

*Point V 2 (sur les formes linéaires approchées).* — Il s'agit de vérifier que :

$$|L_h(\varphi_h)| \leq C_2 \|\varphi_h\|_{V_h} \quad \text{pour tout } \varphi_h \in V_h$$

et que

$$\lim_{h \rightarrow 0} L_h(r_h \varphi) = L(\varphi) \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{V}.$$

De plus, dans le cas du théorème de convergence forte, nous devons montrer que :

$$\|u_h\|_{V_h} \leq C_1$$

entraîne

$$\lim \{L_h(u_h) - L(p_h u_h)\} = 0.$$

## 2. Rappels et notations.

### 2.1. — Quelques espaces fonctionnels.

Soit  $\Omega$  un ouvert quelconque de  $\mathbb{R}^n$ . On désigne par  $L^2(\Omega)$  l'espace des (classes de) fonctions de carré sommable sur  $\Omega$ , et par  $\mathcal{D}(\Omega)$  l'espace des fonctions indéfiniment différentiables et à support compact contenu dans  $\Omega$ . On pose

$$D^p = D_1^{p_1} \dots D_n^{p_n}, \quad D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$$

et

$$|p| = p_1 + \dots + p_n, \quad p_i \text{ entier non négatif.}$$

On définit (l'espace de Sobolev)  $H^m(\Omega)$  par

$$H^m(\Omega) = \{u \mid D^p u \in L^2(\Omega), \quad |p| \leq m\}$$

si  $u$  est dans  $H^m(\Omega)$ , on pose

$$(2.1) \quad \|u\|_{H^m(\Omega)}^2 = \sum_{|p| \leq m} \int_{\Omega} |D^p u(x)|^2 dx.$$

On vérifiera que l'espace  $H^m(\Omega)$ , muni de la norme (2.1) est un espace de Hilbert. On désigne maintenant par  $H_0^m(\Omega)$  l'adhérence dans  $H^m(\Omega)$  du sous-espace  $\mathcal{D}(\Omega)$ . Si  $\Omega = \mathbb{R}^n$  alors  $H^m(\mathbb{R}^n) = H_0^m(\mathbb{R}^n)$ , mais en général

$$H^m(\Omega) \neq H_0^m(\Omega).$$

2.2. — Supposons maintenant que la frontière  $\Gamma$  de  $\Omega$  soit régulière (par exemple :  $\Gamma$  est une variété de dimension  $n - 1$ , indéfiniment différentiable et  $\Omega$  est d'un seul côté de  $\Gamma$ ). On montre alors qu'il existe un opérateur (de prolongement)  $\pi$  de  $H^m(\Omega)$  dans  $H^m(\mathbb{R}^n)$  tel que

$$\pi u(x) = u(x) \quad \text{p.p. sur } \Omega, \text{ pour tout } u \in H^m(\Omega).$$

On dit que  $\Omega$  a la propriété de  $m$ -prolongement s'il existe une application linéaire continue  $u \rightarrow Pu$  de  $H^r(\Omega)$  dans  $H^r(\mathbb{R}^n)$  pour  $r$  entier,  $0 \leq r \leq m$ , tel que  $Pu = u$  p.p. dans  $\Omega$ .

Si  $\Gamma$  est « régulière », l'espace  $C^m(\Omega)$  des fonctions  $u$  définies sur  $\bar{\Omega}$  et dont les dérivées  $D^p u$ ,  $|p| \leq m$ , sont continues dans  $\bar{\Omega}$ , est dense dans  $H^m(\Omega)$ . Il en est de même pour l'espace  $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$  des restrictions à  $\Omega$  des fonctions  $\Psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ .

On trouvera une étude détaillée des éléments introduits dans ce numéro dans : [7], [11] et [17].

2.3. — Dans les applications suivantes, nous désignerons par  $(Q)$  et  $(Q_h)$  les problèmes exacts et approchés et nous ramènerons au cas des problèmes  $(P)$  et  $(P_h)$  de la Théorie Générale du chapitre 1.

### 3. Méthode de Galerkin.

3.1. — On donne un triplet

$$\{V, a(u, v), L(v)\}$$

on lui associe le

*Problème (Q).* — Déterminer  $u$  dans  $V$  vérifiant

$$(3.1) \quad a(u, v) = L(v) \quad \text{pour tout } v \in V.$$

On donne également un sous-espace

$$\mathcal{V} \subset V, \quad \mathcal{V} \text{ dense dans } V$$

et une famille de sous-espaces fermés  $V_h$  satisfaisant à la propriété (de densité) suivante :

Il existe une famille d'opérateurs linéaires  $r_h$  de  $\mathcal{V}$  dans  $V_h$  vérifiant

$$(3.2) \quad \lim_{h \rightarrow 0} r_h v = v \quad \text{pour tout } v \in \mathcal{V}, \text{ dans } V \text{ fort.}$$

*Problème (Q<sub>h</sub>).* — Déterminer  $u_h$  dans  $V_h$  vérifiant

$$(3.3) \quad a(u_h, \varphi_h) = L(\varphi_h) \quad \text{pour tout } \varphi_h \in V_h.$$

Nous supposons que :

$$(3.4) \quad |a(\varphi, \varphi)| \geq \alpha \|\varphi\|_V^2 \quad \text{pour tout } \varphi \in V, \alpha > 0$$

et que

$$(3.5) \quad |a(u, \varphi)| \leq M \|u\|_V \|\varphi\|_V \quad \text{pour tout } u, \varphi \in V, M > 0.$$

**THÉORÈME 3.1.** — *Sous les hypothèses (3.2), (3.4) et (3.5) les problèmes (Q) et (Q<sub>h</sub>) ont des solutions uniques u et u<sub>h</sub>. De plus*

$$\lim_{h \rightarrow 0} u_h = u \quad \text{dans } V \text{ fort.}$$

*Démonstration.* — Nous nous ramènerons au théorème de convergence forte du chapitre I.

*Point D 1.* — Nous prenons (P) = (Q).

*Point D 2.* — Les triplets approchés sont

$$\{V_h, a(u_h, \varphi_h), L(\varphi_h)\}$$

il est clair que

$$|a(\varphi_h, \varphi_h)| \geq \alpha \|\varphi_h\|_{V_h}^2 \quad \text{pour tout } \varphi_h \in V_h$$

les problèmes (Q<sub>h</sub>) sont confondus avec les problèmes (P<sub>h</sub>).

*Point D 3.* — Nous prenons pour  $p_h$ , l'opérateur identité

$$p_h u_h = u_h \quad \text{pour tout } u_h \in V_h$$

on a

$$\|p_h\|_{\mathcal{L}(V_h, V)} = 1.$$

*Point V 1.* — Avec les données précédentes, il s'agit de montrer que :

$$(3.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \|u_h\|_V \leq C_1 \\ \text{entraîne} \\ \lim \{a(u_h, r_h \varphi) - a(u_h, \varphi)\} = 0 \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{V}. \end{array} \right.$$

Nous avons

$$a(u_h, r_h \varphi) - a(u_h, \varphi) = a(u_h, r_h \varphi - \varphi)$$

d'où compte tenu de (3.5)

$$|a(u_h, r_h \varphi - \varphi)| \leq M \|u_h\|_V \|r_h \varphi - \varphi\|_V$$

d'où il découle facilement (3.6).

*Point V 2.* — Puisque  $r_h \varphi$  converge fortement vers  $\varphi$  dans  $V$ , il est clair que

$$\lim_{h \rightarrow 0} L(r_h \varphi) = L(\varphi).$$

Nous sommes donc, dans les conditions d'application du théorème de convergence forte et comme les problèmes (Q) et (Q<sub>h</sub>) sont confondus avec les problèmes (P) et (P<sub>h</sub>) nous obtenons le Théorème 3.1.

### 3.2. — Cas particulier.

Nous supposons que la forme  $a(u, \varphi)$  est hermitienne et que

$$(3.7) \quad a(u, u) \geq \alpha \|u\|_V^2 \quad \text{pour tout } u \in V, \alpha > 0.$$

Dans (3.1) et (3.3) nous faisons  $\varphi = \varphi_h = \varpi_h$  (où  $\varpi_h \in V_h$ ) et nous tirons par soustraction :

$$(3.8) \quad a(u - u_h, \varpi_h) = 0 \quad \text{pour tout } \varpi_h \in V_h$$

et puisque  $a(u, \varphi)$  est hermitienne

$$(3.9) \quad a(\varpi_h, u - u_h) = 0 \quad \text{pour tout } \varpi_h \in V_h$$

Nous avons maintenant

$$(3.10) \quad a(u - \varphi_h, u - \varphi_h) \\ = a(u - u_h + u_h - \varphi_h, u - u_h + u_h - \varphi_h) \quad \text{pour tout } \varphi_h \in V_h$$

en développant le 2<sup>e</sup> membre de (3.10) et en tenant compte de (3.8) et de (3.9) il vient :

$$(3.11) \quad a(u - \varphi_h, u - \varphi_h) \\ = a(u - u_h, u - u_h) + a(u_h - \varphi_h, u_h - \varphi_h)$$

d'après (3.7), les trois nombres écrits dans (3.11) sont positifs, si bien que :

$$(3.12) \quad a(u - u_h, u - u_h) \\ \leq a(u - \varphi_h, u - \varphi_h) \quad \text{pour tout } \varphi_h \in V_h$$

et, en minorant et en majorant les 2 membres de (3.12) il vient la

PROPOSITION 3.1. — Si  $u$  et  $u_h$  sont les solutions des problèmes (Q) et  $(Q_h)$  on a :

$$(3.13) \quad \|u - u_h\|_V \leq \sqrt{\frac{M}{\alpha}} \|u - \varphi_h\|_V \quad \text{pour tout } \varphi \in V_h.$$

Si nous savons, *a priori*, que  $u \in \mathcal{V}$  alors en prenant  $\varphi_h = r_h u$  il vient

$$(3.14) \quad \|u - u_h\| \leq \sqrt{\frac{M}{\alpha}} \|u - r_h u\|.$$

Enfin, dans un cas plus particulier on obtient, trivialement, la

PROPOSITION 3.2. — Si  $\mathcal{V} = V$  et si  $r_h \in \mathcal{L}(V, V_h)$  on a

$$(3.15) \quad \frac{\|u - u_h\|_V}{\|u\|_V} \leq \sqrt{\frac{M}{\alpha}} \|1 - r_h\|_{\mathcal{L}(V, V)}$$

3.3. — Au point de vue pratique, nous nous donnerons  $N(h)$  vecteurs linéairement indépendants  $e_1, \dots, e_{N(h)}$  (que nous pouvons toujours considérer comme les  $N(h)$  premiers vecteurs d'une base) et nous résoudrons le problème approché  $(P_h)$  dans l'espace  $V_h$  engendré par ces vecteurs. Si

$$u_h = \sum_{i=1}^{N(h)} u_h^i e_i$$

le problème  $(P_h)$  revient en fait à résoudre le système des équations linéaires

$$(3.16) \quad \sum_{i=1}^{N(h)} u_h^i a(e_i, e_j) = L(e_j) \quad j = 1, \dots, N(h)$$

où les inconnues sont les composantes  $u_h^i$  de  $u_h$  par rapport à la base  $(e_i)$ . Il s'introduit la matrice  $(N(h), N(h))$

$$A_h = (a(e_i, e_j)) \quad i, j = 1, \dots, N(h)$$

dont nous étudierons les propriétés plus loin.

3.4. — Donnons-nous un ouvert  $\Omega$  borné dans  $R^2$  et prenons pour  $V$  l'espace  $H^1(\Omega)$  et pour  $a(u, \varphi)$  une somme d'intégrales

sur  $\Omega$  et sur  $\Gamma$ . Nous allons donner plusieurs exemples de systèmes  $e_i$ .

*Exemple 3.1.* — On prend pour  $e_i$  les restrictions  $a\Omega$  de polynômes ou de fonctions trigonométriques en général

$$a(e_i, e_j) \neq 0.$$

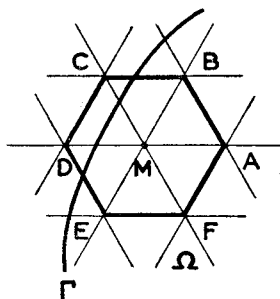
*Exemple 3.2.* — Soit un réseau triangulaire  $R_h$ ; nous prenons pour base de  $V_h$  les restrictions  $a\Omega$  des fonctions  $\theta_M(x)$  définies comme suit :

—  $M$  est un sommet quelconque d'un triangle dont l'intersection avec  $\Omega$  est non vide.

—  $\theta_M(M) = 1$  et  $\theta_M(N) = 0$  pour tout  $N \in R_h$ ,  $N \neq M$ .

—  $\theta_M(x)$  est une fonction linéaire sur chaque triangle. Il est clair que  $\theta_M(x)$  est dans  $H^1(\Omega)$  et que le support de  $\theta_M$  est formé des 6 triangles dont  $M$  est un sommet; par suite  $a(\theta_M, \theta_N)$  est nul lorsque  $M$  et  $N$  ne sont pas sommets d'un même triangle; dans la matrice  $A_h$  il y a, au plus, 7 coefficients non nuls par ligne :

$$a(\theta_M, \theta_N) \quad \text{et} \quad a(\theta_M, \theta_N) \quad \text{où} \quad N = A, \dots, F.$$



*Exemple 3.3.* —  $R_h$  est maintenant un réseau rectangulaire. On définit les fonctions  $\theta_M(x)$  comme dans l'exemple 3.2, mais en remplaçant les triangles par des rectangles. (On vérifierait que  $\theta_M(x)$  a pour support l'ensemble des 4 rectangles dont  $M$  est un sommet, et que sur chacun de ces rectangles le graphe de  $\theta_M(x)$  est un parabolôïde hyperbolique; de plus, il y a « raccordement » de ces parabolôïdes sur  $MB, MD, MF, MH$ ).

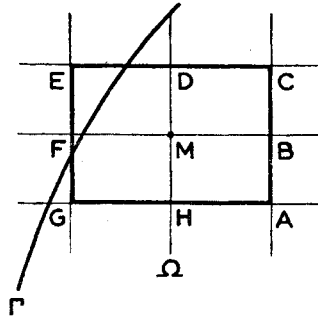
On montre facilement que dans la matrice  $A_h$  il y a au plus 9 coefficients non nuls par ligne :

$$a(e_M, e_M) \quad \text{et} \quad a(e_M, e_N)$$

où

$$N = A, B, \dots, N$$

on obtiendrait le même résultat pour les colonnes de  $A_h$ .



*En résumé :* la mise en mémoire des éléments de l'équation approchée (3.16),  $(a(e_i, e_j), u_h^i, L(e_j))$ , nécessite

- 1)  $N(h) \times N(h) + 2N(h)$  mémoires dans l'exemple 3.1;
- 2) moins de  $9 N(h)$  mémoires dans l'exemple 3.2;
- 3) moins de  $11 N(h)$  mémoires dans l'exemple 3.3.

Lorsque la forme sesquilinéaire  $a(u, v)$  est hermitienne, nous savons que la méthode utilisant le Théorème du Minimum conduit aux mêmes résultats que la méthode de Galerkin (cf. [12]; ainsi, en utilisant le théorème du Minimum et respectivement les fonctions  $\theta_M$  des exemples 3.2 et 3.3, K. O. Friedrichs [6] et J. Necas (communication personnelle) obtiennent un théorème d'approximation analogue au théorème 3.1 de la solution des problèmes de Neumann et de Dirichlet d'ordre 2.

*Remarque 3.1.* — Supposons que  $V = H_0^1(\Omega)$ . Nous pouvons prendre pour base de  $V_h$  les fonctions  $\theta_M(x)$  définies dans l'exemple 3.2 (Resp. 3.3) et nulles sur tout triangle (Resp. Rectangle) dont l'intersection avec  $\Gamma$  est non vide.

#### 4. Problèmes dans les espaces fixes.

4.1. — On donne deux espaces de Hilbert  $V$  et  $W$ , un sous-espace

$$\mathcal{V} \subset V, \quad \mathcal{V} \text{ dense dans } V$$

un opérateur linéaire  $r$  de  $\mathcal{V}$  dans  $W$  et un opérateur linéaire et continu  $p$  de  $W$  dans  $V$ .

On donne ensuite, des formes sesquilinéaires  $a(u, \nu)$  et  $a_h(u, \nu)$  définies et continues, respectivement sur  $V \times V$  et sur  $W \times W$ ; on pose

$$a_h(u, \nu) = a(pu, pu) + b_h(u, \nu)$$

on donne enfin des formes linéaires  $L(\nu)$  et  $L_h(\nu)$ , respectivement définies et continues sur  $V$  et sur  $W$ . Pour simplifier, nous n'étudierons que le cas où

$$L_h(\nu) = L(p\nu) \quad \text{pour tout } \nu \in W.$$

Nous faisons les hypothèses suivantes :

*Hypothèse (P 1).*

i)  $|a(\nu, \nu)| \geq \alpha \|\nu\|_V^2$  pour tout  $\nu \in V$ .

ii)  $|a_h(\nu, \nu)| \geq \beta \|\nu\|_V^2 + \beta(h) \|\nu\|_W^2$  pour tout  $\nu \in W$ ,  
où  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\beta(h)$  sont des nombres positifs, et  $\lim_{h=0} \beta(h) = 0$

iii)  $|a(u, \nu)| \leq M \|u\|_V \|\nu\|_V$ ,  $u, \nu \in V$ ,  $M > 0$ .

iv)  $|a_h(u, \nu)| \leq M(h) \|u\|_W \|\nu\|_W$ ,  $u, \nu \in W$ ,  $M(h) > 0$ .

*Hypothèse (P 2).* — Si

$$\beta \|pu_h\|_V^2 + \beta(h) \|u_h\|_W^2 < C_1, \quad (u_h \in W)$$

alors

$$\lim_{h=0} b_h(u_h, r\nu) = 0 \quad \text{pour tout } \nu \in \mathcal{V}.$$

*Hypothèse (P 3).* — On suppose que

$$L(pru) = L(u) \quad \text{pour tout } u \in \mathcal{V}.$$

*Problème (Q).* — Déterminer  $u$  dans  $V$  tel que

$$a(u, \nu) = L(\nu) \quad \text{pour tout } \nu \in V.$$



*Problème* (Q<sub>h</sub>). — Déterminer u<sub>h</sub> dans W tel que

$$a_h(u, \nu) = L(p\nu) \quad \text{pour tout } \nu \in W.$$

**THÉORÈME 4.1.** — *Sous les hypothèses (P 1), (P 2), (P 3) les problèmes (Q) et (Q<sub>h</sub>) ont des solutions uniques u et u<sub>h</sub>; de plus, lorsque h → 0, pu<sub>h</sub> converge vers u dans V faible.*

*Démonstration.* — Nous nous ramenons au théorème de convergence faible du premier chapitre.

*Point D 1.* — Nous prenons (P) confondu avec (Q).

*Point D 2.* — Nous prenons pour V<sub>h</sub> l'ensemble des éléments de W et pour norme dans

$$\|u\|_{V_h}^2 = \frac{\beta}{\alpha} \|pu\|_V^2 + \frac{\beta(h)}{\alpha} \|u\|_W^2$$

on vérifie que

$$\frac{\beta(h)}{\alpha} \|u\|_W^2 \leq \|u\|_{V_h}^2 \leq \left( \frac{\beta}{\alpha} \|p\|_{(W,V)} + \frac{\beta(h)}{\alpha} \right) \|u\|_W^2$$

par suite, pour h fixé, les espaces W et V<sub>h</sub> sont confondus et les problèmes (P<sub>h</sub>) associés aux triplets

$$\{V_h, a_h(u_h, \nu_h), L(p\nu_h)\}$$

sont confondus avec les problèmes (Q<sub>h</sub>). Avec le choix de la norme dans V<sub>h</sub>, l'hypothèse (P 1) ii) s'écrit :

$$|a_h(\nu, \nu)| \geq \|\nu\|_{V_h}^2 \quad \text{pour tout } \nu \in V_h$$

*Point D 3.* — On a déjà défini  $\mathcal{V}$ , on prend p<sub>h</sub> = p, r<sub>h</sub> = r, on vérifie que

$$\|p_h\|_{(V_h, V)} < \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}.$$

*Point V 1.* — L'hypothèse

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(si la suite } \|u_h\|_{V_h} \text{ est bornée, alors} \\ \lim \{a_h(u_h, r_h\nu) - a(p_h u_h, \nu)\} = 0 \quad \text{pour tout } \nu \in \mathcal{V} \end{array} \right.$$

n'est autre que l'hypothèse (P 2).

*Point V 2.* — Voir l'hypothèse (P 3).

Nous sommes donc dans les conditions d'application du théorème général de convergence faible d'où le théorème 4.1.

4.2. — *Phénomène de perturbation singulière.*

*Exemple 4.1.* — On prend  $V = H^1(\Omega)$ ; l'espace  $W$  est l'ensemble des  $u$  de  $H^1(\Omega)$  tels que  $\Delta u \in L^2(\Omega)$  muni de la norme

$$(\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2)^{1/2};$$

on prend  $\mathcal{V} = W$  et on pose

$$a(u, v) = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} D_i u \cdot \overline{D_i v} \, dx + \int_{\Omega} u \overline{v} \, dx$$

$$b_h(u, v) = h \int_{\Omega} \Delta u \cdot \overline{\Delta v} \, dx, \quad \Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

et

$$L(v) = \int_{\Omega} f \overline{v} \, dx, \quad f \text{ donnée dans } L^2(\Omega)$$

on a facilement

$$|a(v, v)| \geq \|v\|_{\mathcal{V}}^2 \quad \text{pour tout } v \in V$$

et

$$|a_h(v, v)| \geq (1-h)\|v\|_{\mathcal{V}}^2 + h\|v\|_W^2 \quad \text{pour tout } v \in W.$$

Nous prenons pour  $p$  et  $r$  l'opérateur identité (dans  $W$ )

$$pu = ru = u \quad \text{pour tout } u \in W.$$

Vérifions maintenant l'hypothèse (P 2) : nous supposons que

$$(4.1) \quad (1-h)\|u_h\|_{\mathcal{V}}^2 + h\|u_h\|_W^2 < C_1$$

d'où pour  $h \leq 1$

$$(4.2) \quad h\|u_h\|_W^2 < C_1$$

nous avons facilement

$$\left| h \int_{\Omega} \Delta u_h \cdot \overline{\Delta v} \, dx \right|^2 \leq h^2 \cdot \int_{\Omega} |\Delta u_h|^2 \, dx \cdot \int_{\Omega} |\Delta v|^2 \, dx,$$

$$\left| h \int_{\Omega} \Delta u_h \cdot \Delta v \, dx \right|^2 \leq h^2 \cdot \|u_h\|_W^2 \cdot \|v\|_W^2$$

et enfin compte tenu de (4.2)

$$\left| h \int_{\Omega} \Delta u_h \cdot \Delta v \, dx \right|^2 < h \cdot C_1 \cdot \|v\|_W^2$$

d'où

$$\lim_{h \rightarrow 0} b_h(u_h, v) = 0 \quad \text{pour tout } v \in V_h.$$

Ainsi l'hypothèse (P 2) est vérifiée; l'hypothèse (P 3) est trivialement vérifiée. On peut donc appliquer le théorème 4.1.

*Problème (Q).* — Déterminer  $u$  dans  $H^1(\Omega)$  tel que

$$(4.3) \quad \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} D_i u \cdot \overline{D_i v} \, dx + \int_{\Omega} u \overline{v} \, dx = \int_{\Omega} f \overline{v} \, dx \quad \text{pour tout } v \in H^1(\Omega).$$

*Problème (Q<sub>h</sub>).* — Déterminer  $u_h$  dans  $W$  tel que

$$(4.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} D_i u_h \cdot \overline{D_i v} \, dx + \int_{\Omega} u_h \cdot \overline{v} \, dx \\ + h \int_{\Omega} \Delta u_h \cdot \overline{\Delta v} \, dx = \int_{\Omega} f \overline{v} \, dx \end{array} \right. \quad \text{pour tout } v \in W.$$

**THÉORÈME 4.2.** — *Lorsque  $h \rightarrow 0$ , la solution (unique)  $u_h$  du problème (Q<sub>h</sub>) converge dans  $H^1(\Omega)$  faible vers la solution (unique)  $u$  du problème (Q).*

A l'aide des formules de Green (formelles) on transforme (4.3) et (4.4) respectivement en

$$(4.5) \quad \int_{\Omega} (-\Delta u + u) \overline{v} \, dx + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} \overline{v} \, d\sigma = \int_{\Omega} f \overline{v} \, dx \quad \text{pour tout } v \in H^1(\Omega)$$

et

$$(4.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} (h \cdot \Delta^2 u_h - \Delta u_h + u_h) \overline{v} \, dx \\ + \int_{\Gamma} \left( -h \frac{\Delta u_h}{\partial n} + \frac{\partial u_h}{\partial n} \right) \overline{v} \, d\sigma \\ + \int_{\Gamma} h \cdot \Delta u_h \cdot \frac{\partial v}{\partial n} \, d\sigma = \int_{\Omega} f \overline{v} \, dx \end{array} \right. \quad \text{pour tout } v \in W$$

où  $n$  est la normale extérieure à  $\Gamma$  et où  $d\sigma$  est « l'élément d'aire » sur  $\Gamma$ . Formellement les problèmes (Q) et (Q<sub>h</sub>) sont équivalents (dans un sens faible).

Déterminer  $u$  dans  $H^1(\Omega)$  tel que

$$(Q)' \quad \left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u + u = f & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma \end{array} \right.$$

et à déterminer  $u_h$  dans  $W$  tel que

$$(Q_h)' \begin{cases} h\Delta^2 u_h - \Delta u_h + u_h = f & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u_h}{\partial n} - h \frac{\partial \Delta u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma \\ \Delta u_h = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

4.3. — *Approximation d'un problème de Neumann* (par des problèmes de Neumann).

Pour une étude détaillée de ce type d'approximation Cf. [13].

Soit  $\Omega$  un ouvert borné dans  $\mathbb{R}^n$ , de frontière  $\Gamma$  assez régulière, et soit d'autre part un ouvert  $\Omega_1$  entourant  $\Omega$  de frontière  $\Gamma$  et  $\Gamma_1$ . On pose :

$$\Omega^\times = \bar{\Omega} \cup \Omega_1.$$

On prend

$$V = H^m(\Omega), \quad \mathcal{V} = V, \quad W = H^m(\Omega^\times);$$

si  $u$  est dans  $H^m(\Omega^\times)$ ,  $pu$  est la restriction de  $u$  à  $\Omega$ ; si  $u$  est dans  $H^m(\Omega)$ ,  $ru$  est le prolongement de  $u$  à  $\Omega^\times$  :

$$ru = \pi u \quad (\text{voir 2.2. chap. 2}).$$

On donne maintenant des fonctions  $a_{p,q}$ ,  $|p|, |q| \leq m$ , mesurables et bornées sur  $\Omega^\times$  et une fonction  $f$  de  $L^2(\Omega)$

$$(4.7) \quad \begin{cases} a_{p,q} \in L^\infty(\Omega^\times) \\ f \in L^2(\Omega) \end{cases}$$

et on suppose que :

$$(4.8) \quad \begin{cases} \operatorname{Re} \sum a_{pq}(x) \xi_p \bar{\xi}_q \geq \alpha \sum |\xi_p|^2 \text{ p.p. sur } \Omega^\times \\ \alpha > 0, \quad \xi_p \in \mathbb{C} \end{cases}$$

On prend

$$\begin{aligned} a(u, \varphi) &= \sum_{|p|, |q| < m} \int_{\Omega} a_{pq} D^p u \cdot \bar{D}^q \varphi \, dx \\ b_h(u, \varphi) &= h \cdot \sum_{|p|, |q| < m} \int_{\Omega_1} a_{pq} D^p u \cdot \bar{D}^q \varphi \, dx \\ a_h(u, \varphi) &= a(pu, p\varphi) + b_h(u, \varphi) \end{aligned}$$

et

$$L(\varphi) = \int_{\Omega} f \varphi \, dx$$

*Problème (Q).* — Déterminer  $u$  dans  $H^m(\Omega)$  tel que

$$a(u, \varphi) = L(\varphi) \quad \text{pour tout } \varphi \in H^m(\Omega).$$

*Problème (Q<sub>h</sub>).* — Déterminer  $u_h$  dans  $H^m(\Omega \times)$  tel que

$$a_h(u_h, \nu) = L(p\nu) \quad \text{pour tout } \nu \in H^m(\Omega \times)$$

on a le

**THÉORÈME 4.3.** — Lorsque  $h \rightarrow 0$ , la restriction à  $\Omega$ , de la solution (unique)  $u_h$  du problème (Q<sub>h</sub>) converge dans  $H^m(\Omega)$  faible vers la solution (unique)  $u$  du problème (Q).

*Démonstration.* — On se ramène au théorème 4.1; nous ne vérifierons que les hypothèses (P1) ii) et (P 2). De l'inégalité (4.8) on tire

$$\begin{aligned} \{ \operatorname{Re} \{ a(p\nu, p\nu) + b_h(\nu, \nu) \} \} &\geq \alpha(1 - h) \|p\nu\|_{H^m(\Omega)}^2 \\ \text{(pour tout } \nu \in H^m(\Omega \times) &+ \alpha h \|\nu\|_{H^m(\Omega \times)}^2 \end{aligned}$$

d'où, pour  $h \leq \frac{1}{2}$

$$|a_h(\nu, \nu)| \geq \frac{\alpha}{2} \|p\nu\|_V^2 + \alpha h \|\nu\|_W^2 \quad \text{pour tout } \nu \in W.$$

Ainsi (P 1) ii) est vérifiée.

Supposons maintenant que :

$$(4.9) \quad \frac{\alpha}{2} \|pu_h\|_V^2 + \alpha h \|u_h\|_W^2 \leq C_1 \quad u_h \in W$$

et montrons que :

$$(4.10) \quad \lim b_h(u_h, r\nu) = 0 \quad \text{pour tout } \nu \in V$$

nous avons

$$b_h(u_h, r\nu) = h \cdot \sum_{|p|, |q| \leq m} \int_{\Omega_1} a_{pq} \cdot D^p u_h \cdot D^q r\nu \, dx$$

donc pour établir (4.10) il suffira de montrer que :

$$(4.11) \quad \lim_{h \rightarrow 0} A_{pq}^h = 0 \quad \text{pour tout } \nu \in V$$

où

$$|A_{pq}^h|^2 \leq h \int_{\Omega_1} a_{pq} D^p u_h D^q r\nu \, dx.$$

Nous avons, puisque  $a_{pq}$  est majorée par M (voir (4.7))

$$|A_{pq}^h| \leq hM \int_{\Omega_1} D^p u_h \cdot D^q r\nu \, dx$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy Schwarz il vient

$$|A_{pq}^h|^2 \leq M^2 h^2 \int_{\Omega_h} |D^p u_h|^2 dx \cdot \int_{\Omega_h} |D^q r\nu|^2 dx$$

d'où

$$(4.12) \quad |A_{pq}^h|^2 < M^2 h^2 \|u_h\|_W^2 \|r\nu\|_W^2.$$

Mais, à partir de (4.9) on tire

$$(4.13) \quad h \|u_h\|_W^2 \leq \frac{C_1}{\alpha}$$

d'où en combinant (4.12) et (4.13)

$$|A_{pq}^h|^2 \leq h \cdot M^2 \frac{C_1}{\alpha} \|r\nu\|_W^2$$

et il est clair que (4.11) est vérifiée.

4.4. — *Approximation d'un problème de Neumann* (par des problèmes de Dirichlet).

Dans 4.3, il suffit de remplacer  $H^m(\Omega^\times)$  par  $H_0^m(\Omega^\times)$  et de définir  $r$  par :

$$ru = (\pi u) \cdot \Psi$$

où  $\Psi$  est une fonction de  $\mathcal{C}^m(\Omega^\times)$  qui vaut 1 sur  $\Omega$  et 0 sur  $\Gamma_1$ .

### 5. Critère général de stabilité pour des ouverts variables.

Nous nous limiterons à la stabilité des problèmes de Neumann dans des ouverts variables  $\Omega_h$  plus grands que l'ouvert  $\Omega$  borné dans  $\mathbb{R}^n$  : nous supposons donc que

$$\Omega \subset \Omega_h$$

on donne les fonctions  $a_{pq}$ ,  $|p|, |q| \leq m$ , mesurables et bornées sur  $\mathbb{R}^n$  et on suppose que :

$$(5.1) \quad |a_{pq}(x)| \leq M \quad \text{p.p. dans } \mathbb{R}^n, \quad M = \text{constante}$$

et

$$(5.2) \quad \begin{cases} \operatorname{Re} \sum_{|p|, |q| \leq m} a_{pq}(x) \xi_p \bar{\xi}_q \geq \alpha \sum |\xi_p|^2 & \text{p.p. dans } \mathbb{R}^n \\ \text{où} & \alpha > 0 \quad \text{et} \quad \xi_p \in \mathbb{C}. \end{cases}$$

On donne ensuite une fonction  $f$  dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . Dans la suite,

les restrictions de  $a_{pq}$  et de  $f$  à n'importe quel ouvert de  $\mathbb{R}^n$  seront notées  $a_{pq}$  et  $f$ . On pose :

$$(5.3) \quad a(u, \nu) = \sum_{|p|, |q| \leq m} \int_{\Omega} a_{pq} D^p u \cdot \overline{D^q \nu} \, dx, \quad u, \nu \in H^m(\Omega)$$

$$(5.4) \quad a_h(u, \nu) = \sum_{|p|, |q| \leq m} \int_{\Omega_h} a_{pq} D^p u \cdot \overline{D^q \nu} \, dx, \quad u, \nu \in H^m(\Omega_h)$$

$$(5.5) \quad L(\nu) = \int_{\Omega} f \overline{\nu} \, dx, \quad \nu \in H^m(\Omega)$$

et enfin

$$(5.6) \quad L_h(\nu) = \int_{\Omega_h} f \overline{\nu} \, dx \quad \nu \in H^m(\Omega_h).$$

*Problème (Q).* — Déterminer  $u$  dans  $H^m(\Omega)$  tel que

$$a(u, \nu) = L(\nu) \quad \text{pour tout } \nu \in H^m(\Omega).$$

*Problème (Q<sub>h</sub>).* — Déterminer  $u_h$  dans  $H^m(\Omega_h)$  tel que

$$a_h(u_h, \nu) = L_h(\nu) \quad \text{pour tout } \nu \in H^m(\Omega_h).$$

Faisons l'hypothèse :

$$(5.7) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \text{mes.}(\Omega_h - \Omega) = 0.$$

Nous allons établir le

**THÉORÈME 5.1.** — *Sous les hypothèses (5.1), (5.2), (5.7), lorsque  $h \rightarrow 0$ , la restriction à  $\Omega$  de la solution (unique) du problème (Q<sub>h</sub>) converge dans  $H^m(\Omega)$  faible vers la solution (unique) du problème (Q).*

*Démonstration.* — Nous nous ramenons au Théorème Général de convergence faible.

*Point D 1.* — Nous prenons  $V_h = H^m(\Omega)$ . Le problème (P) associé au triplet

$$\{V, a(u, \nu), L(\nu)\}$$

est alors confondu avec le problème (Q). A partir de (5.2) on montre facilement que

$$|a(\nu, \nu)| \geq \alpha \|\nu\|_V^2 \quad \text{pour tout } \nu \in V.$$

*Point D 2.* —  $V_h = H^m(\Omega_h)$ , (P<sub>h</sub>) est confondu avec (Q<sub>h</sub>), on a de même

$$|a_h(\nu, \nu)| \geq \alpha \|\nu\|_{V_h}^2 \quad \text{pour tout } \nu \in V_h.$$

*Point D 3.* — Nous prenons  $\mathcal{V} = V$  et nous définissons  $p_h$  et  $r_h$  par :

$r_h u$  est la restriction à  $\Omega_h$  de  $\pi u$  (voir 2.2),  
 $p_h u$  est la restriction à  $\Omega$  de  $u$ ,

il est clair que

$$\|p_h\|_{(V_h, V)} \leq 1.$$

*Point V 1.* — Soit une suite  $u_h$  telle que

$$(5.8) \quad u_h \in V_h, \quad \|u_h\|_{V_h} \leq C_1$$

et montrons que

$$\lim \{a_h(u_h, r_h \varphi) - a(p_h u_h, \varphi)\} = 0 \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{V}.$$

Avec les données précédentes, il s'agit d'établir

$$(5.9) \quad \lim_{|p|, |q|} \sum_{\Omega_h - \Omega} a_{pq} D^p u_h \cdot \overline{D^q \pi \varphi} dx = 0.$$

Il suffira de montrer que

$$(5.10) \quad \lim A_{pq}^h = 0 \quad |p|, |q| \leq m$$

avec

$$A_{pq}^h = \int_{\Omega_h - \Omega} a_{pq} D^p u_h \cdot \overline{D^q \pi \varphi} dx.$$

Nous avons, compte tenu de (5.1)

$$|A_{pq}^h| \leq M \int_{\Omega_h - \Omega} |D^p u_h| \cdot |\overline{D^q \pi \varphi}| dx$$

et en utilisant l'inégalité de Cauchy Schwarz il vient

$$|A_{pq}^h|^2 \leq M^2 \cdot \int_{\Omega_h - \Omega} |D^p u_h|^2 dx \cdot \int_{\Omega_h - \Omega} |D^q \pi \varphi|^2 dx$$

d'où compte tenu de (5.8) et en majorant l'intégrale de  $|D^q \pi \varphi|^2$

$$(5.11) \quad |A_{pq}^h|^2 < M^2 \cdot C^2 \cdot \|\pi \varphi\|_{\mathbb{H}^m(\Omega_h - \Omega)}^2.$$

Puisque  $\pi \varphi$  est dans  $\mathbb{H}^m(\mathbb{R}^n)$ , (5.7) entraîne

$$(5.12) \quad \lim_{h=0} \|\pi \varphi\|_{\mathbb{H}^m(\Omega_h - \Omega)}^2 = 0$$

si bien que (5.10) est établie (on montre (5.12) en commençant par approcher  $\pi \varphi$  par une fonction  $\Psi$  de  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ).



*Point V 2.* — Avec les données des points D 1, D 2, D 3, nous devons vérifier que

$$(5.13) \quad \lim_{h \rightarrow 0} D_h = 0 \quad \text{pour tout } \nu \in \mathcal{V}$$

où

$$D_h = \int_{\Omega_h - \Omega} f \cdot \overline{\pi \nu} \, dx$$

on a facilement

$$|D_h|^2 \leq \|f\|_{H^m(\mathbb{R}^n)}^2 \|\pi \nu\|_{H^m(\Omega_h - \Omega)}^2$$

et (5.12) entraîne (5.13).

Ainsi nous pouvons appliquer le Théorème général de convergence faible d'où le théorème 5.1.

## CHAPITRE III

### LES FONCTIONS ÉTAGÉES

#### 1. Définitions et notations.

1.1. — Si  $x = (x_1, \dots, x_n)$  est un point de  $\mathbb{R}^n$  et si  $\theta$  et  $h_i$  sont deux nombres réels, on pose

$$(1.1) \quad x + \theta h_i = (x_1, \dots, x_i + \theta h_i, \dots, x_n).$$

Si  $E$  est un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$ ,  $E + \theta h_i$  est l'ensemble des points  $x + \theta h_i$ , où  $x$  est dans  $E$ :

$$(1.2) \quad E + \theta h_i = \{y \mid y = x + \theta h_i, x \in E\}.$$

1.2. — Soit maintenant une fonction  $u$  définie (presque partout) dans  $\Omega$ ; on pose

$$(1.3) \quad \nabla_i u(x) = \frac{1}{h_i} \left\{ u\left(x + \frac{h_i}{2}\right) - u\left(x - \frac{h_i}{2}\right) \right\}$$

partout où  $u\left(x + \frac{h_i}{2}\right)$  et  $u\left(x - \frac{h_i}{2}\right)$  sont définis.

On vérifie que :

$$(1.4) \quad \nabla_i(\nabla_j u(x)) = \nabla_j(\nabla_i u(x))$$

si  $p = (p_1, \dots, p_n)$ ,  $p_i$  entiers non négatifs, on pose

$$(1.5) \quad |p| = \sum_{i=1}^n p_i$$

et

$$(1.6) \quad \nabla^p u(x) = \nabla_1^{p_1} \nabla_2^{p_2} \dots \nabla_n^{p_n} u(x).$$

La fonction  $\nabla^p u$  s'appelle la *dérivée* d'ordre  $p$  au sens des *différences finies* de la fonction  $u$ : notons ceci: le domaine de définition de  $\nabla^p u$  est un ouvert « plus petit » que  $\Omega$ ; par exemple  $\nabla_i u$  est définie dans l'ensemble des  $x$  tels que les points  $x + \frac{h_i}{2}$  et  $x - \frac{h_i}{2}$  soient dans  $\Omega$ .

1.3. — Soit maintenant

$$h = (h_1, \dots, h_n) \quad \text{où} \quad h_i > 0$$

on pose

$$|h| = h_1 + \dots + h_n$$

le *réseau*  $R_h$  est l'ensemble des points  $M$  (ou nœuds) de  $R^n$ .

$$(1.7) \quad M = (m_1 h_1, \dots, m_n h_n)$$

où les  $m_i, \dots, i = 1, n$ , sont des nombres entiers quelconques. La *maille* du réseau est  $h$ . On désigne par  $(C, M)_h$  le pavé de *centre*  $M$ , de côtés parallèles aux axes et de longueur  $h_1, \dots, h_n$ :

$$(1.8) \quad (C, M)_h = \left\{ x \mid x = M + \sum_{i=1}^n \theta_i h_i, \quad -\frac{1}{2} < \theta_i < \frac{1}{2} \right\}.$$

On définit les pavés dits *d'origine*  $M$  ou *d'axe*  $M_i$  par

$$(1.9) \quad (0, M)_h = \{ x \mid x = M + \sum \theta_i h_i, \quad 0 < \theta_i < 1 \},$$

$$(1.10) \quad (A, M_i)_h = \left( C, M + \frac{1}{2} h_i \right)_h.$$

Quand il n'y aura pas d'ambiguïté, on supprimera l'indice  $h$  qui figure dans les  $(C, M)_h, \dots$

*Ensemble  $M_0$ .* — Si  $M$  est un point du réseau,  $M_0$  désigne l'ensemble des sommets de  $(0, M)$ .

*Ensemble  $M_i$ .* —  $M$  étant un point du réseau,  $M_i$  désigne l'ensemble des points  $N$  tels que  $N$  et  $N + h_i$  soient des sommets de  $(0, M)$ .

## 2. Limites de fonctions dérivées

(au sens des différences finies).

2.1. — Soit une suite d'ouverts  $\Omega_h$  contenus dans l'ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$ ; on pose la

**DÉFINITION 2.1.** — *On dit que la famille  $\Omega_h$  approche  $\Omega$  si, pour tout compact  $K$  contenu dans  $\Omega$ , il existe un nombre positif  $h(K)$  tel que :*

$$h < h(K) \text{ entraîne } K \subset \Omega_h.$$

On donne maintenant  $h = (h_1, \dots, h_n)$  et des fonctions  $u, u^i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , de  $L^2(\Omega)$ ; on fait 1'.

**Hypothèse 2.1.** — Il existe une famille d'ouverts  $\Omega_h$  qui approche  $\Omega$  lorsque  $|h| \rightarrow 0$ , et tel que :

$$u^i(x) = \nabla_i u(x) \text{ p.p. dans } \Omega_h.$$

Nous allons établir la

**PROPOSITION 2.1.** — *Si les fonctions  $u$  et  $u^i$  de  $L^2(\Omega)$  vérifient l'hypothèse 2.1 alors :*

$$(2.2) \quad (u^i, \Psi)_{L^2(\Omega)} = - (u, \nabla_i \Psi)_{L^2(\Omega)}$$

pour toute fonction  $\Psi$  de  $L^2(\Omega)$  et à support compact dans  $\Omega$  dès que  $|h|$  est « assez petit » (i.e.  $|h| \leq h(\Psi)$ ).

**Démonstration.** — Désignons par  $K$  le support de  $\Psi$  dans  $\Omega$  et prenons  $h$  assez petit pour que  $\Omega_h$  contienne l'ensemble  $K + \theta h_i$ ,  $-1 \leq \theta \leq +1$ . On a alors :

$$(2.3) \quad \int_{\Omega} u^i \bar{\Psi} \, dx = \int_K \nabla_i u(x) \cdot \bar{\Psi}(x) \, dx$$

or

$$\int_K \nabla_i u(x) \bar{\Psi}(x) \, dx = \int_K \frac{u\left(x + \frac{h_i}{2}\right) - u\left(x - \frac{h_i}{2}\right)}{h_i} \cdot \bar{\Psi}(x) \, dx$$

d'où

$$\int_{\mathbf{K}} \nabla_i u(x) \bar{\Psi}(x) dx = \int_{\mathbf{K} + \frac{h_i}{2}} \frac{u(x) \Psi\left(x - \frac{h_i}{2}\right)}{h_i} dx - \int_{\mathbf{K} - \frac{h_i}{2}} \frac{u(x) \Psi\left(x + \frac{h_i}{2}\right)}{h_i}$$

posons maintenant

$$\mathbf{K}i = \mathbf{K} + \theta \frac{h_i}{2}, \quad -1 \leq \theta \leq +1$$

il est clair que  $\Psi\left(x - \frac{1}{2} h_i\right)$  est nulle sur  $\mathbf{K}i - \left(\mathbf{K} + \frac{1}{2} h_i\right)$  et que  $\Psi\left(x + \frac{1}{2} h_i\right)$  est nulle sur  $\mathbf{K}i - \left(\mathbf{K} - \frac{1}{2} h_i\right)$ ; par suite :

$$\int_{\mathbf{K}} \nabla_i u(x) \bar{\Psi}(x) dx = \int_{\mathbf{K}i} \frac{u(x) \Psi\left(x - \frac{1}{2} h_i\right)}{h_i} dx - \int_{\mathbf{K}i} \frac{u(x) \Psi\left(x + \frac{1}{2} h_i\right)}{h_i} dx$$

ou encore

$$\int_{\mathbf{K}} \nabla_i u \cdot \bar{\Psi} dx = - \int_{\mathbf{K}i} u \cdot \overline{\nabla_i \Psi} dx$$

mais  $\nabla_i \Psi'$  est nulle hors de  $\mathbf{K}i$  d'où compte tenu de (2.3)

$$\int_{\Omega} u^i \bar{\Psi}' dx = - \int_{\Omega} u \overline{\nabla_i \Psi'} dx \quad \text{C.Q.F.D.}$$

On donne maintenant les fonctions de  $L^2(\Omega)$

$$u^p, \quad p = (p_1, \dots, p_n), \quad |p| \leq m;$$

on écrira  $u$  au lieu de  $u^0 \dots^0$ . On fait 1'

*Hypothèse 2.2.* — Il existe un ouvert  $\Omega_h$  qui approche  $\Omega$  lorsque  $|h| \rightarrow 0$  et tel que :

$$u^p(x) = \nabla^p u(x) \quad \text{p.p. dans } \Omega_h$$

En utilisant la proposition 2.1 il vient la

**PROPOSITION 2.2.** — Si les fonctions  $u^p$  de  $L^2(\Omega)$  vérifient l'hypothèse 2.2 alors :

$$(2.4) \quad (u^p, \Psi)_{L^2(\Omega)} = (-1)^{|p|} (u, \nabla^p \Psi)_{L^2(\Omega)}$$

pour toute fonction  $\Psi$  de  $L^2(\Omega)$  et à support compact contenu dans  $\Omega$  et pour  $|h|$  assez petit.

2.2. — Considérons maintenant une suite de fonctions  $u_h^p$  de  $L^2(\Omega)$ ,  $|p| \leq m$  qui vérifient les hypothèses 2.2 et 2.3.

**Hypothèse 2.3.** — On a

$$\sum_{|p| \leq m} \|u_h^p\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_0, \quad C_0 = \text{Constante.}$$

Nous allons démontrer le

**THÉORÈME 2.1.** — Sous les hypothèses 2.2 et 2.3, il existe une sous-suite  $u_k^p$  extraite de  $u_h^p$  et un élément  $u$  de  $H^m(\Omega)$  tel que :

$$\lim u_k^p = D^p u \quad \text{dans } L^2(\Omega) \text{ faible, } |p| \leq m.$$

*Démonstration.* — De l'hypothèse 2.3 on déduit ceci :

Il existe une sous-suite  $u_k^p$  et des éléments  $u^p$  de  $L^2(\Omega)$  tels que

$$(2.5) \quad \lim u_k^p = u^p \quad \text{dans } L^2(\Omega) \text{ faible, } |p| \leq m,$$

dans (2.4) on prend  $\Psi$  dans  $\mathcal{D}(\Omega)$ , il vient <sup>(3)</sup>

$$(2.6) \quad (u_k^p, \Psi)_{L^2(\Omega)} = (-1)^{|p|} (u_k, \nabla^p \Psi)_{L^2(\Omega)}.$$

On vérifie que :

$$(2.7) \quad \lim \nabla^p \Psi = D^p \Psi \quad \text{dans } L^2(\Omega) \text{ fort, } |p| \leq m$$

Compte tenu de (2.5), (2.6) et (2.7) il vient

$$(u^p, \Psi)_{L^2(\Omega)} = (-1)^{|p|} (u, D^p \Psi)_{L^2(\Omega)}, \quad |p| \leq m$$

et ceci pour toute fonction  $\Psi \in \mathcal{D}(\Omega)$  on a donc

$$u^p = D^p u \quad |p| \leq m$$

et  $u$  dans  $H^m(\Omega)$ .

**Remarque 2.1.** — Dans tout le numéro 2, on obtiendrait des résultats identiques en remplaçant les dérivées au sens

<sup>(3)</sup> En écrivant encore  $u$  au lieu de  $u^0, \dots, u^0$ .

des différences finies par les dérivées au sens des distributions.

Nous allons donner maintenant deux exemples fondamentaux de fonctions  $u_h^p$  qui vérifient l'hypothèse 2.2.

*Exemple 2.1.* — On donne un réseau  $R_h$  de maille  $h = (h_1, \dots, h_n)$  et un ouvert  $\Omega$  de  $R^n$ . On prend pour  $u_h$  une fonction étagée définie sur  $\Omega$  et à valeurs dans  $C$ . On peut alors définir  $\nabla^p u_h(x)$  p.p. dans un ouvert  $\Omega_p$  contenu dans  $\Omega$ . On pose

$$u_h^p(x) = \begin{cases} \nabla^p u_h(x) & \text{si } x \in \Omega_p \\ 0 & \text{si } x \in \Omega - \Omega_p \end{cases}$$

*Exemple 2.2.* — On donne  $R_h$  et  $\Omega$  comme précédemment. On donne des fonctions étagées  $u_h^p$  définies sur  $\Omega$ ,  $|p| \leq m$ , et on suppose qu'il existe une fonction étagée  $u_h$  (définie dans un ouvert assez grand pour que  $\nabla^p u_h(x)$  existe p.p. sur  $\Omega$ ) telle que :

$u_h^p$  est égale à la restriction à  $\Omega$  de  $\nabla^p u_h$ ,  $|p| \leq m$ .

### 3. Les espaces $H^m(\Omega, R_h)$ .

Nous allons construire des espaces qui seront associés (dans le chap. 4 aux espaces de Sobolev  $H^m(\Omega)$ ).

On donne un ouvert  $\Omega$  dans  $R^n$  et un réseau  $R_h$  de maille  $h = (\dots, h_i, \dots)$ .

3.1. — Nous allons définir des ensembles de points que l'on utilise dans la dérivation au sens des différences finies.

**DÉFINITION 3.1.** — i) On désigne par  $\delta_i x$  l'ensemble des deux points  $x + \frac{1}{2} h_i$  et  $x - \frac{1}{2} h_i$ .

ii) On désigne par  $\delta_i \delta_j x$  l'ensemble des points  $\delta_i y$  où  $y \in \delta_j x$ .

iii) On désigne par  $\delta^p x$ ,  $p = (\dots, p_i, \dots)$ ,  $p_i = \text{entier} \geq 0$  l'ensemble des points  $\delta_1^{p_1} \dots \delta_n^{p_n} x$ ; l'ensemble  $\delta^{0, \dots, 0}$  est réduit au seul point  $x$ .

On vérifie que  $\delta_i \delta_j x = \delta_j \delta_i x$ . Posons, si  $x = (\dots, x_i, \dots)$  et si  $p = (\dots, p_i, \dots)$

$$x + \sum_{i=1}^n m_i \frac{1}{2} h_i = \left( \dots, x_i + m_i \frac{1}{2} h_i, \dots \right)$$

$$p - i = (p_1, \dots, p_{i-1}, p_i - 1, p_{i+1}, \dots, p_n).$$

Posons aussi

$$E(p_i) = \{-p_i, -p_i + 2, \dots, p_i - 2, p_i\}.$$

On vérifie que :

$$(3.1) \quad \delta^p x = u \left( x + \sum_{i=1}^n m_i \frac{1}{2} h_i \right) \quad \text{où} \quad m_i \in E(p_i).$$

Ceci entraîne immédiatement

$$(3.2) \quad \text{si } y \in \delta^p x \quad \text{alors} \quad x \in \delta^p y$$

$$(3.3) \quad \text{si } y, y + h_i \in \delta^p x \quad \text{alors} \quad y + \frac{1}{2} h_i \in \delta^{p-i} x$$

DÉFINITION 3.2. — On désigne par

$$\tau(x, r), \quad r = \text{nombre entier} \geq 0,$$

la réunion des  $\delta^p x$ ,  $|p| \leq r$ .

Nous allons établir la

PROPOSITION 3.1. — Il n'y a, au plus, qu'un point de  $\delta^p x$  qui n'appartient pas à la réunion des pavés (du type (C, M),  $M \in R_n$ ) qui coupent  $\tau(x, |p| - 1)$  (i.e. qui contiennent au moins un point de  $\tau(x, |p| - 1)$ ).

Démonstration. — Soient  $y$  et  $z$  dans  $\delta^p x$ ,  $y \neq z$  on a donc

$$y = x + \sum_{i=1}^n r_i \frac{1}{2} h_i$$

$$z = x + \sum_{i=1}^n s_i \frac{1}{2} h_i \quad r_i, s_i \in E(p_i).$$

Puisque  $y \neq z$  il existe un indice  $j$  tel que  $r_j \neq s_j$ ; on suppose que  $r_j < s_j$ : les nombres  $r_j, r_j + 2, \dots, s_j - 2$  et  $s_j$  sont donc des éléments de  $E(p_i)$  et par suite  $y, z, y + h_j, z - h_j \in \delta^p x$  d'où compte tenu de (3.3)

$$y + \frac{1}{2} h_j, z - \frac{1}{2} h_j \in \delta^{p-j} x$$

et a fortiori

$$(3.4) \quad y + \frac{1}{2} h_j, z - \frac{1}{2} h_j \in \tau(x, |p| - 1).$$

Supposons que  $y$  et  $z$  ne soient pas dans la réunion des pavés qui coupent  $\tau(x, |p| - 1)$  et montrons que cela est absurde.



On suppose donc en particulier (voir 3.4) que :

(3.5)  $y$  et  $y + \frac{1}{2}h_j$  ne sont pas dans un même pavé,

(3.6)  $z$  et  $z - \frac{1}{2}h_j$  ne sont pas dans un même pavé.

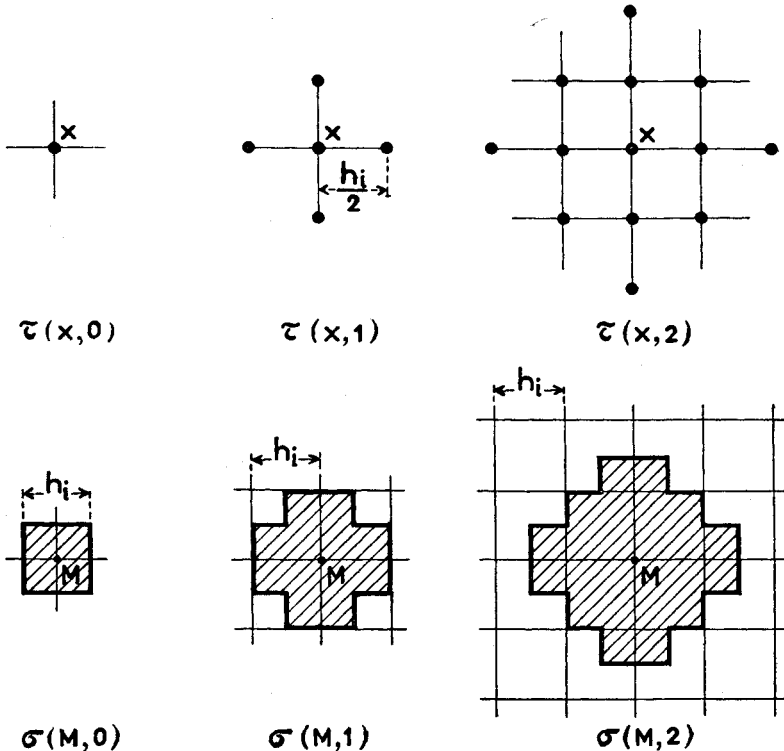
Mais à partir de (3.5) par la translation  $z - y$  il vient

(3.7)  $z$  et  $z + \frac{1}{2}h_j$  ne sont pas dans un même pavé

ce qui est en contradiction avec (3.6).

DÉFINITION 3.3. — On désigne par  $\sigma(M, r)$ , où  $r =$  nombre entier  $\geq 0$ , et où  $M \in \mathbb{R}_n$  l'ensemble des points  $\tau(x, s)$  où  $0 \leq s \leq r$  et où  $x$  est un point quelconque de  $(C, M)$ .

Nous représenterons dans les schémas suivants les ensembles  $\tau(x, 0)$ ,  $\tau(x, 1)$ ,  $\tau(x, 2)$  et les ensembles  $\sigma(M, 0)$ ,  $\sigma(M, 1)$ ,  $\sigma(M, 2)$ .



DÉFINITION 3.4. — On désigne par  $R_h^m$  l'ensemble des nœuds  $M$  de  $R_h$  tels que  $\sigma(M, m)$  coupe  $\Omega$ .

Soit maintenant une suite  $u$ , à valeurs complexes, définie sur  $R_h^m$  et construisons la fonction étagée  $\tilde{u}$  par :

$$(3.8) \quad \begin{cases} \tilde{u}(x) = u(M) & \text{pour tout } x \in (C, M) \\ & \text{pour tout } M \in R_h^m. \end{cases}$$

Montrons que (presque) pour tout  $x \in \Omega$ ,  $\nabla^p \tilde{u}(x)$  a un sens,  $|p| \leq m$ . Il suffit de vérifier pour cela que

$$(3.9) \quad \sigma^p x \subset \cup (C, M), \quad M \in R_h^m, \quad |p| \leq m.$$

Nous ne considérons que les points  $x$  qui sont à l'intérieur des pavés. Soit  $y$  un point quelconque de  $\sigma^p x$ , on a alors  $x \in \sigma^p y$  et par conséquent, si  $y \in (C, P)$ ,  $\sigma(P, m)$  coupe  $\Omega$  et  $P \in R_h^m$  d'où (3.9). Nous pouvons donc poser la

DÉFINITION 3.5. — On désigne par  $H^m(\Omega, R_h)$  l'espace des  $(\dots, u^p, \dots)$ ,  $|p| \leq m$ , où les  $u^p$  sont les restrictions à  $\Omega$  des  $\nabla^p \tilde{u}$ ,  $\tilde{u}$  étant définie par (3.8).

THÉORÈME 3.1. — Muni de  $(u, \nu) = \Sigma(u^p, \nu^p)_{L^2(\Omega)}$  l'espace  $H^m(\Omega, R_h)$  est un espace de Hilbert.

Démonstration. — Il suffit de vérifier que l'égalité  $\Sigma \|u^p\|_{L^2(\Omega)}^2 = 0$  entraîne  $u^p = 0$ ,  $|p| \leq m$ . Supposons que

$$(3.10) \quad \Sigma \|u^p\|_{L^2(\Omega)}^2 = 0.$$

Nous allons montrer que :

$$(3.11) \quad \begin{cases} \tilde{u}(y) = 0 & \text{pour tout } y \in \tau(x, r-1) \\ \text{pour tout } y \in \tau(x, r), x \in \Omega, r \in \{0, 1, \dots, m\} \end{cases} \text{ entraîne } \tilde{u}(y) = 0$$

Nous supposons donc que  $\tilde{u}(y) = 0$  pour tout  $y \in \tau(x, r-1)$  ou puisque  $u$  est une fonction étagée que

$$(3.12) \quad \tilde{u}(y) \text{ est nulle sur la réunion des pavés qui coupent } \tau(x, r-1).$$

Soit  $p = (\dots, p_i, \dots)$  tel que  $|p| = r$ . Soit  $x \in \Omega$ , l'égalité

(3.10) entraîne  $\nabla^p \tilde{u}(x) = 0$ , mais nous savons que  $\nabla^p \tilde{u}(x)$  est une combinaison linéaire des  $\tilde{u}(y)$ ,  $y \in \delta^p x$ , on a donc

$$(3.13) \quad \nabla^p \tilde{u}(x) = \sum \lambda(y) \tilde{u}(y) = 0 \quad y \in \delta^p x$$

(les coefficients  $\lambda(y)$  ne dépendent pas de  $\tilde{u}$ ).

Si maintenant, on tient compte de (3.12), (3.13) et de la proposition 3.1, il vient  $\tilde{u}(y) = 0$  pour tout  $y \in \delta^p x$ , pour tout  $p$  tel que  $|p| = r$  et par conséquent

$$\tilde{u}(y) = 0, \quad \forall y \in \tau(x, r), \quad x \in \Omega. \quad \text{C.Q.F.D.}$$

La vérification de  $\tilde{u}(y) = 0$  pour tout  $y \in \tau(x, 0)$ ,  $x \in \Omega$  est triviale. Pour terminer la démonstration du théorème il suffit d'ajouter ceci : Soit  $M$  un point de  $R_n^*$ , il existe alors  $p, x, y$ , tels que :

$$y \in (C, M), \\ y \in \delta^p x, \quad x \in \Omega, \quad |p| \leq r$$

et puisque on vient de montrer que  $\tilde{u}(y) = 0$ , on a

$$\tilde{u}(M) = \tilde{u}(y) = 0.$$

**4. Normes dans  $L^2(\Gamma)$  des traces des fonctions de  $H^1(\Omega, R_n)$ .**

On sait que pour tout  $\varepsilon$  positif donné d'avance et pour tout  $u \in H^1(\Omega)$  on a :

$$\|\gamma u\|_{L^2(\Gamma)}^2 \leq \varepsilon \cdot \sum_{i=1}^n \|D_i u\|_{L^2(\Omega)}^2 + C(\varepsilon) \cdot \|u\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

$C(\varepsilon) > 0$ ,  $C(\varepsilon)$  indépendant de  $u$ ,  $\gamma u$  est la trace de  $u$  sur  $\Gamma$  (cf. [5]). Nous allons établir une inégalité analogue par les éléments de  $H^1(\Omega, R_n)$ .

4.1. — Soit  $M$  un point quelconque de  $R^n$ . Nous considérons une suite  $u$ , à valeurs dans  $C$ , définie sur

$$M + p h_i, \quad p = 0, 1, \dots, N$$

$N$  étant un nombre entier positif donné, et nous posons

$$u(p) = u(M + p h_i), \\ \tilde{\nabla}_i u(p) = \tilde{\nabla} u|_p = \frac{u(p+1) - u(p)}{h_i}.$$

Soit la fonction  $\theta$

$$\theta(p) = 1 - \frac{p}{N}$$

Pour toute fonction  $u$ , on a

$$(4.1) \quad |u(0)|^2 = -h_i \cdot \sum_{p=0}^{N-1} \tilde{\nabla}(u \cdot \bar{u} \cdot \theta)$$

puisque  $\theta$  vaut 1 pour  $p = 0$  et 0 pour  $p = N$ . On vérifie la formule de dérivation suivante

$$(4.2) \quad (u \cdot v \cdot w) \cdot (p) = u(p+1) v(p+1) \tilde{\nabla} w(p) \\ + u(p+1) (\tilde{\nabla} v(p)) w(p) \\ + (\tilde{\nabla} u(p)) v(p) w(p)$$

et par suite, il vient dans (4.1)

$$\left\{ \begin{aligned} |u(0)|^2 = -h_i \sum_{p=0}^{N-1} \left[ u(p+1) \bar{u}(p+1) \left( -\frac{1}{N h_i} \right) \right. \\ \left. + u(p+1) (\overline{\nabla} u(p)) \cdot (p) \right. \\ \left. + (\tilde{\nabla} u(p)) \cdot \bar{u}(p) \cdot \theta(p) \right] \end{aligned} \right.$$

et puisque  $0 \leq \theta(p) \leq 1$  pour  $p = 0, 1, \dots, N-1$  on a

$$|u(0)|^2 \leq h_i \sum_{p=0}^{N-1} \frac{1}{N h_i} |u(p+1)|^2 + h_i \sum_{p=0}^{N-1} |u(p+1)| |\tilde{\nabla} \bar{u}(p)| \\ + h_i \sum_{p=0}^{N-1} |u(p)| |\tilde{\nabla} u(p)|.$$

En utilisant l'inégalité

$$(\Sigma ab) \leq (\Sigma a^2)^{1/2} \cdot (\Sigma b^2)^{1/2}$$

et en majorant (par modification de l'intervalle de sommation) il vient

$$(4.3) \quad \left\{ \begin{aligned} |u(0)|^2 \leq h_i \cdot \sum_{p=0}^N \frac{1}{N h_i} |u(p)|^2 \\ + 2h_i \left( \sum_{p=0}^N |u(p)|^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{p=0}^{N-1} |\tilde{\nabla} u(p)|^2 \right)^{1/2} \\ \text{où } u(p) = u(M + p h_i). \end{aligned} \right.$$

4.2. — Nous allons introduire maintenant la notion de famille  $(\Sigma, R_h)$  pré-régulière. On donne un ouvert  $\Omega$  dans  $R^n$  de frontière  $\Gamma$  et on désigne par  $\Sigma$  une partie de  $\Gamma$ . On donne un réseau  $R_h$  de maille  $h = (\dots, h_i, \dots)$ .

**DÉFINITION 4.1.** — *Un point  $M$  de  $R_h$  est dit point frontalier de  $\Sigma$  si le pavé  $(C, M)$  coupe  $\Sigma$ .*

*Notations.* — On pose pour simplifier :

$$\begin{aligned} \Omega M &= \Omega \cap (C, M), \\ \Sigma M &= \Sigma \cap (C, M). \end{aligned}$$

*Définition 4.2.* — A. La famille  $(\Sigma, R_h)$  est pré-régulière si pour tout point M frontalier de  $\Sigma$  il existe au moins un

$$i \in \{1, \dots, n\}$$

tel que :

- 1)  $h_i$  mes.  $\Sigma M \leq C$  mes.  $\Omega M$ .
- 2) Un des deux ensembles suivants est contenu dans  $\Omega$  :

$$\begin{aligned} \Sigma M + \rho h_i, & \quad 0 < \rho h_i < l, \\ \Sigma M - \rho h_i, & \quad 0 < \rho h_i < l. \end{aligned}$$

- 3) Les constantes positives  $l$  et  $C$  sont indépendantes de  $M$ .

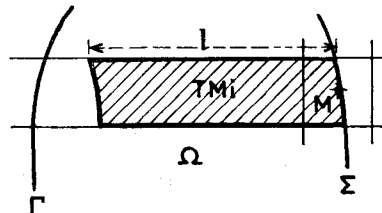
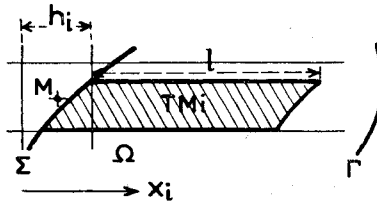
B. 1) Le nombre  $i$  est appelé indice de régularité de  $M$ ,

- 2) Si  $\Sigma M + \rho h_i \subset \Omega$  le point  $M$  est dit *i-gauche*,  
si  $\Sigma M - \rho h_i \subset \Omega$  le point  $M$  est dit *i-droite*.

3) Celui des deux ensembles précédents qui est contenu dans  $\Omega$  est appelé tube  $TM_i$ .

Notons ceci : un point  $M$  peut avoir plusieurs indices de régularité.

Les schémas suivants représentent les tubes  $TM_i$  associés à des points *i-gauche* et *i-droite*.



4.3. — On donne un élément  $u = (u_0, u^1, \dots, u^n) \in H^1(\Omega, R_h)$  voir la définition de  $H^1(\Omega, R_h)$  dans le numéro précédent. On sait qu'il existe une fonction étagée  $\tilde{u}$  et que

$$(4.4) \quad u_0 \text{ et } u^i \text{ sont les restrictions à } \Omega \text{ de } \tilde{u} \text{ et } \nabla_i \tilde{u}$$

On fait l'hypothèse suivante :

$$(4.5) \quad \text{la famille } (\Sigma, R_h) \text{ est pré-régulière.}$$

Nous allons établir le

**THÉORÈME 4.1.** — *Sous l'hypothèse (4.5) on a :*

$$\|\gamma u_0\|_{L^2(\Sigma)}^2 \leq C_0 \cdot \|u_0\|_{L^2(\Omega)} \cdot \sum_{i=1}^n \|u^i\|_{L^2(\Omega)} + C_1 \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2$$

pour tout  $u = (u_0; u^1, \dots, u^n) \in H^1(\Omega; R_h)$ ; les constantes positives  $C_0$  et  $C_1$  sont indépendantes de  $u$  et de  $h$ ,  $\Sigma$  est une partie de  $\Gamma$ .

*Démonstration.* — Soit  $M$  un point frontalier de  $\Sigma$  et supposons que  $M$  soit un point  $i$ -gauche. On définit alors le nombre entier  $N$  par :

$$(N + 1)h_i \leq l \leq (N + 2)h_i$$

et par conséquent pour  $h_i$  petit (par exemple  $h_i < \frac{l}{4}$ ) on a

$$(4.6) \quad \frac{1}{Nh_i} < \frac{l}{2}$$

On obtient sans difficultés les résultats suivants :

$$(4.7) \quad \begin{cases} \Omega M + ph_i \subset \Omega & p = 0, 1, \dots, N \\ \Omega M + \left(p + \frac{1}{2}\right)h_i \subset \Omega & p = 0, \dots, N - 1 \end{cases}$$

et

$$(4.8) \quad \begin{cases} u_0(x) = \tilde{u}(M + ph_i) & \text{pour tout } x \in \Omega M + ph_i \\ u^i(x) = \tilde{\nabla} \tilde{u}(M + ph_i) & \text{pour tout } x \in \Omega M + \left(p + \frac{1}{2}\right)h_i \end{cases}$$

En combinant (4.3), (4.6), (4.7) et (4.8) il vient :

$$(4.9) \quad \left\{ \begin{aligned} |u(M)|^2 \text{mes.} \Omega M &\leq h_i \frac{2}{l} \int_{\Gamma M_i} |u_0(x)|^2 dx \\ + 2h_i \left( \int_{\Gamma M_i} |u_0(x)|^2 dx \right)^{1/2} \cdot \left( \int_{\Gamma M_i} |u^i(x)|^2 dx \right)^{1/2}. \end{aligned} \right.$$

On a maintenant

$$\int_{\Sigma M} |u_0(x)|^2 d\sigma = |\tilde{u}(M)|^2 \text{mes } \Gamma M$$

et puisque la famille  $(\Sigma, R_h)$  est régulière on a :

$$(4.10) \quad \int_{\Sigma M} |u_0(x)|^2 d\sigma \leq C |\tilde{u}(M)|^2 \cdot \frac{\text{mes } \Omega M}{h_i}.$$

En combinant (4.9) et (4.10) il vient :

$$(4.11) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_{\Sigma M} |u_0(x)|^2 d\sigma &\leq \frac{2C}{l} \int_{\Gamma M_i} |u_0(x)|^2 dx \\ + 2C \left( \int_{\Gamma M_i} |u_0(x)|^2 dx \right)^{1/2} \cdot \left( \int_{\Gamma M_i} |u^i(x)|^2 dx \right)^{1/2}. \end{aligned} \right.$$

Pour obtenir une majoration de  $\int_{\Sigma} |u_0(x)|^2 d\sigma$  il suffit de faire une sommation en M des inégalités (4.11). Si de plus on tient compte du fait que tout point  $x \in \Omega$  est contenu au plus dans  $2n$  tubes (2 par direction) il vient l'inégalité :

$$\int_{\Sigma} |u_0(x)|^2 d\sigma \leq \frac{4Cn}{l} \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^n 4Cn \|u_0\|_{L^2(\Omega)} \|u^i\|_{L^2(\Omega)}$$

que nous pouvons écrire sous la forme

$$(4.12) \quad \left\{ \begin{aligned} \|\gamma u_0\|_{L^2(\Sigma)}^2 &\leq C_0 \|u_0\|_{L^2(\Omega)} \cdot \sum_{i=1}^n \|u^i\|_{L^2(\Omega)} + C_1 \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ \text{les constantes positives } C_0 \text{ et } C_1 &\text{ sont indépendantes} \\ &\text{de } u \text{ et de } h. \end{aligned} \right.$$

A partir du théorème précédent, on obtient le :

**THÉORÈME 4.2.** — *Sous l'hypothèse (4.5), pour tout  $\varepsilon > 0$  donné d'avance on a :*

$$(4.13) \quad \|u_0\|_{L^2(\Sigma)}^2 \leq \varepsilon \sum_{i=1}^n \|u^i\|_{L^2(\Omega)}^2 + C(\varepsilon) \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2$$

pour tout  $u = (u_0; u^1, \dots, u^n) \in H^1(\Omega, R_h); C(\varepsilon) > 0, C(\varepsilon)$  ne dépend ni de  $h$  ni de  $u$ .

On démontrerait le théorème, sans difficulté, en utilisant (4.12) et l'inégalité :

$$2ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{1}{\varepsilon} b^2.$$

### 5. Convergence des traces des fonctions étagées.

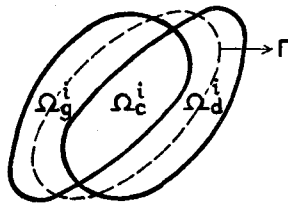
On donne un ouvert  $\Omega$  borné dans  $R^n$  de frontière régulière  $\Gamma$  et un réseau  $R_h$  de maille  $h = (\dots, h_i, \dots)$ .

*Notations.* — Nous allons introduire des sous-ensembles de  $R^n$

$$\Omega_c^i = \left( \Omega + \frac{1}{2} h_i \right) \cap \left( \Omega - \frac{1}{2} h_i \right)$$

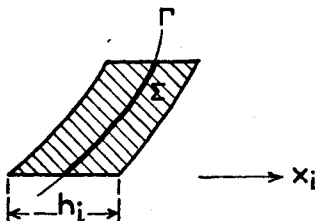
$$\Omega_g^i = \left( \Omega - \frac{1}{2} h_i \right) - \Omega_c^i$$

$$\Omega_d^i = \left( \Omega + \frac{1}{2} h_i \right) - \Omega_c^i.$$



On donne maintenant une partie  $\Sigma$  de  $\Gamma$  et on pose

$$\Sigma_h^i = \Sigma + \rho \frac{1}{2} h_i, \quad -1 < \rho < +1.$$





Si  $M$  est un point frontalier, on sait que  $\Sigma M = \Sigma \cap (C, M)$ , et on pose

$$\Sigma M_h^i = \Sigma M + \rho \frac{1}{2} h_i, \quad -1 < \rho < +1.$$

Espace  $H(D_i, \Omega)$ . — C'est l'espace des  $u \in L^2(\Omega)$  tels que  $D_i u \in L^2(\Omega)$ . On montre que muni de la norme

$$(\|D_i u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u\|_{L^2(\Omega)}^2)^{1/2}$$

c'est un espace de Hilbert voir [11].

5.1. — On suppose que la partie  $\Sigma$  de  $\Gamma$  est telle que :

$$(5.1) \quad \Sigma_h^i \subset \Omega_a^i.$$

On donne les fonctions  $u_h$  vérifiant

$$(5.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_h \text{ est définie sur } \Omega \cup \left( \Omega + \frac{1}{2} h_i \right) \cup \left( \Omega - \frac{1}{2} h_i \right) \\ \text{et a valeurs dans } C \end{array} \right\}$$

et on construit à partir de  $u_h$  les fonctions  $u_0^h$  et  $u_h^i$ .

$$(5.3) \quad u_0^h \text{ et } u_h^i \text{ sont les restrictions à } \Omega \text{ de } u_h \text{ et de } \nabla_i u_h.$$

On suppose que :

$$(5.4) \quad \|u_h^i\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u_0^h\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \quad C = \text{constante} > 0$$

$$(5.5) \quad \gamma u_0^h \text{ converge dans } L^2(\Sigma) \text{ faible vers un élément } \bar{u} \text{ de } L^2(\Sigma).$$

$$(5.6) \quad u_h \text{ est indépendant de } x_i \text{ sur } \Sigma_h^i.$$

Nous allons démontrer le

**THÉORÈME 5.1.** — *Sous les hypothèses (5.4), (5.5), (5.6) il existe une sous-suite  $u_k$  extraite de  $u_h$  et un élément  $u^* \in H(D_1, \Omega)$  tels que :*

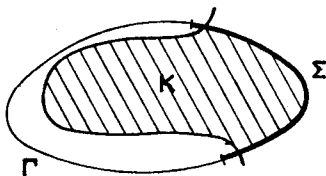
$$(5.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim u_0^k = u^* \quad \text{dans } L^2(\Omega) \text{ faible} \\ \lim u_k^i = D_i u^* \quad \text{dans } L^2(\Omega) \text{ faible} \end{array} \right.$$

$$(5.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} u = \bar{u} \\ \text{ou encore} \\ \lim u_0^k = u^* \quad \text{dans } L^2(\Omega) \text{ faible} \end{array} \right.$$

*Démonstration.* — On obtient (5.7) à partir de (5.3) et de (5.4) par un raisonnement identique à celui du théorème 2.1.

Soit maintenant une fonction  $\Psi$  telle que

$$(5.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Psi \text{ est indéfiniment différentiable sur } \bar{\Omega} \\ \Psi(x) = 0 \text{ pour tout } x \text{ appartenant à un voisinage} \\ \text{de } \Gamma - \Sigma. \end{array} \right.$$



Le support de  $\Psi$  sera désigné par  $K$ , compte tenu de (5.3) on peut écrire

$$\int_{\Omega} u_h^i \Psi dx = \frac{1}{h_i} \int_{\Omega} \left( u_h \left( x + \frac{1}{2} h_i \right) - u \left( x - \frac{1}{2} h_i \right) \right) \cdot \Psi(x) dx$$

d'où

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_h^i \Psi dx &= \frac{1}{h_i} \int_{\Omega + \frac{1}{2} h_i} u_h(x) \Psi \left( x - \frac{1}{2} h_i \right) dx \\ &\quad - \frac{1}{h_i} \int_{\Omega - \frac{1}{2} h_i} u_h(x) \Psi \left( x + \frac{1}{2} h_i \right) dx \end{aligned}$$

et en utilisant (5.9) il vient

$$(5.10) \quad \int_{\Omega} u_h^i \Psi dx = - \int_{\Omega_c} u_h(x) \nabla_i \Psi(x) dx + \frac{1}{h_i} \int_{\Sigma_h^i} u_h(x) \Psi \left( x - \frac{1}{2} h_i \right) dx.$$

Si maintenant on passe à la limite dans (5.10), en utilisant (5.7) il vient

$$\lim \frac{1}{h_i} \int_{\Sigma_h^i} u_h(x) \Psi \left( x - \frac{1}{2} h_i \right) dx = \int_{\Omega} D_i u^* \Psi dx + \int_{\Omega} u^* D_i \Psi dx$$

et par conséquent

$$(5.11) \quad \lim \frac{1}{h_i} \int_{\Sigma_h^i} u_h(x) \Psi \left( x - \frac{1}{2} h_i \right) dx = \int_{\Sigma} \gamma u^* \gamma \Psi dx'_i$$

où  $dx'_i = dx_i \dots dx_{i-1} \cdot dx_{i+1} \dots dx_n$ .

A tout point  $x = (\dots, x^i, \dots) \in \Sigma_h^i$  on associe le point  $\bar{x} = (\dots, \bar{x}_i, \dots) \in \Sigma$  déduit de  $x$  par une translation parallèle au  $i^{\text{ème}}$  axe, c'est-à-dire que

$$\bar{x}_j = x_j \quad \text{pour tout } j \neq i, \bar{x} \in \Sigma.$$

On sait (voir (5.6)) que :

$$(5.12) \quad u_h(x) = u_h(\bar{x}) \quad \text{pour tout } x \in \Sigma_h^i, \bar{x} \in \Sigma$$

Par une intégration en  $dx_i$ , on a :

$$(5.13) \quad \frac{1}{h_i} \int_{\Sigma_h^i} u_h(x) \Psi \left( x - \frac{1}{2} h_i \right) dx = \int_{\Sigma} u_h(\bar{x}) \Psi_h(\bar{x}) dx'_i$$

où

$$(5.14) \quad \Psi_h(\bar{x}) = \frac{1}{h_i} \int_{\bar{x}_i - \frac{1}{2} h_i}^{\bar{x}_i + \frac{1}{2} h_i} \Psi \left( x - \frac{1}{2} h_i \right) dx_i \quad x \in \Sigma.$$

Puisque  $\Psi(x)$  est indéfiniment différentiable sur  $\bar{\Omega}$  on a :

$$\lim \Psi_h = \gamma \Psi \quad \text{dans } L^2(\Sigma) \text{ fort.}$$

En passant à la limite dans (5.13) compte tenu de (5.5) et de (5.14) il vient :

$$\lim \frac{1}{h_i} \int_{\Sigma_h^i} u_h(x) \Psi \left( x - \frac{1}{2} h_i \right) dx = \int_{\Sigma} \bar{u} \gamma \Psi dx'_i$$

ce qui donne avec (5.11)

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Sigma} \bar{u} \gamma \Psi dx'_i = \int_{\Sigma} u^* \gamma \Psi dx'_i \\ \text{pour tout } \Psi \text{ vérifiant (5.9)} \end{array} \right.$$

d'où le résultat (5.8) que nous cherchions à établir.

*Notons ceci* : on aurait pu remplacer l'hypothèse

$$\Sigma_h^i \subset \Omega_d^i \text{ par } \Sigma_h^i \subset \Omega_g^i.$$

5.2. — *Conséquence I* : Soit  $\Gamma_1$  une partie de  $\Gamma$ . Soit

$$u_h = (u_0^h; \dots, u_h^i, \dots) \in H^1(\Omega, R_h)$$

telle que

$$(5.15) \quad \|u_h\|_{H^1(\Omega, R_h)} \leq C, \quad C = \text{constante} > 0$$

$$(5.16)$$

$$\gamma u_0^h(x) = \gamma u_h^i(x) = 0 \quad \text{pour tout } x \in \Gamma_1, i = l, \dots, n.$$

On recouvre  $\Gamma_1$  par des parties  $\Sigma_i$  de  $\Gamma$  que vérifient  $(\Sigma_i)_h^i \subset \Omega_g^i$

ou  $(\Sigma_t)_h^i \subset \Omega_d^i$  (l'indice  $i$  dépendant de  $t$ ). Il est clair que les hypothèses du théorème précédent sont vérifiées et qu'en particulier  $\gamma u_0^h$  converge vers 0 sur  $\Gamma_1$ . En combinant les théorèmes (2.1) et (5.1) on obtient le :

**THÉORÈME 5.2.** — *Sous les hypothèses (5.15) et (5.16) il existe une sous-suite  $u_k$  extraite de  $u_h$  et un élément  $u^* \in H^1(\Omega)$  tels que :*

$$\begin{aligned} \lim u_0^k &= u^* \\ \lim u_k^i &= D_i u^* \quad i = 1, \dots, n \\ \gamma u^* &= 0 \quad \text{sur } \Sigma_1. \end{aligned}$$

5.3. — *Conséquence II :*

On donne une partie  $\Gamma_1$  de  $\Gamma$  et on pose la

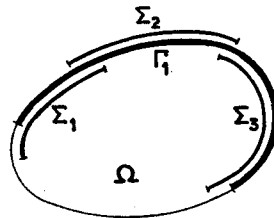
**DÉFINITION 5.1.** — *La famille  $(\Gamma_1, R_h)$  est dite régulière s'il existe un recouvrement fini de  $\Gamma_1$  par des parties  $\Sigma_t$  de  $\Gamma$  qui possèdent les propriétés suivantes :*

- 1) *Toutes les familles  $(\Sigma_t, R_h)$  sont pré-régulières.*
- 2) *Pour chaque  $\Sigma_t$  il existe un  $i = i(t) \in \{1, \dots, n\}$  appelé indice de régularité de  $\Sigma_t$  tel que :*
  - j) *Ce nombre  $i$  soit un indice de régularité commun à tous les points frontaliers de  $\Sigma_t$ .*
  - jj) *Ces points frontaliers sont tous du même type : de plus s'ils sont du type  $i$ -gauche (Resp.  $i$ -droite) on a :*

$$(\Sigma_t)_h^i \subset \Omega_g^i \quad \text{Resp.} \quad ((\Sigma_t)_h^i \subset \Omega_d^i).$$

*Exemple.* — Dans le schéma ci-dessous, la famille  $(\Gamma_1, R_h)$  est régulière si :

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} h_1 \cdot \text{mes } \Gamma \cap (C, M) \leq C \cdot \text{mes } \Omega \cap (C, M) \\ \text{pour tout point } M \text{ frontalier de } \Sigma_1 \text{ ou de } \Sigma_3 \end{array} \right. \\ \text{et si} & \left\{ \begin{array}{l} h_2 \cdot \text{mes } \Gamma \cap (C, M) \leq C \cdot \text{mes } \Omega \cap (C, M) \\ \text{pour tout point } M \text{ frontalier de } \Sigma_2. \end{array} \right. \end{aligned}$$



Notons ceci : Une partie  $\Sigma_i$  peut avoir plusieurs indices de régularité. Deux parties  $\Sigma_{i_1}$  et  $\Sigma_{i_2}$  n'ont pas nécessairement un même indice de régularité. Soit maintenant un élément  $u_h = (u_0^h, \dots, u_h^i, \dots) \in H^1(\Omega, R_h)$ . On sait qu'il existe une fonction étagée  $\tilde{u}_h$  telle que :

$$(5.17) \quad u_0^h \text{ et } u_h^i \text{ sont les restrictions à } \Omega \text{ de } \tilde{u}_h \text{ et de } \nabla_i \tilde{u}_h$$

On suppose que :

$$(5.18) \quad \|u_h\|_{H^1(\Omega, R_h)} \leq C_1 \quad C_1 = \text{constante} > 0$$

et que

$$(5.19) \quad \text{la famille } (\Gamma_1, R_h) \text{ est régulière.}$$

Nous allons établir le

**THÉORÈME 5.3.** — *Sous les hypothèses 5.18 et 5.19 il existe une sous-suite  $u_k$  extraite de  $u_h$  et un élément  $u^* \in H^1(\Omega)$  tels que :*

$$(5.20) \quad \begin{cases} \lim u_0^h = u^* & \text{dans } L^2(\Omega) \text{ faible} \\ \lim u_h^i = D_i u^* & \text{dans } L^2(\Omega) \text{ faible} \end{cases}$$

$$(5.21) \quad \lim \gamma u_0^h = \gamma u^* \quad \text{dans } L^2(\Gamma_1) \text{ faible}$$

*Démonstration.* — Les relations (5.20) sont des conséquences immédiates de (5.18) et du théorème 2.1. D'autre part, puisque  $\|u_h\|_{H^1(\Omega, R_h)}$  est borné, d'après le théorème 4.1. Il en est de même pour  $\|u_0^h\|_{L^2(\Gamma_1)}$  et par conséquent on peut extraire une sous-suite notée  $\gamma u_0^k$  qui converge faiblement dans  $L^2(\Gamma_1)$  vers un élément  $\bar{u} \in L^2(\Gamma_1)$

$$(5.22) \quad \lim \gamma u_0^k = \bar{u} \quad \text{dans } L^2(\Gamma_1) \text{ faible.}$$

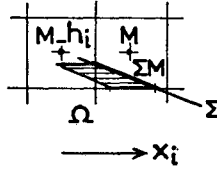
Nous allons montrer que  $\bar{u} = \gamma u^*$ .

Soit  $\Sigma$  une partie du recouvrement de  $\Gamma_1$  et supposons que  $i$  soit un indice de régularité de  $\Sigma$  et que  $\Sigma_h^i \subset \Omega_a^i$ . A partir de  $\tilde{u}_h$  (voir (5.17)) on construit les fonctions  $\nu_h$  par

$$\begin{aligned} \nu_h(x) &= u_h(x) & \text{pour tout } x \in \Omega - \Omega \cap \Sigma_h^i \\ \nu_h(x) &= u_h(M - h_i) & \text{pour tout } x \in (\Sigma M)_h^i \end{aligned}$$

$M$  étant un point frontalier quelconque de  $\Sigma$ .

Ainsi dans la partie hachurée  $\varphi_h(x)$  vaut  $\tilde{u}_h(M - h_i)$ .



On vérifie sans difficultés que

$$\|\varphi_h^i\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\varphi_0^h\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq c_1$$

(où  $\varphi_h^i$  et  $\varphi_0^h$ ) désignent les restrictions à  $\Omega$  de  $\nabla_i \varphi_h$  et de  $\varphi_h$  et que  $\varphi_0^h$  et  $\varphi_h^i$  convergent vers  $u^*$  et  $D_i u^*$  dans  $L^2(\Omega)$  faible. Admettons un instant la relation :

$$(5.23) \quad \lim \|\gamma \varphi_0^h - \gamma u_0^h\|_{L^2(\Sigma)} = 0.$$

A partir de cette relation et de (5.22) on obtient

$$(5.24) \quad \lim \gamma \varphi_0^h = \bar{u} \quad \text{dans } L^2(\Sigma) \text{ faible}$$

On peut donc appliquer le théorème 5.1 à la fonction  $\varphi_h$  et par conséquent

$$\lim \gamma \varphi_0^h = \gamma u^* \quad \text{dans } L^2(\Sigma) \text{ faible}$$

d'où compte tenu de (5.24)

$$\bar{u}(x) = \gamma u^*(x) \quad \text{p.p. sur } \Sigma.$$

En recommençant le même raisonnement pour toutes les parties  $\Sigma_i$  du recouvrement de  $\Gamma_1$  on obtient (5.8).

*Vérification de la relation (5.24).*

Par construction de  $\varphi_h$ , voir le dessin précédent, on a

$$\begin{cases} \varphi_0^h(x) - u_0^h(x) = u_h(M - h_i) - u_h(M) \\ \text{pour tout } x \in \Sigma M \end{cases}$$

par conséquent :

$$|\varphi_0^h(x) - u_0^h(x)|^2 = h_i^2 \left| \frac{u_h(M) - u_h(M - h_i)}{h_i} \right|^2$$

et on a :

$$(5.25) \quad \int_{\Sigma_M} |\nu_0^h(x) - u_0^h(x)|^2 d\sigma \leq h_i^2 \left| \frac{u_h(M) - u_h(M - h_i)}{h_i} \right|^2 \text{mes. } \Sigma_M.$$

Or, la famille  $(\Sigma, R_h)$  étant régulière on sait que

$$(5.26) \quad h_i \text{mes } \Sigma_M \leq C \text{mes } \Omega_M$$

et comme sur  $\Omega_M - \frac{1}{2} h_i$ ,  $\nabla_i u_h(x)$  est égal à  $\frac{u_h(M) - u_h(M - h_i)}{h_i}$  en combinant (5.25) et (5.26) il vient

$$\int_{\Sigma_M} |\nu_0^h(x) - u_0^h(x)|^2 d\sigma \leq C \cdot h_i \int_{\Omega_M - \frac{1}{2} h_i} |\nabla_i u_h|^2 dx$$

par une sommation en M et par majoration portant sur le domaine des intégrales du second membre on obtient

$$\int_{\Sigma} |\nu_0^h(x) - u_0^h(x)|^2 d\sigma \leq C \cdot h_i \int_{\Omega} |\nabla_i u_h(x)|^2 dx$$

et comme l'intégrale du 2<sup>e</sup> membre est bornée la relation (5.24) est vérifiée.

### 6. Une classe de fonctions étagées.

On donne un ouvert  $\Omega$  borné dans  $R^n$ , et un réseau  $R_h$  de maille  $h = (h_1, \dots, h_n)$  *exceptionnellement* dans ce numéro et dans le suivant nous poserons

$$\nabla_i u = \frac{u(x + h_i) - u(x)}{h_i}.$$

Nous désignons par  $R_h^i$  l'ensemble des points M de  $R_h$  tels que les trois pavés  $(0, M + \theta h_i)$ ,  $\theta = -1, 0, +1$ , soient contenus dans  $\Omega$ ;  $i$  est un nombre *donné* dans  $\{1, \dots, n\}$ . Désignons par  $V_h^i$  l'espace des fonctions étagées définies sur  $\Omega$  a valeurs dans  $C$  et qui vérifient

$$(6.1) \quad \begin{cases} u(x) \text{ est constant sur tout pavé } (0, M), M \in R_h^i \\ u(x) = 0 \text{ aux autres points } x \in \Omega. \end{cases}$$

En prolongeant  $u$  par 0 à l'extérieur de  $\Omega$  (\*) on peut ainsi définir  $\nabla_i u(x)$  pour tout  $x \in \Omega$ . Nous allons démontrer la

**PROPOSITION 6.1.** — *Muni de la norme  $\|\nabla_i u\|_{L^2(\Omega)}^2$  l'espace  $V_h^i$  est un espace de Hilbert, et de plus*

$$(6.2) \quad \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \cdot \|\nabla_i u\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall u \in V_h^i$$

(la constante positive  $C$  est indépendante de  $h$ ).

*Démonstration.* — Soit  $M \in R_h$  tel que :

$$(C, M - h_i) \quad \text{et} \quad (C, M + (p + 1)h_i) \quad \text{coupent } \Omega \\ (C, M + qh_i) \subset \Omega \quad q = 0, 1, \dots, p.$$

Puisque par hypothèse  $u(M) = 0$ , on a :

$$u(M + qh_i) = h_i \sum_{r=0}^{q-1} \nabla_i u(M + rh_i) \quad q = 1, \dots, p - 1$$

d'où

$$|u(M + qh_i)|^2 \leq q \cdot h_i^2 \sum_{r=0}^{q-1} |\nabla_i u(M + rh_i)|^2$$

et

$$(6.3) \quad \sum_{q=1}^{p-1} |u(M + qh_i)|^2 \leq (p - 1)^2 h_i^2 \sum_{r=0}^{q-1} |\nabla_i u(M + rh_i)|^2$$

on désigne par  $l$  « l'épaisseur » de  $\Omega$  dans la direction  $x_i$ , donc  $(p - 1)^2 h_i^2 \leq l^2$ ; on pose

$$TM = \cup (C, M + qh_i) \cap \Omega, \quad q = -1, 0, +1, \dots, p + 1;$$

l'égalité (6.3) s'écrit alors

$$\int_{TM} |u(x)|^2 dx \leq l^2 \cdot \int_{TM} |\nabla_i u(x)|^2 dx$$

d'où (6.2) par sommation en  $M$  et d'où la proposition 6.2.

## 7. Définition d'un opérateur de prolongement $\mathcal{E}_h$ .

On donne un ouvert  $\Omega$  borné dans  $R^n$  et un réseau  $R_h$  de maille  $h = (\dots, h_i, \dots)$ . On donne une suite  $u$  définie sur l'ensemble des sommets des pavés qui coupent  $\Omega$  et à valeurs dans  $C$ .

(\*) Ce qui est naturel puisque  $u$  est nul dans un voisinage de la frontière de  $\Omega$ .



*Le prolongement partiel  $\mathcal{F}_h^M$ .*

Soit  $M$  un sommet du réseau, le pavé  $(0, M)$  coupant  $\Omega$ . Pour simplifier les écritures nous supposons que  $M$  est confondu avec l'origine des axes; pour tout

$$x = (\dots, x_i, \dots) \in (0, M)$$

on pose

$$(7.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{F}_h^M u(x) = \nabla_i \dots \nabla_n u(M) \cdot x_i \dots x_n \\ \qquad \qquad \qquad + \sum_{i=1}^n \nabla_i \dots \nabla_{i-1} \cdot \nabla_{i+1} \dots \nabla_n u(M) \cdot \\ \qquad \qquad \qquad x_i \dots x_{i-1} \cdot x_{i+1} \dots x_n + \dots + u(M) \end{array} \right.$$

On vérifie que (cf. [9]).

$$(7.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{F}_h^M u(N) = u(N) \\ \text{pour tout sommet } N \text{ de } (0, M). \end{array} \right.$$

*Le prolongement  $\mathcal{F}_h$ .*

On définit  $\mathcal{F}_h u(x)$ ,  $x \in \Omega$ , par

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{F}_h u(x) = \mathcal{F}_h^M(x) \text{ pour tout } x \in (0, M), \text{ pour tout } M \text{ tel que} \\ (0, M) \text{ coupe } \Omega. \end{array} \right.$$

En tenant compte de (7.2) et de linéarité de  $\mathcal{F}_h u$  par rapport à  $x$  on vérifie que  $\mathcal{F}_h u$  est une fonction continue sur  $\Omega$  et que  $\mathcal{F}_h u \in H^1(\Omega)$ .

## CHAPITRE IV

### APPROXIMATIONS EXTERNES MÉTHODE VARIATIONNELLE DES DIFFÉRENCES FINIES

#### 1. Introduction.

1.1. — Nous allons donner maintenant plusieurs exemples d'approximations externes (voir Définition 2.1, chap. 1). Ces exemples seront présentés de la façon suivante :

i) Le problème exact. On donne le triplet

$$\{V, a(u, v), L(v)\}.$$

ii) Les problèmes approchés : on construit les triplets

$$V_h, a_h(u_h, v_h), L_h(v_h).$$

iii) Le théorème d'approximation.

*Ce théorème d'approximation est toujours un cas particulier du théorème général de convergence forte (chap. 1); aussi il nous suffira, dans chaque exemple, de nous ramener à ce dernier théorème. Il faudra donc introduire des espaces  $F$  et  $\mathcal{V}$ , des opérateurs  $r_h$  et  $p_h$ , et montrer que les hypothèses du théorème 3.2 du chapitre 1 sont vérifiées. Le plan suivi est :*

*Les espaces  $F, V, V_h, \mathcal{V}$  : on construit  $F$  et on montre que  $V$  est un sous-espace fermé de  $F$ , dans de nombreux exemples  $V_h$  sera aussi un sous-espace fermé de  $F$ . On définit  $\mathcal{V}$ , sous-espace dense dans  $V$ .*

*Les opérateurs  $p_h$  et  $r_h$  : Lorsque  $V_h$  est un sous-espace de  $F$ . On prendra pour  $p_h$  l'opérateur identité de  $V_h$  dans  $F$ . Dans le n° 2 où  $V_h$  n'est pas un sous-espace de  $F$ , on montrera*

comment, avec un même espace  $V_h$  on peut obtenir plusieurs schémas d'approximation en construisant plusieurs  $p_h$  différents. On construit ensuite  $r_h$  et on vérifie que

$$(1.1) \quad \lim \|p_h r_h \nu - \nu\|_F = 0 \quad \text{pour tout } \nu \in \mathcal{V}.$$

*Vérification de l'hypothèse K 1.i).*

On donne  $u_h \in V_h$  avec  $\|u_h\|_{V_h}$  bornée; on montre qu'il existe une sous-suite  $u_k$  et un élément  $u^\times$  dans  $V$  tels que

$$(1.2) \quad \lim p_k u_k = u^\times \quad \text{dans } F \text{ faible.}$$

Pour établir (1.2) on aura besoin des théorèmes contenus dans le chapitre 3.

Les autres hypothèses: Dans tous les exemples étudiés, la vérification des autres hypothèses est élémentaire, aussi nous ne la ferons pas. Voici toutefois quelques indications valables pour tous les problèmes étudiés.

$V$  et  $V_h$  — *ellipticité* (des formes  $a(u, \nu)$  et  $a_h(u_h, \nu_h)$ ) c'est une conséquence immédiate des hypothèses faites sur les coefficients  $a_{ij}(x)$ ,  $a_{pq}(x)$ , ..., qui sont introduits dans la définition de  $a(u, \nu)$  et de  $a_h(u_h, \nu_h)$ .

*Hypothèses K 1.ii) et K 2.ii).* On les vérifierait à partir de (1.1).

*Hypothèses K 1.iii) et K 2.iii):* elles sont identiquement vérifiées de façon plus précise, on a pour tout  $u_h \in V_h$

$$\begin{aligned} a_h(u_h, u_h) - a(p_h u_h, p_h u_h) &= 0, \\ L_h(u_h, u_h) - L(p_h u_h, p_h u_h) &= 0. \end{aligned}$$

### 1.2. — Notations. Références.

Dans tous les exemples les éléments  $u$  de  $V$  sont des distributions; en général, on utilise aussi certaines dérivées  $D_i u$ ,  $D^p u$ , ...

Aux éléments

$$u, D_i u, D^p u$$

du problème exact nous associons les éléments

$$u_0^h, u_h^i, u_h^p$$

du problème approché.

*Pour toutes les questions relatives aux problèmes exacts cf. [11].*

## 2. Problèmes de Neumann d'ordre 2.

2.1. — *Le problème exact*: On donne un ouvert  $\Omega$  borné dans  $\mathbb{R}^n$  de frontière régulière  $\Gamma$ . On prend  $V = H^1(\Omega)$ . Pour  $u, \varphi$  dans  $V$  on pose

$$a(u, \varphi) = \int_{\Omega} a_{ij} D_i u \cdot \overline{D_j \varphi} \, dx + \int_{\Omega} a_0 \cdot u \overline{\varphi} \, dx$$

et

$$L(\varphi) = \int_{\Omega} f \overline{\varphi} \, dx$$

où

$$(2.1) \quad \begin{cases} a_{ij}, a_0 \text{ sont données dans } L^\infty(\Omega) \\ f \text{ est donnée dans } L^2(\Omega). \end{cases}$$

De plus, on suppose que

$$(2.2) \quad \begin{cases} \operatorname{Re} \sum a_{ij}(x) \xi_i \bar{\xi}_j \geq \alpha \sum |\xi_i|^2 & \text{p.p. sur } \Omega \\ \operatorname{Re} a_0(x) \geq \alpha & \text{p.p. sur } \Omega \end{cases}$$

où  $\xi_i \in \mathbb{C}$  et  $\alpha =$  constante positive.

*Le problème (P)*. — Déterminer  $u$  dans  $V (= H^1(\Omega))$  tel que

$$a(u, \varphi) = L(\varphi) \quad \text{pour tout } \varphi \in V.$$

Nous allons donner 4 schémas d'approximation de la solution  $u$  du problème (P). Les constructions des problèmes approchés et les démonstrations des théorèmes de convergence sont du même type: Aussi nous n'allons expliciter qu'un seul schéma d'approximation.

2.2. — *Les problèmes approchés (1<sup>er</sup> schéma)*.

On donne un réseau  $R_h$  de maille  $h = (h_1, \dots, h_n)$ . Nous définissons  $V_h^1$  comme l'espace (algébrique pour l'instant) des suites à valeur dans  $\mathbb{C}$  et définies sur un sous-ensemble  $\mathcal{R}_h^1$  de  $R_h$ :

Dans ce 1<sup>er</sup> schéma nous prenons  $\mathcal{R}_h^1 = R_h^1$  (voir définition de  $R_h^1$  dans les « espaces  $H^m(\Omega, R_h)$  » chapitre 3). On donne ensuite un opérateur  $p_h^1$  de  $V_h^1$  dans  $(L^2(\Omega))^{n+1}$ ; Ainsi à toute suite  $u_h$  de  $V_h^1$  est associée la suite  $p_h^1 u_h$  de  $(L^2(\Omega))^{n+1}$ . On écrira  $p_h^1 u_h$  sous la forme

$$p_h^1 u_h = (u_0^1; \dots; u_i^1, \dots) \quad i = 1, \dots, n.$$

*Construction de  $p_h^1$* : Soit  $u_h$  dans  $V_h$ , on construit la fonction étagée  $\tilde{u}_h$  par :

$$\begin{cases} \tilde{u}_h(x) = u_h(M) & \text{pour tout } x \in (C, M) \\ \text{pour tout } M \in \mathcal{R}_h^1 (= \mathcal{R}_h^1). \end{cases}$$

Nous prenons pour  $u_0^h$  et  $u_i^h$  les restrictions à  $\Omega$  des fonctions  $\tilde{u}_h$  et  $\nabla_i \tilde{u}_h$  (on sait que  $\nabla_i \tilde{u}_h(x)$  a un sens p.p. dans  $\Omega$ , voir espaces  $H^m(\Omega, \mathcal{R}_h)$  chap. 3).

On fait maintenant l'hypothèse suivante :

$$(2.3) \quad \begin{cases} \text{la fonction } (\sum \|u_i^h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u_0^h\|_{L^2(\Omega)}^2) \text{ est une} \\ \text{norme (hilbertienne) sur } V_h^1. \end{cases}$$

On prend  $V_h = V_h^1$ .

Pour  $u_h$  et  $v_h$  dans  $V_h$ , on pose

$$a_h(u_h, v_h) = \sum \int_{\Omega} a_{ij} u_i^h \bar{v}_h^j dx + \int_{\Omega} a_0 u_0^h \bar{v}_0^h dx$$

et

$$L_h(v_h) = \int_{\Omega} f \cdot \bar{v}_0^h dx.$$

*Les problèmes approchés  $(P_h)$* . — Déterminer  $u_h$  dans  $V_h$  tel que

$$a_h(u_h, v_h) = L_h(v_h) \quad \text{pour tout } v_h \in V_h$$

2.3. — Nous allons démontrer le

**THÉORÈME 2.1.** — *Sous les hypothèses (2.2) et (2.3) les problèmes (P) et  $(P_h)$  ont des solutions uniques  $u$  et  $u_h$ ; de plus, on a dans  $L^2(\Omega)$  fort*

$$\begin{aligned} \lim u_0^h &= u \\ \lim u_i^h &= D_i u \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Avant de démontrer ce théorème notons ceci: l'espace  $p_h V_h$  est confondu, dans ce 1<sup>er</sup> schéma, avec l'espace  $H^1(\Omega, \mathcal{R}_h)$  défini au chapitre 3, on sait que l'hypothèse (2.3) est vérifiée dans ce cas.

*Démonstration.* — Les espaces  $F, V, V_h, \mathcal{U}$ , nous prenons

$$F = (L^2(\Omega))^{n+1}$$

l'espace  $V$  peut être considéré comme le sous-espace des  $(u_0, \dots, u^i, \dots)$  de  $F$  pour lesquels

$$u^i = D_i u_0 \quad i = l, \dots, n.$$

Nous prenons

$$\mathcal{V} = \mathcal{D}(\overline{\Omega}).$$

*Les opérateurs  $p_h$  et  $r_h$ .*

Nous prenons  $p_h = p_h^1$ . Soit maintenant une fonction  $\varphi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ , nous lui associons la fonction  $\pi\varphi$  (voir chap. 2.2) puis nous posons

$$r_h \varphi(M) = \varphi(M) \quad \text{pour tout } M \in R_h^1$$

il est clair que

$$\begin{cases} \lim p_h r_h \varphi = \varphi & \text{dans } F \text{ fort} \\ \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}). \end{cases}$$

*Vérification de l'hypothèse K 1,i :* Supposons que

$$\Sigma \|u_h^i\|_{L^2(\Omega)} + \|u_0^h\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_0.$$

Par construction de  $p_h u_h = (u_0^h, \dots, u_h^i, \dots)$  il est clair qu'il existe un ouvert  $\Omega_h$  qui approche  $\Omega$  (voir définition 2.1, chap. 3) et tel que sur  $\Omega_h$  on ait

$$u_h^i(x) = \nabla_i u_0^h(x).$$

Par conséquent d'après le théorème 2.1, chapitre 3 il existe une sous-suite  $u_k$  et un élément  $u^\times$  dans  $H^1(\Omega)$  tels que

$$\begin{aligned} \lim u_0^k &= u^\times && \text{dans } L^2(\Omega) \text{ faible} \\ \lim u_k^i &= D_i u^\times && \text{dans } L^2(\Omega) \text{ faible} \end{aligned}$$

donc l'hypothèse K 1,i est vérifiée.

2.4. — *Autres schémas d'approximation :*

Nous allons définir maintenant des espaces  $V_h^k$ ,  $k = 2, 3, 4$ ; Pour cela, commençons par définir des sous-ensembles  $\mathcal{R}_h^k$ , de  $R_h$ ,  $k = 2, 3, 4$  : chacun de ces 3 sous-ensembles est confondu avec l'ensemble des sommets des pavés  $(0, M)$  qui rencontrent  $\Omega$  (i.e.  $(0, M) \cap \Omega \neq \emptyset$ ). L'espace  $V_h^k$ , est l'espace des suites définies sur  $\mathcal{R}_h^k$  et à valeurs dans  $C$  : Ainsi les trois espaces  $V_h^k$  sont confondus (algébriquement). Nous allons définir mainte-

nant des opérateurs  $p_h^k$  de  $V_h^k$  dans  $(L^2(\Omega))^{n+1}$ . Ici encore, nous écrirons  $p_h^k u_h$  sous la forme

$$p_h^k u_h = (u_0^h; \dots, u_h^i, \dots) \quad i = l, \dots, n.$$

Nous allons donner la construction de  $u_0^h, u_h^i$  pour chaque schéma :

*Cas des pavés intérieurs :*  $((0, M) \cap \Omega = (0, M))$ .

On définit  $u_0^h(x)$  et  $u_h^i(x)$  exactement comme dans le 1<sup>er</sup> schéma.

*Cas des pavés frontaliers :*  $((0, M) \cap \Gamma \neq \emptyset)$  :

*Second schéma* (procédé par moyenne) on pose

$$u_0^h(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{N \in M_0} u_h(N),$$

$$u_h^i(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{N \in M_i} \frac{u_h(N + h_i) - u_h(N)}{h_i}$$

(rappelons que  $M_0$  désigne l'ensemble des sommets de  $(0, M)$  et que  $M_i$  désigne l'ensemble des points  $N$  tels que  $N$  et  $N + h_i$  soient des sommets de  $(0, M)$ ).

*Troisième schéma* (procédé par isobarycentre).

Soit  $G$  l'isobarycentre de  $(0, M) \cap \Omega$ . On pose

$$u_0^h(x) = \mathcal{F}_h^M(G),$$

$$u_h^i(x) = D_i \mathcal{F}_h^M(G).$$

On a défini  $\mathcal{F}_h^M(x)$  au chapitre 3 n° 5.

*Quatrième schéma.* — On pose

$$(2.4) \quad \begin{cases} u_0^h(x) = \mathcal{F}_h^M(x) \\ u_h^i(x) = D_i \mathcal{F}_h^M(x). \end{cases}$$

*Résultats :* Pour ces trois schémas, nous pourrions reprendre 2.2 et 2.3, en changeant  $V_h^1, \mathcal{R}_h^1, p_h^1$  en  $V_h^k, \mathcal{R}_h^k, p_h^k$ . On obtiendrait, dans ces 3 approximations, le théorème 2.1. Il existe d'autres schémas, par exemple en définissant  $u_0^h(x)$  et  $u_h^i(x)$  par (2.4), que  $x$  soit dans un pavé intérieur ou frontalier (voir exemple 3.3 chap. 2).

*Au sujet du 1<sup>er</sup> schéma* cf. [12].

2.5. — *Problèmes non homogènes :*

On peut se ramener au cas des problèmes homogènes cf. [10]. Mais cela n'est pas nécessaire : conservons les données, notations et hypothèses du problème exact (n° 2.1) et du 1<sup>er</sup> schéma d'approximation (n° 2.2), en modifiant toutefois la forme linéaire  $L(\nu)$  :

$$L(\nu) = \int_{\Omega} f \cdot \bar{\nu} \, dx + \int_{\Gamma} g \cdot \bar{\gamma \nu} \, d\sigma$$

où  $f$  est donnée dans  $L^2(\Omega)$  et  $g$  est donnée dans  $H^{-1/2}(\Gamma)$  (on peut vérifier, comme dans l'exemple du n° 1.2, chapitre 1 que  $g$  est une « donnée aux limites »). Pour  $\nu_h$  dans  $V_h$  on pose

$$(2.5) \quad L_h(\nu_h) = \int_{\Omega} f \bar{\nu}_0^h \, dx + \int_{\Gamma} g \cdot \bar{\gamma \nu}_0^h \, d\sigma.$$

Il est clair que l'introduction de l'intégrale  $\int_{\Gamma} g \cdot \bar{\gamma \nu} \, d\sigma$  ne change en rien la vérification des hypothèses (K 0) et (K 1); la seule difficulté nouvelle concerne la vérification de l'hypothèse K 2.i). On a :

$$(2.6) \quad \left| \int_{\Omega} f \cdot \nu_0^h \, dx \right| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|\nu_0^h\|_{L^2(\Omega)}$$

et

$$(2.7) \quad \left| \int_{\Gamma} g \cdot \gamma \nu^h \, d\sigma \right| \leq \|g\|_{L^2(\Gamma)} \cdot \|\gamma \nu_0^h\|_{L^2(\Gamma)}$$

mais d'après le théorème 4.1, chapitre 3 il existe une constante  $C$  telle que

$$(2.8) \quad \|\gamma \nu_0^h\|_{L^2(\Gamma)}^2 \leq C(\Sigma \|\nu_h^i\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nu_0^h\|_{L^2(\Omega)}^2)$$

en combinant (2.5), (2.6), (2.7) et (2.8) il vient finalement

$$|L_h(\nu)| \leq C_2(\Sigma \|\nu_h^i\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nu_0^h\|_{L^2(\Omega)}^2)^{1/2}$$

et l'hypothèse K 2 est vérifiée. Le théorème 2.1 est donc encore valable.

## 3. Autres problèmes aux limites d'ordre 2.

3.1. — On prend encore  $V = H^1(\Omega)$ , mais pour  $u, \nu$  dans  $V$  on pose maintenant

$$a(u, \nu) = \Sigma \int_{\Omega} a_{ij} D_i u \overline{D_j \nu} \, dx + \int_{\Omega} a_0 u \bar{\nu} \, dx + \int_{\Gamma} t_0 \gamma u \cdot \bar{\gamma \nu} \, d\sigma$$



où  $\gamma u$  désigne la trace de  $u$  sur  $\Gamma$ ,  $d\sigma$  est « l'élément d'aire » sur  $\Gamma$  et où

$$(3.1) \quad \begin{cases} a_{ij}, a_0 \text{ sont données dans } L^\infty(\Omega) \\ t_0 \text{ est donnée dans } L^\infty(\Gamma). \end{cases}$$

Donc, la forme  $a(u, \nu)$  contient maintenant une *intégrale de surface*. On suppose, encore, que

$$(3.2) \quad \operatorname{Re} \sum a_{ij}(x) \xi_i \bar{\xi}_j \geq \alpha \sum |\xi_i|^2 \quad \text{p.p. sur } \Omega$$

où  $\xi_i \in \mathbb{C}$ ,  $\alpha =$  constante positive, et que

$$(3.3) \quad \operatorname{Re} a_0(x) \geq \beta \quad \text{p.p. sur } \Omega$$

où  $\beta =$  constante positive.

Pour  $\nu$  dans  $H^1(\Omega)$ , on pose

$$L(\nu) = \int_{\Omega} f \cdot \bar{\nu} \, dx$$

où  $f$  est donnée dans  $L^2(\Omega)$ .

*Problème exact (P)* : Déterminer  $u$  dans  $V (= H^1(\Omega))$  tel que

$$a(u, \nu) = L(\nu) \quad \text{pour tout } \nu \in V.$$

Montrons que la forme  $a(u, \nu)$  est  $V$ -elliptique. Nous avons, puisque  $t_0$  est bornée

$$\left| \int_{\Gamma} t_0 |\gamma \nu|^2 \, d\sigma \right| \leq k_1 \int_{\Gamma} |\gamma \nu|^2 \, d\sigma \quad \text{pour tout } \nu \in V$$

(où  $k_1 =$  constante positive). Mais tenant compte du

LEMME 3.1 (cf. [5]). — *Pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $C(\varepsilon) \geq 0$  avec*

$$(3.4) \quad \int_{\Gamma} |\gamma \nu|^2 \, d\sigma \leq \varepsilon \sum \|D_i \nu\|_{L^2(\Omega)}^2 + C(\varepsilon) \|\nu\|_{L^2(\Omega)}^2$$

il vient

$$(3.5) \quad \left| \int_{\Gamma} t_0 |\gamma \nu|^2 \, d\sigma \right| \leq k_1 \varepsilon \sum \|D_i \nu\|_{L^2(\Omega)}^2 + k_1 C(\varepsilon) \|\nu\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

A l'aide de (3.2), (3.3) et (3.5) on a (en supprimant l'indice  $L^2(\Omega)$ )

$$\operatorname{Re} a(\nu, \nu) \geq \alpha \sum \|D_i \nu\|^2 + \beta \|\nu\|^2 - k_1 \varepsilon \sum \|D_i \nu\|^2 - k_1 C(\varepsilon) \|\nu\|^2$$

ou encore

$$\operatorname{Re} a(\nu, \nu) \geq (\alpha - k_1 \varepsilon) \cdot \sum \|D_i \nu\|^2 + (\beta - k_1 \cdot C(\varepsilon)) \cdot \|\nu\|^2$$

prenons, par exemple,  $\varepsilon = \frac{\alpha}{2k_1}$ , il vient

$$\operatorname{Re} a(\varphi, \varphi) \geq \frac{\alpha}{2} \cdot \Sigma \|D_i \varphi\|^2 + \left( \beta - k_1 \cdot C \left( \frac{\alpha}{2k_1} \right) \right) \cdot \|\varphi\|^2.$$

Si

$$(3.6) \quad \beta \text{ est assez grand}$$

alors  $\beta - k_1 \cdot C \left( \frac{\alpha}{2k_1} \right)$  est positif et la forme sesquilinéaire  $a(u, \varphi)$  est V-elliptique (par conséquent le problème (P) a une solution unique).

3.2. — *Les problèmes approchés.* Nous ne donnerons qu'un seul schéma d'approximation (c'est en fait le 1<sup>er</sup> schéma du n<sup>o</sup> 2; l'exposé sera différent car nous n'avons plus en vue les schémas donnés en 2.4).

On donne un réseau  $R_h$  de maille  $h = (h_1, \dots, h_n)$  et on suppose que

$$(3.7) \quad \text{la famille } (\Gamma, R_h) \text{ est régulière.}$$

*Espaces  $V_h$ :* On prend pour  $V_h$  l'espace  $H^1(\Omega, R_h)$  défini au chapitre 3. Les éléments  $u_h$  de  $V_h$  sont notés :

$$u_h = (u_0^h, \dots, u_i^h, \dots) \quad i = 1, \dots, n$$

et on sait que :

$$\|u_h\|_{V_h}^2 = \Sigma \|u_i^h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u_0^h\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Pour  $u_h$  et  $\varphi_h$  dans  $V_h$  on pose

$$a_h(u_h, \varphi_h) = \Sigma \int_{\Omega} a_{ij} u_i^h \bar{\varphi}_j^h dx + \int_{\Omega} a_0 u_0^h \bar{\varphi}_0^h dx + \int_{\Gamma} t_0 u_0^h \bar{\varphi}_0^h d\sigma$$

et

$$L_h(\varphi_h) = \int_{\Omega} f \bar{\varphi}_0^h dx.$$

*Les problèmes approchés (P<sub>h</sub>):* déterminer  $u_h$  dans  $V_h$  tel que

$$a_h(u_h, \varphi_h) = L_h(\varphi_h) \quad \text{pour tout } \varphi_h \in V_h.$$

3.3. — Nous allons démontrer le

**THÉORÈME 3.1.** — *Sous les hypothèses (3.2), (3.3), (3.6) et (3.7) les problèmes (P) et (P<sub>h</sub>) admettent des solutions uniques*

$u$  et  $u_h$ . De plus dans  $L^2(\Omega)$  fort :

$$\begin{aligned} \lim u_0^h &= u \\ \lim u_h^i &= D_i u \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

*Démonstration.* — Nous conservons les éléments  $F, \mathcal{V}, p_h, r_h$  définis dans le n° précédent, nous ne vérifions que l'hypothèse de  $V_h$ -ellipticité et l'hypothèse (K1,  $i$ ).

$V_h$ -ellipticité : la famille  $(\Gamma, R_h)$  étant régulière, nous savons d'après le théorème 4.2, chapitre 3 que

$$(3.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{pour tout } \varepsilon > 0 \text{ il existe } C'(\varepsilon) \text{ avec} \\ \int_{\Gamma} |\varphi_0^h|^2 d\sigma \leq \varepsilon \cdot \Sigma \| \varphi_h^i \|_{L^2(\Omega)}^2 + C'(\varepsilon) \| \varphi_0^h \|_{L^2(\Omega)}^2 \end{array} \right.$$

où  $C'(\varepsilon) > 0$ ,  $C'(\varepsilon)$  ne dépend ni de  $h$ , ni de  $\nu_h$ .

Remarquons que (3.8) est semblable à (3.4) par suite la démonstration de la  $V_h$ -ellipticité est analogue à celle de la  $V$ -ellipticité (l'hypothèse (3.6) est encore utilisée pour établir la  $V_h$ -ellipticité).

*Hypothèse K1.i :* Supposons que

$$\Sigma \| u_h^i \|_{L^2(\Omega)}^2 + \| u_0^h \|_{L^2(\Omega)}^2 < C$$

alors d'après le théorème 5.3 chapitre 3 il existe une sous-suite  $u_k$  et un élément  $u$  de  $H^1(\Omega)$  tels que :

$$(3.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim u_0^k = u \quad \text{dans } L^2(\Omega) \text{ faible} \\ \lim u_k^i = D_i u \quad \text{dans } L^2(\Omega) \text{ faible } i = 1, \dots, n \end{array} \right.$$

et

$$(3.10) \quad \lim \gamma u_0^k = \gamma u \quad \text{dans } L^2(\Gamma) \text{ faible.}$$

*Remarque 3.1.* — La démonstration du théorème 2.1 (c'est le cas où  $a(u, \nu)$  ne contient pas une intégrale de surface) fait appel essentiellement au théorème 2.1, chapitre 3, théorème dont la démonstration est aisée. Par contre, lorsque  $a(u, \nu)$  contient une intégrale de surface il s'introduit deux difficultés :

- $V_h$ -ellipticité,
- limites de traces de fonctions étagées

et nous sommes alors amenés à faire appel aux théorèmes 4.2 et 5.3 du chapitre 3.

#### 4. Problèmes de transmissions.

##### 4.1. — Le problème exact.

On donne deux ouverts  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ , bornés dans  $\mathbb{R}^n$ , et on suppose que les frontières (régulières) de ces ouverts ont une partie commune  $\Sigma$ .

*Notations.* — Pour éviter la « prolifération des indices », nous n'utiliserons pas les notations traditionnelles. Nous plaçons sur deux lignes des éléments qui jouent des rôles semblables :

$$\begin{array}{cccccccccc} \Omega_1 & u & \varphi & a_{ij} & a_0 & f & c & u_o^h & u_h^i & R_h \\ \Omega_2 & v & \psi & b_{ij} & b_0 & g & d & v_o^k & v_k^j & R_k \end{array}$$

*Espace V.* — On désigne par V le sous-espace des

$$(u, v) \in H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2)$$

pour lesquels :

$$c(x)\gamma u(x) = d(x)\gamma v(x) \quad \text{p.p. sur } \Sigma$$

pour simplifier nous nous limiterons au cas où

$$\begin{aligned} c(x) &= c = \text{constante donnée,} \\ d(x) &= d = \text{constante donnée.} \end{aligned}$$

Pour  $(u, v), (\varphi, \psi) \in V$  on pose

$$L(\varphi, \psi) = \int_{\Omega_1} f \bar{\varphi} \, dx + \int_{\Omega_2} g \cdot \bar{\psi} \, dx$$

et

$$\begin{aligned} a((u, v), (\varphi, \psi)) &= \Sigma \int_{\Omega_1} a_{ij} D_i u D_j \bar{\varphi} \, dx + \int_{\Omega_1} a_0 u \bar{\varphi} \, dx \\ &\quad + \Sigma \int_{\Omega_2} b_{ij} D_i v D_j \bar{\psi} \, dx + \int_{\Omega_2} b_0 \cdot v \cdot \bar{\psi} \, dx \end{aligned}$$

où

$a_{ij}$  et  $a_0$  sont données dans  $L^\infty(\Omega_1)$ ,  
 $b_{ij}$  et  $b_0$  sont données dans  $L^\infty(\Omega_2)$ ,  
 $f$  est donnée dans  $L^2(\Omega_1)$ ,  
 $g$  est donnée dans  $L^2(\Omega_2)$ .

On suppose que :

$$(4.0) \quad \begin{cases} \operatorname{Re} \sum a_{ij}(x) \cdot \xi_i \bar{\xi}_j \geq \alpha \cdot \sum |\xi_i|^2 & \text{p.p. sur } \Omega_1 \\ \operatorname{Re} \sum b_{ij}(x) \cdot \xi_i \bar{\xi}_j \geq \alpha \cdot \sum |\xi_i|^2 & \text{p.p. sur } \Omega_2 \\ \operatorname{Re} a_0(x) \geq \alpha & \text{p.p. sur } \Omega_1 \\ \operatorname{Re} b_0(x) \geq \alpha & \text{p.p. sur } \Omega_2 \end{cases}$$

où  $\xi_i \in \mathbb{C}$  et  $\alpha =$  constante positive.

*Problème exact (P) :* déterminer  $(u, \varphi)$  dans  $V$  tel que

$$a((u, \varphi), (\varphi, \psi)) = L(\varphi, \psi) \quad \text{pour tout } (\varphi, \psi) \in V$$

Nous allons exposer deux schémas d'approximation : dans l'un il s'agit d'une approximation *externe* (méthode des différences finies dans  $\Omega_1$  et dans  $\Omega_2$ ); par contre dans l'autre il s'agit d'une approximation *mixte* (méthode des différences finies dans  $\Omega_1$  et méthode de galerkin dans  $\Omega_2$ ).

4.2. — *Approximation externe.*

On donne deux réseaux  $R_h$  et  $R_k$  (associés respectivement à  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ ) de mailles  $h = (\dots, h_i, \dots)$  et  $k = (\dots, k_i, \dots)$  On suppose que  $h$  et  $k$  sont liés par

$$(4.1) \quad \begin{cases} ph_i = qk_i \quad i = 1, \dots, n \\ p \text{ et } q \text{ sont deux nombres entiers positifs donnés.} \end{cases}$$

On pose

$$l_i = ph_i = qk_i$$

et

$$l = (\dots, l_i, \dots).$$

On suppose que

$$(4.2) \quad \text{Les familles } (\Omega_1, R_h) \text{ et } (\Omega_2, R_k) \text{ sont régulières.}$$

*Position relative des réseaux  $R_h$  et  $R_k$ .*

On introduit le réseau  $R_l$  et on désigne par  $H, K, L$  les nœuds courants des réseaux  $R_h, R_k, R_l$ . On suppose que

$$(4.3) \quad \begin{cases} \text{tout } (C, L) \text{ est la réunion de } p^n \text{ } (C, H)_h \\ \text{tout } (C, L) \text{ est la réunion de } q^n \text{ } (C, K)_k \end{cases}$$

*Définition des espaces  $V_{hk}$  :* Ces espaces jouent ici le rôle des espaces  $V_h$  de la théorie générale. L'espace  $V_{hk}$  est le sous-

espace des  $(u_h, v_h) \in H^1(\Omega_1, R_h) \times H^1(\Omega_2, R_k)$  <sup>(5)</sup> tels que pour tout pavé  $(C, L)_l$  qui a une intersection non vide avec  $\Sigma$  on ait :

$$(4.4) \quad c \cdot \int_{\Sigma L} u_0^h d\sigma = d \int_{\Sigma L} v_0^h d\sigma$$

où

$$\Sigma L = \Sigma \cap (C, L)_l.$$

*Définition des formes :* pour  $(u, v)$  et  $(\varphi, \psi)$  dans  $V_{hk}$  on pose

$$L_{hk}(\varphi, \psi) = \int_{\Omega_1} f \cdot \varphi_0 dx + \int_{\Omega_2} g \cdot \psi_0 dx$$

et

$$\begin{aligned} a_{hk}((u, v), (\varphi, \psi)) &= \Sigma \int_{\Omega_1} a_{ij} u^i \bar{\varphi}^j dx + \int_{\Omega_1} a_0 u_0 \bar{\varphi}_0 dx \\ &+ \Sigma \int_{\Omega_2} b_{ij} v^i \bar{\psi}^j dx + \int_{\Omega_2} b_0 v_0 \bar{\psi}_0 dx. \end{aligned}$$

*Les problèmes approchés*  $(P_{hk}^1)$  : déterminer  $(u_h, v_k)$  dans  $V_{hk}$  tel que  $a_{hk}((u_h, v_k), (\varphi, \psi)) = L_{hk}(\varphi, \psi)$  pour tout  $(\varphi, \psi) \in V_{hk}$ .

4.3. — On va démontrer le

**THÉORÈME 4.1.** — *Sous les hypothèses (4.0), (4.1), (4.2), (4.3) les problèmes (P) et  $(P_{hk}^1)$  ont des solutions uniques  $(u, v)$  et  $(u_h, v_k)$ . De plus, on a dans  $L^2(\Omega_1)$  fort*

$$\begin{aligned} \lim u_0^h &= u \\ \lim u_h^i &= D_i u \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

et dans  $L^2(\Omega_2)$  fort

$$\begin{aligned} \lim v_0^k &= v \\ \lim v_k^i &= D_i v \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

*Démonstration.* — Les espaces  $F, V, V_{hk}, \mathcal{V}$ .

On prend  $F = (L^2(\Omega_1))^{n+1} \times (L^2(\Omega_2))^{n+1}$ .

Tout élément de  $F$  s'écrit :

$$(u_0; \dots, u^i, \dots; v_0; \dots, v^i, \dots) \quad i = 1, \dots, n$$

tout élément  $(u, v)$  de  $V$  peut être identifié à l'élément

$$(u; \dots, D_i u \dots; v; \dots, D_i v, \dots)$$

<sup>(5)</sup> On sait que  $u_h = (u_0^h, \dots, u_h^i, \dots)$ ; voir définition de  $H^1(\Omega; R_h)$  dans le chap. 3.

de  $F$ , par suite on peut identifier  $V$  avec un sous-espace fermé de  $F$ . Par construction il en est de même de  $V_{hk}$ .

On pose

$$\mathcal{V}_1 = \mathcal{D}(\overline{\Omega}_1)$$

$$\mathcal{V}_2 = \mathcal{D}(\overline{\Omega}_2)$$

et on prend

$$\mathcal{V} = (\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2) \cap V.$$

*Les opérateurs  $p_{hk}$  et  $r_{hk}$ .*

On prend pour  $p_{hk}$  l'opérateur identité du sous-espace  $V_{hk}$  dans  $F$ .

Soit maintenant  $(\varphi, \psi) \in \mathcal{V}$ ; A la fonction  $\varphi$  (Resp.  $\psi$ ). Nous allons associer un élément

$$\varphi_h = (\varphi_0^h; \dots, \varphi_h^i, \dots) \in H^1(\Omega_1, R_h)$$

(Resp.  $\psi_k = (\psi_0^k; \dots, \psi_k^i, \dots) \in H^1(\Omega_2; R_k)$ ).

On définit par prolongement la fonction  $\pi\varphi$  (voir définition de  $\pi$  dans le chapitre 2) et,  $H$  étant un point de  $R_h^1$ , on pose :

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}_h(x) = \pi\varphi(H) & \text{pour tout } x \in (C, H_h) \\ \text{(pour tout } (C, H)_h \text{ qui ne coupe pas } \Sigma. \end{cases}$$

Si  $(C, H)_h$  coupe  $\Sigma$  suivant  $\Sigma H$ , on pose

$$(4.5) \quad \tilde{\varphi}_h(x) \cdot \int_{\Sigma H} d\sigma = \int_{\Sigma H} \gamma\varphi \cdot d\sigma.$$

On prend pour  $\varphi_0^h$  et pour  $\varphi_h^i$  les restrictions à  $\Omega_1$  des fonctions étagées  $\tilde{\varphi}_h$  et  $\nabla_i \tilde{\varphi}_h$ . On définirait de même  $\psi_k \in H^1(\Omega_2; R_k)$ . Compte tenu de (4.5) et de l'égalité analogue pour  $\tilde{\psi}_k$  on a :

$$C \cdot \int_{\Sigma L} \gamma \tilde{\varphi}_h d\sigma = d \cdot \int_{\Sigma L} \gamma \psi_k d\sigma$$

ou encore

$$(4.6) \quad \begin{cases} C \cdot \int_{\Sigma L} \gamma \varphi_0^h \cdot d\sigma = d \cdot \int_{\Sigma L} \gamma \psi_0^k d\sigma \\ \text{pour tout } \Sigma L = \Sigma \cap (C, L)_l \end{cases}$$

par suite  $(\varphi_h, \psi_k) \in V_{hk}$  on pose

$$r_{hk}(\varphi, \psi) = (\varphi_h, \psi_k).$$

*Vérification de l'hypothèse K 1.i).*

Supposons que

$$\|(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)\|_{V_{hk}}^2 \leq C.$$

On a donc

$$\Sigma \|u_h^i\|_{L^2(\Omega_1)}^2 + \|u_0^h\|_{L^2(\Omega_1)}^2 \leq C$$

et

$$\Sigma \|\rho_k^i\|_{L^2(\Omega_2)}^2 + \|\rho_0^k\|_{L^2(\Omega_2)}^2 \leq C.$$

Alors d'après le théorème 5.2 du chapitre 3, il existe une sous-suite  $u_0^{h'}$ ,  $u_{h'}^i$ , et un élément  $u^\times$  de  $H^1(\Omega_1)$  tels que

$$(4.7) \quad \begin{cases} \lim u_0^{h'} = u^\times & \text{dans } L^2(\Omega_1) \text{ faible} \\ \lim u_{h'}^i = D_i u^\times & \text{dans } L^2(\Omega_1) \text{ faible} \\ \lim \gamma u_0^{h'} = u^\times & \text{dans } L^2(\Sigma) \text{ faible.} \end{cases}$$

On obtiendrait un résultat analogue pour  $\rho_h$ .

Il est clair que l'espace des fonctions étagées sur les  $\Sigma L$  est dense dans  $L^2(\Sigma)$  : si  $\theta$  est une telle fonction étagée on a

$$\int_{\Sigma} (c \cdot \gamma u_0^h - d \gamma \rho_0^k) \cdot \theta \, d\sigma = \sum_L \int_{\Sigma L} (c \cdot \gamma u_0^h - d \gamma \rho_0^k) \bar{\theta} \, d\sigma$$

et comme  $\theta(x)$  est constante sur  $\Sigma L$ , on a en désignant cette constante par  $\bar{\theta}(L)$ .

$$\int_{\Sigma} (c \cdot \gamma u_0^h - d \cdot \gamma \rho_0^k) \bar{\theta} \, d\sigma = \sum_L \bar{\theta}(L) \int_{\Sigma L} (c \cdot \gamma u_0^h - d \rho_0^k) \, d\sigma$$

d'où compte tenu de (4.4)

$$\int_{\Sigma} (c \cdot \gamma u_0^h - d \cdot \gamma \rho_0^k) \bar{\theta} \, d\sigma = 0$$

pour toute  $\theta$  étagée sur les  $\Sigma L$ ,

et par passage à la limite, en utilisant (4.7) et l'égalité analogue pour  $\rho$  il vient

$$c \cdot \gamma u^\times - d \cdot \gamma \rho^\times = 0$$

et  $(u^\times, \rho^\times) \in V$

C.Q.F.D.

#### 4.4. — Approximation mixte.

On considère toujours le problème (P) exposé en 4.1 mais on ne suppose plus que  $\Omega_2$  est borné.

#### Définition des espaces $V_{hk}$ .

On donne un réseau  $R_h$  (associé à  $\Omega_1$ ) de maille  $h = (\dots, h_i, \dots)$  et on suppose que

$$(4.7) \quad \text{La famille } (\Sigma, R_h) \text{ est régulière.}$$



On donne une famille de sous-espaces  $V_k$ , fermés dans  $H^1(\Omega_2)$ , et satisfaisant à la propriété (de densité) suivante :

$$(4.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{il existe une famille d'opérateurs linéaires } r_k \text{ de } \Omega_2 \\ \text{dans } V_k \text{ vérifiant} \\ \lim \|r_k v - v\|_{H(\Omega_2)} = 0 \quad \text{pour tout } v \in \Omega_2 \end{array} \right.$$

l'espace  $\Omega_2$  est un sous-espace donné, dense dans  $H^1(\Omega_2)$ . (En pratique on construira les espaces  $V_k$  à partir de  $N(k)$  éléments linéairement indépendants de  $H^1(\Omega_2)$ ; Au sujet des espaces  $V_k$ , voir la méthode de Galerkin chapitre 2.)

Nous désignerons maintenant par  $V_{hk}$  le sous-espace fermé des  $(u_h, v_k)$  de  $H^1(\Omega_1; R_h) \times V_k$  pour lesquels

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Sigma_H} c \cdot \gamma u_0^h d\sigma = \int_{\Sigma_H} d \cdot \gamma v_k d\sigma, \\ \text{où } \Sigma_H = \Sigma \cap (C, H)_h. \end{array} \right.$$

Pour  $(u, v)$  et  $(\varphi, \psi)$  dans  $V_{hk}$  on pose

$$a_{hk}((u, v), (\varphi, \psi)) = \Sigma \int_{\Omega_1} a_{ij} u^i \bar{\varphi}^j dx + \int_{\Omega_1} a_0 u_0 \bar{\varphi}_0 dx + \Sigma \int_{\Omega_1} b_{ij} D_i v \bar{D}_j \psi dx + \int_{\Omega_1} b_0 v \bar{\psi} dx$$

et

$$L_{hk}(\varphi, \psi) = \int_{\Omega_1} f \cdot \bar{\varphi}_0 dx + \int_{\Omega_1} g \cdot \bar{\psi} dx.$$

Les problèmes approchés  $(P_{hk}^2)$ : Déterminer  $(u_h, v_k)$  dans  $V_{hk}$  tel que

$$a_{hk}((u_h, v_k), (\varphi, \psi)) = L_{hk}(\varphi, \psi) \quad \text{pour tout } (\varphi, \psi) \in V_{hk}.$$

Nous avons le

**THÉORÈME 4.2.** — *Sous les hypothèses (4.0), (4.7), (4.8) les problèmes (P) et  $(P_{hk}^2)$  ont des solutions uniques  $(u, v)$   $(u_h, v_k)$ ; De plus dans  $L^2(\Omega_1)$  fort*

$$\begin{aligned} \lim u_0^h &= u \\ \lim u_i^h &= D_i u \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

et dans  $H^1(\Omega_2)$  fort

$$\lim v_k = v.$$

La démonstration de ce théorème est semblable à celle du théorème 4.1. Nous ne la ferons pas.

4.5. — *Conséquences du second schéma :*

On sait que tout problème aux limites dans un ouvert peut être considéré comme un problème de transmission : Il suffit pour cela de partager arbitrairement  $\Omega$  en  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  (et de prendre  $c = d$ , voir espace V, n° 4.1). On pourra ainsi utiliser le second schéma d'approximation dans les exemples suivants :

*Exemple 4.1.* —  $\Omega$  est un ouvert *non borné* : on partage alors  $\Omega$  en  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ ,  $\Omega_1$  étant borné.

*Exemple 4.2.* —  $\Omega$  est un ouvert borné. On peut partager  $\Omega$  en  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ , où  $\Omega_2$  est un ouvert de forme simple (pavé, sphère...).

5. Problèmes de type mélé d'ordre 2 m.

5.1. — *Le problème exact.*

On donne un ouvert  $\Omega$  borné dans  $\mathbb{R}^n$  de frontière  $\Gamma$  régulière. On désigne par  $\Gamma_1$  une partie de  $\Gamma$  et par  $\Gamma_2$  le reste de la frontière. On prend pour V l'espace des  $u$  de  $H^m(\Omega)$  pour lesquels

$$(5.1) \quad \gamma u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1$$

(on rappelle que

$$\gamma u = (\gamma_0 u, \dots, \gamma_{m-1} u) \text{ ou } \gamma_i u = \frac{\partial^i}{\partial n_i} u \quad i = 0, 1, \dots, m-1,$$

$n$  désignant la normale intérieure à  $\Gamma$ ). Pour  $u$  et  $v$  dans V on pose

$$a(u, v) = \sum \int_{\Omega} a_{pq} D^q u \cdot \overline{D^p v} \, dx$$

et

$$L(v) = \int_{\Omega} f \cdot \overline{v} \, dx$$

où

$$\begin{cases} \text{les } a_{pq} \text{ sont donnés dans } L^\infty(\Omega) \\ f \text{ est donnée dans } L^2(\Omega). \end{cases}$$

De plus, on fait l'hypothèse (de V-ellipticité)

$$(5.2) \quad \operatorname{Re} \sum a_{pq}(x) \xi_p \overline{\xi_q} \geq \alpha \sum |\xi_p|^2 \quad \text{p.p. sur } \Omega$$

où  $\xi_p \in \mathbb{C}$ ,  $\alpha =$  constante positive.

**Problème exact (P) :** déterminer  $u$  dans  $V$  tel que

$$a(u, \varphi) = L(\varphi) \quad \text{pour tout } \varphi \in V.$$

5.2. — *Les problèmes approchés.*

On donne maintenant un réseau  $R_h$  de maille

$$h = (\dots, h_i, \dots) \quad (6).$$

Pour  $u$  et  $\varphi$  dans  $H^m(\Omega, R_h)$  on pose

$$(5.4) \quad a_h(u, \varphi) = \Sigma \int_{\Omega} a_{pq} u^p \varphi^q dx$$

et 
$$L_h(\varphi) = \int_{\Omega} f \cdot \bar{\varphi}_0 dx.$$

*Les problèmes approchés (P<sub>h</sub>) :* déterminer  $u_h$  dans  $V_h$  tel que

$$a_h(u_h, \varphi) = L_h(\varphi) \quad \text{pour tout } \varphi \in V_h.$$

5.3. — Nous allons démontrer le

**THÉORÈME 5.1.** — *Sous l'hypothèse (5.2) les problèmes (P) et (P<sub>h</sub>) ont des solutions uniques  $u$  et  $u_h = (u_0^h; \dots, u_p^h \dots)$ ; de plus, dans  $L^2(\Omega)$  fort, on a :*

$$\begin{aligned} \lim u_0^h &= u \\ \lim u_p^h &= D^p u \quad 0 < p \leq m. \end{aligned}$$

*Démonstration.* — *Espaces  $F, V, V_h, \mathcal{V}$  :* l'espace  $F$  est introduit naturellement lors de la définition de  $H^m(\Omega, R_h)$  :  $F$  est de la forme

$$F = (L^2(\Omega))^v$$

et on a défini  $V_h$  comme un sous-espace fermé de  $F$ . Tout élément  $u$  de  $V$  peut être identifié à l'élément de  $F$

$$(u; \dots, D^p u, \dots)$$

donc on peut identifier  $V$  avec un sous-espace fermé de  $F$ . On prend pour  $\mathcal{V}$  le sous-espace fermé des fonctions  $\varphi$  de  $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ , nulles dans un voisinage de  $\Gamma_1$ .

*Les opérateurs  $p_h$  et  $r_h$  :*

Nous prenons pour  $p_h$  l'opérateur identité

$$p_h u_h = u_h \quad \text{pour tout } u_h \in V_h.$$

(6) On prend  $V_h = \{u_h | u_h \in H^m(\Omega, R_h), \gamma u_h^p = 0 \text{ sur } \Gamma_1, |p| \leq m\}$  (5.3)  $\gamma u_h^p = 0$  sur  $\Gamma_1, |p| \leq m$  pour tout  $u_h \in V_h$ .

Soit  $\nu \in \mathcal{V}$ , nous prolongeons  $\nu$  par  $\pi\nu$  et nous définissons la fonction étagée  $\tilde{\nu}_h$  par

$$\tilde{\nu}_h(x) = \pi\nu(M) \quad \text{pour tout } x \in (C, M)_h,$$

pour tout  $M \in R_h^m$  puisque  $\nu$  est nulle dans un voisinage de  $\Gamma_1$  il en est de même, pour  $h$  « assez petit » des fonctions  $\tilde{\nu}_h$  et  $\nabla^p \tilde{\nu}_h$   $1 \leq |p| \leq m$ ; Si nous désignons alors par  $\nu_0^h$  et par  $\nu_h^p$  les restrictions à  $\Omega$  des fonctions  $\tilde{\nu}_h$  et  $\nabla^p \tilde{\nu}_h$ . Nous posons

$$r_h \nu = (\nu_0^h; \dots, \nu_h^p, \dots)$$

il est clair que

$$\lim \|r_h \nu - \nu\|_F = 0 \quad \text{pour tout } \nu \in \mathcal{V}.$$

*Vérification de l'hypothèse K 1, i.*

On donne une suite  $u_h$  et on suppose que

$$(5.5) \quad \|u_0^h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum \|u_h^p\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C.$$

Alors compte tenu de (5.3) et de (5.5) on peut appliquer le théorème 4.1, chapitre 3; Par conséquent, il existe une sous-suite  $u_k$  et un élément  $u^\times$  de  $H^m(\Omega)$  tels que

$$(5.6) \quad \begin{aligned} \lim u_0^k &= u^\times && \text{dans } L^2(\Omega) \text{ faible} \\ \lim u_k^p &= D^p u^\times && \text{dans } L^2(\Omega) \text{ faible} \quad 0 < |p| \leq m \\ \gamma_0 D^p u^\times &= 0 && \text{sur } \Gamma_1 \quad \text{pour } |p| \leq m - 1. \end{aligned}$$

Avec (5.6) il vient

$$u^\times = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1$$

et  $u^\times \in V$  (C.Q.F.D.).

*Références.* — Pour le cas du problème de Dirichlet ( $\Gamma_1 = \Gamma$ ) cf. [14].

## 6. Problème d'élasticité.

6.1. — *Le problème exact:* On donne un ouvert  $\Omega$  borné dans  $R^n$  de frontière régulière  $\Gamma$ . On prend pour  $V$  l'espace des  $u = (\dots, u_i, \dots) \in (L^2(\Omega))^n$  pour lesquels

$$w^{jk} \in L^2(\Omega) \quad j, k = 1, \dots, n$$

où

$$(6.1) \quad w^{jk} = \frac{1}{2} (D_j u_k + D_k u_j).$$

On définit une norme (hilbertienne) dans  $V$  par

$$\|u\|_v^2 = \sum \|u^{jk}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum \|u_i\|_{L^2(\Omega)}^2$$

Pour  $u$  et  $v$  dans  $V$  on pose

$$a(u, v) = \sum_{j,k,l,m} \int_{\Omega} a_{jklm} u^{jk} \cdot \bar{v}^{lm} dx + \lambda \sum \int_{\Omega} u_i \cdot v_i dx$$

et

$$L(v) = \sum \int_{\Omega} f_i \cdot \bar{v}_i dx$$

où

$$\begin{cases} \text{les } a_{jklm} \text{ sont données dans } L^\infty(\Omega); \lambda > 0 \\ \text{les } f_i \text{ sont données dans } L^2(\Omega). \end{cases}$$

On fait l'hypothèse (de  $V$ -ellipticité) suivante :

$$(6.2) \quad \operatorname{Re} \sum a_{jklm}(x) \xi_{jk} \cdot \bar{\xi}_{lm} \geq \alpha \sum |\xi_{jk}|^2 \quad \text{p.p. sur } \Omega$$

où  $\xi_{jk} \in \mathbb{C}$ ,  $\alpha =$  constante positive.

*Problème (P).* — Déterminer  $u = (\dots, u_i, \dots)$  dans  $V$  tel que

$$a(u, v) = L(v) \quad \text{pour tout } v \in V.$$

6.2. — *Les problèmes approchés.*

On donne un réseau  $R_h$  de maille  $h = (\dots, h_i, \dots)$ .

*Espace  $V_h$ :* tout élément  $u_h$  de  $V_h$  est de la forme

$$u_h = (\dots, u_i^h, \dots) \quad i = 1, \dots, n$$

où les  $u_i^h$  sont des fonctions étagées, constantes sur tout  $(C, M) \cap \Omega$   $M \in R_h$ . On désigne par  $u_h^{jk}$  la fonction définie sur  $\Omega$  de la manière suivante : lorsque  $\nabla_j u_k^h(x) + \nabla_k u_j^h(x)$  a un sens, on pose :

$$(6.3) \quad u_h^{jk}(x) = \frac{1}{2} (\nabla_j u_k^h(x) + \nabla_k u_j^h(x)).$$

Dans le cas contraire, on pose :  $u_h^{jk}(x) = 0$ .

Il est clair qu'on peut définir une norme (hilbertienne) sur  $V_h$  par

$$\|u_h\|_{V_h}^2 = \sum_{j,k=1}^n \|u_h^{jk}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^n \|u_i^h\|_{L^2(\Omega)}^2$$

Pour  $u_h$  et  $v_h$  dans  $V_h$  on pose

$$a_h(u_h, v_h) = \sum \int_{\Omega} a_{jklm} u_h^{jk} \bar{v}_h^{lm} dx + \sum \int_{\Omega} u_i^h \bar{v}_i^h dx$$

et

$$L_h(\varphi_h) = \Sigma \int_{\Omega} f_i \bar{\varphi}_i^h dx$$

Les problèmes  $(P_h)$  : déterminer  $u_h$  dans  $V_h$  tel que

$$a_h(u_h, \varphi_h) = L_h(\varphi_h) \quad \text{pour tout } \varphi_h \in V_h.$$

6.3. — Nous allons démontrer le

**THÉORÈME 6.1.** — *Sous l'hypothèse (6.2) les problèmes (P) et  $(P_h)$  ont des solutions uniques*

$$u = (\dots, u_i, \dots) \quad \text{et} \quad u_h = (\dots, u_i^h, \dots).$$

De plus, dans  $L^2(\Omega)$  fort, on a

$$\begin{aligned} \lim u_i^h &= u_i & i &= 1, \dots, n, \\ \lim u_h^{jk} &= u^{jk} & j, k &= 1, \dots, n. \end{aligned}$$

*Démonstration.* — Les espaces  $F, V, V_h, \mathcal{V}$ .

Tout élément  $u = (\dots, u^i, \dots)$  de  $V$  peut être identifié à

$$(\dots, u_i, \dots; \dots, u^{jk}, \dots)$$

où les  $u^{jk}$  sont liés par (6.1). De même, tout élément  $(\dots, u_i^h, \dots)$  de  $V_h$  peut être identifié à l'élément  $(\dots, u_i^h, \dots; \dots, u_h^{jk}, \dots)$ . Il est donc clair que les espaces  $V$  et  $V_h$  peuvent être identifiés à des sous-espaces fermés d'un espace  $F$  de la forme

$$F = (L^2(\Omega))^v, \quad v \text{ convenable.}$$

Admettons un instant le

**LEMME 6.1.** — *Le sous-espace  $(\mathcal{D}(\bar{\Omega}))^n \cap V$  est dense dans  $V$ . On prend alors*

$$\mathcal{V} = (\mathcal{D}(\bar{\Omega}))^n \cap V.$$

Les opérateurs  $p_h$  et  $r_h$  : puisque  $V_h$  est un sous-espace de  $F$  nous pouvons prendre pour  $p_h$  l'opérateur identité :

$$p_h u_h = u_h \quad \text{pour tout } u_h \in V_h.$$

Soit maintenant  $\varphi = (\dots, \varphi_i, \dots) \in \mathcal{V}$ ; A la fonction  $\varphi_i$  nous associons la fonction étagée  $\bar{\varphi}_i^h$

$$\bar{\varphi}_i^h(x) = \pi \varphi_i(M) \quad \text{pour tout } x \in (C, M),$$

pour tout  $M \in R_h$  tel que  $(C, M)$  rencontre  $\Omega$ . Si nous désignons par  $\varphi_i^h$  les restrictions à  $\Omega$  des fonctions  $\varphi_i^h$ , nous posons

$$r_h \varphi = (\dots, \varphi_i^h, \dots).$$

On vérifie que

$$\lim \|\varphi_i^h - \varphi_i\|_{L^2(\Omega)} = 0 \quad i = l, \dots, n$$

et que

$$\lim \|\varphi_h^{jk} - \varphi^{jk}\|_{L^2(\Omega)} = 0 \quad j, k = l, \dots, n$$

où  $\varphi^{jk}$  est défini par (6.1).

*Vérification de l'hypothèse K 1, i.*

On donne  $u_h$  dans  $V_h$  et on suppose que

$$\sum \|u_h^{jk}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum \|u_i^h\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C.$$

Il existe donc des sous-suites  $u_h^{jk}$  et  $u_i^h$  et des éléments de  $L^2(\Omega)$ , notés  $\tilde{u}_i$  et  $\tilde{u}_{jk}$  tels que, dans  $L^2(\Omega)$  faible

$$\begin{aligned} \lim u_i^h &= \tilde{u}_i & i &= l, \dots, n, \\ \lim u_h^{jk} &= \tilde{u}_{jk} & j, k &= l, \dots, n. \end{aligned}$$

Si maintenant on tient compte de la proposition 2,1, chapitre 3 et de (6.3) il vient

$$\tilde{u}_{jk} = \frac{1}{2} (\nabla_j \tilde{u}_k + \nabla_k \tilde{u}_j) \quad j, k = 1, \dots, n$$

et par suite  $(\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_n)$  est dans  $V$ . (C.Q.F.D.).

*Démonstration du lemme 6.1.*

Soit  $u = (\dots, u_i, \dots) \in V$ . On vérifie que

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_l} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_k} (u^{il}) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_l} (u^{ik}) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} (u^{kl}).$$

— (Voir (6.1) pour la signification de  $u^{il}, \dots$ ).

Puisque les  $u_i, u^{il}, u^{ik}, u^{kl}$  sont dans  $L^2(\Omega)$ , nous avons pour  $i = l, \dots, n$

$$\left\{ \begin{aligned} u_i &\in \mathcal{D}'(\Omega) \quad (\text{espace des distributions sur } \Omega) \\ \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_l} &\in H^{-1}(\Omega) \quad k, l = 1, \dots, n. \end{aligned} \right.$$

(Pour la définition des espaces  $H^m(\Omega)$ ,  $m < 0$ , cf. Lions (2).)

L'ouvert  $\Omega$  étant régulier, on sait que ces 2 relations entraînent

$$u_i \in H^1(\Omega), \quad i = 1, \dots, n$$

et par conséquent  $(\mathcal{D}(\bar{\Omega}))^n \cap V$  est dense dans  $V$ .

### 7. Un autre problème aux limites.

#### 7.1. — *Le problème exact.*

On donne un ouvert  $\Omega$  borné dans  $\mathbb{R}^n$ . On désigne par  $V$  l'adhérence dans l'espace produit  $(H^1(\Omega))^n$  du sous-espace des fonctions  $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)$  telles que

$$(7.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi_i \in \mathcal{D}(\Omega), \text{ espace des fonctions indéfiniment diffé-} \\ \text{rentiables réelles, à support compact dans } \Omega. \end{array} \right.$$

et

$$(7.2) \quad \sum_{i=1}^n D_i \psi_i = 0 \quad (\text{ou divergence } \psi = 0).$$

Pour  $u$  et  $\varphi$  dans  $V$  on pose

$$(u, \varphi)_V = \sum_{i,j=1}^n (D_i u_j, D_j \varphi_j)_{L^2(\Omega)}$$

et en posant  $\|u\|_V = (u, u)_V^{\frac{1}{2}}$ .

On définit une norme (hilbertienne) sur  $V$ ; on donne maintenant les fonctions réelles  $f_j \in L^2(\Omega)$ ,  $j = 1, \dots, n$  et on pose

$$\begin{aligned} a(u, \varphi) &= (u, \varphi)_V, \\ L(\varphi) &= \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} f_j \bar{\varphi} \, dx. \end{aligned}$$

*Le problème (P)*: déterminer  $u = (u_1, \dots, u_n)$  dans  $V$  tel que

$$a(u, \varphi) = L(\varphi) \quad \text{pour tout } \varphi \in V.$$

#### 7.2. — *Les problèmes approchés:*

On donne un réseau  $R_h$  de maille  $h = (h_1, \dots, h_n)$ .

*Notations.* — On désigne par  $R_h^\times$  l'ensemble des nœuds  $M$  de  $R_h$  tels que

$$(7.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} (0, M + \theta h_i) \subset \Omega \\ \theta = -1, 0, +1, \quad i = 1, \dots, n. \end{array} \right.$$



On désigne par  $\Omega_h^1$  la réunion des pavés d'origine  $M$  dans  $R_n^x$ . Dans tout ce numéro l'opérateur  $\nabla_i$  sera défini par

$$\nabla_i u(x) = \frac{1}{h_i} \cdot (u(x + h_i) - u(x))$$

(l'adoption de cet opérateur dissymétrique nous facilitera l'exposé!).

Désignons par  $V_h$  l'espace des fonctions  $\nu_h = (\nu_1^h, \dots, \nu_n^h)$  telles que

$$(7.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Les } \nu_i^h \text{ sont des fonctions réelles étagées } (7) \text{ définies} \\ \text{sur } \Omega \text{ et à support dans } \bar{\Omega}_h^1 \end{array} \right.$$

et que

$$(7.5) \quad \sum_{i=1}^n \nabla_i \nu_i^h = 0 \quad (8).$$

Pour  $u_h$  et  $\nu_h$  dans  $V_h$  on pose

$$(u_h, \nu_h)_{V_h} = \sum_{i,j=1}^n (\nabla_i u_j^h, \nabla_i \nu_j^h)_{L^2(\Omega)}$$

et

$$\|u_h\|_{V_h} = (u_h, u_h)^{1/2}.$$

Compte tenu de (7.4) et de la proposition 6.1, chapitre 3,  $\|u_h\|_{V_h}$  est une norme (hilbertienne) sur l'espace  $V_h$ . On pose

$$\begin{aligned} a_h(u_h, \nu_h) &= (u_h, \nu_h)_{V_h} \\ L_h(\nu_h) &= \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} f_i \nu_i^h dx \end{aligned}$$

Les problèmes approchés  $(P_h)$ : déterminer  $u_h = (u_1^h, \dots, u_n^h)$  dans  $V_h$  tel que

$$a_h(u_h, \nu_h) = L_h(\nu_h) \quad \text{pour tout } \nu_h \in V_h.$$

**THÉORÈME 7.3.** — *Les problèmes  $(P)$  et  $(P_h)$  ont des solutions uniques  $u = (\dots, u_i, \dots)$  et  $u_h = (\dots, u_i^h, \dots)$ ; De plus, nous avons dans  $L^2(\Omega)$  fort:*

$$\lim \nabla_i u_j^h = D_i u_j \quad i, j = 1, \dots, n.$$

(7) Constantes sur chaque pavé d'origine un point du réseau.

(8) Lorsque  $x \notin \Omega$  mais  $x + h_i \in \Omega$  il est naturel de poser  $\Delta_i u^h(x) = 0$ .

DÉMONSTRATION. — *Espaces*  $F, V, V_h, \mathcal{V}$ .

On prend

$$F = (L^2(\Omega))^{n^2}$$

et on écrit tout élément  $u$  de  $F$  de la façon suivante

$$u = (\dots, u_j^i, \dots) \quad i = 1, \dots, n \text{ et } j = 1, \dots, n.$$

On peut identifier l'espace  $V$  avec un sous-espace fermé de  $F$  : en effet lorsque

i) il existe  $(u_1, \dots, u_n)$   $u_i \in H_0^1(\Omega)$ , tel que

$$u_j^i = D_i u_j \quad i, j = 1, \dots, n.$$

ii)  $\sum_{i=1}^n u_i^i = 0$

l'élément  $(\dots, u_j^i, \dots)$  de  $F$  peut être identifié à l'élément  $(u_1, \dots, u_n)$  de  $V$ .

On identifierait de même  $V_h$  avec un sous-espace fermé de  $F$ .

On prend

$$\mathcal{V} = (\mathcal{D}(\Omega))^n \cap V.$$

On sait que  $\mathcal{V}$  est dense dans  $V$ .

*Les opérateurs*  $p_h$  *et*  $r_h$ .

On prend pour  $p_h$  l'opérateur identité

$$p_h u_h = u_h \quad \text{pour tout } u_h \in V_h.$$

Désignons par  $\text{FM}_i^h$  (ou par  $\text{FM}_i$  s'il n'y a pas d'ambiguïté) l'intersection du pavé  $(0, M)_h$  ayant pour origine le point  $M = (\dots, m_i h_i, \dots)$  avec le plan d'équation  $x_i = m_i h_i$ . Soit maintenant  $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n) \in \mathcal{V}$ . On pose

$$(7.6) \quad \begin{cases} \psi_i^h(x) = \tilde{\psi}_i^h(M) & \text{pour } x \in (0, M)_h \cap \Omega \\ \text{pour tous les pavés } (0, M) \text{ qui « coupent » } \Omega \end{cases}$$

où  $\psi_i^h(M)$  est défini par

$$(7.8) \quad \tilde{\psi}_i^h(M) = \frac{1}{h_i'} \int_{\text{FM}_i} \psi_i(x_i') dx_i' \quad (9)$$

avec

$$\begin{aligned} x_i' &= (x_1, \dots, x_{i-1}, m_i h_i, x_{i+1}, \dots, x_n), \\ dx_i' &= dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_n, \\ h_i' &= h_1 \dots h_{i-1} \cdot h_{i+1} \dots h_n. \end{aligned}$$

(9) Si une partie de  $\text{FM}_i$  est extérieure à  $\Omega$ , on prend  $\psi_i(x_i') = 0$  sur cette partie ce qui est naturel puisque  $\psi_i$  est nulle dans un voisinage de  $\Gamma$ .

Il est clair que pour  $h$  assez petit les supports des fonctions  $\psi_i^h$  sont contenus dans  $\Omega_h^1$ ; pour montrer que  $(\dots, \psi_i^h, \dots)$  est dans  $V_h$  il suffira donc de vérifier que :

$$\sum_{i=1}^n \nabla_i \psi_i^h = 0$$

ou encore, en tenant compte de (7.6)

$$(7.9) \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^n \nabla_i \bar{\psi}_i^h(M) = 0 \\ \text{pour tout } M \text{ tel que } (0, M) \text{ « coupe » } \Omega. \end{cases}$$

Puisque  $\psi$  est dans  $V$  on a :

$$\sum_{i=1}^n D_i \psi_i = 0$$

et (en prolongeant, au besoin, les  $\psi_i$  par 0 hors de  $\Omega$ )

$$\int_{(0, M)} \sum_{i=1}^n D_i \psi_i \, dx = 0.$$

Par une intégration en  $dx_i$  il vient :

$$\sum_{i=1}^n \left( \int_{F(M+h_i)} \psi_i \, dx'_i - \int_{F M_i} \psi_i \, dx'_i \right) = 0.$$

Ce qui s'écrit, compte tenu de (7.8)

$$\sum_{i=1}^n (h'_i \bar{\psi}_i^h(M + h_i) - h'_i \bar{\psi}_i^h(M)) = 0$$

ou encore  $h_1, \dots, h_n \sum_{i=1}^n \frac{\bar{\psi}_i^h(M + h_i) - \bar{\psi}_i^h(M)}{h_i} = 0$

d'où l'égalité cherchée (7.9).

On vérifierait que

$$(7.10) \quad \begin{cases} \lim D_i \psi_j^h = D_i \psi_j & i, j = 1, \dots, n \\ \text{dans } L^2(\Omega) \text{ fort.} \end{cases}$$

Vérification de l'hypothèse K 1,  $i$  :

On suppose que  $\|u_h\|_{V_h}$  est bornée,  $u_h \in V_h$ , c'est-à-dire :

$$(7.11) \quad \sum_{i, j=1}^n \|\nabla_i u_j^h\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_1$$

( $C_1 =$  constante positive).

Puisque les fonctions  $u_j^h$  vérifient (7.4) et (7.11) on a, d'après la proposition 6.1, chapitre 3

$$(7.12) \quad \|u_j^h\|_{L^2(\Omega)} \leq C'_1 \quad j = 1, \dots, n$$

( $C'_1 =$  constante positive). A l'aide de (7.11) et de (7.12) on a

$$(7.13) \quad \sum_{i=1}^n \|\nabla_i u_j^h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u_j^h\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_1 + C'_1 \quad j = 1, \dots, n.$$

Les fonctions  $u_j^h$  vérifient donc (7.4) et (7.13). Par conséquent d'après le théorème 4.1, chapitre 3, il existe des sous-suites  $u_j^k$ ,  $\nabla_i u_j^k$  et des éléments  $\tilde{u}_j$  de  $H_0^1(\Omega)$  tels que (dans  $L^2(\Omega)$  faible) :

$$(7.14) \quad \begin{cases} \lim u_j^k = \tilde{u}_j & j = 1, \dots, n, \\ \lim \nabla_i u_j^k = D_i \tilde{u}_j. \end{cases}$$

Montrons maintenant que  $(\dots, \tilde{u}_j, \dots)$  est dans  $V$  ou encore que :

$$(7.15) \quad \sum_{i=1}^n D_i \tilde{u}_i = 0.$$

Il est clair qu'à toute fonction réelle  $\nu \in L^2(\Omega)$  on peut associer une fonction étagée  $\nu_k$  telle que

$$(7.16) \quad \lim \nu_k = \nu \quad \text{dans } L^2(\Omega) \text{ fort.}$$

On a

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \nabla_i \tilde{u}_i^k \cdot \nu_k \, dx = \sum_M \int_{(0, M) \cap \Omega} \sum_{i=1}^n \nabla_i \tilde{u}_i^k \cdot \nu_k \, dx$$

et puisque  $\nu_k$  est constante sur  $(0, M) \cap \Omega$  on obtient grâce à (7.5)

$$(7.17) \quad \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \nabla_i \tilde{u}_i^k \nu_k \, dx = 0.$$

En passant à la limite dans (7.17) il vient avec (7.14) et (7.16)

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n D_i \tilde{u}_i \cdot \nu \, dx = 0 \\ \text{pour toute } \nu \in L^2(\Omega) \end{cases}$$

d'où la relation cherchée (7.15) et par suite l'hypothèse  $H_{li}$  est vérifiée.

## CHAPITRE V

### LES PROBLÈMES APPROCHÉS

#### 1. Propriétés des matrices des problèmes approchés.

1.1. — *Formes sesquilinéaires sur  $C^N$* :  $N =$  entier positif,  $C$  corps des complexes. Soit  $A$  une matrice  $(N, N)$

$$A = ((a_{ij})), \quad a_{ij} \in C, \quad i, j = 1, \dots, N.$$

Si  $X = (X^1, \dots, X^N)$  et  $Y = (Y^1, \dots, Y^N)$  sont des éléments de  $C^N$ . On pose

$$(1.1) \quad (AX, Y) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} X^i Y^j$$

il est clair que  $(AX, Y)$  est une forme sesquilinéaire sur  $C^N$ ; réciproquement, toute forme sesquilinéaire sur  $C^N$  peut être mise sous la forme (1.1). On sait d'autre part, que  $(AX, Y)$  est hermitienne si et seulement si

$$a_{ij} = \bar{a}_{ji}.$$

DÉFINITION 1.1. — *On dit qu'une forme hermitienne  $(AX, Y)$  est positive si*

$$(AX, X) \geq 0 \quad \text{pour tout } X \in C^N.$$

DÉFINITION 1.2. — *Une forme hermitienne  $(AX, Y)$  est définie positive si la relation  $X \neq 0$  entraîne  $(AX, X) > 0$ .*

DÉFINITION 1.3. — *Une forme sesquilinéaire  $(AX, Y)$  est dite elliptique si*

$$(1.2) \quad |(AX, X)| \geq \alpha \cdot \|X\|^2 \quad \text{pour tout } X \in C^N.$$

où  $\alpha =$  constante positive et où

$$(1.3) \quad \|X\|^2 = \sum_{i=1}^N |X^i|^2.$$

**DÉFINITION 1.3'.** — Une matrice est dite elliptique si la forme  $(AX, Y)$  est elliptique.

**PROPOSITION 1.1.** — Si la matrice  $A$  est elliptique alors

$$|a_{ii}| \geq \alpha > 0 \quad \text{pour tout } i = 1, \dots, N.$$

En effet, dans (1.2) il suffit de prendre  $X^i = 1$  et  $X^j = 0$  pour  $j \neq i$ .

**PROPOSITION 1.2.** — Toute forme hermitienne et elliptique est définie positive (à un changement de signe près!).

Tout d'abord la relation  $X \neq 0$  entraîne

$$|(AX, X)| \geq \alpha \|X\|^2 > 0$$

donc  $(AX, X) \neq 0$ . Montrons maintenant que  $(AX, X)$  garde un signe constant : soient  $X$  et  $Y$  dans  $C^N$  et supposons que

$$(1.4) \quad \begin{cases} (AX, X) > 0, \\ (AY, Y) < 0. \end{cases}$$

On a,  $\lambda$  désignant un nombre réel

$$(A(\lambda X + Y), \lambda X + Y) = \lambda^2 (AX, X) + 2\lambda \operatorname{Re}(AX, Y) + (AY, Y)$$

en tenant compte de (1.4) il existe deux nombres réels distincts  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  tels que

$$(A(\lambda_i X + Y), (\lambda_i X + Y)) = 0 \quad i = 1, 2$$

et par suite

$$\lambda_i X + Y = 0 \quad i = 1, 2$$

d'où, puisque  $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$$X = 0$$

ce qui est en contradiction avec (1.4). Par conséquent  $(AX, X)$  garde un signe constant *indépendant* de  $X$ .

**1.2.** — Cas où  $V_h$  est un espace de dimension finie  $N(h)$ . Il s'agit essentiellement de l'approximation par la méthode

de Galerkin (chap. 2) ou par la méthode variationnelle des *différences finies* (chap. 4).

Nous savons (chap. 1 n° 4) que le problème approché ( $P_h$ ) est en fait un système de  $N(h)$  équations linéaires à  $N(h)$  inconnues.

$$(1.5) \quad \sum_{i=1}^{N(h)} u_h^i a_h(e_h^i, e_h^j) = L_h(e_h^j) \quad j = 1, \dots, N(h)$$

où  $e_h^i, i = 1, \dots, N(h)$  est une base de l'espace  $V_h$  et où les inconnues  $u_h$  sont les composantes de la solution « approchée »  $u_h$

$$u_h = \sum u_h^i e_h^i.$$

DÉFINITION 1.4. — *La matrice*

$$A_h = ((a_h(e_h^i, e_h^j))) \quad i, j = 1, \dots, N(h)$$

*est dite matrice du problème approché.*

DÉFINITION 1.5. — *Les équations (1.5) sont dites équations approchées.*

L'espace  $V_h$  étant de dimension finie  $N(h)$ , on peut le confondre avec  $C^{N(h)}$ ; les deux normes  $\|u_h\|_{V_h}$  et  $\|u_h\| = (\sum |u_h^i|^2)^{1/2}$  sont équivalentes : c'est-à-dire qu'on a

$$0 < k_1 \leq \frac{\|u_h\|_{V_h}}{\|u_h\|} \leq k_2 \quad \|u_h\| \neq 0$$

(les nombres  $k_1$  et  $k_2$  peuvent dépendre de  $h$ ).

On a maintenant :

$$a_h(u_h, v_h) = (A_h u_h, v_h)$$

et compte tenu de l'hypothèse de  $V_h$ -ellipticité

$$|a_h(u_h, u_h)| \geq \alpha \cdot \|u_h\|_{V_h}^2 \quad \text{pour tout } u_h \in V_h, \alpha > 0$$

il vient

$$|(A_h u_h, u_h)| \geq \alpha \cdot \|u_h\|_{V_h}^2$$

et, encore

$$|(A_h u_h, u_h)| \geq \alpha k_1^2 \|u_h\|^2 \quad \alpha k_1^2 > 0 \\ \text{pour tout } u_h.$$

On a donc démontré

PROPOSITION 1.6. — *La matrice  $A_h$  du problème approché  $(P_h)$  est elliptique.*

D'autre part, dans tous nos schémas d'approximation si  $a(u, v)$  est hermitienne,  $a_h(u_h, v_h)$  l'est aussi d'où la

PROPOSITION 1.7. — *Si  $a(u, v)$  est hermitienne et V-elliptique, alors la matrice  $A_h$  du problème approché  $(P_h)$  est hermitienne définie positive.*

## 2. Formation des équations approchées.

### 2.1. — Formation globale.

On connaît la base  $e_h^i, i = 1, \dots, N(h)$  de  $V_h$ . Il suffit donc de calculer  $a(e_h^i, e_h^j)$  et  $L(e_h^i)$ . Il en sera ainsi lorsque les fonctions  $e_h^i$  seront définies « globalement » dans  $\Omega$  (et non par un raccordement de fonctions définies « localement » : voir exemples 3.1 et 3.2, chapitre 2).

### 2.2. — Formation progressive.

Nous étudions maintenant le cas où les  $e_h^i$  sont définies « localement » comme dans les exemples 3.1 et 3.2, de la méthode de Galerkin (chap. 2) ou comme dans la méthode variationnelle des différences finies. Nous allons exposer la méthode de formation progressive des équations approchées dans le cas des problèmes de Neumann d'ordre 2 (voir chap. 4, n° 2). Nous rappelons qu'on cherche  $u$  dans  $H^1(\Omega)$  tel que

$$a(u, v) = L(v) \quad \text{pour tout } v \in H^1(\Omega)$$

où

$$a(u, v) = \Sigma \int_{\Omega} a_{ij} D_i u \overline{D_j v} dx + \int_{\Omega} a_0 u \overline{v} dx$$

et

$$L(v) = \int_{\Omega} f \overline{v} dx.$$

On a défini un ensemble (fini)  $R_h^1$  de points du réseau  $R_h$ ; puis à toute suite  $u_h$  définie sur  $R_h^1$  et à valeurs dans  $\mathbb{C}$  on associe (linéairement) les fonctions  $u_h^i$  et  $u_h^0$ ; le problème approché



est alors : déterminer la suite  $u_h$  telle que :

$$(2.1) \quad a_h(u_h, \varphi_h) = L_h(\varphi_h) \quad \text{pour tout } \varphi_h \in V_h$$

ou

$$a_h(u_h, \varphi_h) = \sum \int_{\Omega} a_{ij} u_h^i \bar{\varphi}_h^j dx + \int_{\Omega} a_0 u_0^k \bar{\varphi}_0^h dx$$

et

$$L_h(\varphi_h) = \int_{\Omega} f \bar{\varphi}_0^h dx$$

il est clair que (2.1) peut s'écrire, *en supprimant désormais l'indice h*

$$(2.2) \quad \begin{cases} \sum_{A, B} D(A, B) u(A) \bar{\varphi}(B) = \sum_B R(B) \bar{\varphi}(B) \\ \text{pour tout } \varphi \in V_h \end{cases}$$

où  $A, B \in R_h^1$  et où  $D(A, B)$ ,  $R(B)$  ne dépendent ni de  $u$  ni de  $\varphi$ . L'équation (2.2) est équivalente au système des équations linéaires suivantes

$$(2.3) \quad \begin{cases} \sum_A D(A, B) u(A) = R(B), & A \in R_h^1 \\ B \text{ étant un point quelconque de } R_h^1. \end{cases}$$

DÉFINITION 2.1. — *L'équation*

$$\sum_A D(A, B) u(A) = R(B), \quad A \in R_h^1$$

*est dite, équation approchée associée au point B de  $R_h^1$ .*

*Puisque les fonctions  $u^i$  et  $u_0$  sont définies « localement » à partir de la suite  $u$ , il est naturel de faire intervenir les formes suivantes*

$$a_h^M(u, \varphi) = \sum \int_{\Omega \cap (O, M)} a_{ij} u^i \bar{\varphi}^j dx + \int_{\Omega \cap (O, M)} a_0 u_0 \bar{\varphi}_0 dx$$

et

$$L_h^M(\varphi) = \int_{\Omega \cap (O, M)} f \bar{\varphi}_0 dx \quad (10).$$

Il est clair que

$$(2.4) \quad \begin{cases} a_h(u, \varphi) = \sum_M a_h^M(u, \varphi) \\ L_h(\varphi) = \sum_M L_h^M(\varphi) \end{cases}$$

(où la sommation a lieu pour les points  $M$  tels que le pavé

(10) On aurait pu prendre un autre pavé lié à  $M$  au lieu de  $(0, M)$ .

$(0, M)$  « coupe »  $\Omega$  i.e.  $(0, M) \cap \Omega = \emptyset$  et que  $a_h^M(u, \nu)$  et  $L_h^M(\nu)$  peuvent s'écrire

$$(2.5) \quad \begin{cases} a_h^M(u, \nu) = \sum_{A, B} D^M(A, B) u(A) \bar{\nu}(B), & A, B \in R_h^1 \\ L^M(\nu) = \sum_B R^M(B) \bar{\nu}(B), & B \in R_h^1 \end{cases}$$

On a donc le résultat suivant

$$(2.6) \quad \begin{cases} D(A, B) = \sum_M D^M(A, B) \\ R(B) = \sum_M R^M(B) \end{cases}$$

(même ensemble de sommation que dans (2.4)).

**DÉFINITION 2.2.** — Les éléments  $a_h^M(u, \nu)$ ,  $L_h^M(\nu)$ ,  $D^M(A, B)$  sont appelés respectivement *forme sesquilinéaire partielle*, *forme linéaire partielle* et *coefficient partiel*.

*Au point de vue programmation:* Désignons par  $D(A, B)$  et par  $R(B)$  les mémoires qui doivent contenir les nombres  $D(A, B)$  et  $R(B)$ ; grâce aux relations (2.6) on est conduit au procédé de *formation progressive* des équations approchées :

*Avant* le bouclage (la variable étant le pavé  $(0, M)$  ou le point  $M$ ) on annule les mémoires  $D(A, B)$  et  $R(B)$ .

*Pendant* le bouclage on ajoute au contenu de ces mémoires les nombres  $D^M(A, B)$  et  $R^M(B)$  définis par (2.5).

*En Fin* de bouclage (lorsque  $(0, M)$  a « couvert »  $\Omega$ ) dans les mémoires  $D(A, B)$  et  $R(B)$  il y a  $\sum_M D^M(A, B)$  et  $\sum_M R^M(B)$  c'est-à-dire les nombres  $D(A, B)$  et  $R(B)$ .

### 3. Forme des équations approchées.

3.1. — Considérons le problème de Neumann suivant : étant un ouvert borné dans  $R^n$  de frontière régulière  $\Gamma$ , déterminer  $u$  dans  $H^1(\Omega)$  tel que

$$(3.1) \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} a_{ii} D_i u \cdot \overline{D_i \nu} dx + \int_{\Omega} u \cdot \bar{\nu} dx = \int_{\Omega} f \cdot \bar{\nu} dx \\ \text{pour tout } \nu \in H^1(\Omega) \end{cases}$$

où

$$a_{ii}, a_0 \in L^\infty(\Omega), \quad f \in L^2(\Omega)$$

et on suppose que

$$(3.2) \quad \begin{cases} a_{ii}(x) \geq \alpha > 0 & \text{p.p. sur } \Omega \quad i = l, \dots, n \\ a_0(x) \geq \alpha & \text{p.p. sur } \Omega \end{cases}$$

Il s'agit donc d'un cas particulier où la forme sesquilinéaire  $a(u, \nu)$  (le premier membre de (3.1)) est hermitienne. Nous allons étudier la forme des équations approchées pour les 4 types de problèmes approchés décrits dans le n° 2, chapitre 4.

3.2. — *Premier schéma d'approximation.*

On pose pour  $A, B \in \mathcal{R}_h^1$  (voir la définition de  $\mathcal{R}_h^1$  au chapitre 4 n° 2).

$$\begin{aligned} \Omega(A, B) &= \Omega \cap (0, A) \cap (C, B), \\ \Omega(A, Bi) &= \Omega \cap (0, A) \cap (A, Bi). \end{aligned}$$

(Voir les définitions des pavés  $(0, M)$ ,  $(C, M)$ ,  $(A, Mi)$  dans le chapitre 3, n° 1.)

$$\begin{aligned} a(A, B) &= \text{mes. } \Omega(A, B), \\ a(A, Bi) &= \text{mes. } \Omega(A, Bi), \\ a_{ii}(A, B) &= \int_{\Omega(A, Bi)} a_{ii}(x) dx, \\ a_0(A, B) &= \int_{\Omega} (A, B) a_0 dx. \end{aligned}$$

Rappelons maintenant que  $M_0$  désigne l'ensemble des sommets du pavé  $(0, M)$  et que  $M_i, i = l, \dots, n$ , désigne l'ensemble des points  $M$  tels que  $N, N + h_i \in M_0$ .

On pose

$$a_h^M(u, \nu) = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega \cap (0, M)} a_{ii} u^i \bar{\nu}^i dx + \int_{\Omega \cap (0, M)} a_0 \cdot u \cdot \bar{\nu}_0 dx$$

Rappelons que les fonctions étagées  $u_0, \nu_0$  sont constantes sur tout  $(C, M)$  et que  $u^i = \nabla_i u_0, \nu^i = \nabla_i \nu_0$ ; on vérifie alors que,

$$(3.3) \quad \left\{ \begin{aligned} a_h^M(u, \nu) &= \sum_{i=1}^n \sum_{A \in M_i} a_{ii}(M, A_i) \cdot \frac{u(A + h_i) - u(A)}{h_i} \cdot \frac{\bar{\nu}(A + h_i) - \bar{\nu}(A)}{h_i} \\ &+ \sum_{A \in M_0} a_0(M, A) \cdot u(A) \cdot \bar{\nu}(A). \end{aligned} \right.$$

Compte tenu de (3.2) les coefficients  $a_{ii}(M, Ai), a_0(M, A)$

sont positifs; on voit alors, sur (3.3) que les coefficients partiels possèdent les 3 propriétés suivantes :

i) seuls les coefficients du type

$$D^M(A, A), D^M(A, A + h_i), D^M(A + h_i, A)$$

ne sont pas (automatiquement) nuls.

ii) les coefficients du type  $D^M(A, A)$  (ou  $D^M(A + h_i, A + h_i)$  !) sont positifs.

iii) par contre, les coefficients du type  $D^M(A, A + h_i)$  et  $D^M(A + h_i, A)$  sont négatifs.

Les coefficients  $D(A, B)$  des équations approchées possèdent aussi ces propriétés (puisqu'on les obtient par sommation des coefficients partiels).

Cherchons maintenant la somme (par rapport à  $A$ ) des coefficients  $D^M(A, B)$  : il suffit pour cela de faire dans (3.3)

$$\begin{aligned} u(A) &= 1 \quad \text{pour tout } A \in M_0 \\ \varphi(B) &= 1 \end{aligned}$$

et

$$\varphi(P) = 0 \quad \text{si } P \neq B \quad \text{pour tout } A \in M_0.$$

On obtient

$$\sum_{A \in M_0} D^M(A, B) = a_0(M, B)$$

donc

$$\sum_{A \in M_0} D^M(A, B) > 0$$

et par suite

$$D^M(B, B) > \sum D^M(A, B), \quad A \in M_0, \quad A \neq B.$$

Par une sommation en  $M$ , il vient

$$D(B, B) > - \sum D(A, B), \quad A \neq B.$$

par conséquent, la matrice  $A$  est à *diagonale dominante stricte*. En résumant les résultats du n° 3 et la proposition 1.7, il vient le

**THÉORÈME 3.1.** — *La matrice  $A_h$  du problème  $(P_h)$  (1<sup>er</sup> schéma d'approximation) possède les propriétés suivantes :*

- 1) elle est hermitienne définie positive;
- 2) elle est à diagonale dominante stricte;

3) les coefficients non (automatiquement) nuls sont de la forme

$$D(A, A), \quad D(A, A + h_i), \quad D(A + h_i, A) \quad i = 1, \dots, n;$$

4) les coefficients de la diagonale principale sont positifs, les autres sont négatifs ou nuls.

D'après la propriété 3) énoncée dans ce théorème, dans une équation approchée, il y a plus  $2n + 1$  coefficients non nuls.

3.3. — Les 3 autres schémas d'approximation (voir chap. 4, n° 24).

Considérons un pavé frontalier  $(0, M)$ , (*i.e*  $\Gamma \cap (0, M) \neq \emptyset$ ). On vérifie que la forme sesquilinéaire partielle  $a_h^M(u, \varphi)$  peut s'écrire

$$a_h^M(u, \varphi) = \sum_{A, B \in M_0} D^M(A, B) u(A) \cdot \bar{\varphi}(B)$$

où les coefficients  $D^M(A, A)$  sont positifs et où en général

$$D^M(A, B) \neq 0 \quad \text{si } A \neq B, \quad A, B \in M_0.$$

Si  $A$  et  $B$  sont des sommets d'un même pavé, le coefficient  $D(A, B)$  est donc non nul en général : par conséquent, dans une équation approchée il y a au plus  $3^n$  coefficients non nuls. Compte tenu de ces résultats et de la proposition 1.7, il vient le

**THÉORÈME 3.2.** — La matrice  $A_h$  du problème  $(P_h)$  (schémas d'approximations 2, 3 et 4) possède les propriétés suivantes :

- 1) elle est hermitienne définie positive;
- 2) les coefficients non (automatiquement) nuls sont de la forme;  $D(A, B)$  où  $A$  et  $B$  sont des sommets d'un même pavé;
- 3) les coefficients  $D(A, A)$  de la diagonale principale sont positifs.

*Remarque 3.1.* — On peut vérifier que  $A_h$  n'est pas à diagonale dominante et que les coefficients non situés sur la diagonale principale sont de signe quelconque.

*Remarque 3.2.* — Supposons que le système des équations linéaires approchées soit résolu par la méthode (itérative) de Relaxation (cf. [18]). Pour les matrices  $A_h$  décrites par le

théorème 3.1 la recherche du paramètre de relaxation optimum est aisée; par contre, pour les matrices  $A_h$  décrites par le théorème 3.2, nous ignorons comment définir le paramètre optimum éventuel.

#### 4. Programmation.

4.1. — Considérons le problème de type mêlé décrit au chapitre 4, n° 5, c'est-à-dire le problème suivant: On donne un ouvert  $\Omega$  borné dans  $R^n$  de frontière régulière  $\Gamma$ , on désigne par  $\Gamma_1$  une partie de  $\Gamma$  et par  $V$  le sous-espace des  $u \in H^n(\Omega)$  tels que

$$\gamma u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1.$$

On cherche  $u$  dans  $V$  tel que

$$\Sigma \int_{\Omega} a_{pq} D^p u D^q v \, dx = \int_{\Omega} \bar{f} \cdot v \, dx \quad \text{pour tout } v \in V.$$

Nous allons étudier la formation d'un programme sur la résolution approchée de ce problème par la méthode variationnelle des différences finies.

Ce programme est formé d'un programme principal qui assure la liaison entre plusieurs sous-programmes (assemblés séparément). Il y a :

4.2. — Les sous-programmes qui concernent les *données* du problème, à savoir :

- 1) les fonctions  $a_{pq}$  et  $f$ ;
- 2) les représentations locales de  $\Gamma$  et de  $\Gamma_1$ . Par exemple si  $\Omega$  est un cercle dans le plan et si  $\Gamma$  a pour équation  $x^2 + y^2 = 1$ , le programme principal fera appel aux fonctions

$$\begin{aligned} y_1 &= + \sqrt{1 - x^2}, & x_1 &= + \sqrt{1 - y^2}, \\ y_2 &= - \sqrt{1 - x^2}, & x_2 &= - \sqrt{1 - y^2}. \end{aligned}$$

4.3. — Les sous-programmes qui concernent l'*approximation*, à savoir :

1. Le sous-programme *position* ou (POSIT): il étudie la position du pavé  $(0, M)$  par rapport à  $\Omega$ : nous donnons à POSIT les coordonnées de  $M$  et il restitue les éléments nécessaires au calcul des coefficients partiels. On pourra associer

un POSIT à chaque type d'approximation; par exemple

POSIT 1 : donne les mesures de  $(0, M) \cap \Omega$ .

POSIT 2 : donne les coordonnées du barycentre de

$$(0, M) \cap \Omega \dots$$

2. Le sous-programme de *formation* des équations (ou FORMA). On pourra utiliser la formation progressive des équations (voir n° 2) et associer un FORMA à chaque type d'approximation.

3. Le sous-programme *Accélération* : il s'agit de rechercher des paramètres d'accélération de la méthode itérative choisie.

4. Le sous-programme *Résolution* du système des équations linéaires approchées.

5. Le sous-programme *Sortie* des résultats.

*Remarque 4.1.* — (Sur la comparaison des différentes méthodes d'approximations pour un exemple donné). Il est nécessaire de connaître la solution exacte  $u$ . La solution approchée  $u_h$  (ou plus exactement  $p_h u_h$ , voir théorie générale chap. 1) étant calculée, on demandera alors au sous-programme sortie de calculer, par exemple, l'erreur relative dans  $L^2(\Omega)$ , (c'est-à-dire l'erreur relative en moyenne quadratique).

*Remarque 4.2.* — *Notre étude est limitée à la formation du système approché* (c'est à-dire à l'approximation). Pour la résolution de ce système par des méthodes itératives cf. [18].

**5. Exemple 1: (Un problème de Neumann à un milieu).**

5.1. — Désignons par  $\Omega$  le disque (de  $\mathbb{R}^2$ ) de centre l'origine et de rayon 1 et par  $\Gamma$  la frontière de  $\Omega$  <sup>(11)</sup>. Considérons le

*Problème (P).* — Déterminer  $u$  dans  $H^1(\Omega)$  tel que :

$$(5.1) \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} D_i u \cdot \overline{D_i v} \, dx + \int_{\Omega} u \cdot \overline{v} \, dx = \int_{\Omega} f \cdot \overline{v} \, dx + \int_{\Gamma} g \cdot \overline{v} \, d\sigma \quad (12) \\ \text{pour tout } v \in H^1(\Omega) \end{array} \right.$$

<sup>(11)</sup> On n'a nullement tenu compte des symétries du cercle.

<sup>(12)</sup> Voir chap. 4 n° 8 les remarques sur la forme linéaire  $v \rightarrow \int_{\Gamma} g \cdot \overline{v} \, d\sigma$ .

$f$  et  $g$  sont deux fonctions continues données,  $d\sigma$  désigne l'élément d'aire sur  $\Gamma$ . Il est clair que ce problème admet une solution unique  $u$  et que  $u$  vérifie (dans le sens faible)

$$(5.2) \quad \begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

On a *commencé* par se donner  $u$  et *ensuite* on a calculé  $f$  et  $g$  à l'aide de (5.2). On a pris

$$u = x_1^3 + x_2^4.$$

5.2. — *Approximation*: On donne le réseau  $R_h$  de maille uniforme  $h = 0,04$ . Nous rappelons que  $u_h$  désigne une suite définie sur certains points du réseau. Puisque  $u$  est connu, on peut calculer l'erreur relative suivante:

$$\delta u = \left( \frac{\sum_{\mathbf{M}} |u_h(\mathbf{M}) - u(\mathbf{M})|^2}{\sum_{\mathbf{M}} |u(\mathbf{M})|^2} \right)^{1/2}$$

le système linéaire est résolu par la méthode itérative de Gauss-Seidel; le nombre d'itérations est désigné par  $N$ .

5.3. — *Résultats*: Le nombre de points est : 2601.

*Deuxième schéma* (voir 2.4, chap. 4)

N	25	50	75	100
$\delta u$	0,254	0,074	0,029	0,019

*Troisième schéma*:

N	25	50	75	100
$\delta u$	0,253	0,067	0,019	0,006



**6. Exemple 2: (Un problème de transmission ou un problème de Neumann à deux milieux).**

6.1. — *Le problème exact.*

Désignons par  $\Gamma_1$  (Resp.  $\Gamma_2$ ) la circonférence (dans  $\mathbb{R}^2$ ) de centre l'origine et de rayon  $1/2$  (Resp. de rayon  $1$ ), par  $\Omega_1$  le disque de frontière  $\Gamma_1$  et par  $\Omega_2$  la couronne de frontière  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ . Désignons par  $V$  le sous-espace fermé des  $u = (u_1, u_2)$  de  $H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2)$  tels que

$$\gamma u_1 = \gamma u_2 \quad \text{sur } \Gamma_1.$$

Considérons le

*Problème (P).* — Déterminer  $u$  dans  $V$  tel que

$$(6.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_i} D_i u_1 \overline{D_i v_1} dx + \int_{\Omega_1} u_1 \overline{v_1} dx + \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_i} 5 D_i u_2 \cdot \overline{D_i v_2} dx \\ + \int_{\Omega_2} u_2 \overline{v_2} dx = \int_{\Omega_1} f_1 \overline{v_1} + \int_{\Omega_2} f_2 \overline{v_2} dx + \int_{\Gamma_2} g v_2 d\sigma \\ \text{pour tout } v = (v_1, v_2) \in V \end{array} \right.$$

$f_1, f_2$  et  $g$  sont des fonctions continues données.

Le problème (P) a une solution unique  $u$  et on montre (en utilisant la formule de Green dans  $\Omega_1$  et dans  $\Omega_2$ ) que  $u$  est solution (dans un sens faible) du

*Problème (P').* — Déterminer  $u_1$  et  $u_2$  tels que

$$(6.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\Delta u_1 + u_1 = f_1 \quad \text{dans } \Omega_1 \\ -5\Delta u_2 + u_2 = f_2 \quad \text{dans } \Omega_2 \end{array} \right.$$

$$(6.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma u_1 = \gamma u_2 \quad \text{sur } \Gamma_1 \\ \frac{\partial u_1}{\partial n_1} = 5 \frac{\partial u_2}{\partial n_2} \quad \text{sur } \Gamma_2 \end{array} \right.$$

$$(6.4) \quad \frac{\partial u_2}{\partial n_2} = g \quad \text{sur } \Gamma_2$$

où  $n_i, i = 1, 2$  désigne la normale extérieure à la frontière de  $\Omega_i$ . Ici aussi on a commencé par se donner la solution  $u = (u_1, u_2)$  satisfaisant à (6.3), puis on a ensuite calculé  $f_1, f_2, g$  à l'aide de (6.2) et de (6.4).

On a pris

$$u_1(x_1, x_2) = (2x_1^2 + 3x_2^2) \left( 5 - \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \right)$$

$$u_2(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 3x_2^2.$$

6.2. — *Approximation*: On prend un réseau  $R_h$  de maille uniforme  $h = 0,05$ . On désigne par  $R_h^i$  l'ensemble des sommets des pavés qui ont une intersection non vide  $\Omega_{i, i=1,2}$ . La solution du problème approché est formée de suites  $u_{i,h}$  définies sur  $R_h^i$ ,  $i = 1, 2$ . On pose

$$\delta u_i = \left[ \frac{\sum_{R_h^i} |u_{i,h}(M) - u_i(M)|^2}{\sum_{R_h^i} |u_i(M)|^2} \right]^{1/2} \quad i = 1, 2.$$

Ici encore le système est résolu par la méthode de Gauss-Seidel.

6.3. — *Résultats*: Le problème (P) a été considéré comme un problème de Neumann (à 2 milieux). Nous avons utilisé le 3<sup>e</sup> schéma d'approximation (voir 2.4, chap. 4). Le nombre des itérations est encore désigné par N.

N	100	125	150	175	200
$\delta u_1$	0,207	0,135	0,087	0,056	0,036
$\delta u_2$	0,184	0,128	0,089	0,063	0,045

*Essai réalisé sur IMB 704.*

Nombre de points 1681.

Durée (approximative) de l'essai : 19'30".

Durée de la formation du système : 2'12".

Durée de la résolution : 5" par itération.

Durée des calculs d'erreurs : 1'20".

*Remarque 6.1.* — La décroissance régulière des erreurs relatives  $du_i$  en fonction du nombre des itérations nous laisse supposer que le système linéaire n'est pas encore résolu après 200 itérations. Il faudrait donc soit faire plus d'itérations, soit prendre une méthode plus rapide; notre choix de la méthode de Gauss-Seidel s'explique par le fait que cette méthode est facile à programmer et que nous avons pour but, *non pas la rapidité de la résolution mais l'étude de l'approximation* (voir Remarque 3.2 au sujet de la méthode de Relaxation).

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] BOURBAKI, Espaces Vectoriels topologiques, livre V, Hermann, Paris.
- [2] S. CAMPANATO, Sui problema de Picone relativo all'equilibrio di un corpo incastrato. *Ric. Mat.*, 6, 125-149 (1957).
- [3] S. CAMPANATO, Sui problemi al contorno per sistemi di equazioni differenziali lineari del tipo dell'elasticita. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, 13, 223-258 et 275-302 (1959).
- [4] J. CEA, Sur l'approximation des problèmes aux limites, *C.R. Acad. Sci.*, Paris, t. 254, p. 1729-1731 et 2919-2921 (1962) et t. 255, p. 442-444, (1962).
- [5] J. DENY et J. L. LIONS, Les espaces du type de Beppo Levi, *Ann. Inst. Fourier*, 5, 305-370 (1955).
- [6] K. O. FRIEDRICHS, A Finite difference scheme for the Neumann and the Dirichlet problem. Applied Mathematics Center, New York, 1962.
- [7] E. GAGLIARDO, Caratterizzazioni delle tracce sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in  $n$  variabili, *Ric. Mat.*, 5, 169-205 (1956).
- [8] D. HUET, Phénomènes de perturbation singulière, *Ann. Inst. Fourier*, 10, 1-96 (1960).
- [9] O. A. LADYZENSKAYA, La méthode des différences finies dans la théorie des équations aux dérivées partielles (en russe), *Ouspechi Mat. Nauk.*, 12, 123-148 (1957).
- [10] J. L. LIONS, Problèmes aux limites en théorie des distributions, *Acta. Math.*, 94, 13-153 (1955).
- [11] J. L. LIONS, Équations différentielles opérationnelles et problèmes aux limites. Springer, Collection Jaune, (1961).
- [12] J. L. LIONS, Méthodes d'approximation numérique des problèmes aux limites de la physique mathématique. Cours Paris (1962).
- [13] J. L. LIONS, Sur l'approximation des solutions de certains problèmes aux limites, *Rendic. Sem. Mat. Padova* (1962).
- [14] W. LITTMAN, Résolution du problème de Dirichlet par la méthode des différences finies, *C.R. Acad. Sci.*, 247, 2270-2272 (1958).

- [15] E. MAGENES et G. STAMPACCHI, A. Problemi al contorno per le equazioni differenziali di tipo ellittico, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, 12, 247-358 (1958).
- [16] L. SCHWARTZ, Théorie des distributions, Hermann, Paris.
- [17] S. L. SOBOLEV, Applications de l'analyse fonctionnelle à la physique mathématique. Leningrad 1950.
- [18] R. S. VARGA, Matrix iterative analysis. Prentice Hall (1963).

(Thèse, Fac. Sciences, Paris, 1964).

Jean CÉA,  
Faculté des Sciences  
Département de Mathématiques  
Reims (Marne).

---