Asymptotic completeness for N-body short-range quantum systems

a new proof

Doctoral Thesis

Author(s):
Graf, John Michael

Publication date:
1990

Permanent link:
https://doi.org/10.3929/ethz-a-000568788

Diss. ETH No. 9041

Asymptotic completeness for N-body short-range quantum systems: a new proof

A dissertation submitted to the
SWISS FEDERAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY ZURICH

for the degree of
Doctor of Natural Sciences

presented by
JOHN MICHAEL GRAF
Dipl. Phys. ETH
born July 14, 1962
citizen of Rebstein (SG)
and of Lugano (TI)

accepted on the recommendation of
Prof. Dr. W. Hunziker, examiner
Prof. Dr. I. M. Sigal, co-examiner

W. Hunziker

1990

Kurzfassung

Die Schrödinger Gleichung ist das wichtigste Werkzeug für das mathematische Verständnis von Atomen und Molekülen. Eine der grundlegenden Aufgaben der quantenmechanischen Streutheorie ist es, für grosse Zeiten das asymptotische Verhalten der Lösungen der zeitabhängigen Schrödinger Gleichung zu untersuchen. Dies bedeutet, die möglichen Szenarien (die sog. Streukanäle) für die zeitliche Entwicklung anzugeben. Die Aussage, dass eine Aufzählung von Streukanälen vollständig ist, wird deshalb asymptotische Vollständigkeit genannt.

Hier behandeln wir diese Frage für ein System bestehend aus N Teilchen, die miteinander über Paarpotentiale wechselwirken, welche im Unendlichen rascher abfallen als $r^{-1-\epsilon}$. Das übliche Szenario ist, dass für jeden Anfangszustand das System schliesslich in ein oder mehrere voneinander unabhängige, gebundene Teilsysteme, d.h. in freie, zusammengesetzte Teilchen bricht. Genauer: die Wahrscheinlichkeit, dass dies zur Zeit t noch nicht geschehen ist, verschwindet im Limes $t \to +\infty$. Es ist bei weitem nicht trivial dieses Ergebniss aus der Bewegungsgleichung herzuleiten. Tatsächlich ist der erste allgemeine Beweis (von Sigal und Soffer geliefert) erst vor drei Jahren erschienen. Er bildet den krönenden Erfolg vieler Anstrengungen, die von verschiedenen Seiten erbracht wurden. Aus dieser Entwicklung sind neue Denkweisen über die Quantendynamik, sowie neue mathematische Instrumente hervorgegangen, die ebenso wichtig sind wie das Resultat selbst. In der vorliegenden Arbeit brauchen wir viele dieser Instrumente, um einen alternativen Beweis der asymptotischen Vollständigkeit zu geben, welcher wesentlich verschieden von jenem von Sigal und Soffer ist. Im folgenden soll versucht werden, dessen Idee näher zu erläutern.

Jeder Konfiguration der Teilchen kann eine Zerlegung dieser Teilchen in Gruppen zugeordnet werden, und zwar so dass Teilchen in derselben Gruppe nahe beisammen, die Gruppen voneinander aber weit entfernt sind. Wenn man zu einer grossen Zeit die Teilchen wie soeben erklärt in Gruppen zusammenfasst, dann stimmen die instantane und die mittlere Geschwindigkeiten der Schwerpunkte dieser Gruppen näherungsweise überein. Das wichtigste Zwischenresultat des Beweises ist es, diese Intuition in eine mathematische Aussage zu fassen, welche ein Beispiel einer sogenannten Fortpflanzungsabschätzung darstellt. Sie ist ein Anzeichen dafür, das die Schwerpunktsbewegung dieser Gruppen über lange Zeiten frei ist. Für ein freies Teilchen sind nämlich die beiden Geschwindigkeiten asymptotisch gleich.

Als nächstes soll die Herleitung und die weitere Verwendung dieser Abschätzung

beschrieben werden. Zu ihrer Herleitung werden die Schwerpunktskonfigurationen der Gruppen, die sich für verschiedene Zerlegungen ergeben, interpoliert. Dies führt zu einem Vektorfeld über den Konfigurationsraum, das dessen geometrische Struktur wiederspiegelt. Mit Hilfe der genannten Abschätzung kann man zeigen, dass die weiter oben erwähnte Zerlegung der Teilchen mit der zeitlichen Entwicklung verträglich ist. Technisch drückt sich dies in der Existenz der Deift-Simon Wellenoperatoren aus.

Schliesslich gilt es den geometrischen Begriff der Zerlegung nach Gruppen mit dem analogen aber schärferen spektralen Begriff in Beziehung zu setzen. Letzterer beinhaltet die zusätzliche Forderung, dass sich die Teilchen innerhalb einer Gruppe in einem gebundenen Zustand befinden. Für Zerlegungen in mehr als eine Gruppe kann man sich dabei auf eine Induktionsannahme berufen, da jede Gruppe weniger Teilchen enthält als das Gesamtsystem. Für die Zerlegung in eine einzelne Gruppe bedarf es aber einer zusätzlichen Abschätzung, wonach diese Gruppe mit nichtverschwindender Geschwindigkeit auseinander fliegt, sofern ihre Energie weg sowohl von jenen der gebundenen Züstanden als auch von den Schwellen ist. Ihr Beweis beruht auf der Mourreschen Ungleichung. Etwas ungenau kann man diese als die infinitesimale Version dieser Abschätzung auffassen.

Abstract

The Schrödinger equation is the most important tool for the mathematical understanding of atoms and molecules. One of the fundamental tasks of quantum-mechanical *scattering theory is to study the long-time behaviour of the solutions of* the time-dependent Schrödinger equation. This means to specify the possible scenarios (the so-called scattering channels) for the time development. The statement that a list of scattering channels is exhaustive is therefore called asymptotic completeness.

Here we deal with this question for a system consisting of N particles interacting through short-range potentials, vanishing at infinity faster than $r^{-1-\epsilon}$. The standard scenario is that for any initial state, the system will break up eventually into one or several independent bound clusters, i.e. into free composite particles. More precisely: the probability that at time t this has not yet happened, vanishes in the limit $t \to +\infty$. To derive this basic dynamical property of N-body systems from the equation of motion is far from trivial. In fact, the first general proof (due to Sigal and Soffer) appeared only three years ago, marking the crowning success of many efforts by different people. From this development have emerged new ways of think about quantum dynamics and new mathematical tools, which are as important as the result itself. In the work presented here we use many of these *tools to give an alternative* proof of asymptotic completeness, which is essentially different from that of Sigal and Soffer. In the following we shall attempt to explain its idea somewhat more in detail.

To each configuration of the particles one can associate a partition of these particles into clusters in such a way that particles in the same cluster are close together, and that the clusters are very distant from each other. If at some large time one groups the particles as explained, then the *instantaneous* and the *average* velocities of the centres of mass of these clusters coincide approximately. The main intermediate result of the proof is to cast this intuition into a mathematical statement, which is an example of a so-called propagation estimate. It is an indication that the motion of the centres of mass of these clusters is free over long times. In fact for a free particle both velocities are approximately equal.

Next we shall describe the derivation and the further application of this estimate. For its derivation, the centres of mass configurations which arise from different cluster decompositions are interpolated. This leads to a vector field on the configuration space which reflects its geometrical structure. Using the aforesaid estimate, one can show that the decomposition into clusters mentioned above is compatible with the time evolution. Technically, this is expressed by the existence of the Deift-Simon

wave operators.

Finally, what matters is to bring the geometrical notion of cluster decomposition in relation with the analogous but sharper spectral notion. The latter includes the additional requirement that the particles within a cluster are in a bound state. For decompositions with more than one cluster one can rely to this end on an induction assumption, since each cluster contains less particles than the whole system. For the decomposition into a single cluster an additional estimate is needed, according to which this cluster is flying apart with nonvanishing velocity, provided its energy is strictly away from those of the bound states, and from the thresholds. Its proof rests on the Mourre estimate. Somewhat inaccurately, the latter can be viewed as the infinitesimal version of that estimate.