Autour du théorème de Bombieri-Vinogradov

par

ETIENNE FOUVRY [1]

Université de Bordeaux I
Talence, France

I. Présentation des résultats

Pour étudier la répartition, en moyenne, dans les progressions arithmétiques, de la suite de nombres réels (x_n), on définit, pour a entier non nul, la somme $S((x_n), a, X, Q)$ par la formule :

$$S((x_n), a, X, Q) = \sum_{\substack{q \leqslant Q \\ (q,a)=1}} \left| \sum_{\substack{n \leqslant X \\ n \equiv a[q]}} x_n - \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\substack{n \leqslant X \\ (n,q)=1}} x_n \right|$$

et on s'intéresse aux valeurs de θ, pour lesquelles on a :

$$(*) \qquad \forall A > 0,\ \forall \eta > 0,\ \textit{on a } S((x_n), a, X,\ X^{\theta-\eta}) \ll_{\eta, A, a} X\,(\log X)^{-A}.$$

(On dira alors que θ est un exposant de répartition de (x_n) relatif à a.)

Lorsque (x_n) est la fonction caractéristique d'une suite d'entiers, la valeur de θ est capitale dans les problèmes de crible (condition $R(\varkappa, \alpha)$ de [11]), et toute amélioration de la valeur de l'exposant de répartition se répercute immédiatement sur les estimations obtenues.

Le célèbre théorème de Bombieri-Vinogradov ([1], [20]) entraîne que (*) est vrai pour $x_n = \Lambda(n)$ et $\theta = 1/2$ (majoration d'ailleurs uniforme en a). La démonstration de ce théorème a été simplifiée ([10], [18], [19]) et étendue à d'autres suites (x_n) ([16], [21]), tout en mettant en évidence l'importance de l'écriture de (x_n) sous forme bilinéaire. La valeur critique $\theta = 1/2$, due essentiellement à l'inégalité de grand crible, n'a pas été franchie pour $x_n = \Lambda(n)$, alors qu'on suppose que $\theta = 1$ est un exposant de répartition ([5]).

---

[1] Laboratoire associé au C.N.R.S. n° 226.

Néanmoins, on a pu dépasser cette valeur critique dans certains cas particuliers :

· $x_n = f_z(n)$ pour $z \leqslant X^{1/883}$ ([8]) ($f_z(n)$ désigne la fonction caractéristique de la suite des entiers n dont tous les facteurs premiers sont $>z$).

· (x_n) obtenue par convolution de deux suites de longueurs particulières ([6]).

L'objet de ce travail est de décrire une autre situation où on franchit la valeur critique 1/2. Les résultats exposés sont en fait des améliorations de ceux du chapitre III de [7]. Les progrès accomplis sont dus au remplacement, dans la démonstration, de la majoration classique de Weil des sommes de Kloosterman, par celle, en moyenne, de telles sommes obtenue récemment par Deshouillers et Iwaniec ([4]).

Le théorème 1 est à comparer au théorème 1 de [6] et étudie l'exposant de répartition de la convolée de deux suites, dont l'une est très courte. Pour l'énoncé de ce théorème, nous aurons besoin des notations suivantes :

(α_m) et (β_n) sont deux suites de nombres réels,

M et N deux nombres $\geqslant 2/3$, a un entier non nul.

On pose $X=4MN$, $\nu = \log N/\log X$.

La notation $m \sim M$ signifie : $M < m \leqslant 2M$ et $\tau_l(n)$ est le nombre de représentations de l'entier n comme produit de l entiers. On pose $\tau(n)=\tau_2(n)$, habituelle fonction nombre de diviseurs.

On montre le théorème suivant :

THÉORÈME 1. *Soient η et $\nu_0 > 0$, γ un entier $\geqslant 1$. On suppose les conditions suivantes réalisées :*

(i) *Pour tous les entiers b, k et q tels que $(b,q)=1$, on a, pour tout B, et pour $x \geqslant 2$ l'estimation :*

$$\sum_{\substack{n \leqslant x \\ (n,k)=1,\, n \equiv b[q]}} \beta_n = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\substack{n \leqslant x \\ (n,kq)=1}} \beta_n + O_B(x\tau(k)(\log x)^{-B})$$

(ii) $|\alpha_k|, |\beta_k| \leqslant (\log k\tau_\gamma(k))^\gamma + 1$

(iii) $\nu \geqslant \nu_0$.

On a, alors, avec $\theta = \min(1/2+\nu/2,\ 5/8 - 3\nu/4)$ et

$$y_l = \sum_{\substack{l=mn \\ m\sim M,\, n\sim N}} \alpha_m \beta_n$$

l'estimation

$$S((y_l), a, X, X^{\theta-\eta}) \ll_{\gamma, \eta, \nu_0, A} X (\log X)^{-A}$$

valable pour tout A, uniformément pour $|a| \leq (\log X)^A$.

La condition (i) est satisfaite par toutes les suites classiques $\beta_n = 1$, $\tau(n)$, $\Lambda(n)$, $\mu(n) \ldots$, quant à la condition (ii) elle est purement technique. Par ce théorème, on voit que θ est plus grand que 1/2 dès que N vérifie $X^{\nu_0} \leq N \leq X^{(1/6)-\nu_0}$ (dans [7], on obtenait l'inégalité plus forte $X^{\nu_0} \leq N \leq X^{(1/12)-\nu_0}$, mais uniformément pour $1 \leq |a| \leq X$).

Parmi le grand nombre d'applications du théorème 1, on n'a retenu que celles permettant de s'approcher du cas le plus intéressant : $x_n = \Lambda(n)$. Le théorème 2 apporte ainsi une très nette amélioration au résultat de [8], déjà évoqué :

THÉORÈME 2. *Soit* $\nu_0 > 0$, *il existe* $\theta = \theta(\nu_0) > 1/2$, *tel qu'on ait l'estimation :*

$$S((f_z(n)), a, X, X^{\theta}) \ll_{\nu_0, A} X (\log X)^{-A}$$

valable pour tout A, uniformément pour $z \leq X^{(1/6)-\nu_0}$ *et* $|a| \leq (\log X)^A$.

La démonstration qui en sera donnée au paragraphe III, ne conduit qu'à la valeur $\theta = \min(442/883,\ 5/8 - 3\nu_0/4) - \eta$ $(\eta > 0)$, valeur qui peut être améliorée, au risque d'alourdir l'exposé.

On passe maintenant au problème de l'exposant de répartition des fonctions τ_k. Les majorations de Weil, déjà citées, amènent à $\theta = 2/3$ pour la fonction τ_2, et le grand crible ([15], [21]) à $\theta = 1/2$ pour $\tau_3, \tau_4, \ldots$. On pense aussi que les fonctions τ_k $(k \geq 3)$ ont un exposant de répartition $> 1/2$. Le théorème 3, conséquence du théorème 1, dit que si cette conjecture est vraie—sous réserve d'une certaine uniformité—pour τ_k $(3 \leq k \leq 6)$ elle l'est aussi pour τ_k $(k \geq 7)$.

Plus précisément, notons $\mathscr{C}(k)$ la conjecture, qui propose que non seulement la fonction $\tau_k(n)$ mais aussi sa convolée avec toute suite très courte (λ_m) aient un exposant de répartition $> 1/2$:

$\mathscr{C}(k)$: *Il existe des constantes* $u_k > 0$ *et* $\theta_k > 1/2$, *telles qu'on ait, pour tout A et tout entier* $K \geq 1$, *l'estimation*

$$S((y_l), a, X, X^{\theta_k}) \ll_{k, A, K} X (\log X)^{-A} \tag{1.1}$$

avec

$$y_l = \sum_{\substack{l=mn \\ m \leqslant X^{\mu_k}}} \lambda_m \, \tau_k(n)$$

uniformément pour $1 \leqslant |a| \leqslant (\log X)^A$ *et pour toute suite* (λ_m) *vérifiant* $|\lambda_m| \leqslant \tau_K(m)$.

Remarquant que $\mathscr{E}(0)$, $\mathscr{E}(1)$ et $\mathscr{E}(2)$ sont vrais, le théorème 3 s'énonce ainsi :

THÉORÈME 3. *On a l'équivalence :*

$$\mathscr{E}(k) \text{ vrai pour } k = 3, 4, 5, 6 \quad \Leftrightarrow \quad \mathscr{E}(k) \text{ vrai pour tout } k.$$

Les conjectures $\mathscr{E}(k)$ ont aussi une conséquence sur l'exposant de répartition de la suite des nombres premiers :

THÉORÈME 4. *Si la conjecture* $\mathscr{E}(k)$ *est vraie pour* $3 \leqslant k \leqslant 6$, *il existe* $\theta > 1/2$ *tel qu'on ait l'estimation*

$$\sum_{\substack{(q,a)=1 \\ q \leqslant X^\theta}} \left| \pi(X; q, a) - \frac{\pi(X)}{\varphi(q)} \right| \ll_A X (\log X)^{-A}$$

valable pour tout A, *uniformément pour* $|a| \leqslant (\log X)^A$.

(Notons qu'on aurait sous les mêmes conditions, l'estimation

$$\sum_{\substack{(q,a)=1 \\ q \leqslant X^\theta}} \left| \sum_{\substack{n \equiv a[q] \\ n \leqslant X}} \mu(n) \right| \ll_A X \, (\log X)^{-A}.)$$

Cette amélioration, quoique conditionnelle, du théorème de Bombieri-Vinogradov présente à nos yeux, l'avantage d'ouvrir une voie d'attaque de cette question, dans la mesure où les conjectures sur l'exposant de répartition des fonctions τ_k se laissent facilement ramener à des majorations en moyenne, de sommes de Kloosterman multidimensionnelles. On peut, à ce sujet, noter que dans le cas de la fonction τ_3, les majorations individuelles de sommes de Kloosterman dues à Deligne ([3], [17]) ne conduisent qu'à la valeur $\theta = 1/2$, si on les applique directement.

Dans [9], H. Iwaniec et l'auteur ont étudié, au lieu de la somme $\Sigma\, |\pi(X; q, a) - \pi(X)/\varphi(q)|$, la somme $\Sigma\, \lambda(q)\, (\pi(X; q, a) - \pi(X)/\varphi(q))$ (où $\lambda(q)$ est « bien factorisable »), pour tirer profit de la nature particulière des coefficients des termes d'erreur, dans les formules sur le crible linéaire ([14]). Le théorème 1 fournit une amélioration des constantes numériques apparaissant dans [9]. En employant les définitions introduites dans cet article, on a :

THÉORÈME 5. *Pour tout $\varepsilon>0$, et pour toute fonction bien factorisable λ, de niveau $Q=X^{(17/32)-\varepsilon}$ et d'ordre fini, on a l'estimation :*

$$\sum_{(q,a)=1} \lambda(q)\left(\pi(X;q,a)-\frac{\pi(X)}{\varphi(q)}\right) \ll_{\varepsilon,A} X\,(\log X)^{-A}$$

valable pour tout A, uniformément pour $|a|\leqslant(\log X)^A$.

Ce théorème conduit immédiatement à une nouvelle majoration de $\pi_2(X)$, cardinal des nombres premiers jumeaux $\leqslant X$.

COROLLAIRE. *Pour tout $\varepsilon>0$ et $X\geqslant X_0(\varepsilon)$, on a la majoration*

$$\pi_2(X)\leqslant 2(\tfrac{64}{17}+\varepsilon)\prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)X(\log X)^{-2}.$$

Sans aucun doute, le coefficient 64/17, pourrait être diminué en utilisant la technique de Chen ([2]).

Ce travail est la suite du 3[e] chapitre de la Thèse de Doctorat d'Etat de l'auteur, qui tient à remercier son directeur de recherche, le Professeur J.-M. Deshouillers et le Professeur H. Iwaniec, pour leurs conseils et leurs remarques.

II. Lemmes

Le lemme 1 sert à majorer la fonction caractéristique $\mathbf{1}_{]M,2M]}$ de l'intervalle $]M,2M]$ par une fonction $\mathscr{C}^\infty$, dont la transformée de Fourier tend donc très vite vers zéro à l'infini. L'utilisation de cette fonction est un artifice technique, qui évite, par le biais de la formule sommatoire de Poisson, un développement en série de Fourier.

LEMME 1. *Pour tout $M\geqslant 1$, il existe une fonction réelle $\alpha(x)$ de classe $\mathscr{C}^\infty$, telle qu'on ait :*

$$\mathbf{1}_{]M,2M]}(x)\leqslant\alpha(x)\leqslant\mathbf{1}_{]M/2,3M]}(x)$$

et telle que pour tout entier l, on ait :

$$\hat{\alpha}(x)\ll_l(|x|M+1)^{-l}M.$$

En effet, on sait qu'il existe une fonction $\mathscr{C}^\infty$, notée α^*, telle que

$$\mathbf{1}_{]1,2]}(x) \leqslant \alpha^*(x) \leqslant \mathbf{1}_{]1/2,3]}(x).$$

On pose alors $\alpha(x)=\alpha^*(x/M)$, on a donc, pour tout l

$$\alpha^{(l)}(x) \ll_l M^{-l}$$

et après l intégrations par parties, on a, pour $x \neq 0$ et $e(\xi)=e^{2\pi i\xi}$

$$\hat{\alpha}(x) = (-2\pi i x)^{-l} \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha^{(l)}(t)\, e(-tx)\, dt \ll_l (|x|\, M)^{-l} M.$$

Cette majoration, jointe à la majoration triviale $l=0$, achève la démonstration.

Le lemme 2 rappelle les résultats classiques sur les fonctions τ_k ([15]) :

LEMME 2. *Soient k, l et m trois entiers $\geqslant 1$; λ, Y et Y_1 trois réels tels que :*

$$(m,k)=1, \quad 1 \leqslant Y^{9/10} \leqslant Y_1 < Y, \quad k \leqslant Y^{4/5}, \quad \lambda \geqslant 0.$$

Sous ces conditions, il existe une constante $C=C(\lambda, l)$ telle qu'on ait l'estimation :

$$\sum_{\substack{Y-Y_1<n\leqslant Y \\ n\equiv m[k]}} \tau_l^\lambda(n) \ll Y_1 k^{-1} (\log Y)^C + 1.$$

Le lemme 3 est l'identité d'Heath-Brown ([12]), qui exprime $\Lambda(n)$ comme convolution de suites dont certaines sont courtes et permet l'application du théorème 1. Cette élégante formule apparaît comme beaucoup plus simple que celle obtenue par itération de l'identité de Vaughan ([18], [19]) comme cela a été fait dans [7]. Ce lemme se démontre par la considération de la série de Dirichlet $(-\zeta'/\zeta)(1-\zeta F)^J$ où $F(s)=\Sigma_{n<Z}\mu(n)\, n^{-s}$.

On a une identité analogue pour $\mu(n)$ en étudiant $(1/\zeta)(1-\zeta F)^J$.

LEMME 3. *Soient $Z \geqslant 2$ et J un entier tel que $2Z^J > n$. On a les égalités suivantes :*

$$\Lambda(n) = \sum_{j=1}^{J} (-1)^j \binom{J}{j} \sum_{m_1,\ldots,m_j<Z} \mu(m_1)\ldots\mu(m_j) \sum_{m_1\ldots m_j n_1 \ldots n_j = n} \log n_1$$

et

$$\mu(n) = \sum_{j=1}^{J} (-1)^{j-1} \binom{J}{j} \sum_{m_1,\ldots,m_j<Z} \mu(m_1)\ldots\mu(m_j) \sum_{m_1\ldots m_j n_1 \ldots n_{j-1} = n} 1.$$

Du théorème 12 de [4], on déduit le lemme 4, outil essentiel de la démonstration du théorème 1.

Il donne une majoration de sommes de sommes de Kloosterman-Ramanujan, et se montre plus efficace, dans certaines applications, que la classique majoration individuelle de Weil ou même que l'hypothèse R^* de Hooley sur les sommes de Kloosterman incomplètes ([13]) (pour $(a,b)=1$, on désigne par $\bar{a}$, dans $\bar{a}/b$ ou dans $\bar{a}[b]$ l'inverse de a modulo b).

LEMME 4 ([4], théorème 12). *Soient* $C, D, L, R, S\geqslant 1$, $(b_{l,r,s})$ *une suite de nombres complexes,* $g(c,d,l,r,s)$ *une fonction* $\mathscr{C}^\infty$, *à support compact dans* $[C,2C]\times[D,2D]\times]0,\infty[^3$ *telle que pour tout* $\nu_i\geqslant 0$ $(1\leqslant i\leqslant 5)$ *on ait :*

$$\left|\frac{\partial^{\nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_4+\nu_5}}{\partial^{\nu_1}c\,\partial^{\nu_2}d\,\partial^{\nu_3}l\,\partial^{\nu_4}r\,\partial^{\nu_5}s}g(c,d,l,r,s)\right| \ll c^{-\nu_1}d^{-\nu_2}l^{-\nu_3}r^{-\nu_4}s^{-\nu_5}$$

(la constante dépendant au plus des ν_i*).*

On note $\mathscr{K}(C,D,L,R,S)$ *la somme*

$$\mathscr{K}(C,D,L,R,S)=\sum_{\substack{1\leqslant r\leqslant R\\ 1\leqslant s\leqslant S\\ (r,s)=1}}\sum_{1\leqslant l\leqslant L} b_{l,r,s}\sum_{\substack{c,d\\ (rd,sc)=1}} g(c,d,l,r,s)\,e\left(l\frac{\overline{rd}}{sc}\right).$$

Pour tout $\varepsilon>0$, *on a la majoration*

$$\mathscr{K}(C,D,L,R,S)\ll_\varepsilon (CDLRS)^\varepsilon K(C,D,L,R,S)\left(\sum_{\substack{1\leqslant l\leqslant L\\ 1\leqslant r\leqslant R,\ 1\leqslant s\leqslant S}}|b_{l,r,s}|^2\right)^{1/2}$$

où

$$K^2(C,D,L,R,S)=CS(RS+L)(C+DR)+D^2LR+C^2DS\sqrt{(RS+L)R}\,.$$

Le lemme 5 est l'habituel procédé de sommation par parties, mais en plusieurs variables.

LEMME 5. *Soit* $f(\mathbf{x})$ *une fonction de* $\mathbf{x}=(x_1,\dots,x_J)$, *définie sur* $]1/2,+\infty[^J$, *telle que, pour* $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_J$ *valant* 0 *ou* 1, *la dérivée partielle*

$$\frac{\partial^{\varepsilon_1+\dots+\varepsilon_J}}{\partial^{\varepsilon_1}x_1\dots\partial^{\varepsilon_J}x_J}f(\mathbf{x})\quad \textit{existe et soit} \ll x_1^{-\varepsilon_1}\dots x_J^{-\varepsilon_J}.$$

Soit $g(\mathbf{n})$ *une fonction définie sur les entiers* $(n_1, \ldots, n_J)$. *On a, pour* $N_1, \ldots, N_J \geq 1/2$ *la majoration*

$$\sum_{n_j \sim N_j} f(\mathbf{n}) g(\mathbf{n}) \ll \sup_{N'_j} \left| \sum_{N_j < n_j \leq N'_j} g(\mathbf{n}) \right|$$

où le supremum est pris sur les $(N'_1, \ldots, N'_J)$ *tels que* $N'_j \leq 2N_j$.

Le lemme 6 sera utilisé au paragraphe VIII. En notant $\omega(t)$ le nombre de facteurs premiers distincts de t, on a :

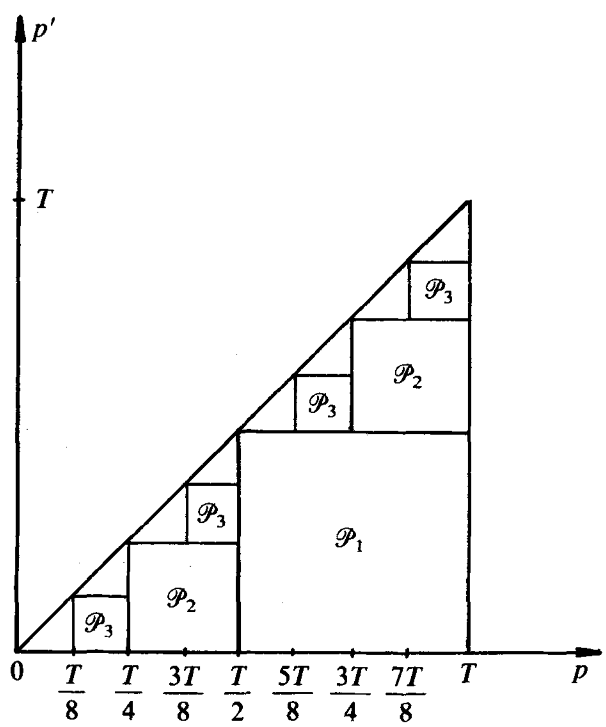
LEMME 6. *Pour* ω *entier* ≥ 1 *et* $T \geq 2$, *on note*

$$\mathfrak{T}_\omega(T) = \{(t, t'); \ 1 \leq t, \ t' \leq T, \ (t, t') = 1, \ \omega(t) \ et \ \omega(t') \leq \omega\}.$$

Il existe une constante absolue C_0, *et une partition de* $\mathfrak{T}_\omega(T)$ *en au plus* $(C_0 \log T)^\omega$ *sous ensembles* $\mathfrak{T}'_j(T)$ *ayant la propriété suivante :*

$$(t, t') \quad et \quad (t_1, t'_1) \in \mathfrak{T}'_j(T) \ \Rightarrow \ (t, t'_1) = 1.$$

On commence par construire une partition de $\mathcal{P}(T) = \{(p, p'); p' < p \leq T\}$ en sous ensembles $\mathcal{P}_j$ tels que (p, p') et $(p_1, p'_1) \in \mathcal{P}_j \Rightarrow p \neq p'_1$ (la lettre p désigne toujours un nombre premier).



On constate que $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3, \ldots$, définis sur le schéma, conviennent, et que leur nombre est $O(\log T)$. A partir des $\mathcal{P}_j$ on parvient à une partition de $\mathfrak{T}_1(T)$ en, $K_0 \leq C_0 \log T$, sous-ensembles R_j.

Pour ω quelconque, on écrit, d'une façon unique, chaque élément (t, t') de $\mathfrak{T}_\omega(T)$ sous la forme

$$(t, t') = (n_1 \ldots n_\omega, n'_1 \ldots n'_\omega)$$

avec les conditions $\omega(n_i), \omega(n'_i) \leq 1$ et pour $i<j$ $(n_i, n_j)=(n'_i, n'_j)=1$, $n_i \leq n_j$ et $n'_i \leq n'_j$.

A partir de cette décomposition, on définit, pour toute suite double $(j_{k,l})=((j))$ (où $k, l \leq \omega$ et $j_{k,l} \leq K_0$) les sous-ensembles $R((j))$ de $\mathfrak{T}_\omega(T)$ par la condition

$$(t, t') \in R((j)) \quad \Leftrightarrow \quad (n_k, n'_l) \in R_{j_{k,l}} \quad (1 \leq k,\ l \leq \omega).$$

En supprimant les éventuels $R((j))$ vides, on a obtenu la partition de $\mathfrak{T}_\omega(T)$ recherchée, en sous ensembles $\mathfrak{T}'_j(T)$ dont le nombre n'excède pas $K_0^{\omega^2}$. Le lemme 6 est ainsi démontré.

Dans toute la suite ε désignera un nombre >0 arbitraire, on notera aussi $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ des fonctions du seul entier γ de la condition (ii), fonctions qu'il est inutile de préciser.

III. Démonstration du théorème 2

On déduit d'abord du théorème 1, une forme équivalente, plus agréable pour les applications

THÉORÈME 1'. *Soient* $\eta>0$, $v'' \geq v' > 0$ *et* γ *un entier* ≥ 1. *On suppose que les conditions* (i), (ii) *sont vérifiées, et qu'on a l'inégalité :*

$$X^{v'} \leq N' < N'' \leq X^{v''}.$$

On a alors, avec $\theta = \min(1/2 + v'/2,\ 5/8 - 3v''/4)$ *et*

$$y_l = \sum_{\substack{l=mn \\ N'<n \leq N''}} \alpha_m \beta_n$$

l'estimation :

$$S((y_l), a, X, X^{\theta-\eta}) \ll_{\gamma, \eta, v', v'', A} X (\log X)^{-A}$$

valable pour tout A, uniformément pour $|a| \leq (\log X)^A$.

Démonstration. Posons $\mathcal{L}=\log X$ et $\Delta=1+\mathcal{L}^{-B}$ où B sera fixé plus tard. Soit k le plus petit entier tel que $N''\leqslant N'\Delta^k$, on pose alors

$$N_0=N',\quad N_1=N'\Delta,\quad \ldots,\quad N_{k-1}=N'\Delta^{k-1},\quad N_k=N'',$$

et

$$M_l=\Delta^{l-1}\quad (0\leqslant l\leqslant 1+\mathcal{L}/\log\Delta).$$

Le nombre de couples (N_i, M_j) est ainsi $\ll\mathcal{L}^{2B+2}$. Avec ces notations on a l'inégalité

$$S((y_l),a,X,X^{\theta-\eta})\leqslant\sum_{i,j}S_{i,j}\tag{3.1}$$

où

$$S_{i,j}=\sum_{\substack{q\leqslant X^{\theta-\eta}\\(q,a)=1}}\left|\sum_{mn\equiv a[q]}\alpha_m\beta_n-\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{(mn,q)=1}\alpha_m\beta_n\right|\tag{3.2}$$

les variables m et n vérifiant en outre $M_i<m\leqslant M_{i+1}$, $N_j<n\leqslant N_{j+1}$ et $mn\leqslant X$. L'inégalité (3.1) s'écrit

$$S\leqslant S_1+S_2+S_3$$

où, pour B' constante fixée ultérieurement, on désigne par

S_1 la contribution des $S_{i,j}$ tels que $M_{i+1}N_{j+1}\leqslant X\mathcal{L}^{-B'}$
S_2 celle des $S_{i,j}$ tels que $M_iN_j\leqslant X<M_{i+1}N_{j+1}$
S_3 celle des $S_{i,j}$ tels que $X\mathcal{L}^{-B'}<M_{i+1}N_{j+1}\leqslant X$.

D'après la condition (ii) et le lemme 2, on a

$$S_1\leqslant\sum_{\substack{q\leqslant X^{\theta-\eta}\\(q,a)=1}}\left(\sum_{\substack{l\equiv a\,(\mathrm{mod}\,q)\\ l\leqslant X\mathcal{L}^{-B'}}}\tau_{2\gamma}^{\gamma}(l)+\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\substack{(l,q)=1\\ l\leqslant X\mathcal{L}^{-B'}}}\tau_{2\gamma}^{\gamma}(l)\right)\mathcal{L}^{2\gamma}$$
$$\ll\mathcal{L}^{-B'+\gamma_1}=X\mathcal{L}^{-A}\quad\text{pour } B'=A+\gamma_1.$$

Pour S_2, on a de même

$$S_2\leqslant\sum_{\substack{q\leqslant X^{\theta-\eta}\\(q,a)=1}}\left(\sum_{\substack{l\equiv a[q]\\ X\Delta^{-2}<l\leqslant X}}\tau_{2\gamma}^{\gamma}(l)+\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\substack{(l,q)=1\\ X\Delta^{-2}<l\leqslant X}}\tau_{2\gamma}^{\gamma}(l)\right)\mathcal{L}^{2\gamma}$$
$$\ll X\mathcal{L}^{-B+\gamma_2}=X\mathcal{L}^{-A}\quad\text{avec } B=A+\gamma_2.$$

Lorsque $S_{i,j}$ contribue à S_3, on peut, dans (3.2), supprimer la condition $mn \leqslant X$, les variables sont indépendantes, et on applique le théorème 1; on a donc :

$$S_{i,j} \ll X\mathscr{L}^{-A-2B-2}$$

d'où

$$S_3 \ll X\mathscr{L}^{-A}$$

et le théorème 1′ est démontré.

On passe maintenant à la démonstration du théoréme 2. Il est évident pour $z \leqslant z_0 = X^{1/883}$ ([8]). On traite le cas où

$$z_0 < z \leqslant X^{(1/6)-\nu_0}$$

De l'égalité entre séries de Dirichlet

$$\Sigma f_z(n) n^{-s} = \prod_{p>z} (1-p^{-s})^{-1} = (\Sigma f_{z_0}(n) n^{-s}) \prod_{z_0<p\leqslant z} (1-p^{-s})$$

on déduit pour

$$n \leqslant X \quad \text{et} \quad J = (\log z)/(\log z_0) < 883/6$$

la relation

$$f_z(n) = f_{z_0}(n) + \sum_{j=1}^{J} (-1)^j f^{(j)}(n)$$

où

$$\begin{aligned} f^{(j)}(n) &= \sum_{\substack{p_1 \dots p_j | n \\ z_0 < p_1 < \dots < p_j \leqslant z}} f_{z_0}(n/(p_1 \dots p_j)) \\ &= \frac{1}{j\,!} \sum_{\substack{p_1 \dots p_j | n \\ z_0 < p_i \leqslant z}} f_{z_0}(n/(p_1 \dots p_j)) + O(f_{z_0}(n)(1-\mu^2(n))) \\ &= \frac{1}{j\,!} (\chi_{]z_0,z]}^{*j} * f_{z_0})(n) + O(f_{z_0}(n)(1-\mu^2(n))) \end{aligned} \tag{3.3}$$

où $\chi_{]z_0,z]}^{*j}$ est la $j^{\text{ème}}$ puissance de convolution de la fonction caractéristique des nombres premiers de $]z_0, z]$.

On applique le théorème 1′ avec $N' = z_0$, $N'' = z$, $\nu' = 1/883$, $\nu'' = 1/6 - \nu_0$, $\beta_n = \chi_{]z_0,z]}(n)$ et $\alpha_m = (\chi_{]z_0,z]}^{*(j-1)} * f_{z_0})(m)$. Quant au terme d'erreur de (3.3), sa contribution à

$S(f_z(n), a, X, X^{\theta-\eta})$ est $O(X^{1+\varepsilon}z_0^{-1}) = O(X\mathscr{L}^{-A})$, ce qui achève la démonstration du théorème 2.

IV. Démonstration du théorème 3

Ce théorème se démontre par récurrence, on se contentera, pour simplifier, de prouver l'implication

$$\mathscr{E}(l) \text{ vrai pour } 3 \leq l \leq 6 \quad \Rightarrow \quad \mathscr{E}(7) \text{ vrai.}$$

Il existe donc des constantes u_l et θ_l ($0 \leq l \leq 6$) telles que

$$u_l > 0 \quad \text{et} \quad \theta_l > \tfrac{1}{2}.$$

On montre que $\mathscr{E}(7)$ est vrai avec, par exemple

$$u_7 = \tfrac{1}{8} \inf(u_0, \ldots, u_6, \tfrac{1}{4})$$

et

$$\theta_7 = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2} \inf\left(\theta_0, \ldots, \theta_6, \tfrac{1}{2} + \frac{u_7}{2}\right).$$

Notons $Y = X^{u_7}$ et $Z = X^{1/7}$ et prenons la puissance 7[e] de convolution de l'égalité :

$$\mathbf{1}_{]Z, +\infty[} = \mathbf{1}_{[1, +\infty[} - \mathbf{1}_{[1, Y]} - \mathbf{1}_{]Y, Z]}.$$

Après convolution par λ de support $\subset [1, Y]$, telle que $|\lambda_m| \leq \tau_K(m)$, on obtient pour $k \leq X$, l'écriture de $(\lambda * \tau_7)(k)$ comme somme de $O(1)$ termes de la forme

$$(\lambda * \tau_i * \mathbf{1}_{[1, Y]}^{*j} * \mathbf{1}_{]Y, Z]}^{*(7-i-j)})(k)$$

où $0 \leq i \leq 6$, $0 \leq j \leq 7$, $i + j \leq 7$.

Pour $i + j \leq 6$, on applique le théorème 1′ avec

$$N' = Y, \quad N'' = Z$$

$$\alpha_m = (\lambda * \tau_i * \mathbf{1}_{[1, Y]}^{*j} * \mathbf{1}_{]Y, Z]}^{*(6-i-j)})(m)$$

et

$$\beta_n = \mathbf{1}_{]Y, Z]}(n).$$

Pour $i+j=7$, on utilise l'hypothèse $\mathscr{E}(i)$, puisque $(\lambda * \mathbf{1}_{[1,Y]}^{*(7-i)})$ a son support $\subset [1, X^{u_i}]$ et vérifie

$$|(\lambda * \mathbf{1}_{[1,Y]}^{*(7-i)})(m)| \leqslant \tau_{K-i+7}(m),$$

ce qui termine la démonstration du théorème 3.

V. Démonstration du théorème 4

Sous les hypothèses du théorème 4, on sait, d'après le théorème 3, que $\mathscr{E}(7)$ est vrai aussi. On montre le théorème 4, avec, par exemple

$$\theta = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2} \inf\left(\theta_1, \ldots, \theta_7, \tfrac{1}{2} + \frac{v}{2}\right)$$

où $v = (1/7) \inf(u_1, \ldots, u_7, 1/4)$.

On applique le lemme 3 avec $J=7$, $Z=X^{1/7}$. On voit que $\Lambda(n)$ $(n \leqslant X)$ s'exprime comme somme de $O(1)$ termes de la forme :

$$((\mu \mathbf{1}_{[1,Z[})^{*j} * \log * \tau_{j-1})(n) \quad (1 \leqslant j \leqslant 7). \tag{5.1}$$

De l'égalité $\zeta'(s)\, \zeta^{j-1}(s) = j^{-1}(\zeta^j(s))'$, on déduit la relation

$$\log * \tau_{j-1} = j^{-1} \log \cdot \tau_j.$$

Par une intégration par parties, on voit que (1.1) est vérifiée en remplaçant $\tau_k(n)$ par $(\log n)\, \tau_k(n)$.

On écrit alors, avec $Y = X^v$

$$\mathbf{1}_{[1,Z[} = \mathbf{1}_{[1,Y]} + \mathbf{1}_{]Y,Z[}$$

pour transformer (5.1) en somme de termes de la forme

$$((\mu \mathbf{1}_{[1,Y]})^{*(j-i)} * (\mu \mathbf{1}_{]Y,Z[})^{*i} * (\log \cdot \tau_j))(n), \quad 0 \leqslant i \leqslant j.$$

Pour $i \neq 0$, on applique le théorème 1′, puisque la fonction de Möbius satisfait la condition (i).

Pour $i=0$, on fait appel à $\mathscr{E}(j)$ $(1 \leqslant j \leqslant 7)$, puisque $(\mu \mathbf{1}_{[1,Y]})^{*j}$ est de support $\subset [1, X^{u_j}]$.

VI. Démonstration du théorème 5

Soient Q et $R \geqslant 2$, α'_q et β'_r des nombres vérifiant la condition (ii). Le théorème 1 et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, entraînent qu'on a aussi l'estimation :

$$\sum_{\substack{q \leqslant Q,\, r \leqslant R \\ (qr, a)=1}} \alpha'_q \beta'_r \left(\sum_{\substack{m \sim M,\, n \sim N \\ mn \equiv a[qr]}} \alpha_m \beta_n - \frac{1}{\varphi(qr)} \sum_{\substack{m \sim M,\, n \sim N \\ (mn, qr)=1}} \alpha_m \beta_n \right) \ll X (\log X)^{-A} \qquad (6.1)$$

pour

$$QR \leqslant X^{-\eta} \min (X^{1/2} N^{1/2}, X^{5/8} N^{-3/4}).$$

Or la proposition 1 de [9], dit que (6.1) est vraie pour

$$QR \leqslant X^{-\eta} \min (X^{1/2} N^{1/4}, X^{5/8} N^{-3/8}), \quad Q = X^{-\eta/2} N.$$

On a donc amélioré le résultat de cette proposition lorsque $N \leqslant X^{1/8}$. Il suffit alors de reprendre la démonstration de [9] en remplaçant au paragraphe 5, la valeur du paramètre $\theta = 5/17$ par $\theta = 5/16$.

VII. Calcul de dispersion

Le but des paragraphes suivants est de prouver le théorème 1. En découpant l'intervalle de variation de la variable q, on voit que, démontrer le théorème, revient à montrer que la quantité $E(Q)$ définie par

$$E(Q) = \sum_{\substack{q \sim Q \\ (q, a)=1}} \left| \sum_{\substack{m \sim M \\ n \sim N \\ mn \equiv a[q]}} \alpha_m \beta_n - \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\substack{m \sim M \\ n \sim N \\ (mn, q)=1}} \alpha_m \beta_n \right| \qquad (7.1)$$

vérifie

$$E(Q) \ll X \mathscr{L}^{-A-1}. \qquad (7.2)$$

Mais en utilisant [16], on peut supposer que Q vérifie

$$X^{1/2-\varepsilon} < Q \leqslant \tfrac{1}{2} X^{\theta-\eta}. \qquad (7.3)$$

La relation : $\omega(n) \geqslant \mathscr{L}^{1/3} = \xi$ entraîne $\tau(n) \geqslant 2^{\xi}$. Ainsi $\mathscr{A} = \{n \mid n \sim N, \omega(n) \geqslant \xi\}$ vérifie

$$|\mathscr{A}| \ll 2^{-\xi/2} N. \qquad (7.4)$$

On voit que la contribution à $E(Q)$ des $n \in \mathscr{A}$ est

$$\ll \sum_{q \sim Q} \sum_{n \in \mathscr{A}} |\beta_n| M q^{-1} \mathscr{L}^{\gamma_3}$$
$$\ll M N^{1/2} |\mathscr{A}|^{1/2} \mathscr{L}^{\gamma_4} \ll X \mathscr{L}^{-A-1} \tag{7.5}$$

par l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Grâce à (7.4) et (7.5), on peut supposer que

$$\omega(n) \geqslant \xi \quad \Rightarrow \quad \beta_n = 0 \tag{7.6}$$

et pour alléger les notations que

$$n \leqslant N \quad \text{ou } n > 2N \quad \Rightarrow \quad \beta_n = 0.$$

La nouvelle suite β_n ainsi construite vérifie toujours la condition (i). On définit la suite c_q par les formules :

$$\begin{cases} c_q = \operatorname{sgn}\left(\displaystyle\sum_{\substack{m \sim M, n \sim N \\ mn \equiv a[q]}} \alpha_m \beta_n - \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\substack{m \sim M, n \sim N \\ (mn, q) = 1}} \alpha_m \beta_n \right) & \text{si } q \sim Q \text{ et } (q, a) = 1 \\ c_q = 0 \quad \text{dans le cas contraire.} & \end{cases}$$

(On pose $\operatorname{sgn}(0) = 1$.)

Avec ces conventions la formule (7.1) se transforme, par une interversion de sommations, en

$$E(Q) = \sum_{m \sim M} \alpha_m \left\{ \sum_{(q, m) = 1} c_q \left(\sum_{n \equiv a\bar{m}[q]} \beta_n - \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{(n, q) = 1} \beta_n \right) \right\}.$$

On majore $E(Q)$ en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à la somme en m. Par utilisation de la condition (ii), de la fonction $\alpha(m)$ définie au lemme 1, et de la majoration du lemme 2, on écrit l'inégalité

$$E^2(Q) \ll M \mathscr{L}^{\gamma_5} \{ W(Q) - 2V(Q) + U(Q) \} \tag{7.7}$$

où

$$U(Q) = \sum_m \alpha(m) \left(\sum_{(q, m) = 1} (c_q / \varphi(q)) \sum_{(n, q) = 1} \beta_n \right)^2 \tag{7.8}$$

$$V(Q) = \sum_m \alpha(m) \left(\sum_{(q_1, m) = 1} c_{q_1} \sum_{n_1 \equiv a\bar{m}[q_1]} \beta_{n_1} \right) \left(\sum_{(q_2, m) = 1} (c_{q_2} / \varphi(q_2)) \sum_{(n_2, q_2) = 1} \beta_{n_2} \right) \tag{7.9}$$

et

$$W(Q)=\sum_m \alpha(m)\Bigg(\sum_{(q,m)=1} c_q \sum_{n\equiv a\bar{m}[q]} \beta_n\Bigg)^2. \tag{7.10}$$

Tout comme dans [6], on exprime chacun des termes de la dispersion en somme d'un terme principal et d'un terme d'erreur. Les termes $U(Q)$ et $V(Q)$ ne présentent pas de difficulté majeure.

(a) *Etude de* $U(Q)$. La formule (7.8) amène à

$$U(Q)=\sum_{q_1,q_2} (c_{q_1}c_{q_2}/\varphi(q_1)\varphi(q_2))\Bigg(\sum_{(n_1,q_1)=1}\beta_{n_1}\Bigg)\Bigg(\sum_{(n_2,q_2)=1}\beta_{n_2}\Bigg)\sum_{(m,\,q_1q_2)=1}\alpha(m). \tag{7.11}$$

D'après la formule sommatoire de Poisson, on a

$$\begin{aligned}\sum_{(m,\,q_1q_2)=1}\alpha(m)&=\sum_{d|q_1q_2}\mu(d)\sum_{m\equiv 0[d]}\alpha(m)=\sum_{d|q_1q_2}\frac{\mu(d)}{d}\sum_h \hat{\alpha}\left(\frac{h}{d}\right)\\ &=\hat{\alpha}(0)\frac{\varphi(q_1q_2)}{q_1q_2}+O\Bigg(M\sum_{0<|h|\le Q^2M^{-1}}\ \sum_{\substack{d|q_1q_2\\ d>|h|M}} d^{-1}+\sum_{d|q_1q_2} d^{-1}\sum_{|h|\ge dM^{-1}}\left|\hat{\alpha}\left(\frac{h}{d}\right)\right|\Bigg)\\ &=\hat{\alpha}(0)\,(\varphi(q_1q_2)/q_1q_2)+O(X^{\varepsilon})\end{aligned}$$

par le lemme 1. Reportant cette égalité dans (7.11) et en sommant sur $\delta=(q_1,q_2)$, on a

$$U(Q)=\hat{\alpha}(0)\sum_\delta \frac{1}{\delta\varphi(\delta)}\sum_{(k_1,k_2)=1}\left(\frac{c_{\delta k_1}c_{\delta k_2}}{k_1k_2}\right)\Bigg(\sum_{(n_1,\delta k_1)=1}\beta_{n_1}\Bigg)\Bigg(\sum_{(n_2,\delta k_2)=1}\beta_{n_2}\Bigg)+O(N^2X^{2\varepsilon}). \tag{7.12}$$

(b) *Etude de* $V(Q)$. La définition (7.9) de $V(Q)$ s'écrit aussi

$$V(Q)=\sum_{q_1,q_2}\left(\frac{c_{q_1}c_{q_2}}{\varphi(q_2)}\right)\Bigg(\sum_{(n_2,q_2)=1}\beta_{n_2}\Bigg)\Bigg(\sum_{(n_1,q_1)=1}\beta_{n_1}\sum_{\substack{m\equiv a\bar{n}_1[q_1]\\ (m,\,q_2)=1}}\alpha(m)\Bigg). \tag{7.13}$$

Pour $(d,q_1)=1$, appelons g un entier tel que

$$g\equiv a\bar{n}_1[q_1] \quad \text{et} \quad g\equiv 0[d].$$

Par la formule sommatoire de Poisson, on a :

$$\sum_{\substack{m\equiv a\bar{n}_1[q_1]\\(m,q_2)=1}} \alpha(m) = \sum_{\substack{d|q_2\\(d,q_1)=1}} \mu(d) \sum_{m\equiv g[dq_1]} \alpha(m)$$

$$= \sum_{\substack{d|q_2\\(d,q_1)=1}} \frac{\mu(d)}{dq_1} \sum_h e\left(\frac{hg}{dq_1}\right) \hat{\alpha}\left(\frac{h}{dq_1}\right)$$

$$= \frac{\hat{\alpha}(0)}{q_1} \sum_{\substack{d|q_2\\(d,q_1)=1}} \frac{\mu(d)}{d} + O(X^{\varepsilon})$$

par le lemme 1. Il suffit de reporter cette égalité dans (7.13), puis de comparer avec (7.12) pour avoir finalement

$$V(Q) = U(Q) + O(N^2 Q X^{2\varepsilon}). \tag{7.14}$$

VIII. Etude de $W(Q)$

(a) *Préparation des variables*. D'après la formule (7.10), on a

$$W(Q) = \sum_{q_1, q_2} c_{q_1} c_{q_2} \sum_{(n_1, q_1)=(n_2, q_2)=1} \beta_{n_1} \beta_{n_2} \sum_{\substack{m\equiv a\bar{n}_1[q_1]\\ m\equiv a\bar{n}_2[q_2]}} \alpha(m). \tag{8.1}$$

On factorise d'abord chacune des variables q_1, q_2, n_1 et n_2, pour contrôler l'ordre de grandeur de certains p.g.c.d.

Ainsi la contribution des n_1 et n_2 tels que $d=(n_1, n_2) \geqslant X^{\varepsilon}$ est, (en posant $n_1 = d\nu_1$, $n_2 = d\nu_2$ et en utilisant (ii))

$$\leqslant \sum_{d \geqslant X^{\varepsilon}} \sum_{\nu_1, \nu_2} |\beta_{d\nu_1}| \, |\beta_{d\nu_2}| \sum_{M/2 < m \leqslant 3M} \tau(\nu_1 dm - a) \tau(\nu_2 dm - a)$$

$$\ll M X^{\varepsilon/2} \sum_{d \geqslant X^{\varepsilon}} N^2 d^{-2} \ll M N^2 X^{-\varepsilon/2}. \tag{8.2}$$

On décompose ν_1 en $\nu_1 = \nu_1' d_1$ où $(\nu_1', d) = 1$ et $d_1 | d^{\infty}$ (cette notation signifie que $p | d_1 \Rightarrow p | d$). De même la contribution des d_1 ($d_1 \geqslant X^{\varepsilon}$) est

$$\leqslant \sum_{d<X^\varepsilon} \sum_{\substack{d_1|d^\infty \\ d_1\geqslant X^\varepsilon}} \sum_{\nu_1',\nu_2} |\beta_{dd_1\nu_1'}||\beta_{d\nu_2}| \sum_{M/2<m\leqslant 3M} \tau(\nu_1 dm-a)\tau(\nu_2 dm-a)$$

$$\ll MX^{\varepsilon/3} \sum_{d<X^\varepsilon} \sum_{\substack{d_1|d^\infty \\ d_1\geqslant X^\varepsilon}} N^2 d^{-2} d_1^{-1} \ll MN^2 X^{-\varepsilon/2}. \tag{8.3}$$

On factorise maintenant q_1 et q_2 en

$$q_1 = \delta k_1, \quad q_2 = \delta k_2 \quad \text{avec } \delta = (q_1, q_2).$$

Nécessairement, on a $n_1 \equiv n_2[\delta]$ et la contribution des δ ($\delta \geqslant X^\varepsilon$) est

$$\ll X^{\varepsilon/3} \sum_{\delta\geqslant X^\varepsilon} \sum_{k_2\leqslant 2Q\delta^{-1}} \sum_{\substack{n_1,n_2\leqslant 2N \\ n_1\equiv n_2[\delta] \\ (n_2,\delta k_2)=1}} \sum_{\substack{M/2<m\leqslant 3M \\ m\equiv a\bar{n}_2[\delta k_2]}} \tau(mn_1-a)$$

$$\ll MX^{\varepsilon/2} \sum_{\delta\geqslant X^\varepsilon} N^2\delta^{-2} \ll MN^2X^{-\varepsilon/2}. \tag{8.4}$$

On factorise alors k_1 et k_2 en :

$$k_1 = k_1'\delta_1, \quad k_2 = k_2'\delta_2 \quad \text{avec } \delta_1\delta_2|\delta^\infty \text{ et } (k_1'k_2', \delta)=1.$$

De même que précédemment, on montre que la contribution des δ_1 et δ_2 tels que δ_1 ou $\delta_2 \geqslant X^\varepsilon$ est

$$\ll MN^2X^{-\varepsilon/2}. \tag{8.5}$$

Regroupant les relations (8.2), …, (8.5), l'égalité (8.1) devient, après un changement de notations :

$$W(Q) = \sum_{d,\, d_1,\delta,\, \delta_1,\delta_2} W_1(Q, d,\, d_1,\delta,\, \delta_1,\delta_2) + O(MN^2X^{-\varepsilon/2}) \tag{8.6}$$

où la somme est faite sur les entiers tels que

$$d, d_1, \delta, \delta_1, \delta_2 < X^\varepsilon, \quad (\delta, ad) = (\delta_1, \delta_2) = 1, \quad d_1|d^\infty \quad \text{et} \quad \delta_1\delta_2|\delta^\infty$$

et où on a posé

$$W_1 = \sum_{\substack{(k_1,k_2)=1\\(k_1k_2,\delta d)=1}} c_{\delta\delta_1 k_1} c_{\delta\delta_2 k_2} \sum_{\substack{d_1n_1\equiv n_2[\delta]\\(n_1,dk_1)=(n_2,k_2)=1\\(d_1n_1,n_2)=(n_1n_2,\delta)=1}} \beta_{dd_1n_1}\beta_{dn_2} \sum_{\substack{m\equiv ad\bar{d}_1\bar{n}_1[\delta\delta_1k_1]\\m\equiv ad\bar{n}_2[\delta\delta_2k_2]}} \alpha(m). \tag{8.7}$$

(b) *Expression de* $\Sigma\ \alpha(m)$. Dans (8.7), les conditions de sommation

$$m\equiv ad\bar{d}_1\bar{n}_1[\delta\delta_1k_1] \quad \text{et} \quad m\equiv ad\bar{n}_2[\delta\delta_2k_2]$$

sont équivalentes aux quatre conditions

$$m\equiv ad\bar{d}_1\bar{n}_1[\delta\delta_1],\quad m\equiv ad\bar{n}_2[\delta\delta_2]$$

$$m\equiv ad\bar{d}_1\bar{n}_1[k_1],\quad m\equiv ad\bar{n}_2[k_2].$$

La relation $d_1n_1\equiv n_2[\delta]$ entraîne la compatibilité des deux premières et leur équivalence à une seule congruence modulo $D=\delta\delta_1\delta_2$: $m\equiv u[D]$ où u ne dépend que de la classe de $d_1n_1[\delta\delta_1]$ et de $n_2[\delta\delta_2]$.

Ainsi m vérifie l'unique congruence : $m\equiv u'[k_1k_2D]$ où

$$u' = m_1k_1k_2+m_2Dk_1+m_3Dk_2 \tag{8.8}$$

avec

$$m_1\equiv u\bar{k}_1\bar{k}_2[D]$$

$$m_2\equiv ad\bar{n}_2\bar{k}_1\bar{D}[k_2]$$

et

$$m_3\equiv ad\bar{d}_1\bar{n}_1\bar{k}_2\bar{D}[k_1].$$

On applique alors la formule de Poisson et le lemme 1 (avec l suffisamment grand); après avoir posé $H=M^{-1}Q^2X^\varepsilon$, on a :

$$\sum_{m\equiv u'[k_1k_2D]} \alpha(m) = \frac{1}{k_1k_2D}\sum_h e\left(\frac{hu'}{k_1k_2D}\right)\hat{\alpha}\left(\frac{h}{k_1k_2D}\right)$$

$$= \frac{\hat{\alpha}(0)}{k_1k_2D} + \frac{1}{k_1k_2D}\sum_{0<|h|\le H} e\left(\frac{hu'}{k_1k_2D}\right)\hat{\alpha}\left(\frac{h}{k_1k_2D}\right) + O(M^{-10}). \tag{8.9}$$

Le premier terme de cette expression fournit le terme principal de l'évaluation de $W(Q)$. On reporte donc (8.9) dans (8.6) et (8.7). Pour le terme principal, on supprime les différentes conditions sur d, d_1, δ, δ_1 et δ_2, au prix d'une erreur $\ll MN^2X^{-\varepsilon/2}$. On parvient ainsi à

$$W(Q) = W_2(Q) + \sum_{d,\, d_1,\delta,\, \delta_1,\delta_2} \tilde{W}_2(Q, d,\, d_1,\delta,\, \delta_1,\delta_2) + O(MN^2X^{-\varepsilon/2}) \tag{8.10}$$

où le terme principal $W_2(Q)$ vaut

$$W_2(Q) = \hat{\alpha}(0) \sum_{\delta} \delta^{-1} \sum_{(k_1,k_2)=1} \left(\frac{c_{\delta k_1} c_{\delta k_2}}{k_1 k_2}\right) \sum_{\substack{\delta'[\delta] \\ (\delta',\delta)=1}} \left(\sum_{\substack{n_1 \equiv \delta'[\delta] \\ (n_1,k_1)=1}} \beta_{n_1}\right) \left(\sum_{\substack{n_2 \equiv \delta'[\delta] \\ (n_2,k_2)=1}} \beta_{n_2}\right) \tag{8.11}$$

et où $\tilde{W}_2$ est défini par

$$\tilde{W}_2 = D^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(x) \sum_{k_1,k_2} \frac{c(k_1,k_2)}{k_1 k_2} \sum_{n_1,n_2} \beta(n_1,n_2) \sum_{0<|h|\leq H} e\left(\frac{h(u'-x)}{k_1 k_2 D}\right) dx \tag{8.12}$$

avec $c(k_1,k_2) = c_{\delta\delta_1 k_1} c_{\delta\delta_2 k_2}$, $\beta(n_1,n_2) = \beta_{dd_1 n_1} \beta_{dn_2}$, et avec les mêmes conditions de sommation pour k_1, k_2, n_1 et n_2 que dans (8.7).

(c) *Transformation de* $\tilde{W}_2$. D'après la définition de u' donnée en (8.8) on a :

$$\frac{hu'}{k_1 k_2 D} = hu\, \frac{\bar{k}_1 \bar{k}_2}{D} + ah\, \frac{d\bar{n}_2 \bar{k}_1 \bar{D}}{k_2} + ah\, \frac{d\bar{d}_1 \bar{n}_1 \bar{k}_2 \bar{D}}{k_1} \pmod 1. \tag{8.13}$$

En utilisant la relation

$$\frac{1}{rs} = \frac{\bar{r}}{s} + \frac{\bar{s}}{r} \pmod 1$$

valable pour $(r,s)=1$, on a

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{d}_1 \bar{n}_1 \bar{k}_2 \bar{D}}{k_1} &= \frac{1}{dd_1 n_1 k_1 k_2 D} - \frac{\bar{k}_1}{dd_1 n_1 k_2 D} \pmod 1 \\ &= \frac{1}{dd_1 n_1 k_1 k_2 D} - \frac{d\bar{d}_1 \bar{k}_1 \bar{D}}{n_1 k_2} - \frac{\bar{n}_1 \bar{k}_1 \bar{k}_2}{dd_1 D} \pmod 1 \end{aligned} \tag{8.14}$$

car $(n_1 k_2, dd_1 D) = 1$. On a aussi, en posant $D' = dd_1 D$:

$$\frac{d\bar{n}_2 \bar{k}_1 \bar{D}}{k_2} - \frac{d\bar{d}_1 \bar{k}_1 \bar{D}}{n_1 k_2} = (d_1 n_1 - n_2) \frac{\bar{D}' \bar{n}_2 \bar{k}_1}{n_1 k_2} \pmod 1. \tag{8.15}$$

On impose maintenant les conditions de congruences peu contraignantes :

$$\begin{gathered} h \equiv \Delta[D'], \quad k_1 \equiv D_1[D'], \quad k_2 \equiv D_2[D'], \quad n_1 \equiv \Delta_1[D'], \quad n_2 \equiv \Delta_2[\delta\delta_2] \\ \text{avec } (D_1 D_2 \Delta_1, D') = (\Delta_2, \delta) = 1 \quad \text{et} \quad \Delta_1 \equiv \Delta_2[\delta]. \end{gathered} \tag{8.16}$$

On regroupe les relations (8.12), (8.13), (8.14) et (8.15), et on découpe l'intervalle $]0, H]$ pour obtenir la majoration

$$\tilde{W}_2 \ll D^{-1} M \mathscr{L} \sup_{\substack{M/2<x\leqslant 3M \\ 0<|H'|\leqslant H/2}} \sum_{\Delta, \Delta_1, \Delta_2, D_1, D_2} |W_3| \tag{8.17}$$

avec

$$W_3 = \sum_{k_1, k_2} \frac{c(k_1, k_2)}{k_1 k_2} \sum_{n_1, n_2} \beta(n_1, n_2) \sum_{h \sim H'} j(\cdot) e(\cdot) \tag{8.18}$$

où les variables k_1, k_2, n_1, n_2 vérifient les conditions de sommation de (8.7) et ainsi que h, les conditions de congruence (8.16). On a aussi posé

$$e(\cdot) = e\left(ah(d_1 n_1 - n_2) \frac{\bar{D}' \bar{n}_2 \bar{k}_1}{n_1 k_2} \right)$$

et

$$j(\cdot) = e\left(\frac{-hx}{k_1 k_2 D} \right) e\left(\frac{ah}{n_1 k_1 k_2 D'} \right).$$

(d) *Intégration par parties.* La fonction $j(\cdot)$, fonction des cinq variables h, k_1, k_2, n_1 et n_2, vérifie, en raison de l'ordre de grandeur des coefficients a, x, D et D', les conditions du lemme 5, à un facteur $X^{100\varepsilon}$ près. On a donc :

$$W_3 \ll X^{100\varepsilon} \sup_{K_1, K_2, N_1, N_2, H_1} |\tilde{W}_3| \tag{8.19}$$

où $\tilde{W}_3$ est défini par la formule (8.18), à la différence près qu'on a supprimé le facteur $j(\cdot)$ mais qu'on a ajouté les contraintes suivantes :

$$k_1 \leqslant K_1, \quad k_2 \leqslant K_2, \quad n_1 \leqslant N_1, \quad n_2 \leqslant N_2 \quad \text{et} \quad h \leqslant H_1.$$

Avec la fonction α^* du lemme 1, on définit les fonctions $g_i(x)$ par les formules $g_i(x) = \alpha^*(\delta\delta_i x/Q)$ ($i=1$ ou 2). Ces deux fonctions à support $\subset [Q/2\delta\delta_i, 3Q/\delta\delta_i]$, vérifient

$$g_i^{(l)}(x) \ll x^{-l}, \quad \forall l \geqslant 0.$$

On utilise le lemme 6 et la condition (7.6) pour voir qu'on peut décomposer $\mathfrak{T}_\xi(2N)$ en moins de $O(\mathscr{L}^{\xi^2}) = O(X^\varepsilon)$ sous ensembles $\mathfrak{T}'$. Finalement on a l'inégalité :

$$\tilde{W}_3 \ll X^{4\varepsilon} Q^{-2} \sum_{\mathfrak{T}'} \sum_{\substack{(k_1,k_2)=1 \\ (k_2,D')=1}} g_1(k_1) g_2(k_2) \Bigg| \sum_{\substack{n_1,n_2,h \\ (n_1,k_1)=(n_2,k_2)=1}}{}' \beta(n_1,n_2,h) e(\cdot) \Bigg| \tag{8.20}$$

où $\beta(n_1,n_2,h)$ est un coefficient vérifiant les propriétés $\beta(n_1,n_2,h)=O(X^\varepsilon)$, $\beta(n_1,n_2,h)=0$ lorsque l'une au moins des conditions suivantes n'est pas réalisée

$$n_1 \sim N/dd_1, \quad n_2 \sim N/d, \quad 0<|h|\leqslant H$$

$$(d_1 n_1, n_2) \in \mathfrak{T}', \quad (d_1 n_1, n_2)=1, \quad (n_1, D')=1.$$

(e) *Application du lemme* 4. On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz à (8.20), on a

$$\sum_{k_1,k_2} \Bigg| \sum_{n_1,n_2,h} \Bigg| \leqslant Q \Bigg| \sum_{\substack{h,\, n_1,n_2 \\ h',\, n_1',n_2'}} \beta(n_1,n_2,h)\beta(n_1',n_2',h') \sum_{\substack{(k_1,k_2)=1 \\ (k_1,n_1n_1')=1 \\ (k_2,n_2n_2'D')=1}} g_1(k_1)g_2(k_2)e(\cdot\,\cdot) \Bigg|^{1/2} \tag{8.21}$$

où, puisque $(d_1 n_1, n_2)$ et $(d_1 n_1', n_2')$ appartiennent à $\mathfrak{T}'$, on a

$$e(\cdot\,\cdot)=e\left(l\,\frac{\bar{D}'\bar{n}_2\bar{n}_2'\bar{k}_1}{n_1 n_1' k_2}\right) \quad \text{avec} \quad l=ah(d_1n_1-n_2)\,n_1'n_2'-ah'(d_1n_1'-n_2')\,n_1n_2. \tag{8.22}$$

Le membre de droite de (8.21) s'écrit aussi

$$Q|\mathscr{D}_0+\mathscr{D}|^{1/2} \tag{8.23}$$

où $\mathscr{D}_0$ et $\mathscr{D}$ sont les contributions des termes $l=0$ et $l\neq 0$.

On a facilement

$$\mathscr{D}_0 \ll HN^2Q^2X^\varepsilon. \tag{8.24}$$

Pour étudier $\mathscr{D}$, on remarque d'abord que

$$0<|l|\leqslant L=8HN^3\mathscr{L}^A$$

et que $\mathscr{D}$ s'écrit aussi

$$\mathscr{D}=\sum_{\substack{r\sim R,\, s\sim S \\ (r,s)=1}} \sum_{1\leqslant |l|\leqslant L} b_{l,r,s} \sum_{\substack{k_1,k_2 \\ (rk_1,sk_2)=1}} g_1(k_1)g_2(k_2)e\left(l\,\frac{\bar{r}\bar{k}_1}{sk_2}\right)$$

où $R=D'N^2d^{-2}$, $S=N^2d^{-2}d_1^{-2}$ et où

$$b_{l,r,s} = \sum \beta(n_1, n_2, h)\beta(n_1', n_2', h')$$

la somme étant faite sur les $(n_1, n_1', n_2, n_2', h, h')$ tels que $r=D'n_2n_2'$, $s=n_1n_1'$ et vérifiant (8.22).

Pour appliquer le lemme 4, il reste donc à calculer

$$\mathcal{B} = \Sigma|b_{l,r,s}|^2.$$

(f) *Application du lemme* 4. La somme $\mathcal{B}$ satisfait l'inégalité

$$\mathcal{B} \ll X^{2\varepsilon}|\{(\mathbf{n}, \mathbf{h}); (h-h_1)n_1'n_2'(d_1n_1-n_2) = (h'-h_1')n_1n_2(d_1n_1'-n_2')\}|.$$

Il faut donc évaluer le nombre de solutions d'une équation diophantienne. Pour $h=h_1$, on a, d'après $(d_1n_1', n_2')=1$ l'égalité $h'=h_1'$ donc $O(H^2N^4)$ solutions.

Pour $h \neq h_1, n_1'$ et n_2' fixés, on voit que $n_1n_2|(h-h_1)n_1'n_2'$ et que $h'-h_1'$ est déterminé par les six autres valeurs, ce qui donne $O(H^3N^2X^\varepsilon)$ solutions.

On a finalement :

$$\mathcal{B} \ll H^2N^4X^{4\varepsilon}.$$

Cette majoration reportée dans la majoration du lemme 4 conduit à l'inégalité

$$\mathcal{D}^2 \ll \{QN^2(N^4+HN^3)(Q+QN^2)+Q^2HN^5+Q^3N^2\sqrt{(N^4+HN^3)N^2}\}H^2N^4X^{50\varepsilon}$$

soit encore, en utilisant la relation $H=Q^2M^{-1}X^\varepsilon \geq N^{1-\varepsilon}$

$$\mathcal{D}^2 \ll \{HN^7Q^2+H^{1/2}N^{9/2}Q^3\}H^2N^4X^{70\varepsilon} \ll M^{-5/2}N^{17/2}Q^8X^{100\varepsilon}.$$

On rassemble les relations (8.19), (8.20), (8.21), (8.23) et (8.24) pour écrire

$$W_3 \ll Q(M^{-1/2}N+M^{-5/8}N^{17/8})X^{200\varepsilon}$$

avec (8.17) et (8.10), on a pour $W(Q)$, la formule

$$W(Q) = W_2(Q)+O(MN^2X^{-\varepsilon/2}+(M^{1/2}NQ+M^{3/8}N^{17/8}Q)X^{300\varepsilon})$$

soit encore

$$W(Q) = W_2(Q)+O(MN^2X^{-\varepsilon/2}) \tag{8.25}$$

par l'inégalité (7.3), en prenant ε suffisamment petit par rapport à η.

(g) *Remarque*. Le lemme 4, dépend des valeurs propres exceptionnelles du Laplacien pour les groupes de Hecke $\Gamma_0(rs)$. Si la conjecture de Selberg est vraie, c'est-à-dire si toutes les valeurs propres sont supérieures à 1/4, on peut, dans ce lemme oublier le facteur $C^2DS\sqrt{(RS+L)R}$. Sous cette hypothèse, on obtiendrait le théorème 1 avec $\theta=\min(1/2+\nu/2, 3/4-3\nu/2)$, valeur meilleure, mais qui ne dépasse 1/2 que pour $0<\nu<1/6$.

IX. Le terme principal

On regroupe les formules (7.12), (7.14) et (8.25) pour écrire

$$W(Q)-2V(Q)+U(Q) = W_2(Q)-U(Q)+O(MN^2X^{-\varepsilon/2}). \tag{9.1}$$

Le terme principal est d'après (8.11)

$$T(Q)=\hat{a}(0)\sum_{\delta}\frac{1}{\delta}\sum_{(k_1,k_2)=1}(c_{\delta k_1}c_{\delta k_2}/k_1k_2)$$
$$\left\{\sum_{\substack{\delta'(\operatorname{mod}\delta)\\(\delta',\delta)=1}}\left(\sum_{\substack{n_1\equiv\delta'[\delta]\\(n_1,k_1)=1}}\beta_{n_1}\right)\left(\sum_{\substack{n_2\equiv\delta'[\delta]\\(n_2,k_2)=1}}\beta_{n_2}\right)-\frac{1}{\varphi(\delta)}\left(\sum_{(n_1,\delta k_1)=1}\beta_{n_1}\right)\left(\sum_{(n_2,\delta k_2)=1}\beta_{n_2}\right)\right\}. \tag{9.2}$$

Dans cette expression, on voit que

$$\{\ \}=\sum_{\substack{\delta'(\operatorname{mod}\delta)\\(\delta',\delta)=1}}\left(\sum_{\substack{n_1\equiv\delta'[\delta]\\(n_1,k_1)=1}}\beta_{n_1}-\frac{1}{\varphi(\delta)}\sum_{(n_1,\delta k_1)=1}\beta_{n_1}\right)\left(\sum_{\substack{n_2\equiv\delta'[\delta]\\(n_2,k_2)=1}}\beta_{n_2}-\frac{1}{\varphi(\delta)}\sum_{(n_2,\delta k_2)=1}\beta_{n_2}\right).$$

Pour majorer $\{\ \}$, on utilise soit la condition (i), soit des estimations triviales. Ainsi, d'après (i) et (iii), on a, pour $\delta<N^{1/2}$ et pour tout B

$$\{\ \}\ll\delta\tau(k_1)\tau(k_2)N^2(\log N)^{-B}\ll\delta\tau(k_1)\tau(k_2)N^2\mathscr{L}^{-B}$$

mais on a aussi, à cause de (ii), la relation

$$\{\ \}\ll N^2\delta^{-1}\mathscr{L}^{\gamma_6}.$$

Pour $N^{1/2}\leqslant\delta<N$, on a facilement

$$\{\ \}\ll\delta(\delta^{-1}N^{1+(\varepsilon/3)}+\varphi(\delta)^{-1}N^{1+(\varepsilon/3)})^2\ll N^{2+\varepsilon}\delta^{-1}$$

enfin, lorsque $\delta\geqslant N$, il y a au plus N classes $\delta'(\operatorname{mod}\delta)$ telles $\beta_{\delta'}\neq0$, on a donc

$$\{\ \}\ll N^{1+\varepsilon}+\varphi(\delta)\left(\frac{N^{1+(\varepsilon/3)}}{\varphi(\delta)}\right)^2\ll N^{1+\varepsilon}.$$

Soit B' un nombre qui sera fixé ultérieurement. En utilisant chacune des quatre estimations précédentes, on a, d'après (9.2) :

$$T(Q) \ll M \left(\sum_{\delta \leqslant \mathscr{L}^{B'}} N^2 \mathscr{L}^{-B+\gamma_7} + \sum_{\mathscr{L}^{B'} < \delta \leqslant N^{1/2}} N^2 \delta^{-2} \mathscr{L}^{\gamma_8} + \sum_{N^{1/2} < \delta \leqslant N} N^{2+2\varepsilon} \delta^{-2} + \sum_{N < \delta \leqslant 2Q} N^{1+2\varepsilon} \delta^{-2} \right)$$

donc

$$T(Q) \ll MN^2 \mathscr{L}^{B'-B+\gamma_7} + MN^2 \mathscr{L}^{\gamma_8 - B'}.$$

On revient à l'expression (7.7) pour constater que l'on a

$$M \mathscr{L}^{\gamma_5} T(Q) \ll M^2 N^2 \mathscr{L}^{-2A-2}$$

pour $B' = 2A + 2 + \gamma_5 + \gamma_8$ et $B = 2A + B + 2 + \gamma_5 + \gamma_7$.

La relation (9.1) et la majoration précédente indiquent donc que (7.2) est démontré, ce qui achève la preuve du théorème 1.

Bibliographie

[1] BOMBIERI, E., On the large sieve. *Mathematika,* 12 (1965), 201–225.

[2] CHEN, J. R., On the Goldbach's problem and the sieve methods. *Sci. Sinica,* 21 (1978), 701–739.

[3] DELIGNE, P., Applications de la formule des traces aux sommes trigonométriques. *Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie, SGA 41/2,* p. 168–232. *Lecture Notes in Mathematics* 569. Springer Verlag, 1977.

[4] DESHOUILLERS, J.-M. & IWANIEC, H., Kloosterman sums and the Fourier coefficients of cusp forms. *Invent. Math.,* 70 (1982), 219–288.

[5] ELLIOTT, P. D. T. A. & HALBERSTAM, H., A conjecture in prime number theory. *Symposia Mathematica, vol. IV,* (I.N.D.A.M. Rome 1968–69), 59–72.

[6] FOUVRY, E., Répartition des suites dans les progressions arithmétiques. *Acta Arith.,* 41 (1982), 49–72.

[7] — Répartition des suites dans les progressions arithmétiques — Résultats du type Bombieri-Vinogradov avec exposant supérieur à 1/2. *Thèse de Doctorat d'Etat ès Sciences, Université de Bordeaux I (1981).*

[8] FOUVRY, E. & IWANIEC, H., On a theorem of Bombieri-Vinogradov type. *Mathematika,* 27 (1980), 135–172.

[9] — Primes in arithmetic progressions. *Acta Arith.,* 42 (1983), 197–218.

[10] GALLAGHER, P. X., Bombieri's mean value theorem. *Mathematika,* 15 (1968), 1–6.

[11] HALBERSTAM, H. & RICHERT, H.-E., *Sieve Methods.* Academic Press, London, New York, 1974.

[12] HEATH-BROWN, D. R., Sieve identities and gaps between primes. *Journées Arithmétiques de Metz* (1981). *Astérisque* 94.

[13] HOOLEY, C., On the greatest prime factor of a cubic polynomial. *J. Reine Angew. Math.,* 303/304 (1978), 21–50.

[14] Iwaniec, H., A new form of the error term in the linear sieve. *Acta Arith.*, 37 (1980), 307–320.

[15] Linnik, Yu. V., *The dispersion method in binary additive problems*. AMS Translations of Math. Monographs, n° 4. Providence, Rhode Island, 1963.

[16] Motohashi, Y., An induction principle for the generalizations of Bombieri's prime number theorem. *Proc. Japan Acad.*, 52 (1976), 273–275.

[17] Serre, J.-P., Majorations de sommes exponentielles. *Journées Arithmétiques de Caen. Astérisque* 41/42 (1977), 111–126.

[18] Vaughan, R. C., *On the estimation of trigonometric sums over primes and related questions*. Institut Mittag-Leffler Report n° 9 (1977).

[19] — An elementary method in prime number theory. *Acta Arith.*, 37 (1980), 111–115.

[20] Vinogradov, A. I., L'hypothèse de densité pour les séries L de Dirichlet (en russe). *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Math.*, 29 (1965), 903–904. Corrigendum : *ibid.*, 30 (1966), 719–720.

[21] Wolke, D., Über die mittlere Verteilung der Werte zahlentheoretischen Funktionen aus Restklassen I. *Math. Ann.*, 202 (1973), 1–25. II, *ibid.*, 204 (1973), 145–153.

Reçu le 18 juillet 1982