BEMERKUNG ÜBER DIE INTEGRALDARSTELLUNG DER RIEMANNSCHEN ξ-FUNKTION.

VON

G. PÓLYA

in ZÜRICH.

Die Riemannsche ξ-Funktion, definiert durch die Formel

$$\xi(iz) = \frac{1}{2}\left(z^2 - \frac{1}{4}\right)\pi^{-\frac{z}{2}-\frac{1}{4}}\,\Gamma\left(\frac{z}{2}+\frac{1}{4}\right)\zeta\left(\frac{1}{2}+z\right), \tag{1}$$

wurde von Riemann selbst durch ein unendliches trigonometrisches Integral dargestellt. Es ist[1]

$$\xi(z) = 2\int_0^\infty \Phi(u)\cos zu\,du \tag{2}$$

$$\Phi(u) = 2\pi e^{\frac{5u}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}(2\pi e^{2u}n^2 - 3)\,n^2\,e^{-n^2\pi e^{2u}}. \tag{3}$$

Es ist offenbar

$$\Phi(u) \sim 4\pi^2 e^{\frac{9u}{2} - \pi e^{2u}} \qquad \text{für } u \to +\infty. \tag{4}$$

Ferner ist (vgl. unter 4) $\Phi(u)$ eine gerade Funktion. Folglich gilt

$$\Phi(u) \quad 4\pi^2\left(e^{\frac{9u}{2}} + e^{-\frac{9u}{2}}\right)e^{-\pi(e^{2u}+e^{-2u})} \qquad \text{für } u \to \pm\infty. \tag{5}$$

---

[1] B. RIEMANN, Werke (1876), S. 138.

39—25389. *Acta mathematica*. 48. Imprimé le 1 mars 1926.

Mit Hinsicht auf die Riemannsche Vermutung könnte man die folgende Frage aufwerfen[1]: Hat die Funktion, die aus der rechten Seite von (2) dadurch hervorgeht, dass $\Phi(u)$ durch die rechte Seite von (4) ersetzt wird, nur reelle Nullstellen?

Die Antwort ist verneinend (vgl. unter 4): die entstehende Funktion hat unendlich viele imaginären Nullstellen. Wird aber anstatt der rechten Seite von (4) die von (5) verwendet, so entsteht die Funktion

$$\xi^*(z) = 8\pi^2 \int_0^\infty \left(e^{\frac{9u}{2}} + e^{-\frac{9u}{2}}\right) e^{-\pi(e^{2u}+e^{-2u})} \cos zu \, du, \tag{6}$$

die man etwa die »verfälschte ξ-Funktion» nennen könnte, und $\xi^*(z)$ besitzt tatsächlich *nur reelle Nullstellen.* Es ist übrigens

$$\xi(z) \sim \xi^*(z),$$

wenn z in irgend einem abgeschlossenen Winkelraum von Scheitel 0, der die reelle Achse nicht enthält, gegen ∞ strebt. Wird die Anzahl der Nullstellen von $\xi(z)$ in der Kreisfläche $|z| \leqq r$ mit $N(r)$ und die entsprechende Anzahl für $\xi^*(z)$ mit $N^*(r)$ bezeichnet, so ist

$$N(r) \sim N^*(r)$$

und sogar

$$N(r) - N^*(r) = O(\log r).$$

Ich erbringe im folgenden den Nachweis für die Realität sämtlicher Nullstellen von $\xi^*(z)$. Die Untersuchung konzentriert sich auf eine andere ganze Funktion, nämlich auf die Funktion

$$\mathfrak{G}(z) = \mathfrak{G}(z; a) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(e^u+e^{-u})+zu} \, du, \tag{7}$$

die einige schöne, einfache Eigenschaften aufweist. Dem Parameter a wird stets ein positiver Wert zugeschrieben. $\xi^*(z)$ lässt sich durch $\mathfrak{G}(z)$ ausdrücken. Es ist

$$\xi^*(z) = 2\pi^2 \left\{ \mathfrak{G}\left(\frac{iz}{2} - \frac{9}{4}; \pi\right) + \mathfrak{G}\left(\frac{iz}{2} + \frac{9}{4}; \pi\right) \right\} \tag{8}$$

---

[1] Sie wurde von Prof. LANDAU in 1913 in einem Gespräch gelegentlich erwähnt.

wie man leicht aus (6), (7) herleitet. Ich werde zeigen, dass $\mathfrak{G}(iz)$ *nur reelle Nullstellen hat.* Hieraus folgt dann leicht dieselbe Eigenschaft für $\xi^*(z)$.

1. Die wichtigste Eigenschaft der ganzen Funktion $\mathfrak{G}(z)$ ist, dass sie einer einfachen Differenzengleichung genügt; es ist

$$z\,\mathfrak{G}(z) = a\,(\mathfrak{G}(z+1) - \mathfrak{G}(z-1)) \tag{9}$$

wie man durch partielle Integration leicht feststellt. Es sei vermerkt, dass $\mathfrak{G}(z)$ gerade ist,

$$\mathfrak{G}(-z) = \mathfrak{G}(z). \tag{10}$$

Ferner gilt, wenn z keine ganze Zahl ist,

$$\begin{aligned}\mathfrak{G}(z) = {} & a^{-z}\Gamma(z)\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^{2n}}{n!\,(1-z)(2-z)\ldots(n-z)}\right) \\ & + a^{z}\Gamma(-z)\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^{2n}}{n!\,(1+z)(2+z)\ldots(n+z)}\right).\end{aligned} \tag{11}$$

Den Beweis für (11) kann man etwa so führen: es ist

$$\Gamma(z) = \int_0^a e^{-v}v^{z-1}\,dv + \int_a^\infty e^{-v}v^{z-1}\,dv = P(z) + Q(z), \tag{12}$$

$$P(z) = P(z;a) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n a^{z+n}}{n!\,(z+n)}, \tag{13}$$

$$Q(z) = Q(z;a) = a^z\int_0^\infty e^{-a e^u + uz}\,du. \tag{14}$$

Nun ist

$$\begin{aligned}\mathfrak{G}(z) &= \int_0^\infty e^{-a(e^u+e^{-u})}(e^{uz}+e^{-uz})\,du \\ &= \int_0^\infty \sum_{n=0}^{\infty} e^{-a e^u}\frac{(-a)^n}{n!}\left(e^{(-n+z)u} + e^{(-n-z)u}\right)du.\end{aligned}$$

Hieraus folgt, gemäss (14), nach Vertauschung von Summation und Integration, die durch absolute Konvergenz leicht zu rechtfertigen ist, dass

$$\mathfrak{G}(z)=a^{-z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n a^{2n}}{n!}Q(-n+z)+a^z\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n a^{2n}}{n!}Q(-n-z). \tag{15}$$

Anderseits ist offenbar

$$0=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+l}\,a^{k+l}}{k!\;l!}\left(\frac{1}{-k+z+l}+\frac{1}{k-z-l}\right)$$

$$=a^{-z}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k a^{2k}}{k!}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l a^{-k+z+l}}{l!\,(-k+z+l)}$$

$$+\,a^z\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l\,a^{2l}}{l!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k a^{-l-z+k}}{k!\,(-l-z+k)},$$

also, gemäss (13),

$$0=a^{-z}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k a^{2k}}{k!}P(-k+z)+a^z\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l\,a^{2l}}{l!}P(-l-z). \tag{16}$$

Es folgt aus (12), (15), (16)

$$\mathfrak{G}(z)=a^{-z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n a^{2n}}{n!}\Gamma(-n+z)+a^z\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n a^{2n}}{n!}\Gamma(-n-z)$$

was mit (11) gleichbedeutend ist.

Ich erwähne noch, ohne sie zu beweisen und auch ohne sie nachher anzuwenden, die beiden folgenden Darstellungen:

$$\mathfrak{G}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\Gamma\left(s-\frac{z}{2}\right)\Gamma\left(s+\frac{z}{2}\right)a^{-2s}\,ds,$$

$$\mathfrak{G}(z)=\frac{\pi}{\sin\pi z}e^{\frac{i\pi z}{2}}J_{-z}(2ia)-\frac{\pi}{\sin\pi z}e^{-\frac{i\pi z}{2}}J_z(2ia).$$

In der ersten ist $2\alpha>|\Re z|$ zu nehmen, in der zweiten sind beide Glieder rechts Lösungen derselben Differenzengleichung, der auch $\mathfrak{G}(z)$, gemäss (9), genügt.

2. Die asymptotische Darstellung und die Abschätzungen von $\mathfrak{G}(z)$, die uns jetzt beschäftigen werden, lassen sich auf Grund der Entwicklung (11) gewinnen.

Es müssen verschiedene Gebiete der z-Ebene nacheinander untersucht werden. Es sei $z=x+iy=re^{i\varphi}$ gesetzt, wo x, y, r, φ reell, $r\geqq 0$; falls $y>0$ ist, wird $0<\varphi<\pi$ angenommen; $x-iy=\bar{z}$.

I. *Für* $|y|\geqq 1$, $a\leqq A$ *ist*

$$\mathfrak{G}(z)=a^{-z}\,\Gamma(z)\left(1+\frac{\chi(z)}{z}\right)+a^{z}\,\Gamma(-z)\left(1-\frac{\chi(-z)}{z}\right) \tag{17}$$

wobei der Betrag der Funktion $\chi(z)=\chi(z;\,a)$ *unter einer nur von A abhängigen Schranke liegt.*

Es ist, gemäss (11),

$$\chi(z)=\frac{z\,a^2}{1-z}\left(1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a^{2n-2}}{n!\,(2-z)(3-z)\ldots(n-z)}\right),$$

woraus die Behauptung ohne weiteres hervorgeht.

II. *Es seien* ε *und* A *feste positive Zahlen. Es sei*

$$\frac{a^z\,\mathfrak{G}(z)}{\Gamma(z)}-1=\psi(z)=\psi(z;\,a) \tag{18}$$

gesetzt. Dann gilt in der Halbebene $x\geqq\varepsilon$

$$\lim_{|z|\to\infty}\psi(z)=0, \tag{19}$$

und zwar gleichmässig in z und a, falls $a\leqq A$ ist.

Es folgt aus der Stirlingschen Formel die Existenz einer Konstanten C, sodass für $y\geqq 1$, $x\geqq\varepsilon$, $r\geqq a\,e$

$$\left|a^{2z}\frac{\Gamma(-z)}{\Gamma(z)}\right|\leqq a^{2x}\,C\,r^{-2x}\,e^{-(\pi-2\varphi)\,y+2x}\leqq C\left(\frac{a\,e}{r}\right)^{2\varepsilon}. \tag{20}$$

In demjenigen Teil der Halbebene $x\geqq\varepsilon$, wo $y\geqq 1$ ist, folgt die Behauptung II unmittelbar aus (17), (18) und (20); sie folgt durch Symmetrie in dem Teil, wo $y\leqq -1$. Es bleibt der Halbstreifen

$$x\geqq\varepsilon,\qquad -1\leqq y\leqq 1$$

übrig. An dessen Rand strebt, nach dem schon bewiesenen Teil der Behauptung II, die Funktion (18) gegen Null für $z\to\infty$. Da die Funktion (18) ganz und von endlicher Ordnung ist, muss sie nach wohlbekannten allgemeinen Sätzen[1], gleichmässig in vollem Halbstreifen für $z \to \infty$ gegen Null streben; dies vervollständigt den Beweis der Behauptung II. Natürlich könnte man anstatt allgemeine Sätze heranzuziehen die Funktion (18) auch direkt mittels (11) an passenden, den Halbstreifen durchsetzenden Kurven, z. B. an den Geraden $x = k + \frac{1}{2}$, $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ abschätzen. Wir gehen daran, im Falle $k = 0$ für einen anderen Zweck eine solche Abschätzung durchzuführen, vgl. (22).

III. *Ist* $a \leqq \frac{1}{4}$, *so liegen keine Nullstellen von* $\mathfrak{G}(z; a)$ *ausserhalb des Streifens* $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$.

Da $\mathfrak{G}(z)$ gerade ist, genügt es die Halbebene $x \geqq \frac{1}{2}$ zu betrachten. An der Geraden $x = \frac{1}{2}$ ist

$$z + \bar{z} = 1, \qquad \bar{z} = 1 - z$$

und folglich ist, wegen der Symmetrie des Wertverlaufs inbezug auf die reelle Achse,

$$|\Gamma(1-z)| = |\Gamma(\bar{z})|,$$

woraus

$$\left|\frac{\Gamma(-z)}{\Gamma(z)}\right| = \left|\frac{\Gamma(1-z)}{-z\,\Gamma(z)}\right| = \frac{1}{|z|} \leqq 2 \qquad \left(x = \frac{1}{2}\right) \tag{21}$$

folgt. Wird (21) benutzt, so ergibt sich aus (11), dass auf der Geraden $x = \frac{1}{2}$

$$|\psi(z)| = \left|\frac{a^z\,\mathfrak{G}(z)}{\Gamma(z)} - 1\right| = \tag{22}$$

$$= \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{2n}}{n!\,(1-z)\ldots(n-z)} + \frac{a^{2z}\,\Gamma(-z)}{\Gamma(z)}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^{2n}}{n!\,(1+z)\ldots(n+z)}\right)\right|$$

$$\leqq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{2n}}{n!\,\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{2n-1}{2}} + a\cdot 2\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^{2n}}{n!\,\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdots\frac{2n+1}{2}}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2a)^{2n}}{2n!} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2a)^{2n+1}}{(2n+1)!} = e^{2a} - 1.$$

---

[1] Vgl. etwa G. Pólya u. G. Szegö, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis (Berlin 1925), Bd. 1, Aufgaben III 333, III 339.

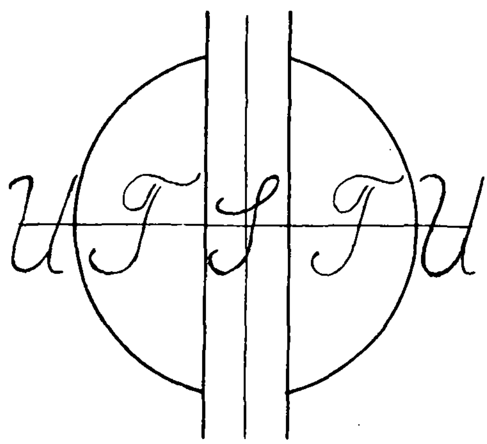
Es folgt aus (22), dass

$$(23) \qquad |\psi(z)| = |\psi(z;\,a)| < 1 \qquad \text{für } x = \frac{1}{2},\ a \leqq \frac{1}{4}.$$

Es folgt aus II die Existenz einer Zahl R, so dass

$$(24) \qquad |\psi(z)| = |\psi(z;\,a)| < 1 \qquad \text{für } x \geqq \frac{1}{2},\ r \geqq R,\ a \leqq \frac{1}{4}.$$

Es gilt ferner $|\psi(z)| < 1$ auch im Kreissegment $x \geqq \frac{1}{2}$, $r \leqq R$, da doch die fragliche Ungleichung, gemäss (23), (24), am Rande des Kreissegementes erfüllt ist. Also gilt $|\psi(z)| < 1$ in der vollen Halbebene $x \geqq \frac{1}{2}$; somit kann $\mathfrak{G}(z)$, vgl. (18), in dieser Halbebene nicht verschwinden.



Es ist gut für das folgende eine bestimmte Einteilung der Ebene vor Augen zu haben (vgl. die Figur): der Streifen $-1 \leqq x \leqq 1$ sei mit S bezeichnet. Der Teil der Ebene, wo zugleich $r \leqq R$ und $|x| > 1$ gilt, sei mit T bezeichnet. Der übrigbleibende ins Unendliche reichende Teil mit U. Wir wählen die Zahl $R = R(A)$ nach Vorgabe einer bestimmten positiven Zahl A so, dass in und am Rande von U die Ungleichung $|\psi(z)| < 1$ für $a \leqq A$ gilt; dies ist, gemäss II, möglich. Aus (18) folgt, dass $\mathfrak{G}(z)$ weder innerhalb U noch am Rande von U verschwindet.

3. Wir werden jetzt aus der Differenzengleichung (9) Folgerungen ziehen und sie mit jenen verbinden, die wir eben aus der Darstellung (11) gewonnen haben.

IV. *Es liegen keine Nullstellen von $\mathfrak{G}(z)$ auf den Geraden $x = 1$ und $x = -1$, d. h. auf dem Rande von S.*

Wir haben zweierlei zu berücksichtigen: Erstens die Differenzengleichung und die Symmetrie von $\mathfrak{G}(z)$, zweitens die Differenzengleichung und die asymptotischen Eigenschaften von $\mathfrak{G}(z)$.

Erstens: Die Funktion $\mathfrak{G}(z)$ ist gerade und nimmt reelle Werte für reelles z an. Hieraus folgt: ist y reell, so ist der Wert $\mathfrak{G}(iy)$ reell und die beiden Werte $\mathfrak{G}(1+iy)$ und $\mathfrak{G}(-1+iy)$ sind konjugiert komplex. Somit ergibt (9) für $z=iy$

$$y\,\mathfrak{G}(iy)=2a\,\Im\,\mathfrak{G}(1+iy). \tag{25}$$

Zweitens: Es ist nicht möglich, dass $\mathfrak{G}(z)$ in zwei Punkten, deren Verbindungsstrecke der reellen Achse parallel liegt und von der Länge 1 ist, zugleich verschwindet. Denn wäre $\mathfrak{G}(c)=0$ und auch $\mathfrak{G}(c-1)=0$, so würde aus (9) $\mathfrak{G}(c+1)=0$ folgen, also auch $\mathfrak{G}(c+2)=0$, $\mathfrak{G}(c+3)=0, \ldots$, und so würde $\mathfrak{G}(z)$ Nullstellen im Gebiete U haben (vgl. Figur); das ist jedoch nicht der Fall.

$\mathfrak{G}(z)$ ist für relles z positiv, vgl. (7). Aus $\mathfrak{G}(1+iy)=0$ würde einerseits $y\neq 0$, andererseits $\Im\,\mathfrak{G}(1+iy)=0$, somit, gemäss (25), $\mathfrak{G}(iy)=0$ folgen. Das gleichzeitige Verschwinden von $\mathfrak{G}(1+iy)$ und $\mathfrak{G}(iy)$ ist jedoch ausgeschlossen, und foglich ist $\mathfrak{G}(1+iy)\neq 0$.

V. *Es liegen keine Nullstellen von $\mathfrak{G}(z)$ ausserhalb des Streifens S.*

Für $a\leqq\frac{1}{4}$ ist dies schon bewiesen, vgl. III. Es sei

$$\frac{1}{4}\leqq a\leqq A. \tag{26}$$

Im Gebiete U (vgl. Figur) und an dessen Rand liegen, wie wir festgestellt haben, keine Nullstellen von $\mathfrak{G}(z)$. Nehmen wir IV hinzu, so sehen wir, dass auch am Rande von T keine Nullstellen von $\mathfrak{G}(z)$ liegen. Variiert z am Rande von T, und a im abgeschlossenen Intervall (26), so ist $\mathfrak{G}(z;a)$ eine stetige, von Null verschiedene Funktion von z und a. Also ist das Integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int\frac{\mathfrak{G}'(z;a)\,dz}{\mathfrak{G}(z;a)}, \tag{27}$$

die um den Rand von T in positivem Sinne erstreckt ist, eine stetige Funktion von a. Das Integral (27) stellt eine ganze Zahl, nämlich die Anzahl der Nullstellen von $\mathfrak{G}(z;a)$ innerhalb T dar. Eine stetige Funktion, die nur ganzzahlige Werte annimmt, ist eine Konstante. Also ist das Integral (27) stets $=0$, da es $=0$ für $a=\frac{1}{4}$ ist, vgl. III.

VI. *Alle innerhalb des Streifens S liegende Nullstellen von $\mathfrak{G}(z)$ sind einfach und rein imaginär.*

Es folgt aus (17) und der Stirlingschen Formel, dass im Streifen $-1 \leqq x \leqq 1$ für $y \to +\infty$ gleichmässig in x

$$(28) \qquad \mathfrak{G}(x+iy) = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-\frac{\pi}{2}y + i\frac{\pi}{2}x} \left\{ \left(\frac{y}{a}\right)^{x} e^{i\Phi} + \left(\frac{y}{a}\right)^{-x} e^{-i\Phi} \right\} + O\left(e^{-\frac{\pi}{2}y} y^{|x| - 3/2}\right)$$

gilt; zur Abkürzung ist

$$(29) \qquad \Phi = y \log \frac{y}{a} - y - \frac{\pi}{4}$$

gesetzt. Eine abgeschwächte Form der Behauptung VI, worin anstelle aller Nullstellen »alle Nullstellen mit Ausnahme endlich vieler» auftreten, könnte man bloss aus (28), (29) beweisen. Der Beweis des vollen Resultates muss etwas mehr benutzen.

Man betrachtet denjenigen Zweig von $\log \mathfrak{G}(z)$, der für $z=1$ reell ausfällt; er ist, gemäss IV, entlang der Geraden $x=1$, unbeschränkt fortsetzbar. Man verfolge $\mathfrak{J} \log \mathfrak{G}(1+iy)$, wenn y von 0 zu $+\infty$ zunimmt und bezeichne den *kleinsten* positiven Wert von y, für welchen

$$\mathfrak{J} \log \mathfrak{G}(1+iy) = (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

ausfällt, mit y_n ($n=0, 1, 2, 3, \ldots$). In der geschweiften Klammer an der rechten Seite von (28) überwiegt für $x=1$ das Glied $a^{-x} y^x e^{i\Phi}$; man schliesst aus (29), dass

$$\mathfrak{J} \log \mathfrak{G}(1+iy) \to +\infty \qquad \text{für } y \to \infty.$$

Daher existiert y_n, $n=0, 1, 2, 3, \ldots$.

Man bezeichne mit R_n das Rechteck, dessen 4 Ecken

$$1+iy_n, \quad -1+iy_n, \quad -1-iy_n, \quad 1-iy_n$$

sind. An den vertikalen Seiten von R_n liegen, gemäss IV, keine Nullstellen von $\mathfrak{G}(z)$; dass auch an den horizontalen Seiten für genügend grosses n keine liegen, wird bald gezeigt. Es bezeichne

H_n die Änderung von $\mathfrak{J} \log \mathfrak{G}(z)$, wenn z geradlinig von $1+iy_n$ nach $-1+iy_n$ wandert;

N_n die Anzahl der rein imaginären Nullstellen von $\mathfrak{G}(z)$ innerhalb R_n, *ohne* Multiplizität gerechnet;

$N_n + N_n^*$ die Anzahl sämtlicher Nullstellen von $\mathfrak{G}(z)$ innerhalb R_n *mit* Multiplizität gerechnet.

In N_n^* ist die Anzahl der etwaigen nicht rein imaginären Nullstellen von $\mathfrak{G}(z)$ innerhalb R_n inbegriffen. Ferner liefert jede in R_n befindliche rein imaginäre Nullstelle von der Multiplizität m den Beitrag $m-1$ zu N_n^*. N_n und N_n^* können mit wachsendem n nicht abnehmen.

Die Gesamtänderung von $\mathfrak{J}\log\mathfrak{G}(z)$, wenn z den Rand des Rechtecks R_n in positivem Sinne einmal beschreibt, ist

$$2\pi(N_n + N_n^*) = 2H_n + (2n+1)\,2\pi \tag{30}$$

nach der Definition von y_n, H_n und aus Symmetriegründen.

Nach Definition nimmt $\mathfrak{J}\log\mathfrak{G}(1+iy)$ für $y=y_{\nu-1}$ den Wert $\left(\nu-\frac{1}{2}\right)\pi$, für $y=y_\nu$ den Wert $\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\pi$ an; es gibt also mindestens einen Wert η, $y_{\nu-1}<\eta<y_\nu$, so dass

$$\mathfrak{J}\log\mathfrak{G}(1+i\eta) = \nu\pi .$$

Hieraus folgt

$$\mathfrak{J}\,\mathfrak{G}(1+i\eta) = 0$$

und, gemäss (25),

$$\mathfrak{G}(i\eta) = 0 .$$

Mit $i\eta$ ist auch $-i\eta$ Nullstelle von $\mathfrak{G}(z)$, und so haben wir, $\nu = 1, 2, 3, \ldots n$ gesetzt, die Existenz von mindestens $2n$ verschiedenen reinimaginären Nullstellen im Rechteck R_n erschlossen; d. h. es ist

$$N_n \geqq 2n . \tag{31}$$

(30) und (31) ergeben

$$2\pi N_n^* \leqq 2H_n + 2\pi . \tag{32}$$

Man bezeichne mit Φ_n den Wert, den (29) für $y=y_n$ annimmt. Da, wie gesagt, für $x=1$ das erste Glied der geschweiften Klammer von (28) dominiert, ist

$$\mathfrak{J}\log\mathfrak{G}(1+iy_n) = (2n+1)\frac{\pi}{2} \equiv \Phi_n + \frac{\pi}{2} + \varepsilon_n \pmod{2\pi},$$

wo

$$\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n = 0 .$$

Da $\Phi_n \equiv n\pi - \varepsilon_n$, ist für $y = y_n$ bei grossem n der Wert von $e^{i\Phi_n}$ nahezu $(-1)^n$, und die geschweifte Klammer in (28) nahezu reell. Hieraus folgt zweierlei. 1) Es überwiegt rechts in (28) für $y = y_n$ das Hauptglied das O-Glied auf der *ganzen* Strecke $-1 \leqq x \leqq 1$, so dass $\mathfrak{G}(z)$ an den horizontalen Seiten des Rechtecks R_n nicht verschwindet, wie schon früher behauptet wurde. 2) Für die Änderung von arc $\mathfrak{G}(z)$ entlang dieser Seite wird in Formel (28) der Faktor $e^{i\pi x/2}$ massgebend, oder genauer, es ist für beliebiges positives ε

$$H_n < -\pi + \varepsilon, \tag{33}$$

wenn n genügend gross ist. (32) und (33) ergeben

$$2\pi N_n^* < 2\varepsilon.$$

Somit ist N_n^*, als nichtnegative ganze Zahl, $= 0$ für genügend grosses n, folglich stets $= 0$, da N_n^* mit wachsendem n nie abnimmt; und VI ist bewiesen.

IV, V, VI ergeben eine lückenlose Einteilung der Ebene und zeigen, dass $\mathfrak{G}(z)$ *nur rein imaginäre einfache Nullstellen* besitzt. Die Betrachtung ergibt nebenbei, dass die Anzahl der Nullstellen, deren Ordinaten zwischen 0 und y liegen

$$\frac{y}{\pi}\log\frac{y}{a} - \frac{y}{\pi} + O(1)$$

ist.

4. Um auf alle in der Einleitung erwähnten Behauptungen zurückkommen zu können, benötige ich zwei einfache Hilfssätze von allgemeinem Charakter.

Hilfssatz I. *Es sei die Funktion $F(u)$ analytisch und reellwertig für sämtliche nichtnegative reelle Werte von u. Ferner soll*

$$\lim_{u\to\infty} u^2 F^{(n)}(u) = 0 \tag{34}$$

für $n = 0, 1, 2, \ldots$ gelten ($F^{(0)}(u) = F(u)$). Wenn $F(u)$ keine gerade Funktion ist, ist die Funktion

$$G(x) = \int_0^\infty F(u)\cos xu\, du \tag{35}$$

für hinreichend grosse reelle Werte x von Null verschieden.

Ist $F(u)$ keine gerade Funktion, so gilt für eine passende ganze Zahl q

$$F'(0) = F'''(0) = \cdots = F^{(2q-3)}(0) = 0, \qquad F^{(2q-1)}(0) \neq 0.$$

Man erhält mit Rücksicht auf (34) durch wiederholte partielle Integration

$$G(x) = (-1)^q \frac{F^{(2q-1)}(0)}{x^{2q}} + \frac{(-1)^{q+1}}{x^{2q+1}} \int_0^\infty F^{(2q+1)}(u) \sin xu\, du.$$

Hieraus folgt, wieder mit Rücksicht auf (34),

$$\lim_{x \to \infty} x^{2q} G(x) = (-1)^q F^{(2q-1)}(0) \neq 0,$$

also die Behauptung.

Versteht man unter $F(u)$ die rechte Seite von (4) oder setzt man allgemeiner irgendwelche endliche Anzahl Glieder der Reihe (3) für $F(u)$ in (33) ein, so erhält man eine ganze Funktion $G(x)$, von der auf Grund der Hadamardschen Theorie leicht nachzuweisen ist, dass sie unendlich viele Nullstellen hat. Von diesen Nullstellen sind aber, gemäss Hilfssatz I, nur endlich viele reell, da die gewählte Funktion $F(u)$ offenbar nicht gerade ist. — Die in der Integraldarstellung (2) der ξ-Funktion auftretende Funktion $\Phi(u)$ muss, gemäss Hilfssatz I, gerade sein, was man natürlich auch direkt bestätigen kann.

Hilfssatz II. *Es sei a eine positive Konstante und $G(z)$ eine ganze Funktion vom Geschlecht* 0 *oder* 1, *die für reelles z reelle Werte annimmt, keine imaginären Nullstellen und mindestens eine reelle Nullstelle hat. Dann hat auch die Funktion*

$$G(z - ia) + G(z + ia) \tag{36}$$

nur reelle Nullstellen[1].

Die Voraussetzung betreffend $G(z)$ besagt, dass

$$G(z) = c\, z^q e^{\alpha z} \Pi \left(1 - \frac{z}{\alpha_n}\right) e^{\frac{z}{\alpha_n}}$$

ist, wo c, α, α_1, $\alpha_2, \ldots$ reelle Konstanten sind, $\alpha_n \neq 0$ für $n = 1, 2, \ldots$, $\alpha_1^{-2} + \alpha_2^{-2} + \ldots$ konvergent und q eine nichtnegative ganze Zahl ist. (Wenn $G(z)$ keine Nullstelten hat, d. h. sich auf $c e^{\alpha z}$ reduziert, kann (36) identisch verschwinden.) Ist $z = x + iy$ eine Nullstelle der Funktion (36), so ist

$$|G(z - ia)| = |G(z + ia)|,$$

[1] Das Entsprechende für Polynome ist Specialfall eines von Ch. Biehler herrührenden Satzes. (Vgl. z. B. G. Pólya u. G. Szegö a. a. O., Aufgabe III 25.)

also

$$1 = \left|\frac{G(z-ia)}{G(z+ia)}\right|^2 = \left(\frac{x^2+(y-a)^2}{x^2+(y+a)^2}\right)^q \Pi \frac{(x-\alpha_n)^2+(y-a)^2}{(x-\alpha_n)^2+(y+a)^2}.$$

Ist $y > 0$, so sind alle Faktoren rechts < 1, ist $y < 0$, so sind alle Faktoren rechts > 1. Somit muss, da doch mindestens ein Faktor vorhanden sein soll, $y = 0$ sein.

Dass $\mathfrak{G}\left(\frac{1}{2} iz\right)$ nur reelle Nullstellen hat, ist vorher bewiesen worden. Dass $\mathfrak{G}\left(\frac{1}{2} iz\right)$ auch inbezug auf das Geschlecht der Voraussetzung des Hilfssatzes II genügt, ist leicht aus der Hadamardschen Theorie zu folgern. Wendet man Hilfssatz II auf $G(z) = \mathfrak{G}\left(\frac{1}{2} iz; \pi\right)$ und $a = \frac{9}{2}$ an, so ergibt sich, gemäss (8), die Realität sämtlicher Nullstellen von $\xi^*(z)$.

Man findet übrigens auf Grund von (8), (17), (19), dass in der Halbebene $y \geqq \varepsilon$ (ε fest, $\varepsilon > 0$) für $z \to \infty$

$$\xi^*(iz) \backsim \frac{1}{2} z^2 \pi^{-\frac{z}{2}-\frac{1}{4}} \Gamma\left(\frac{z}{2}+\frac{1}{4}\right).$$

Diese Formel ist mit (1) zu vergleichen.[1]

---

[1] Anmerkung bei der Korrektur (5. 2. 26). Mittels einer passenden Erweiterung des Hilfssatzes II kann man noch zeigen, dass die Funktion

$$\xi^{**}(z) = 4\pi \int_0^\infty \left[2\pi\left(e^{\frac{9u}{2}} + e^{-\frac{9u}{2}}\right) - 3\left(e^{\frac{5u}{2}} + e^{-\frac{5u}{2}}\right)\right] e^{-\pi(e^{2u}+e^{-2u})} \cos zu\, du,$$

die sich der wahren ξ-Funktion noch etwas »besser anschliesst», ebenfalls nur reelle Nullstellen besitzt.