А. Г. Костюченко, А. А. Степанов, Бесконечномерные эллиптические координаты, *Функц. анализ и его прил.*, 1999, том 33, выпуск 4, 73–78

DOI: https://doi.org/10.4213/faa384

пространств. Однако полученные там условия равнораспределенности являются более жесткими. Для последовательностей отображений, рассмотренных в настоящей заметке, они сводятся к требованию сходимости ряда $\sum d_k^{-1}$ (в обозначениях настоящей заметки).

Приводимые ниже примеры показывают, что от налагаемых нами условий на последовательность отображений отказаться нельзя.

Пример 1. Рассмотрим последовательность $\{w_1 = z_1^k, w_2 = z_2\}$ отображений, где наименьшие степени не стремятся к бесконечности. Пусть пробная функция φ равна единице в окрестности окружности $(|z_1| = 1, z_2 = 0)$ и равна нулю вне некоторой большей окрестности. Тогда, если вторая координата точки a близка к нулю (а первая отлична от нуля), то $N(F_k, a)\varphi$ при достаточно больших k равно k; если же вторая координата достаточно велика по модулю, то значение функционала равно нулю. Утверждение следствия не может выполняться.

Пример 2. Рассмотрим ту же последовательность отображений и подвергнем пространство $\{w_1, w_2\}$ какому-нибудь повороту, например, на 45° (отображения задаются формулами $\{w_1 = (z_1^k + z_2)/\sqrt{2}, w_2 = (-z_1^k + z_2)/\sqrt{2}\}$). Теперь последовательность наименьших степеней стремится к бесконечности, но отображения перестали быть отображениями общего вида. Структура множества исключительных значений не изменилась.

Литература

1. *Дектярев И. М.* В сб.: Многомерный комплексный анализ. Изд-во Ин-та физики СО АН СССР, Красноярск, 1985, с. 64–77. **2.** *Ландкоф Н. С.* Основы современной теории потенциала. Наука, М., 1966. **3.** *Russakovskii A., Sodin M.* Indiana Univ. Math. J., **44**, No. 3, 851–882 (1995). **4.** *Russakovskii A., Shiffman B.* Indiana Univ. Math. J., **46**, No. 3, 897–932 (1997).

Владимирский государственный
педагогический университет

Поступило в редакцию
4 декабря 1997 г.
В переработанном виде
25 ноября 1998 г.

УДК 517.984, 517.58

Бесконечномерные эллиптические координаты*

© 1999. А. Г. Костюченко, А. А. Степанов

Многие конечномерные вполне интегрируемые задачи механики, например, задача о движении по геодезическим эллипсоида, задача о плоском движении материальной точки в поле притяжения двух неподвижных центров, задача Кеплера о движении точки под действием гравитационного притяжения неподвижного центра и дополнительной постоянной силы, а также ряд других задач, решаются с помощью эллиптических координат Якоби [1–3].

*Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 96-01-00333 и грант поддержки научных школ № 96-15-01292.

Они вводятся следующим образом. Рассмотрим пространство $H = \mathbb{C}^n$ (или $\mathbb{R}^n$), симметрический оператор A, действующий в H, и некоторый вектор $x \in H$. (Обычно еще требуется условие $A > 0$.)

Определение. *Эллиптическими координатами* вектора x называется набор чисел $\{\lambda_i\}$, являющихся корнями уравнения

$$\tfrac{1}{2}(A_\lambda^{-1}x, x) = 1, \tag{1}$$

где $A_\lambda = A - \lambda E$. Выберем ортонормированный базис $\{e_k\}_{k=1}^n$, такой, что $Ae_k = a_k e_k$, где a_k — собственные значения оператора A, причем $a_k < a_{k+1}$ для любого k. Пусть $x_k = (x, e_k)$; тогда (1) эквивалентно уравнению

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{|x_k|^2}{a_k - \lambda} = 2. \tag{2}$$

В дальнейшем будем считать, что A — оператор с простым спектром (т. е. такой, что все собственные значения однократны) и все x_k отличны от 0. Несложно проверить, что уравнение (2) имеет ровно n корней, причем $\lambda_1 < a_1$, $a_{i-1} < \lambda_i < a_i$, $i = 2, \dots, n$. Координаты вектора x выражаются через эллиптические координаты следующим образом [2]:

$$|x_i|^2 = 2\,\frac{\prod_{k=1}^{n}(a_i - \lambda_k)}{\prod_{k\neq i}(a_i - a_k)}\,. \tag{3}$$

В. И. Арнольд поставил задачу [3] об определении эллиптических координат в бесконечномерной ситуации. В данной заметке рассматривается случай, когда A либо A^{-1} является вполне непрерывным оператором.

Пусть теперь H — сепарабельное гильбертово пространство, A — самосопряженный полуограниченный снизу оператор, такой, что A^{-1} вполне непрерывен и $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ — ортонормированный базис, для которого $Ae_n = a_n e_n$, $a_{n+1} > a_n$, $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$. По аналогии с конечномерным случаем эллиптическими координатами назовем корни уравнения (1). Введем функцию

$$F(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n|^2}{a_n - \lambda} - 2,$$

где $x_k = (x, e_k)$. Тогда (1) эквивалентно уравнению

$$F(\lambda) = 0. \tag{4}$$

Несложно проверить, что $F(\lambda)$ — вещественная мероморфная функция, которая отображает верхнюю полуплоскость на верхнюю, и ее корни λ_n перемежаются с a_n, т. е. $\lambda_1 < a_1$ и $a_n < \lambda_{n+1} < a_{n+1}$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Ее можно представить в следующем виде (см. [4]):

$$F(\lambda) = C\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1 - \lambda/\lambda_n}{1 - \lambda/a_n}\,.$$

Так как $\lim_{\lambda\to-\infty} F(\lambda) = -2$, то

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{|\lambda_n|} < \infty \tag{5}$$

и $\lim_{\lambda\to-\infty} F(\lambda) = C\prod_{n=1}^{\infty} a_n/\lambda_n = -2$, $C = -2\prod_{n=1}^{\infty} \lambda_n/a_n$. Значит,

$$F(\lambda) = -2\prod_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda-\lambda_n}{\lambda-a_n}\,. \tag{6}$$

Из (6) получаем выражение для координат вектора x:

$$|x_k|^2 = \lim_{\lambda\to a_k} (a_k-\lambda)F(\lambda) = 2(a_k-\lambda_k)\prod_{n\neq k} \frac{a_k-\lambda_n}{a_k-a_n}\,. \tag{7}$$

Так как $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k-\lambda_k)\prod_{n\neq k} \frac{a_k-\lambda_n}{a_k-a_n} < \infty. \tag{8}$$

Пусть набор чисел $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет условиям (5) и (8). Покажем, что существует такой вектор x, для которого $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ являются эллиптическими координатами. Рассмотрим функцию $F(\lambda)$, которая задается уравнением (6). Тогда $F(\lambda)$ — вещественная мероморфная функция, отображающая верхнюю полуплоскость на верхнюю. По теореме Чеботарева [4] $F(\lambda)$ можно представить следующим образом:

$$F(\lambda) = a\lambda + b + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{A_k}{a_k-\lambda} - \frac{A_k}{a_k}\right), \tag{9}$$

где

$$a = \lim_{\lambda\to-\infty} \frac{F(\lambda)}{\lambda} = 0 \quad \text{и} \quad A_k = \lim_{\lambda\to a_k} (a_k-\lambda)F(\lambda) = 2(a_k-\lambda_k)\prod_{n\neq k} \frac{a_k-\lambda_n}{a_k-a_n}\,.$$

По условию (8) $\sum_{k=1}^{\infty} A_k < \infty$; значит,

$$F(\lambda) = C + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{a_k-\lambda},$$

где $C = \lim_{\lambda\to-\infty} F(\lambda) = -2$. Положим $x_k = \sqrt{A_k}$,

$$F(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k|^2}{a_k-\lambda} - 2.$$

Вектор $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k$ искомый.

Пусть выполнены условия (5) и (8). Положим

$$f_s = \sum_{k=s}^{\infty}(a_k-\lambda_k)\prod_{n=s,\, n\neq k}^{\infty} \frac{a_k-\lambda_n}{a_k-a_n}\,.$$

(Несложно проверить, что ряд сходится и все $f_s > 0$.) Тогда

$$f_1 - f_2 = (a_1-\lambda_1)\prod_{n>1} \frac{\lambda_n-a_1}{a_n-a_1} + \sum_{k=2}^{\infty}(a_k-\lambda_k)\prod_{n\neq 1,k} \frac{a_k-\lambda_n}{a_k-a_n}\left(\frac{a_k-\lambda_1}{a_k-a_1} - 1\right)$$

$$= (a_1-\lambda_1)\left[\prod_{n>1} \frac{\lambda_n-a_1}{a_n-a_1} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{a_k-\lambda_k}{a_k-a_1}\prod_{n\neq 1,k} \frac{a_k-\lambda_n}{a_k-a_n}\right].$$

Пусть
$$G(\lambda)=-\prod_{n=2}^{\infty}\frac{\lambda_n-\lambda}{a_n-\lambda}\,.$$
Для $G(\lambda)$ имеет место представление (9), где $a=\lim_{\lambda\to-\infty}G(\lambda)/\lambda=0$ и
$$A_k=\lim_{\lambda\to a_k}G(\lambda)(a_k-\lambda)=(a_k-\lambda_k)\prod_{n\neq1,k}\frac{\lambda_n-a_k}{a_n-a_k}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{A_k}{a_k}<\infty,$$
и, значит,
$$G(\lambda)=C+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{A_k}{a_k-\lambda},$$
где $C=\lim_{\lambda\to-\infty}G(\lambda)=-1$. Имеем
$$-\prod_{n=2}^{\infty}\frac{\lambda_n-\lambda}{a_n-\lambda}=-1+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{a_k-\lambda_k}{a_k-\lambda}\prod_{n\neq1,k}\frac{a_k-\lambda_n}{a_k-a_n}\,.$$
Следовательно, $f_1-f_2=a_1-\lambda_1$. Аналогично проверяется, что $f_k-f_{k+1}=a_k-\lambda_k$, $f_k>f_{k+1}$ и $\sum_{k=1}^{n}(a_k-\lambda_k)=f_1-f_{n+1}<f_1$. Тогда
$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k-\lambda_k)<\infty, \tag{10}$$
причем $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k-\lambda_k)\leqslant f_1$. Положим
$$f_s^l=\sum_{k=s}^{l}(a_k-\lambda_k)\prod_{n=s,\,n\neq k}^{l}\frac{a_k-\lambda_n}{a_k-a_n}$$
(если $l<s$, то положим $f_s^l=0$). Тогда $f_k^l-f_{k+1}^l=a_k-\lambda_k$, $k=1,\dots,n$. Суммируя по $k=1,\dots,n$, получаем $f_1^l=\sum_{k=1}^{l}(a_k-\lambda_k)$, т. е.
$$\sum_{k=1}^{l}(a_k-\lambda_k)\prod_{n=1,\,n\neq k}^{l}\frac{a_k-\lambda_n}{a_k-a_n}=\sum_{k=1}^{l}(a_k-\lambda_k).$$
Если выполнено условие (10), то выполнено и условие (5). Тогда
$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k-\lambda_k)>\sum_{k=1}^{s}(a_k-\lambda_k)=\sum_{k=1}^{s}(a_k-\lambda_k)\prod_{n=1,\,n\neq k}^{s}\frac{a_k-\lambda_n}{a_k-a_n}$$
$$>\sum_{k=1}^{s}(a_k-\lambda_k)\prod_{n=1,\,n\neq k}^{\infty}\frac{a_k-\lambda_n}{a_k-a_n}.$$
Следовательно, выполнено условие (8) и $f_1\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}(a_k-\lambda_k)$. Таким образом, доказана

Теорема 1. *Если A — самосопряженный полуограниченный снизу оператор, такой, что A^{-1} вполне непрерывен, то для того, чтобы набор чисел $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ (такой, что $a_n<\lambda_{n+1}<a_{n+1}$, $\lambda_1<a_1$) являлся эллиптическими*

координатами некоторого вектора x, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k-\lambda_k)<\infty,$$

причем $\|x\|^2=2\sum_{k=1}^{\infty}(a_k-\lambda_k)$.

Замечание. Фактически доказано следующее утверждение. Рассмотрим функцию $f(\lambda)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{a_k-\lambda}-C$, где $C>0$, $b_k>0$, $a_k<a_{k+1}$ и $\lim_{k\to\infty}a_k=+\infty$. Пусть λ_k — корни уравнения $f(\lambda)=0$, упорядоченные по возрастанию. Тогда $\sum_{k=1}^{\infty}b_k=C\sum_{k=1}^{\infty}(a_k-\lambda_k)$.

Пусть теперь $A>0$ — вполне непрерывный оператор, $a_n>a_{n+1}$ и $\lim_{n\to\infty}a_n=0$. В этом случае у уравнения (4) на каждом интервале (a_{n+1},a_n) имеется по одному корню и еще может существовать корень $\lambda_0\leqslant 0$. Положим $\alpha_k=1/a_k$, $\mu_k=1/\lambda_k$ и

$$G(\lambda)=-F\left(\frac{1}{\lambda}\right)=2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n|x_n|^2\lambda}{\alpha_n-\lambda}\,.$$

Тогда $G(\lambda)$ — вещественная мероморфная функция, отображающая верхнюю полуплоскость на верхнюю, и $G(0)=2$. Возможны четыре случая:

(a) $\lim_{\lambda\to-\infty}G(\lambda)>0 \iff \sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2/a_n<2$.

Тогда $G(\lambda)$ можно представить в виде

$$G(\lambda)=2\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1-\lambda/\mu_n}{1-\lambda/\alpha_n}$$

и $\lim_{\lambda\to-\infty}G(\lambda)=2\prod_{n=1}^{\infty}\alpha_n/\mu_n>0$. Покажем, что если выполнено условие $\prod_{n=1}^{\infty}\alpha_n/\mu_n>0$, то существует вектор x, для которого λ_n — эллиптические координаты.

Рассмотрим функцию

$$H(\lambda)=2\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1-\lambda/\mu_n}{1-\lambda/\alpha_n}\,.$$

Так как по теореме Чеботарева

$$H(\lambda)=a\lambda+b+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n\lambda}{(\alpha_n-\lambda)\alpha_n}\quad\text{и}\quad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n}{\alpha_n^2}<\infty,$$

то $b=H(0)=2$, $a=\lim_{\lambda\to-\infty}H(\lambda)/\lambda=0$. Положим $|x_n|^2=A_n/\alpha_n^2$; тогда вектор $x=\sum_{n=1}^{\infty}x_ne_n$ искомый.

(b) $\lim_{\lambda\to-\infty}G(\lambda)=0 \iff \sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2/a_n=2$.

Отсюда следует, что $\lambda_0=0$ — корень уравнения (4). Аналогично проверяется, что этот случай имеет место, когда $\prod_{n=1}^{\infty}\alpha_n/\mu_n=0$.

(c) $-\infty<\lim_{\lambda\to-\infty}G(\lambda)<0 \iff 2<\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2/a_n<\infty$.

Из условия $\lim_{\lambda\to-\infty}G(\lambda)<0$ следует, что функция $G(\lambda)$ имеет также корень $\mu_0<0$. Этот случай имеет место, когда $\prod_{n=2}^{\infty}\alpha_n/\mu_{n-1}<\infty$.

(d) $\lim_{\lambda\to-\infty}G(\lambda)=-\infty \iff \sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2/a_n=\infty$.

Чтобы имел место этот случай, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие два условия:

$$\prod_{n=2}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\mu_{n-1}} = \infty, \qquad \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\mu_n} = 0.$$

Таким образом, доказана

Теорема 2. *Пусть $A > 0$ — вполне непрерывный оператор.*

1 (случай (a)). *Если набор чисел $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ таков, что $a_{k+1} < \lambda_k < a_k$, то этот набор является эллиптическими координатами некоторого вектора тогда и только тогда, когда $\prod_{n=1}^{\infty} \lambda_n/a_n > 0$.*

2 (случаи (b)–(d)). *Если набор чисел $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ таков, что $\lambda_0 \leqslant 0$ и $a_{k+1} < \lambda_k < a_k$, то этот набор является эллиптическими координатами некоторого вектора тогда и только тогда, когда $\prod_{n=1}^{\infty} \lambda_n/a_n = 0$.*

В случае (a) *для координат x_k имеет место представление* (7), *а в случаях* (b)–(d) — *представление*

$$|x_k|^2 = 2(a_k - \lambda_{k-1}) \prod_{n \neq k} \frac{a_k - \lambda_{n-1}}{a_k - a_n}\,.$$

Литература

1. *Якоби К.* Лекции по динамике. Гл. ред. общетехнич. лит., Л.-М., 1936. **2.** *Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И.* Математические аспекты классической и небесной механики. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 3, Итоги науки и техники, ВИНИТИ, М., 1985. **3.** *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. Наука, М., 1989. **4.** *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. ГИТТЛ, М., 1956.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет

Поступило в редакцию
11 мая 1999 г.

УДК 519.1

О геометрии одного класса плоских деревьев

Взаимно однозначное соответствие между классами изотопической эквивалентности плоских связных деревьев и классами линейной эквивалентности обобщенных многочленов Чебышёва позволяет определить истинную форму плоского связного дерева. В работе изучается истинная форма одного класса плоских деревьев — деревьев диаметра 4 с центральной валентностью 4.

Обобщенным многочленом Чебышёва называется многочлен $p(z) \in \mathbb{C}[z]$, имеющий два критических значения. Пусть α и β — эти значения; тогда прообраз $p^{-1}([\alpha, \beta])$ отрезка $[\alpha, \beta]$ является плоским связным деревом $T(p)$ с $n = \deg(p)$ ребрами. Обратно, если T — плоское связное дерево, то существует обобщенный многочлен Чебышёва p, такой, что $T(p)$ изотопно T (т. е. существует сохраняющая ориентацию деформация плоскости, переводящая T в $T(p)$). Такой многочлен мы будем называть обобщенным многочленом Чебышёва дерева T.