Ю. А. Фарков, Биортогональные диадические вейвлеты на $\mathbb{R}_+$, *УМН*, 2007, том 62, выпуск 6(378), 189–190

DOI: https://doi.org/10.4213/rm8541

Биортогональные диадические вейвлеты на $\mathbb{R}_+$

Ю. А. Фарков

Функцию $\varphi \in L^2(\mathbb{R}_+)$ будем называть *масштабирующей функцией*, если она имеет компактный носитель и удовлетворяет уравнению вида

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{2^n-1} c_k \varphi(2x \ominus k), \qquad x \in \mathbb{R}_+, \tag{1}$$

где c_k – комплексные коэффициенты, $\ominus$ – двоичное вычитание на положительной полупрямой $\mathbb{R}_+$ (об этой операции и некоторых других используемых ниже понятиях см. [1], [2]). Применяя преобразование Уолша–Фурье, можем записать уравнение (1) в виде $\widehat{\varphi}(\omega) = m(\omega/2)\widehat{\varphi}(\omega/2)$, где $m(\omega) = (1/2)\sum_{k=0}^{2^n-1} c_k w_k(\omega)$ – полином Уолша, называемый *маской* масштабирующей функции φ. Подмножество M интервала $[0,1)$ называется *блокированным множеством* для маски m, если оно представимо в виде объединения диадических интервалов ранга $n-1$, не содержит интервала $[0, 2^{-n+1})$ и таково, что всякая точка множества $(M/2) \cup (1/2 + M/2)$, не лежащая в M, является нулем полинома m. В работе [2] доказано следующее

Предложение 1. *Если масштабирующая функция φ удовлетворяет уравнению (1) и $\widehat{\varphi}(0) = 1$, то $\operatorname{supp}\varphi \subset [0, 2^{n-1}]$ и $\widehat{\varphi}(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} m(2^{-j}\omega)$. Кроме того, система $\{\varphi(\,\cdot \ominus k) \mid k \in \mathbb{Z}_+\}$ линейно независима в том и только том случае, когда маска m не имеет блокированных множеств.*

Пусть φ, $\widetilde{\varphi}$ – масштабирующие функции в $L^2(\mathbb{R}_+)$ с масками

$$m(\omega) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2^n-1} c_k w_k(\omega), \qquad \widetilde{m}(\omega) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2^{\tilde{n}}-1} \widetilde{c}_k w_k(\omega)$$

соответственно такие, что $\widehat{\varphi}(0) = \widehat{\widetilde{\varphi}}(0) = 1$. Рассмотрим системы целых сдвигов функций φ и $\widetilde{\varphi}$:

$$\{\varphi(\,\cdot \ominus k) \mid k \in \mathbb{Z}_+\}, \qquad \{\widetilde{\varphi}(\,\cdot \ominus k) \mid k \in \mathbb{Z}_+\}. \tag{2}$$

Полином $m^*(\omega) = m(\omega)\,\overline{\widetilde{m}(\omega)}$ является маской масштабирующей функции $\varphi^*(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} \varphi(t \ominus x)\,\overline{\widetilde{\varphi}(t)}\,dt$. Аналогично предложению 2.5.2 из [3], если системы (2) биортонормированы в $L^2(\mathbb{R}_+)$, то

$$m^*(\omega) + m^*\left(\omega + \frac{1}{2}\right) = 1 \quad \text{для всех } \omega \in \mathbb{R}_+. \tag{3}$$

Отсюда по предложению 1 следует, что если одна из масок m, $\widetilde{m}$, m^* имеет блокированное множество, то системы (2) не являются биортонормированными в $L^2(\mathbb{R}_+)$.

Теорема 1 (ср. [3; теорема 2.5.6]). *Пусть маска m^* удовлетворяет условию (3). Тогда системы (2) являются биортонормированными в $L^2(\mathbb{R}_+)$ в том и только том случае, когда существует W-компактное множество E, конгруэнтное $[0,1)$ по модулю $\mathbb{Z}_+$, содержащее окрестность нуля и такое, что*

$$\inf_{j\in\mathbb{N}} \inf_{\omega\in E} |\,m(2^{-j}\omega)| > 0, \qquad \inf_{j\in\mathbb{N}} \inf_{\omega\in E} |\,\widetilde{m}(2^{-j}\omega)| > 0. \tag{4}$$

Отметим, что неравенства (4) выполнены для $E = [0,1)$, если $m^*(\omega) \neq 0$ при всех $\omega \in [0, 1/2)$.

Кратномасштабным анализом (*КМА*) в $L^2(\mathbb{R}_+)$ называется последовательность замкнутых подпространств $V_j \subset L^2(\mathbb{R}_+)$, $j \in \mathbb{Z}$, такая, что выполнены условия: (i) $V_j \subset V_{j+1}$ для всех $j \in \mathbb{Z}$; (ii) объединение $\bigcup V_j$ плотно в $L^2(\mathbb{R}_+)$ и $\bigcap V_j = \{0\}$; (iii) $f(\cdot) \in V_j \iff f(2\,\cdot\,) \in V_{j+1}$ для всех $j \in \mathbb{Z}$; (iv) $f(\cdot) \in V_0 \Longrightarrow f(\,\cdot \oplus k) \in V_0$ для всех $k \in \mathbb{Z}_+$; (v) существует функция $\varphi \in L^2(\mathbb{R}_+)$ такая, что система $\{\varphi(\,\cdot \ominus k) \mid k \in \mathbb{Z}_+\}$ является базисом Рисса в V_0.

Для произвольной функции $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$ положим $f_{j,k}(x) = 2^{j/2} f(2^j x \ominus k)$, $j \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Будем говорить, что *функция* $\varphi \in L^2(\mathbb{R}_+)$ *порождает КМА в* $L^2(\mathbb{R}_+)$, если, во-первых, функции $\varphi(\,\cdot \ominus k)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, образуют систему Рисса в $L^2(\mathbb{R}_+)$ и, во-вторых, семейство подпространств $V_j = \overline{\operatorname{span}\{\varphi_{j,k} \mid k \in \mathbb{Z}_+\}}$, $j \in \mathbb{Z}$, является КМА в $L^2(\mathbb{R}_+)$.

Пусть даны два КМА $\{V_j\}$, $\{\widetilde{V}_j\}$. Будем говорить, что функции $\psi \in V_1$, $\widetilde{\psi} \in \widetilde{V}_1$ образуют *биортогональную пару вейвлетов*, если, $\psi \perp \widetilde{V}_0$, $\widetilde{\psi} \perp V_0$ и $\bigl(\psi(\,\cdot \oplus k), \widetilde{\psi}(\,\cdot \oplus l)\bigr) = \delta_{k,l}$, $k, l \in \mathbb{Z}_+$. Как обычно, через $\mathscr{M}^*$ обозначается матрица, сопряженная к матрице $\mathscr{M}$, а через I – единичная матрица.

Предложение 2. *Пусть КМА* $\{V_j\}$, $\{\widetilde{V}_j\}$ *порождены масштабирующими функциями* $\varphi, \widetilde{\varphi}$ *соответственно и системы* (2) *являются биортонормированными. Если матрицы*

$$\mathscr{M} = \begin{pmatrix} m(\omega) & m(\omega \oplus 1/2) \\ m_1(\omega) & m_1(\omega \oplus 1/2) \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{\mathscr{M}} = \begin{pmatrix} \widetilde{m}(\omega) & \widetilde{m}(\omega \oplus 1/2) \\ \widetilde{m}_1(\omega) & \widetilde{m}_1(\omega \oplus 1/2) \end{pmatrix}$$

для почти всех $\omega \in [0,1)$ *удовлетворяют условию* $\mathscr{M}\widetilde{\mathscr{M}}^* = I$, *то функции* ψ, $\widetilde{\psi}$, *определенные равенствами*

$$\widehat{\psi}(\omega) = m_1(\omega/2)\,\widehat{\varphi}(\omega/2), \qquad \widehat{\widetilde{\psi}}(\omega) = \widetilde{m}_1(\omega/2)\,\widehat{\widetilde{\varphi}}(\omega/2), \tag{5}$$

образуют биортогональную пару вейвлетов. В частности, можно выбрать

$$m_1(\omega) = -w_1(\omega)\,\overline{m(\omega \oplus 1/2)}, \qquad \widetilde{m}_1(\omega) = -w_1(\omega)\,\overline{\widetilde{m}(\omega \oplus 1/2)}. \tag{6}$$

Теорема 2 (ср. [3; теорема 2.7.5]). *Пусть КМА* $\{V_j\}$, $\{\widetilde{V}_j\}$ *порождены масштабирующими функциями* φ, $\widetilde{\varphi}$, *маски которых удовлетворяют условию* (3) *и* $m(1/2) = \widetilde{m}(1/2) = 0$, *а функции* ψ, $\widetilde{\psi}$ *определены равенствами* (5), (6). *Тогда каждая из систем* $\{\psi_{j,k}\}$, $\{\widetilde{\psi}_{j,k}\}$ *является фреймом в* $L^2(\mathbb{R}_+)$. *Если при этом системы* (2) *являются биортонормированными, то функции* ψ, $\widetilde{\psi}$ *образуют биортогональную пару вейвлетов и каждая из систем* $\{\psi_{j,k}\}$, $\{\widetilde{\psi}_{j,k}\}$ *является базисом Рисса в* $L^2(\mathbb{R}_+)$.

Аналогичные результаты могут быть доказаны для биортогональных систем вейвлетов на группах Кантора и Виленкина (ортогональный случай изучался в [4], [5]).

Список литературы

[1] F. Schipp, W. R. Wade, P. Simon, *Walsh series*, An introduction to dyadic harmonic analysis, Adam Hilger, Bristol, 1990. **[2]** В. Ю. Протасов, Ю. А. Фарков, *Матем. сб.*, **197**:10 (2006), 129–160; англ. пер.: V. Yu. Protasov, Yu. A. Farkov, *Sb. Math.*, **197**:10 (2006), 1529–1558. **[3]** И. Я. Новиков, В. Ю. Протасов, М. А. Скопина, *Теория всплесков*, Физматлит, М., 2006. **[4]** W. C. Lang, *Houston J. Math.*, **24**:3 (1998), 533–544. **[5]** Ю. А. Фарков, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **69**:3 (2005), 193–220; англ. пер.: Yu. A. Farkov, *Izv. Math.*, **69**:3 (2005), 623–650.

Ю. А. Фарков (Yu. A. Farkov)
Российский государственный
геологоразведочный университет
E-mail: farkov@list.ru

Представлено В. М. Тихомировым
Принято редколлегией
09.10.2007