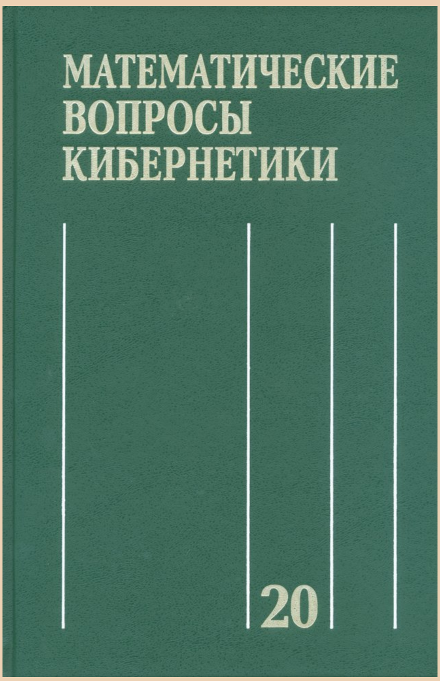

И. П. Чухров

Задача минимизации булевых функций: условия минимальности и вероятностный метод

ЗАДАЧА МИНИМИЗАЦИИ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ: УСЛОВИЯ МИНИМАЛЬНОСТИ И ВЕРОЯТНОСТНЫЙ МЕТОД

И. П. ЧУХРОВ

(МОСКВА)

Статья написана на основе докладов, представленных на XII Международном семинаре «Дискретная математика и ее приложения» имени академика О. Б. Лупанова (Москва, МГУ, 20–25 июня 2016 г.) и содержит обзор результатов для задачи минимизации булевых функций, в которых рассматриваются методы доказательства минимальности и неконструктивные подходы к получению оценок параметров, характеризующих трудоемкость минимизации относительно классов мер сложности.

Введение

Задача минимизации булевых функций обычно рассматривается в двух эквивалентных моделях — аналитической и геометрической [26]. В аналитической модели используются понятия: булева функция, импликанта, дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ), зависящие от n переменных. В геометрической модели эквивалентными понятиями являются подмножество вершин, грань, комплекс граней в n-мерном единичном кубе B^n. Задача минимизации булевых функций для аддитивной сложности является задачей о покрытии множества единичных вершин функции гранями единичного куба.

В обзорных статьях [5, 12, 30] изложены различные алгоритмические вопросы и подходы к решению задачи о покрытии, которые характерны для многих трудных дискретных оптимизационных задач.

При точном решении задачи о покрытии основные усилия нацелены на сокращение вычислительной трудоемкости поиска решения. Сначала выполняются преобразования, направленные на сокращение системного множества, для которого решается задача о покрытии. Используемые при этом подходы основаны на таких известных понятиях, как связность, неприводимое покрытие, ядровые множества, доминирование для элементов и множеств, которые имеют приемлемую трудоемкость проверки соответствующих свойств. В результате итеративных преобразований исходная задача сводится к задаче о покрытии для несокращаемого системного множества, которое называется *циклическим ядром* (*cyclic core*, [30]). Точные алгоритмы построения минимальных покрытий для таких задач обычно используют

DOI: 10.20948/mvk-2022-7

переборные схемы и относятся к методам ветвей и границ. Возможность и эффективность выполнения перебора в значительной степени определяются применимостью достаточных условий минимальности, т. е. достижимостью нижних границ, используемых для оценки минимальной сложности покрытия.

Известны задачи о покрытии для специальных структур, решение которых представляет значительную трудность. Нахождение точных решений для некоторых тестовых примеров, которые содержатся в библиотеке OR-Library, ограничено определенными размерностями. Даже при относительно небольшой размерности для таких примеров известны лишь минимальные из полученных решений, но не доказана их оптимальность. Предлагаемые подходы, основанные на интегрировании различных идей, позволяют сократить время вычисления и лишь улучшить известные решения [28, 31, 33, 35]. Численные эксперименты также показывают, что основные затраты приходятся на доказательство оптимальности решения [8]. При этом в качестве достаточных условий минимальности обычно используются нижние границы, основанные на понятии независимого множества элементов.

Сведение дискретной оптимизационной задачи к стандартной задаче о покрытии обеспечивает возможность применения известных методов решения задачи. Однако игнорирование специфических свойств семейства множеств и функционала сложности может приводить к возрастанию вычислительной трудоемкости поиска решения.

Характерной чертой задачи минимизации булевых функций является возможность нахождения оптимального решения уменьшением ранга и удалением импликант. Такие преобразования реализуются локальными алгоритмами [7], [4, с. 67–98] конечного порядка и их трудоемкость считается приемлемой.

Полиэкстремальность задачи минимизации булевой функции заключается в возможности существования большого числа локальных экстремумов, в роли которых выступают тупиковые покрытия (ДНФ), среди которых содержатся глобальные экстремумы — минимальные покрытия (ДНФ).

Задача о поведении параметров $\mu(n)$ и $\tau(n)$ — максимальных значений числа тупиковых и минимальных ДНФ булевой функции с ростом числа переменных была поставлена С. В. Яблонским в связи с оценкой трудоемкости минимизации булевых функций алгоритмами, использующими переборные схемы поиска решения. Отношение числа минимальных к числу тупиковых ДНФ булевой функции является верхней оценкой вероятности нахождения минимальной ДНФ при случайном выборе тупиковой, которая в худшем случае не превосходит $\chi^{-1}(n)$, где $\chi(n)$ — максимальное значение отношения числа тупиковых к числу минимальных ДНФ.

Оценкам максимальных и типичных значений параметров, характеризующих трудоемкость различных подходов к минимизации булевых функций, посвящены обзоры [4, с. 99–148], а также [10, 17]. Большинство задач, которые возникают при минимизации булевых функций, относится к полным или трудно решаемым комбинаторным задачам [29, 34]. Поэтому актуальными являются задачи выделения эффективно и неэффективно минимизируемых классов булевых функций конкретными классами алгоритмов (см. [13, 15]), определения достаточных критериев минимальности и обоснованности сокращения перебора в алгоритмах минимизации.

Множество булевых функций n переменных обозначим через P_n.

Для функции $f \in P_n$ обозначим:

$\mathscr{T}(f)$ и $\tau(f)$ — множество и число тупиковых комплексов граней;

$\mathscr{M}_{\mathscr{L}}(f)$ и $\mu_{\mathscr{L}}(f)$ — множество и число $\mathscr{L}$-минимальных комплексов граней;

$\chi_{\mathscr{L}}(f) = \tau(f)/\mu_{\mathscr{L}}(f)$ — отношение числа тупиковых и $\mathscr{L}$-минимальных комплексов граней.

Максимальное значение параметра $q_v(f)$ на множестве функций P_n будем обозначать через $q_v(n)$, например $\tau(n)$ или $\mu_{\mathscr{L}}(n)$.

Число тупиковых и $\mathscr{L}$-минимальных комплексов граней в кубе B^n обозначим через $T(n)$ и $M_{\mathscr{L}}(n)$ соответственно.

Обозначения параметра без указания меры сложности используются в утверждениях, которые справедливы одновременно для минимальных и кратчайших тупиковых комплексов.

Пояс куба B^n, состоящий из слоев $B_i^n = \{\widetilde{x} \in B^n\colon \ \|\widetilde{x}\| = i\}$ с номерами $i = m-k, \ldots, m$, где $0 \leqslant k \leqslant m \leqslant n$, обозначим через $S_{m-k,m}^n$.

Функция называется *поясковой*, если множество единичных вершин функции совпадает с поясом единичного куба.

Функция называется *симметрической*, если она не меняет значения при любой перестановке переменных. Симметрическая функция однозначно представляется в виде дизъюнкции поясковых функций, которые являются компонентами связности. Множество симметрических функций n переменных обозначим через S_n.

Целую часть и верхнюю целую часть числа x обозначим через $\lfloor x \rfloor$ и $\lceil x \rceil$ соответственно. Сколь угодно малая положительная константа обозначается через ε. Под $\log$ понимается логарифм по основанию 2. Асимптотические оценки числовых параметров в единичном кубе B^n всюду получаются при $n \to \infty$.

Из очевидных соотношений $\mu(n) \leqslant \tau(n)$, $\chi(n) \leqslant \tau(n)$ и мощностных соображений получается верхняя оценка [4, с. 125]:

$$\log \chi(n), \log \mu(n) \leqslant \log \tau(n) \lesssim n 2^n \log \tfrac{3}{2}.$$

Нижние оценки максимальных значений, полученные конструктивными методами, последовательно улучшались в работах С. В. Яблонского, Ю. И. Журавлева, В. В. Глаголева, Ю. Л. Васильева, А. А. Сапоженко, И. П. Чухрова:

$$\log \mu(n) \geqslant \log \max_{f \in S_n} \mu(f) \sim n \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \sim \sqrt{2/\pi}\sqrt{n}2^n,$$

$$\log \chi(n) \geqslant \log \max_{f \in S_n} \chi(f) \geqslant \Theta\left(n \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}\right) \asymp \sqrt{n}2^n.$$

Исследование симметрических функций и, в частности, поясковых функций объяснялось существованием гипотезы о достижимости значений $\tau(n)$ и $\mu(n)$ на симметрических функциях. При этом отмечалось, что «для числа кратчайших ДНФ известна лишь оценка снизу его максимального значения; нетривиальные оценки сверху, нетривиальные оценки типичных значений неизвестны» [4, с. 102].

§ 1. Меры сложности и доказательство минимальности [22]

Функционал $\mathscr{L}$, определенный на множестве комплексов граней, является мерой сложности, если он удовлетворяет аксиомам неотрицательности, монотонности, выпуклости и инвариантности относительно изоморфизма [27, с. 298].

Комплекс граней называется *$\mathscr{L}$-минимальным*, если он имеет наименьшую меру сложности $\mathscr{L}$ среди эквивалентных комплексов граней.

Кратчайшим называется l-минимальный комплекс и *минимальным* называется L-минимальный комплекс, где l — число граней и L — сумма рангов граней в комплексе.

Грани I и I' называются *изоморфными*, если существует такая перестановка координат π, что $\pi(I')=I$.

Грань I *доминирует* грань I', если существует такая перестановка координат π, что $\pi(I')\subset I$.

Комплекс граней называется минимальным относительно класса мер сложности $\mathbb{C}$ или кратко *$\mathbb{C}$-минимальным*, если он является $\mathscr{L}$-минимальным для любой меры сложности $\mathscr{L}$ из класса $\mathbb{C}$.

В теории выбора рассматриваются два подхода к сравнению альтернатив — *порядковый и количественный.*

Формализм порядкового подхода основан на теории бинарных отношений: сравнение любой пары альтернатив и выделение предпочтительной, что не требует их количественной оценки. Альтернативы представляются частично упорядоченным множеством, и решение задачи заключается в нахождении недоминируемых альтернатив.

Формализм количественного подхода основан на представлении отношения предпочтения на множестве альтернатив функцией полезности. Решение задачи выбора сводится к решению оптимизационной задачи и нахождению альтернатив с максимальным значением функционала полезности.

Функционал меры сложности порождает линейное бинарное отношение на множестве комплексов граней единичного куба. Аксиомы неотрицательности, монотонности и выпуклости определяют свойство *нестрогого порядка* при уменьшении ранга или удаления грани комплекса. Аксиома инвариантности определяет свойство *эквивалентности* изоморфных комплексов граней, т. е. неразличимости по сложности. Обоснование минимальности или не минимальности комплекса граней выполняется с использованием порядковых свойств, которые порождаются мерой сложности. Для этого определяются *классы мер сложности* [22], позволяющие установить эквивалентность или строгий порядок по сложности для комплексов граней:

Λ_π — меры сложности удовлетворяют усиленному свойству *инвариантности относительно изоморфизма*, т. е. при замене некоторых граней на изоморфные сложность комплекса не изменяется;

Λ_l — меры сложности удовлетворяют свойству *строгой монотонности относительно длины*, т. е. сложность комплекса уменьшается при удалении произвольной грани;

Λ_L — меры сложности удовлетворяют свойству *строгой монотонности относительно сложности*, т. е. сложность комплекса уменьшается при уменьшении ранга или удалении произвольной грани;

Λ_+ — меры сложности удовлетворяют свойству *аддитивности*, т. е. сложность комплекса граней равна сумме сложностей граней. Аддитивными являются меры сложности l и L, а также L_0 и L_1 — число направлений грани равных 0 и, соответственно, 1, т. е. число переменных с отрицанием и без отрицания в импликанте.

Комплекс граней называется *неприводимым*, если после удаления любой грани получается комплекс другой булевой функции. *Тупиковым* называется неприводимый комплекс граней, в котором все грани максимальные. Любой $\mathscr{L}$-минимальный комплекс является неприводимым для $\mathscr{L} \in \Lambda_l$ и является тупиковым для $\mathscr{L} \in \Lambda_L$.

Используемые при минимизации функционалы обычно являются мерами сложности из классов $\Lambda_\pi \cap \Lambda_l$ или $\Lambda_\pi \cap \Lambda_L$.

Множество и число минимальных комплексов граней булевой функции f относительно любой меры из класса мер сложности $\mathbb{C}$ обозначим через $\mathscr{M}_{\cap\mathbb{C}}(f)$ и $\mu_{\cap\mathbb{C}}(f)$ соответственно.

Каждая грань неприводимого комплекса M содержит хотя бы одну *собственную вершину* $\widetilde{x}$, не принадлежащую другим граням комплекса. Такую грань обозначим через $I_{M,\tilde{x}}$.

Для множества вершин $Q \subseteq B^n$ подмножество вершин $X \subseteq Q$ называется *интервально независимым*, если любая допустимая грань для множества Q содержит не более одной вершины множества X.

Подмножество вершин называется *протыкающим* для комплекса граней, если в каждой грани комплекса содержится хотя бы одна вершина подмножества.

Теорема 1. *Пусть $\mathscr{B}_M$ — подмножество собственных вершин для граней неприводимого комплекса M и определены условия:*

(i) $\mathscr{B}_M$ является интервально независимым и протыкающим для комплекса граней;

(ii) для каждой вершины $\widetilde{x} \in \mathscr{B}_M$ ранг грани $I_{M,\tilde{x}}$ не больше ранга любой допустимой грани комплекса, содержащей $\widetilde{x}$;

(iii) для каждой вершины $\widetilde{x} \in \mathscr{B}_M$ грань $I_{M,\tilde{x}}$ изоморфна или доминирует любую допустимую грань комплекса, содержащую $\widetilde{x}$.

Тогда комплекс M является кратчайшим, если выполнено условие (i), минимальным и кратчайшим, если выполнены условия (i) и (ii), Λ_π-минимальным, если выполнены условия (i) и (iii).

Отметим, что если неприводимый минимальный комплекс не является кратчайшим, то может не выполняться условие (i), т. е. нельзя выделить подмножество собственных вершин граней, которое является интервально независимым и протыкающим. Если кратчайший комплекс не является минимальным, то может выполняться условие (i) и не выполняться условие (ii).

Если неприводимые комплексы граней удовлетворяют условиям (i) и (iii) теоремы 1 и множества их вершин являются различными компонентами связности в единичном кубе, то объединение комплексов является Λ_π-минимальным комплексом граней. Следовательно, для симметрической функции любой L-минимальный комплекс является Λ_π-минимальным и

$$\log \mu_{\cap\Lambda_\pi}(n) \gtrsim \log M_{\cap\Lambda_\pi}(n) \gtrsim \sqrt{2/\pi}\,\sqrt{n}\,2^n.$$

Множества ядровых комплексов граней, Λ_π-минимальных комплексов граней и минимальных комплексов граней для любой меры сложности в единичном кубе B^n обозначим через $\mathscr{M}^n_{\mathrm{ker}}$, $\mathscr{M}^n_{\cap\Lambda_\pi}$ и $\mathscr{M}^n_{\cap\Lambda}$ соответственно.

Ядровой комплекс граней является единственным тупиковым комплексом для функции, определяемой этим комплексом. Применением операций уменьшения ранга и удаления граней любой не тупиковый $\mathscr{L}$-минимальный комплекс такой функции может быть преобразован в этот ядровой комплекс. Поэтому $\mathscr{M}^n_{\mathrm{ker}} \subseteq \mathscr{M}^n_{\cap\Lambda} \subseteq \mathscr{M}^n_{\cap\Lambda_\pi}$.

Теорема 2. *$\mathscr{M}^n_{\mathrm{ker}} \subset \mathscr{M}^n_{\cap\Lambda} \subset \mathscr{M}^n_{\cap\Lambda_\pi}$ и $\mu_{\cap\Lambda}(n) \geqslant \binom{n-2}{\left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor}$ при $n \geqslant 4$.*

Соотношение $\mathscr{M}^n_{\mathrm{ker}} \subset \mathscr{M}^n_{\cap\Lambda}$ означает существование не ядровых комплексов граней минимальных для любой меры сложности.

Соотношение $\mathscr{M}^n_{\cap\Lambda} \subset \mathscr{M}^n_{\cap\Lambda_\pi}$ означает, во-первых, существование меры сложности, которая не входит в класс Λ_π, и, во-вторых, существование Λ_π-минимального комплекса, который не является минимальным для такой меры сложности.

§ 2. Вероятностные методы получения оценок

Существенного улучшения нижних оценок $\tau(n)$ и $\mu(n)$ удалось добиться после отказа от построения и исследования свойств конкретных функций и перехода к *построению множеств тупиковых и минимальных комплексов граней* в кубе B^n.

Из известных нижних оценок следует, что $\log|P_n| = 2^n$ является величиной $o\left(\log\tau(n)\right)$ и $o\left(\log\mu(n)\right)$. Соответственно из соотношений

$$T(n)/|P_n| \leqslant \tau(n) \leqslant T(n)\,,\ \ M(n)/|P_n| \leqslant \mu(n) \leqslant M(n)$$

следует, что $\log\tau(n) \sim \log T(n)$ и $\log\mu(n) \sim \log M(n)$ при $n \to \infty$. Это означает эквивалентность с точностью до асимптотики логарифма задач (i) о максимальном числе тупиковых или минимальных комплексов булевой функции n переменных и (ii) о числе тупиковых или минимальных комплексов в кубе B^n.

Отметим, что мощность множества комплексов различных граней в кубе B^n не превосходит $2^{o(n2^n)}$, если в комплексах множества: либо число граней равно $o\left(2^n\right)$, либо число граней равно $\Theta\left(2^n\right)$ и все грани размерности $o(n)$. Следовательно, существование тупиковых, кратчайших или минимальных комплексов граней, которые содержат порядка 2^n граней размерности порядка n в единичном кубе B^n, является *необходимым условием* для получения соответствующей нижней оценки по порядку логарифма, равной $n2^n$.

Метод построения тупиковых комплексов граней [18].

Идея метода основана на обобщении доказательства существования такого тупикового комплекса T пояса $S = S^n_{m-k,m}$, что $l(T) \sim |S|$ при $k \leqslant \Theta\left(\log\log n/\log\log\log n\right)$ и $\frac{1}{4}n \leqslant m-k < m \leqslant \frac{3}{4}n$ [2].

Грань минимальной размерности единичного куба, которая содержит вершины $\widetilde{x}$ и $\widetilde{y}$, обозначим через $I\left(\widetilde{x}, \widetilde{y}\right)$.

Для множеств $A \subset S \subset B^n$ и вершин, содержащихся в гранях допустимых для S и пересекающихся с A, определим два множества.

Множество (A, S)-внутренних вершин $W(A, S)$ содержит вершины $\widetilde{x} \in S$, для которых существует такая вершина $\widetilde{\alpha} \in A$, что грань $I(\widetilde{x}, \widetilde{\alpha})$ является *допустимой, но не максимальной* для множества S.

Множество (A, S)-граничных вершин $G(A, S)$ содержит вершины $\widetilde{x} \in S$, для которых грань $I(\widetilde{\alpha}, \widetilde{x})$ для любой вершины $\widetilde{\alpha} \in A$ является *либо максимальной, либо недопустимой* для множества S.

Обозначим через $\mathcal{T}(S, A)$ множество комплексов граней, в которых для каждой (A, S)-граничной вершины $\widetilde{x}$ в комплекс включается грань $I(\widetilde{x}, \widetilde{\alpha})$ для такой одной вершины $\widetilde{\alpha} \in A$, что $I(\widetilde{x}, \widetilde{\alpha})$ является максимальной гранью для S.

Лемма 1. *Для множеств вершин $A \subset S \subset B^n$ любой комплекс граней $T \in \mathcal{T}(S, A)$ является тупиковым, и для грани $I(\widetilde{x}, \widetilde{\alpha}) \in T$ вершина $\widetilde{x} \in G(A, S)$ является собственной.*

Теорема 3. *Существует $A_\lambda \subset S^n_{m-k,m}$ и такой тупиковый комплекс граней $T \in \mathcal{T}\left(S^n_{m-k,m}, A_\lambda\right)$, что*

$$\left|S^n_{m-k,m}\right| \left(1 - e^{-\lambda}\right) \left(1 - \frac{\lambda k}{m - 2k}\right) \lesssim l(T) < \left|S^n_{m-k,m}\right|,$$

где $\varepsilon n \leqslant m \leqslant \frac{n}{2}$, $k \leqslant \frac{m}{2}(1 - \varepsilon)$, $\varepsilon < \lambda < \min\left\{\frac{m}{k} - 2 - \varepsilon, o(n)\right\}$ для некоторого $\varepsilon > 0$.

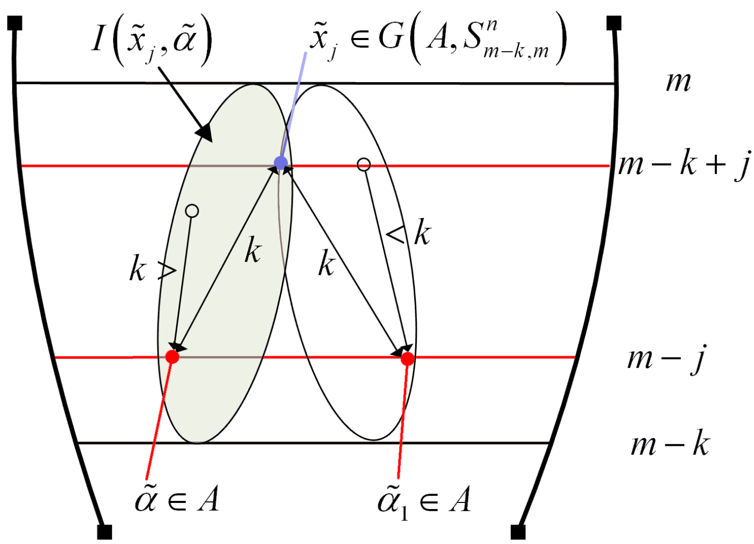

Рис. 1. Построение тупикового комплекса граней в поясе

Множество тупиковых комплексов в поясе $S^n_{m-k,m}$ образуется из пучков граней, которые получаются сечением по слою $m-k$ граней тупикового комплекса из пояса $S^n_{m-k_0,m}$, имеющих собственные вершины в поясе $S^n_{m-p,m}$, где $p < k < k_0$.

Метод построения ядровых комплексов граней [19].

Для множества вершин $A \subset B^n$ определим множество простых k-граничных вершин $G_k(A)$, которое содержит такие вершины $\widetilde{x} \in B^n$, что $\rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{x}) \geqslant k$ для любой вершины $\widetilde{\alpha} \in A$, и существует единственная вершина $\widetilde{\alpha} \in A$, обозначаемая через $\widetilde{\varphi}_{A,k}(\widetilde{x})$, для которой $\rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{x}) = k$.

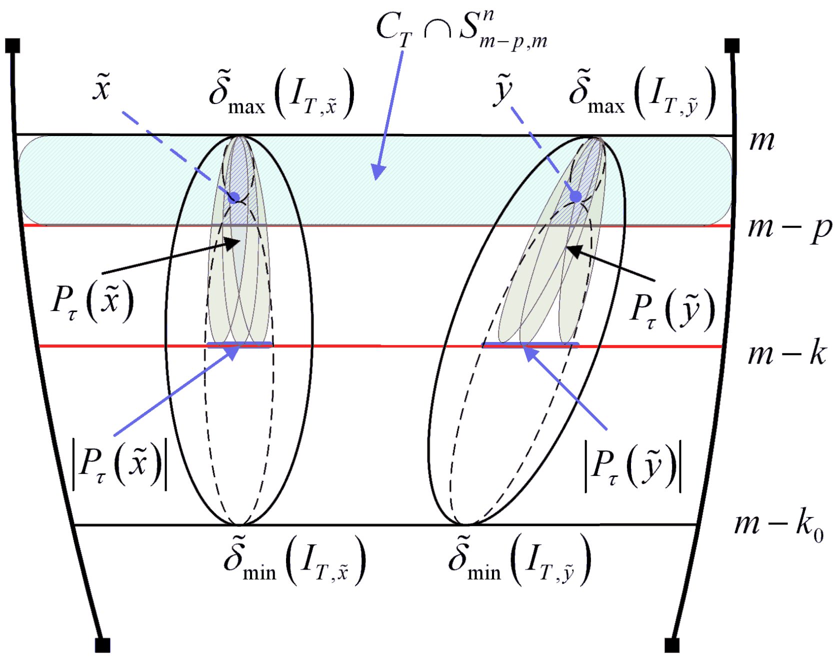

Рис. 2. Построение множества тупиковых комплексов граней в поясе

Будем говорить, что множество состоит из *изолированных* вершин, если в нем нет соседних вершин.

Лемма 2. *Для множества вершин $A \subset B^n$ и подмножества изолированных простых k-граничных вершин $G \subset G_k(A)$ ядровым является комплекс граней, в котором для каждой вершины $\widetilde{x} \in G$ в комплекс включается грань $I(\widetilde{x}, \widetilde{\alpha})$ для вершины $\widetilde{\alpha} = \widetilde{\varphi}_{A,k}(\widetilde{x}) \in A$. Вершина $\widetilde{x}$ является собственной для грани $I(\widetilde{x}, \widetilde{\alpha})$ в таком ядровом комплексе.*

Задача о максимальном числе k-мерных граней в ядровом комплексе сводится к доказательству существования множества вершин $A \subset B^n$, для которого число изолированных простых k-граничных вершин сравнимо с мощностью куба. Для этого используется вероятностный метод, основанный на случайном выборе вершин множества A и оптимизации при подборе параметров для двух способов получения изолированных вершин.

Теорема 4. *Для $1 \leqslant k < \frac{n}{2} - \eta(n)$, где $\eta(n)/\sqrt{n} \to \infty$ при $n \to \infty$, существуют множество $A \subset B^n$ и ядровой комплекс k-мерных граней M, построенный по множеству изолированных простых k-граничных вершин $G \subset G_k(A)$, для которого*

$$l(M) \gtrsim \frac{2^{n-1}}{e}\varphi_c\left(\frac{k}{n}\right), \quad \text{где } \varphi_c(x) = \frac{1-2x}{1-x}\max\left\{1, \frac{2x}{1-x}\right\}.$$

Множество Λ_π-минимальных комплексов граней образуется из пучков граней, которые получаются сечением по слоям $r - \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor$ и $r + \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil$ граней ядрового комплекса k_0-мерных граней, имеющих собственные вершины в поясе $S^n_{r-p,r+p}$, где $2p < k < k_0$ и $r = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

Для получения высоких нижних оценок подбор параметров выполняется с использованием методов нелинейного программирования.

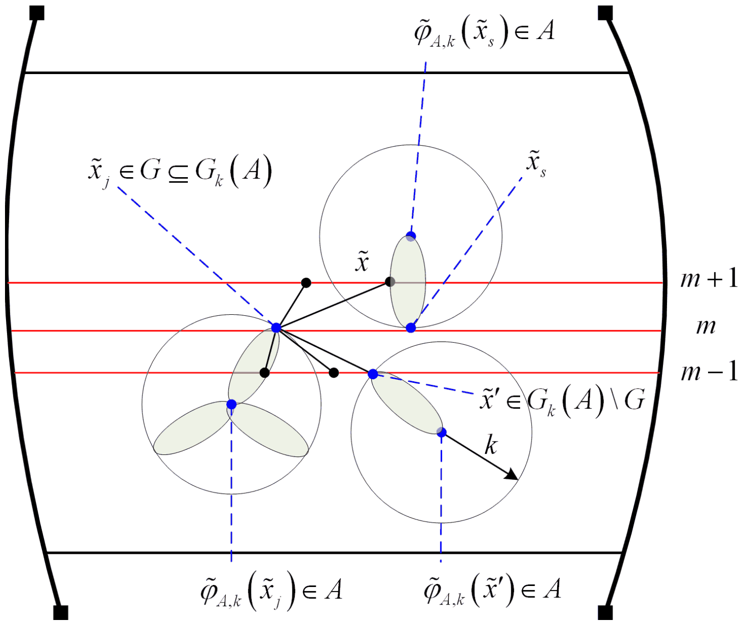

Рис. 3. Построение ядрового комплекса граней

§ 3. Оценки максимальных значений

Тупиковые комплексы граней [18]. Доказано существование тупиковых комплексов k-мерных граней с числом граней порядка 2^n при $k \leqslant \frac{n}{2}(1-\varepsilon)$ и асимптотически равном 2^n при $k = o(n)$.

Для числа тупиковых комплексов граней в кубе B^n и для максимального числа тупиковых комплексов граней функции n переменных получен порядок логарифма равный $n2^n$ с константой в нижней оценке, которая больше $1{,}355 \cdot 2^{-5}$. Нижние оценки достигаются на множестве тупиковых комплексов граней $\mathscr{T}^n_{m-k,m}$ и множестве функций $\mathscr{F}^n_{m-k,m}$, которые содержат только максимальные k-мерные грани пояса $S^n_{m-k,m}$.

Ядровые и кратчайшие комплексы граней [19]. Доказано существование ядровых комплексов k-мерных граней с числом граней порядка 2^n при $1 \leqslant k \leqslant \frac{n}{2}(1-\varepsilon)$.

Число кратчайших комплексов k-мерных граней совпадает по порядку логарифма с общим числом комплексов, которые состоят из не более 2^{n-1} различных k-мерных граней при $1 \leqslant k \leqslant \frac{n}{2}(1-\varepsilon)$.

Для числа кратчайших комплексов граней в кубе B^n и для максимального числа кратчайших комплексов граней функции n переменных получен порядок логарифма равный $n2^n$ с константой в нижней оценке, которая больше $1{,}0614 \cdot 2^{-5}$.

Минимальные комплексы граней [20]. Для комплексов граней размерности не более k число Λ_π-минимальных комплексов и число комплексов из не более 2^{n-1} различных граней совпадают по порядку логарифма при $k \leqslant \frac{n}{2}(1-\varepsilon)$.

Для числа Λ_π-минимальных комплексов граней в кубе B^n и для максимального числа Λ_π-минимальных комплексов граней функции n переменных

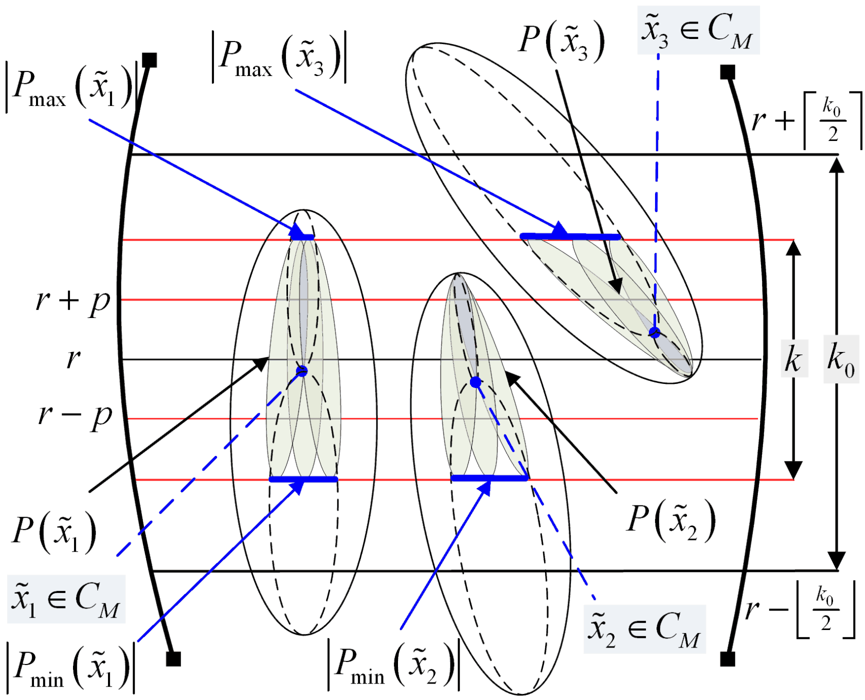

Рис. 4. Построение множества Λ_π-минимальных комплексов граней

получен порядок логарифма, равный $n2^n$, с константой в нижней оценке, которая больше $0{,}5307 \cdot 2^{-5}$.

Мощность множества функций, для которых число Λ_π-минимальных комплексов равно по порядку логарифма $n2^n$, совпадает по порядку логарифма с числом функций n переменных.

Отношение числа тупиковых и минимальных комплексов граней [21].

Для получения нижних оценок используются свойства экстремальных функций из множества $\mathscr{F}^n_{m-k,m}$ с большим числом тупиковых комплексов и методы доказательства минимальности комплексов граней для мер сложности из классов $\widetilde{\Lambda}_l$ и $\widetilde{\Lambda}_L$. Эти классы являются расширением классов Λ_l и Λ_L соответственно, при этом исключается требование *строгой монотонности меры сложности* для граней, которые содержат вершину $\widetilde{0}$ или $\widetilde{1}$.

Максимальное значение по порядку логарифма равно $n2^n$:

(i) для отношения числа тупиковых и минимальных комплексов граней функции относительно всех мер сложности класса $\Lambda_\pi \cap \widetilde{\Lambda}_l$;

(ii) для числа тупиковых комплексов граней функции при единственном минимальном комплексе граней функции относительно всех мер сложности класса $\Lambda_\pi \cap \widetilde{\Lambda}_L$.

Мощности множеств функций по порядку логарифма равны 2^n, т. е. числу функций n переменных, для которых значение по порядку логарифма равно $n2^n$ для одного из параметров:

(i) число тупиковых комплексов,

(ii) отношение числа тупиковых и минимальных комплексов относительно всех мер сложности класса $\Lambda_\pi \cap \widetilde{\Lambda}_l$,

(iii) число тупиковых комплексов при единственном минимальном комплексе относительно всех мер сложности класса $\Lambda_\pi \cap \widetilde{\Lambda}_L$.

§ 4. Оценки типичных значений [23]

Обозначим через $\widetilde{P}_n$ подмножество почти всех функций из P_n, которые при $k_0 = \lceil \log n \rceil$, $k_1 = \lceil \log\log n + \log\log\log n \rceil$ и $k_2 = \lfloor \log\log n \rfloor$ обладают свойствами 1–5:

1. Нет допустимых граней размерности более k_0 [6].

2. Число допустимых граней $g(f) = 2^n n^{\log\log n(1+o(1))}$, почти все допустимые грани функции имеют размерность k_2 или k_2+1, $|N_f| \sim 2^{n-1}$ и допустимые грани функции размерности больше k_1 содержат не более $2^n n^{-\log\log n(1-o(1))}$ вершин функции [3].

3. Число максимальных граней $s(f) = 2^n n^{\log\log n(1+o(1))}$, почти все максимальные грани функции имеют размерность k_2 или k_2+1 и почти все k-мерные допустимые грани функции являются максимальными при $k_2 < k \leqslant k_0$ [16].

4. $l_L(f) \sim l(f)$ и $L_l(f) \sim L(f) \sim n\, l(f)$, т. е. длина минимальных и кратчайших комплексов граней, сложность минимальных и кратчайших комплексов граней асимптотически равны [9].

5. $l(f) \sim \bar{l}(n)$, где $\bar{l}(n)$ — среднее значение длины кратчайшего комплекса граней функции [14, с. 94].

Оценкам длины кратчайших ДНФ для почти всех функций были посвящены работы В. В. Глаголева, Р. Г. Нигматуллина, А. А. Сапоженко, А. Д. Коршунова, С. Е. Кузнецова, А. Е. Андреева, Н. Пиппенджера. Наилучшие известные результаты следующие:

$$l(f) \sim \bar{l}(n) = \bar{c}_n 2^n/\log n \log\log n,$$

где $1 \leqslant \bar{c}_n$ [11] и $\bar{c}_n \leqslant 1.5$ [1] или $\bar{c}_n \leqslant \omega(n)$ [32], при этом функция $\omega(n)$ зависит от *дробной части* $\log\log n + \log\log\log n$ и колеблется между 1,38826... и 1,54169... в зависимости от n.

Мощностная верхняя оценка $\mu_{\mathscr{L}}(f)$ при $l_{\mathscr{L}}(f) < g(f)/2$ имеет вид

$$\log \mu_{\mathscr{L}}(f) \leqslant \log \sum_{i=l(f)}^{l_{\mathscr{L}}(f)} \binom{g(f)}{i} < l_{\mathscr{L}}(f) \log \frac{e\, g(f)}{l_{\mathscr{L}}(f)}.$$

Следовательно, для кратчайших и минимальных комплексов почти всех булевых функций выполняется $\log \mu(f) \lesssim \bar{c}_n 2^n$.

Идея улучшения верхней оценки для кратчайших комплексов граней основана на сравнении этой оценки с мощностью множества кратчайших комплексов граней функций из множества $\widetilde{P}_n$ [23]. Это множество, которое обозначим через $\mathscr{M}_l^n$, содержит комплексы граней, состоящие из не более $m \sim \bar{l}(n)$ различных граней размерности не более $k \sim \log\log n$ и $o\left(\dfrac{2^n}{n}\right)$ граней большей размерности, но не более $k_0 = \lceil \log n \rceil$. Оказывается, что общее число комплексов граней с такими характеристиками с точностью до асимптотики логарифма не превосходит $\bar{c}_n 2^n$. Тогда, в силу неравенства

Маркова, число кратчайших комплексов граней функций из $\widetilde{P}_n$ не может по порядку логарифма превосходить среднего значения, т. е. $2^{-2^n}\left|\mathcal{M}_l^n\right|$. Поэтому с точностью до асимптотики логарифма возможно улучшение верхней оценки до величины $\log\left|\mathcal{M}_l^n\right| - 2^n \lesssim \left(\bar{c}_n - 1\right)2^n$, что существенно меньше числа функций n переменных.

Теорема 5. *Если $l_{\mathscr{L}}(f) \sim l(f)$ для почти всех функций из P_n, то*

$$\log \mu_{\mathscr{L}}(f) \lesssim \left(\bar{c}_n - 1\right)2^n$$

при $n \to \infty$, где $\bar{c}_n$ определяется из соотношения для среднего значения длины кратчайшего комплекса граней типичной булевой функции $\bar{l}(n) = \bar{c}_n 2^n/\log n \log\log n$.

Тогда для почти всех функций $\log \mu_l(f) \lesssim 2^{n-1}$ и $\log \mu_{\mathscr{L}}(f) \lesssim 2^{n-1}$, если $l_{\mathscr{L}}(f) \sim l(f)$, так как $\bar{c}_n \leqslant 1{,}5$ [1].

При определенных предположениях для аддитивных мер сложности асимптотически совпадают длины $\mathscr{L}$-минимальных и кратчайших комплексов для почти всех функций.

Теорема 6. *Для почти всех функций $l_{\mathscr{L}}(f) \sim l(f)$ при $n \to \infty$ для аддитивной меры сложности $\mathscr{L} \not\equiv 0$, если в единичном кубе B^n:*

(i) максимальная $\mathscr{L}$-сложность граней ограничена полиномом от n,

(ii) грани размерности не более $k_0 = \lceil \log n \rceil$ и содержащиеся в средних слоях куба ширины $\Theta\left(\sqrt{n}\log n\right)$ имеют асимптотически одинаковую $\mathscr{L}$-сложность.

Следствие 1. *Если для аддитивной меры сложности функционал имеет вид $L_q(I) = q\left(L_0(I), L_1(I)\right)$, где $q(x,y)$ — полином двух переменных и I — грань куба, то для почти всех функций $l_{L_q}(f) \sim l(f)$ и $\log \mu_{L_q}(f) \lesssim \left(\bar{c}_n - 1\right)2^n$.*

§ 5. О минимизации одного множества булевых функций [24]

Обозначим через $\mathscr{F}_{n,\mathscr{L}}$ множество функций n переменных, которые для аддитивной меры сложности $\mathscr{L}$ обладают следующими свойствами: (i) множество единичных вершин функции является одной связной компонентой, (ii) множества тупиковых кратчайших и минимальных комплексов граней не пересекаются и (iii) длина кратчайших комплексов $l(f)$ равна мощности максимального интервально независимого множества вершин функции $m(f)$.

Для функции $f \in \mathscr{F}_{n,\mathscr{L}}$ в любом $\mathscr{L}$-минимальном комплексе граней нельзя выбрать интервально независимое множество собственных вершин из различных граней, так как он не является кратчайшим, т. е. число граней в комплексе больше $l(f) = m(f)$. Соответственно для таких функций не применимы независимая минимизация для компонент связности и достаточные условия минимальности, основанные на интервально независимых множествах, позволяющие при минимизации сократить трудоемкость и исключить перебор всех минимальных комплексов граней. Задача заключается в получении нижних оценок $\left|\mathscr{F}_{n,\mathscr{L}}\right|$ и $\mu\left(\mathscr{F}_{n,\mathscr{L}}\right)$ — мощности и максимального числа $\mathscr{L}$-минимальных комплексов граней для функций множества $\mathscr{F}_{n,\mathscr{L}}$.

Для построения функций множества $\mathscr{F}_{n,\mathscr{L}}$ выполняется преобразование функции s переменных в функцию n переменных, для которой можно описать все тупиковые комплексы граней и получить для них сравнительные оценки сложности. При преобразовании:

(i) каждая максимальная грань исходной функции преобразуется в пучок изоморфных максимальных граней функции $n-2$ переменных;

(ii) добавлением одномерных ядровых граней в двух новых измерениях, которые содержат все вершины функции $n-2$ переменных, за исключением вершин исходной функции s переменных в фиксированной грани.

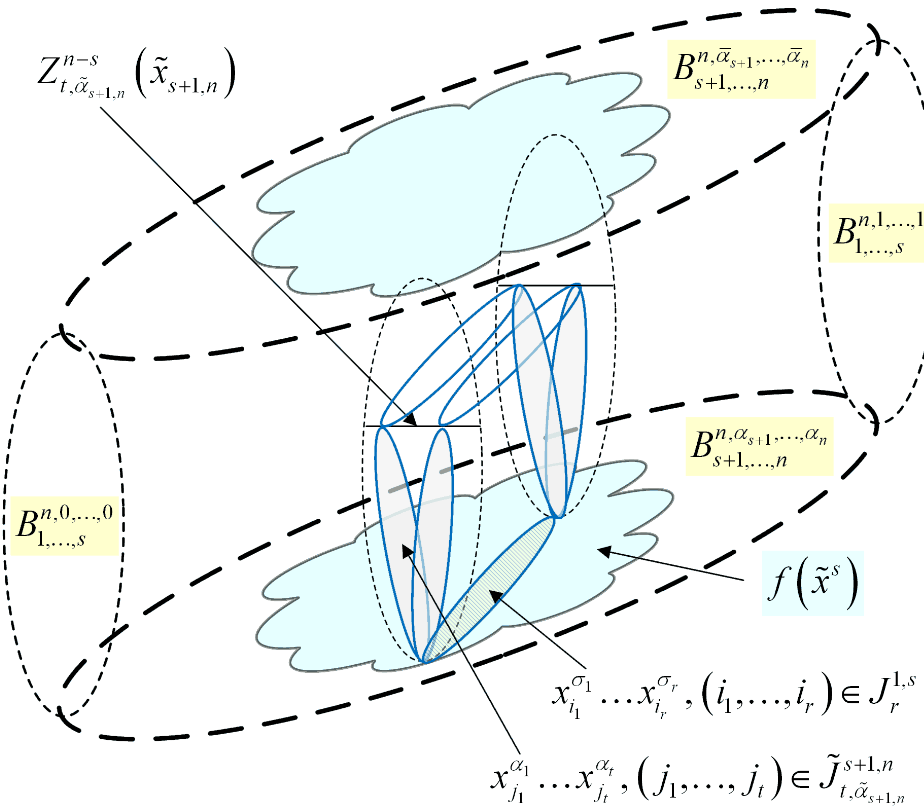

Рис. 5. Построение функции из множества $\mathscr{F}_{n,\mathscr{L}}$

При специальном выборе параметров и выполнении определенных условий для $\mathscr{L}$-сложности граней различного ранга получаются функции из множества $\mathscr{F}_{n,\mathscr{L}}$. У такой функции будет единственный тупиковый кратчайший комплекс граней, $\mathscr{L}$-сложность которого больше, чем остальных тупиковых, и в том числе $\mathscr{L}$-минимальных комплексов граней. К построенным функциям неприменимы достаточные условия минимальности теоремы 1 и доказательство следующей теоремы является неконструктивным.

Теорема 7. *Если для функции $f \in P_s$ и параметров s, t и булева вектора $\widetilde{\alpha}_{s+1,n} = (\alpha_{s+1}, \ldots, \alpha_n)$ для аддитивной меры сложности $\mathscr{L}$ выполняется: $l(f) > 1$ и $l_T^{\max}(f)\,\mathscr{L}^{\max}_{s+t+2} < \mathscr{L}^{\max}_{n-s} = \mathscr{L}\left(B^{n,\alpha_{s+1},\ldots,\alpha_n}_{s+1,\ldots,n}\right)$, то*

$$\log \mu\left(\mathscr{F}_{n,\mathscr{L}}\right) \geqslant l(f) \log |\mathscr{I}|\,,\ \ \log |\mathscr{F}_{n,\mathscr{L}}| \geqslant k(f)\left(|\mathscr{I}| - 1\right),$$

где $\mathscr{L}_r^{\max}$ *— максимальная* $\mathscr{L}$*-сложность грани ранга* r*;* $k(f)$, $l(f)$, $l_T^{\max}(f)$ *— число компонент связности, длина кратчайшего и максимальная длина тупикового комплексов граней функции* f*;* $|\mathscr{I}|$ *— максимальная мощность пучка изоморфных граней* $\mathscr{I}$*, которые имеют ранг* t *и содержат вершину* $(\alpha_{s+1}, \ldots, \alpha_{n-2})$ *в кубе* B^{n-s-2}.

Аддитивная мера сложности $\mathscr{L}$ называется *линейной*, если выполняется $\mathscr{L}(I) = aL_0(I) + bL_1(I)$ для любой грани I, где $a, b \geqslant 0$ и $\max\{a, b\} > 0$.

Аддитивная мера сложности $\mathscr{L}$ называется *полиномиальной*, если выполняется $\mathscr{L}(I) = q(L_0(I), L_1(I))$ для любой грани I, где $q(x, y)$ — многочлен не ниже 2-й степени с положительными коэффициентами.

Т е о р е м а 8. *Для аддитивной линейной меры сложности* $\mathscr{L}$ *выполняются соотношения:*

$$\log \mu\left(\mathscr{F}_{n,\mathscr{L}}\right) \gtrsim n \log n, \ \log |\mathscr{F}_{n,\mathscr{L}}| \geqslant \Theta\left(2^n/\sqrt{n}\right).$$

Для аддитивной меры полиномиальной сложности $\mathscr{L}$ *выполняются соотношения:*

$$\log \mu\left(\mathscr{F}_{n,\mathscr{L}}\right) \geqslant \left(\mathscr{L}_n^{\max}\right)^{1-o(1)} \log n, \ \log |\mathscr{F}_{n,\mathscr{L}}| \geqslant \Theta\left(2^n/n^{3/2}\right).$$

§ 6. Независимые семейства множеств в задаче о покрытии [25]

Комбинаторная постановка задачи о покрытии конечного множества заключается в нахождении семейства допустимых подмножеств минимальной сложности, которое содержит все элементы множества.

Системой множеств называется пара $\langle X, Y\rangle$, где X — конечное множество элементов и $Y \subseteq 2^X$ — *семейство* различных множеств.

Множество элементов X, которые содержатся в произвольном семействе множеств $S \subseteq Y$, обозначим через X_S. Будем говорить, что семейство S *покрывает* множество элементов X_S.

Покрытием для системы множеств $\langle X, Y\rangle$ называется любое семейство $S \subseteq Y$, которое содержит все элементы X. Для существования покрытия семейство Y должно содержать все элементы X.

Сложность произвольного семейства множеств $S \subseteq Y$ определяется неотрицательным аддитивным функционалом $C\colon Y \to R^+$, который задает сложность множеств из Y, и соотношением $C(S) = \sum_{y \in S} C(y)$, определяющим сложность семейства S.

Стандартная задача о покрытии $Z = \langle X, Y, C\rangle$ заключается в нахождении семейства $S \subseteq Y$, которое является покрытием X и имеет минимальную сложность $C(S)$. Сложность минимального покрытия в задаче $Z = \langle X, Y, C\rangle$ обозначим через $C(X, Y)$.

Если сложность любого множества равна 1, то функционал сложности называется *длиной* и обозначается через l.

Различные оптимизационные задачи для дискретных структур могут быть сформулированы как задачи о покрытии обобщенного вида. При этом может требоваться покрыть заданное подмножество элементов, а система множеств и функционал сложности могут удовлетворять ограничениям, которые порождаются свойствами структур. Следующие задачи обобщенного вида могут быть сведены к стандартной задаче о покрытии множества.

(i) Задача $Z_A = \langle A, X, Y, C\rangle$, где $A \subset X$, заключается в нахождении семейства $S \subseteq Y$ минимальной сложности, которое *покрывает* A, т. е. $A = X_S$.

(ii) Задача $\widetilde{Z}_A = \langle A, X, Y, C\rangle$, где $A \subset X$, заключается в нахождении семейства $S \subseteq Y$ минимальной сложности, которое *содержит* A, т. е. $A \subseteq X_S$.

(iii) Задача $\widetilde{Z}_{A,B} = \langle A, B, X, Y, C\rangle$, где $A \subset X$, $B \subset X$ и $A \cap B$ — пусто, заключается в нахождении семейства $S \subseteq Y$ минимальной сложности, для которого $A \subseteq X_S \subseteq A \cup B$.

Задача минимизации булевых функций относительно аддитивной меры сложности $\mathscr{L}$ в геометрической интерпретации является задачей о покрытии для системы множеств $\langle B^n, G^n\rangle$, где B^n — множество вершин, G^n — множество граней n-мерного единичного куба.

Задаче минимизации всюду определенной булевой функции соответствует задача $Z_A = \langle N_f, B^n, G^n, \mathscr{L}\rangle$, а частично определенной булевой функции соответствует задача $\widetilde{Z}_{A,B} = \left\langle N_f, N_{\tilde{f}}, B^n, G^n, \mathscr{L}\right\rangle$, где $A = N_f$ и $B = N_{\tilde{f}}$ — множества единичных и неопределенных вершин функции f в кубе B^n соответственно.

Предлагаемый метод получения нижних оценок длины и сложности минимальных покрытий основан на обобщении понятия независимого множества элементов.

Определение. *Независимым семейством множеств* для системы множеств $\langle X, Y\rangle$ называется семейство $\mathscr{A} = \{A \mid A \subset X\}$, если любое множество $y \in Y$ пересекается не более чем с одним множеством $A \in \mathscr{A}$.

Независимое множество элементов является частным случаем независимого семейства множеств, в котором каждое множество состоит из одного элемента. Независимыми семействами множеств являются семейства, которые соответствуют компонентам связности или состоят из двух множеств: собственных элементов всех ядровых множеств и элементов, не содержащихся в ядровых множествах.

Лемма 3. *Если $\mathscr{A}$ является независимым семейством для системы множеств $\langle X, Y\rangle$, то для любого аддитивного функционала сложности C выполняется*

$$C(X, Y) \geqslant \sum_{A \in \mathscr{A}} \widetilde{C}(A, X, Y),$$

где $\widetilde{C}(A, X, Y)$ — сложность минимального покрытия для задачи $\widetilde{Z}_A$.

Независимое семейство множеств может быть представлено в виде объединения независимого множества элементов, возможно пустого, и независимого семейства множеств среди которых нет независимых множеств элементов.

Теорема 9. *Если $\{Q\} \cup \mathscr{A}$ является независимым семейством для системы множеств $\langle X, Y\rangle$, где Q — независимое множество и в семействе $\mathscr{A}$ нет независимых множеств, то для длины и аддитивного функционала сложности C выполняется*

$$l(X, Y) \geqslant |Q| + \sum_{A \in \mathscr{A}} \tilde{l}_{X,Y,A}, \quad C(X, Y) \geqslant \sum_{x \in Q} \widetilde{C}_{X,Y,\{x\}} + \sum_{A \in \mathscr{A}} \widetilde{C}_{X,Y,A},$$

где $\tilde{l}_{X,Y,A} = \lceil |A| / \Delta_{X,Y,A}\rceil$ и $\Delta_{X,Y,A}$ — максимальное число элементов множества A, которые содержатся в одном множестве семейства Y;

$\widetilde{C}_{X,Y,A}$ — сложность $\widetilde{l}_{X,Y,A}$ множеств из Y, которые пересекаются с множеством A и имеют меньшую сложность.

Оценки теоремы 9, в случае их достижимости, являются *достаточными условиями минимальности* покрытия и используются при доказательстве следующей теоремы.

Теорема 10. *Для задачи минимизации булевых функций*

(i) при $n \leqslant 3$ для всех функций длина кратчайшего покрытия совпадает с максимальной мощностью интервально независимого множества;

(ii) при $n \geqslant 5$ существуют функции, для которых длина кратчайшего покрытия больше максимальной мощности интервально независимого множества.

Используемые в доказательстве теоремы 10 подходы неприменимы для случая $n = 4$, а трудоемкость выполнения полного перебора оказывается значительной и требует разработки обоснованных методов его сокращения.

Заключение

Многие открытые проблемы в задаче минимизации булевых функций связаны с невозможностью универсальных и эффективных методов обоснования минимальности.

Существование мощных классов функций с экстремальными значениями характеристик, которые зависят от числа минимальных комплексов граней функции, доказано для классов мер сложности. Этот результат позволяет сделать вывод, что проблемы минимизации экстремальных булевых функций определяются свойствами области, на которой минимизируется функционал меры сложности, а не его свойствами.

Существование гипотезы о достижимости значений $\tau(n)$ и $\mu(n)$ на симметрических функциях объясняется тем, что это верно при небольших значениях n, а известные нижние оценки, превосходят оценки для симметрических функций при $n > 256$. При этом построение функций с экстремальным числом минимальных комплексов граней возможно при числе переменных больше 30 и для их минимизации практически не применимы точные алгоритмы, а для приближенных алгоритмов представляются необоснованными используемые эвристики.

Достаточные условия минимальности для задачи о покрытии множества, которые основаны на независимых семействах множеств, предоставляют возможность для построения и изучения сложных для минимизации булевых функций, к которым применимы такие условия. Открытым является вопрос об эффективных алгоритмических подходах, которые могут быть использованы для построения независимого семейства множеств и применения таких достаточных условий минимальности. При этом естественным является вопрос о возможности или невозможности такой ситуации для системы множеств, при которой длина кратчайшего покрытия превосходит нижнюю оценку, вычисляемую по любому независимому семейству множеств.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андреев А. Е. Об одной модификации градиентного алгоритма // Вестник МГУ. Серия 1. Математика. Механика. — 1985. — № 3. — С. 29–35.
2. Глаголев В. В. О длине тупиковой дизъюнктивной нормальной формы // Математические заметки. — 1967. — Т. 2, № 6. — С. 665–672.
3. Глаголев В. В. Некоторые оценки дизъюнктивных нормальных форм функций алгебры логики // Проблемы кибернетики. Вып. 19. — М.: Наука, 1967 — С. 75–94.
4. Дискретная математика и математические вопросы кибернетики. Т. I. / Под ред. С. В. Яблонского и О. Б. Лупанова. — М.: Наука, 1974.
5. Еремеев А. В., Заозерская Л. А., Колоколов А. А. Задача о покрытии: сложность, алгоритмы, экспериментальные исследования // Дискретный анализ и исследование операций. Серия 2. — 2000. — Т. 7, № 2. — С. 22–46.
6. Журавлев Ю. И. Оценка для числа тупиковых д.н.ф. функций алгебры логики // Сибирский математический журнал. — 1962. — Т. 3, № 5. — С. 802–804.
7. Журавлев Ю. И. Теоретико-множественные методы в алгебре логики // Проблемы кибернетики. Вып. 8. — М.: Физматгиз, 1962. — С. 5–44.
8. Забиняко Г. И. Реализация алгоритмов решения задачи о покрытии множеств и анализ их эффективности // Вычислительные технологии. — 2007. — Т. 12, № 6. — С. 50–58.
9. Коршунов А. Д. Сравнение сложности длиннейших и кратчайших д.н.ф. и нижняя оценка числа тупиковых д.н.ф. для почти всех булевых функций // Кибернетика. — 1969. — Т. 4. — С. 1–11.
10. Кудрявцев В. Б., Андреев А. Е. О сложности алгоритмов // Фундаментальная и прикладная математика. — 2009. — Т. 15, № 3. — С. 135–169.
11. Кузнецов С. Е. О нижней оценке длины кратчайшей д.н.ф. почти всех булевых функций // Вероятностные методы и кибернетика. — Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1983. — № 19. — С. 44–47.
12. Леонтьев В. К. Дискретная оптимизация // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2007. — 47, № 2. — С. 338–352.
13. Максимов Ю. В. Реализация булевых функций с ограниченным числом нулей в классе дизъюнктивных нормальных форм // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2013. — Т. 53, № 9. — С. 1569–1588.
14. Нигматуллин Р. Г. Сложность булевых функций. — М.: Наука, 1991.
15. Панов А. В. Алгоритмы, использующие окрестности первого порядка для минимизации булевых функций // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2013. — Т. 53, № 9. — С. 1589–1600.
16. Сапоженко А. А. Дизъюнктивные нормальные формы. — М.: Издательство МГУ, 1975.
17. Сапоженко А. А., Чухров И. П. Минимизация булевых функций в классе дизъюнктивных нормальных форм // Итоги науки и техники. Серия «Теория вероятности. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика». — 1987. — Т. 25. — С. 68–116.
18. Чухров И. П. О тупиковых комплексах граней в единичном кубе // Дискретная математика. — 2011. — Т. 23, № 1. — С. 132–158.
19. Чухров И. П. О ядровых и кратчайших комплексах граней в единичном кубе // Дискретный анализ и исследование операций. — 2011. — Т. 18, № 2. — С. 75–94.
20. Чухров И. П. О соотношении тупиковых и минимальных комплексов граней в единичном кубе // Дискретная математика. — 2012. — Т. 24, № 2. — С. 46–74.
21. Чухров И. П. О минимальных комплексах граней в единичном кубе // Дискретный анализ и исследование операций. — 2012. — Т. 19, № 3. — С. 79–99.
22. Чухров И. П. О мерах сложности комплексов граней в единичном кубе // Дискретный анализ и исследование операций. — 2013. — Т. 20, № 6. — С. 77–94.
23. Чухров И. П. Минимальные комплексы граней случайной булевой функции // Дискретный анализ и исследование операций. — 2014. — Т. 21, № 5. — С. 76–94.
24. Чухров И. П. О задаче минимизации для одного множества булевых функций // Дискретный анализ и исследование операций. — 2015. — Т. 22, № 3. — С. 75–95.
25. Чухров И. П. О доказательстве минимальности покрытий через обобщение понятия независимости // Дискретный анализ и исследование операций. — 2017. — Т. 24, № 2. — С. 87–106.

26. Яблонский С. В. Функциональные построения в k-значной логике // Сборник статей по математической логике и ее приложениям к некоторым вопросам кибернетики. Тр. МИАН СССР. М.: Изд-во АН СССР. — 1958. — Т. 51. — С. 5–142.
27. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. — М.: Высшая школа, 2003.
28. Al-Shihabi S., Arafeh M., Barghash M. An improved hybrid algorithm for the set covering problem // Computers & Industrial Engineering. — 2015. — V. 85. — P. 328–334.
29. Cook S. A An overview of computational complexity // Communications of the ACM. — 1983. — V. 26, No. 6. — P. 401–408.
30. Coudert O., Sasao T. Two-level logic minimization // Logic synthesis and verification. Norwell, MA, USA: Kluwer Academic Publishers. — 2002. — P. 1–27. (Springer Int. Ser. Eng. Comp. Sci.; V. 654.)
31. Gao C., Yao X., Weise T., Li J. An efficient local search heuristic with row weighting for the unicost set covering problem // European Journal of Operational Research. — 2015. — V. 246, No. 3. — P. 750–761.
32. Pippenger N. The shortest disjunctive normal form of a random Boolean function // Random Structures & Algorithms. — 2003. — V. 22, No. 2. — P. 161–186.
33. Sapkota N., Reilly C. H. Simulating realistic set covering problems with known optimal solutions // Computers & Industrial Engineering. — 2011. — V. 61, No. 1. — P. 39–47.
34. Umans C., Villa T., Sangiovanni-Vincentelli A. L. Complexity of Two-Level Logic Minimization // IEEE Trans. on CAD of Integrated Circuits and Systems. — 2006. — V. 25, No. 7. — P. 1230–1246.
35. Vasko F. J, Lu Y., Zyma K. What is the best greedy-like heuristic for the weighted set covering problem? // Operations Research Letters. — 2016. — V. 44, No. 3. — P. 366–369.

Поступило в редакцию 15 VI 2017