Tôhoku Math J.
43 (1991), 473–500

BOUTS D'UN GROUPE OPÉRANT SUR LA DROITE: 2. APPLICATIONS À LA TOPOLOGIE DES FEUILLETAGES

GAËL MEIGNIEZ

(Received March 5, 1990, revised May 20, 1991)

1. Introduction. Il n'y a que trois géométries sur la droite réelle: les géométries euclidienne, affine et projective. Elles correspondent à trois groupes de Lie de difféomorphismes de la droite: le groupe $\boldsymbol{R}$ des translations; le groupe $GA(1, \boldsymbol{R})$ des homothéties-translations de rapport positif; enfin le revêtement universel $\widetilde{SL}(2, \boldsymbol{R})$ de $PSL(2, \boldsymbol{R})$, opérant sur la droite considérée comme revêtement universel de la droite projective réelle.

Ce travail fait suite à [M2], où nous étudiions les représentations des groupes discrets dans l'un de ces trois groupes. Dans le présent article, les résultats de [M2] sont appliqués à l'étude des feuilletages de codimension 1 des variétés différentielles, dont la structure transverse est modelée sur l'une de ces trois géométries.

A un tel feuilletage est associé un invariant algébrique: la *représentation d'holonomie*. C'est une représentation du groupe fondamental de la variété dans le groupe de Lie correspondant, définie à une conjugaison près au but.

Nous nous proposons d'examiner l'influence des propriétés algébriques de cet invariant sur certaines propriétés topologiques du feuilletage: topologie de l'espace des feuilles, complétude, absence de feuille exceptionnelle....

Avant d'énoncer nos résultats, précisons le cadre dans lequel nous travaillerons.

DÉFINITION. Soient G l'un des trois groupes précédents, et M une variété différentielle connexe de dimension ≥ 3 (qui peut être compacte ou non). On appelle *feuilletage transversalement homogène singulier de M, de groupe G* (par la suite nous dirons en général seulement "feuilletage"), un atlas (maximal):

$$\mathscr{F}=\{(U_i, f_i)\}$$

où (U_i) est un recouvrement ouvert de M et chaque f_i est une fonction réelle différentiable définie sur U_i, à singularités de Morse; tels que sur chaque intersection $U_i \cap U_j$, il existe un élément g_{ij} de G tel que $f_j = g_{ij} \circ f_i$.

Ainsi, nous permettons aux feuilletages d'avoir des points singuliers. Nous exigerons qu'ils soient de type Morse, ce qui n'est en fait pas essentiel, mais constitue un cadre générique et commode. Le plus souvent nous n'exigerons pas que la variété soit compacte. Par contre nous excluons les feuilletages des surfaces (la raison est qu'une surface change de groupe fondamental quand on lui ôte les singularités du feuilletage).

Nos résultats s'appliquent en particulier dans les cadres suivants:

Feuilletages transversalement affines ou transversalement projectifs, non singuliers, des variétés compactes.

Feuilletages transversalement euclidiens, singuliers, des variétés compactes. Ce sont les *1-formes femées singulières*. Ils ont été particulièrement étudiés par Levitt. Dans ce cadre, plusieurs de nos résultats sont analogues à des résultats de [L].

Feuilletages transversalement euclidiens non singuliers des variétés non compactes. L'étude de ces feuilletages a été inaugurée par Imanishi dans [I].

Commençons par une constatation qui semble s'opposer au programme précédent: il est toujours possible de *tourbillonner* un feuilletage transversalement affine (voir [BS]) ou transversalement projectif. Rappelons que cette modification a lieu au voisinage d'une courbe fermée transverse, qu'elle remplace par une composante de Reeb. Cela ajoute au feuilletage une composante de Novikov et donc modifie sévèrement sa topologie, sans modifier sa représentation d'holonomie.

Donc pour lier la topologie d'un feuilletage transversalement homogène à sa représentation d'holonomie, nous devrons en général faire des hypothèses sur sa décomposition en composantes de Novikov.

Toutefois il serait trop restrictif de se limiter à l'étude des feuilletages qui n'ont qu'une composante de Novikov. La proposition 1.1 et les théorèmes 3.6, 2.3 et 3.5 ci-dessous montrent que la bonne classe de feuilletages est la suivante:

DÉFINITION. Un feuilletage d'une variété est *principal* quand il possède une composante de Novikov ouverte relativement à laquelle cette variété est simplement connexe.

Une telle composante est dite *principale*. Nous verrons qu'elle est nécessairement unique si le feuilletage est non dégénéré.

Les feuilletages principaux sont nombreux:

PROPOSITION 2.2. *Pour toute variété compacte M, toute représentation non triviale de son groupe fondamental dans l'un des trois groupes de Lie de difféomorphismes de $\boldsymbol{R}$, est la représentation d'holonomie d'un feuilletage transversalement homogène singulier principal de M.*

Il nous faut rappeler brièvement quelques notions classiques dans l'étude des feuilletages transversalement homogènes (voir par exemple [B]), et introduire quelques notations.

La représentation d'holonomie de $\mathscr{F}$ est notée $H(\mathscr{F})$. Son image est un groupe de difféomorphismes de $\boldsymbol{R}$, noté $\Gamma(\mathscr{F})$ et appelé *groupe d'holonomie*. Les cas où $\Gamma(\mathscr{F})$ a un point fixe global, seront le plus souvent écartés comme *dégénérés*.

Fixons un revêtement normal $\hat{M}$ de M qui *trivialise* $\mathscr{F}$, au sens où la représentation d'holonomie de $\mathscr{F}$ passe au quotient à travers le groupe du revêtement. (Le cas le plus important est le revêtement universel de M, que nous noterons $\tilde{M}$). Relevons $\mathscr{F}$ en un feuilletage $\hat{\mathscr{F}}$ de $\hat{M}$. Les feuilles de $\hat{\mathscr{F}}$ sont les composantes connexes des hypersurfaces de niveau d'une fonction de Morse, dit *application développante de* $\mathscr{F}$:

$$\hat{D}(\mathscr{F}): \hat{M} \to \boldsymbol{R}$$

qui est canoniquement définie, à composition près par un élément de G au but. De plus cette application développante est équivariante pour l'action du groupe de $\hat{M}$ d'une part sur $\hat{M}$ et d'autre part sur la droite réelle, via la représentation d'holonomie.

L'outil principal de notre travail est la notion de *bout* d'un revêtement trivialisant *dans la direction de* la représentation d'holonomie, au sens suivant:

DÉFINITION. L'espace des *bouts* de $\hat{M}$ *dans la direction* $\hat{D}(\mathscr{F})$ est la limite projective:

$$\lim_{t \to +\infty} \pi_0(\hat{D}(\mathscr{F})^{-1}([t, +\infty[))$$

(Il ne s'agit pas des bouts de $\hat{M}$ ou de $\hat{M}/\hat{\mathscr{F}}$ comme espace topologique, au sens de Freudenthal).

Dans cet article, c'est seulement le nombre de bouts qui va nous intéresser. Nous verrons qu'en fait il n'y a que deux cas: ou bien $\hat{M}$ n'a qu'un bout dans la direction $\hat{D}(\mathscr{F})$, ou bien il en a une infinité.

Notre intérêt pour ce nombre de bouts est suscité par sa solidarité avec des propriétés topologiques plus habituelles du feuilletage. Nos deux premiers résultats mettent en évidence cette solidarité, dans le cas du revêtement universel. Noter qu'un feuilletage transversalement homogène est transversalement orienté, et possède un *opposé* qui ne diffère de lui que par l'orientation transverse, et dont l'application développante est $-\hat{D}(\mathscr{F})$.

PROPOSITION 1.1. *Soit $\mathscr{F}$ un feuilletage non dégénéré, principal, d'une variété M. Notons P la composante principale de $\mathscr{F}$, et $\tilde{P}$ l'image inverse de P dans $\tilde{M}$.*
Les propriétés suivantes sont équivalentes:

1. *$\tilde{P}$ n'a qu'un bout dans la direction $\tilde{D}(\mathscr{F})$, ainsi que dans la direction opposée $-\tilde{D}(\mathscr{F})$.*
2. *Tout chemin contenu dans P est homotope dans M (à extrémités fixes) soit à un chemin transverse à $\mathscr{F}$, soit à un chemin tangent à $\mathscr{F}$.*

Considérons maintenant les feuilletages non singuliers en dimension 3.

DÉFINITION. On dit qu'un feuilletage $\mathscr{F}$ d'une variété M est *complet*, quand il existe une variété $\tilde{F}$, et un revêtement de M par $\tilde{F} \times \boldsymbol{R}$, qui envoie les hypersurfaces $\tilde{F} \times \mathrm{c^{te}}$ sur les feuilles de $\mathscr{F}$.

THÉORÈME 4.2. *Soit M une variété compacte de dimension 3. Soit $\mathscr{F}$ un feuilletage de M, non dégénéré, n'ayant qu'une composante de Novikov, non singulier et transverse à ∂M.*

Les propriétés suivantes sont équivalentes:

1. $\tilde{M}$ *n'a qu'un bout dans la direction* $\tilde{D}(\mathscr{F})$, *ainsi que dans la direction opposée* $-\tilde{D}(\mathscr{F})$.
2. $\mathscr{F}$ *est complet.*

Nous déduirons du théorème 4.2 le résultat suivant, qui dit dans quelles conditions une "somme torique" de variétés feuilletées est complète:

THÉORÈME 4.3. *Soit* M *une variété compacte de dimension* 3. *Soit* S *une surface incompressible qui sépare* M *en deux régions* A, B. *Soit* $\mathscr{F}$ *un feuilletage transversalement homogène de* M, *non singulier, et transverse à* S, ∂M *et* ∂S. *Considérons les restrictions* $\mathscr{F}|S$, $\mathscr{F}|A$, $\mathscr{F}|B$.

1. *Si* $\mathscr{F}|S$ *est non dégénéré, alors les conditions suivantes sont équivalentes*:

(i) $\mathscr{F}$ *et* $\mathscr{F}|S$ *sont complets.*

(ii) $\mathscr{F}|A$ *et* $\mathscr{F}|B$ *sont complets.*

2. *Si* $\mathscr{F}|S$ *est dégénéré et n'a qu'une composante de Novikov, et que* $\mathscr{F}|A$ *est non dégénéré et que* B *n'est pas simplement connexe relativement à* S, *alors* $\mathscr{F}$ *n'est pas complet.*

QUESTION. Ce théorème s'étend-il au cas où M est une variété compacte de dimension ≥ 4 et S une hypersurface de M?

Nous venons de voir la solidarité entre le "nombre de bouts" d'un *revêtement trivialisant* "dans la direction" de *l'application développante*, d'une part, et les propriétés topologiques du feuilletage, d'autre part. Notre prochain résultat encadre ce nombre de bouts, par deux "nombres de bouts" du *groupe* du revêtement "dans la direction" de la *représentation d'holonomie.* Ces nombres ont été définis et étudiés dans [M2]. Rappelons-en les grandes lignes.

A un groupe Π muni d'une représentation H à valeurs dans l'un des trois groupes de Lie de difféomorphismes de la droite réelle, nous avons associé un *nombre de bouts fins* de Π *dans la direction* H, et un *nombre de bouts grossiers* de Π *dans la direction* H. Nous avons écartés comme *dégénérés* les cas où l'image de H a un point fixe global sur la droite réelle. Quant aux valeurs des nombres de bouts, il n'y a que trois possibilités:

Ou bien un bout fin et un bout grossier; c'est le cas typiquement quand Π est abélien. Ou bien une infinité de bouts fins et un bout grossier; ceci n'est possible que quand le groupe de Lie est le groupe affine. Ou bien une infinité de bouts fins et une infinité de bouts grossiers; c'est le cas typiquement quand Π est un groupe libre non abélien.

THÉORÈME 3.6. *Soit* $\mathscr{F}$ *un feuilletage non dégénéré, principal, d'une variété* compacte M (*qui peut avoir un bord*). *Soit un revêtement normal* $\hat{M}$ *qui le trivialise.*

Notons Π *le groupe de ce revêtement;* $H: \Pi \to G$ *le morphisme d'holonomie*; *et* $\hat{P}$ *l'image inverse dans* $\hat{M}$ *de la composante principale de* $\mathscr{F}$.

1. *Si* Π *n'a qu'un bout* fin *dans la direction* H, *alors* $\hat{P}$ *n'a qu'un bout dans la direction* $\hat{D}(\mathscr{F})$.

2. *Si* $\hat{P}$ *n'a qu'un bout dans la direction* $\hat{D}(\mathscr{F})$, *alors* Π *n'a qu'un bout* grossier *dans la direction* H.

Ce théorème fournit une interprétation topologique des nombres de bouts étudiés dans [M 2], pour les groupes de présentation finie.

COROLLAIRE 1.2. *Soient* $\mathscr{F}_1$, $\mathscr{F}_2$ *deux feuilletages transversalement euclidiens ou projectifs, non dégénérés, n'ayant qu'une composante de Novikov, de deux variétés compactes* M_1, M_2. *On suppose qu'il existe un isomorphisme de* $\pi_1(M_1)$ *avec* $\pi_1(M_2)$ *qui échange* $H(\mathscr{F}_1)$ *et* $H(\mathscr{F}_2)$. *Alors* $\tilde{M}_1$ *a le même nombre de bouts dans la direction* $\tilde{D}(\mathscr{F}_1)$, *que* $\tilde{M}_2$ *dans la direction* $\tilde{D}(\mathscr{F}_2)$.

Nous construirons un important contre-exemple à ce corollaire dans le cadre des feuilletages transversalement *affines*:

PROPOSITION 5.2. *Pour chaque entier* $g \geq 2$, *il existe une variété* M *de dimension* 3, *fibrant sur le cercle avec pour fibre la surface compacte orientable sans bord de genre* g, *et deux feuilletages* $\mathscr{F}_1$, $\mathscr{F}_2$ *de* M, *qui vérifient les propriétés suivantes:*

1. *Ce sont des feuilletages transversalement affines non singuliers et non dégénérés; leurs feuilles sont denses.*
2. *Leurs représentations d'holonomie sont égales.*
3. $\tilde{M}$ *n'a qu'un bout dans la direction* $\tilde{D}(\mathscr{F}_1)$, *mais a une infinité de bouts dans la direction* $\tilde{D}(\mathscr{F}_2)$. *Au contraire,* $\tilde{M}$ *a une infinité bouts dans la direction* $-\tilde{D}(\mathscr{F}_1)$, *mais n'a qu'un bout dans la direction* $-\tilde{D}(\mathscr{F}_2)$.

Enfin, les théorèmes 4.2 et 3.6 impliquent qu'en dimension 3 la complétude d'un feuilletage transversalement projectif (non singulier, à une seule composante de Novikov, non transversalement affine) ne dépend que de sa représentation d'holonomie:

COROLLAIRE 1.3. *Soient deux variétés compactes de dimension* 3, *et sur chacune un feuilletage transversalement projectif, ni singulier ni dégénéré, n'ayant qu'une composante de Novikov, et transverse au bord. On suppose qu'il existe entre les groupes fondamentaux de ces variétés un isomorphisme qui échange les représentations d'holonomie. Alors si l'un de ces feuilletages est complet, l'autre l'est aussi.*

Soit un feuilletage transversalement homogène d'une variété. Supposons que le groupe fondamental de la variété, ou plus généralement un quotient de ce groupe, n'ait qu'un bout fin dans la direction de la représentation d'holonomie du feuilletage. Quelles conséquences peut-on tirer de cette hypothèse algébrique, quant à la topologie du feuilletage? C'est l'objet des deux théorèmes suivants.

THÉORÈME 2.3. *Soit un feuilletage* $\mathscr{F}$ *non dégénéré, d'une variété* M. *On suppose que* $\pi_1(M)$ *a un seul bout fin dans la direction* $H(\mathscr{F})$. *On écarte les cas où* $\Gamma(\mathscr{F})$ *possèderait une orbite discrète. Alors* $\mathscr{F}$ *est principal.*

Noter que la variété n'a pas besoin d'être compacte. Les cas écartés sont les feuilletages transversalement euclidiens dont le groupe d'holonomie est infini cyclique, ainsi que certains feuilletages transversalement projectifs.

Le prochain théorème exprime simplement que le point 1 du théorème 3.6 s'étend aux variétés non compactes; nous verrons par un exemple (proposition 5.1) qu'au contraire le point 2 du théorème 3.6 ne s'étend pas aux variétés non compactes.

THÉORÈME 3.5. *Soit un feuilletage $\mathscr{F}$ non dégénéré, principal, d'une variété M (qui n'a pas besoin d'être compacte). Soit aussi un groupe Π, quotient de $\pi_1(M)$, tel que la représentation d'holonomie passe au quotient en un morphisme $H: \Pi \to G$.*

On suppose que Π a un seul bout fin dans la direction H.

Alors considérons le revêtement normal $\hat{M}$ de group Π (il trivialise $\mathscr{F}$); et l'image inverse $\hat{P}$ de la composante principale de $\mathscr{F}$ dans $\hat{M}$. Je dis que $\hat{P}$ n'a qu'un bout dans la direction $\hat{D}(\mathscr{F})$.

Voici pour finir deux exemples d'application des résultats précédents. Noter que la variété n'a pas besoin d'être compacte.

Rappelons qu'une feuille *exceptionnelle* est une feuille dont la fermeture est transversalement un ensemble de Cantor.

PROPOSITION 4.6. *Soit un feuilletage $\mathscr{F}$ d'une variété M. On suppose que son groupe d'holonomie n'a pas d'orbite discrète. Dans chacun des* 16 *cas suivants, on peut conclure que:*

i. *Ce feuilletage est principal.*

ii. *Tout chemin contenu dans sa composante principale est homotope à un chemin transverse ou tangent à $\mathscr{F}$.*

iii. *L'espace des feuilles de sa composante principale est homéomorphe à l'espace des orbites de son groupe d'holonomie.*

iv. (*Dans les cas* 1 *à* 14). *Sa composante principale est dépourvue de feuille exceptionnelle.*

(*Dans les* 9 *premiers cas, $\mathscr{F}$ est supposé transversalement euclidien.*)

1^{er} *cas: le groupe $\pi_1(M)$ est nilpotent.* $2^{ème}$ *cas: le groupe $\pi_1(M)$ est polycyclique, c'est-à-dire obtenu du groupe trivial par un nombre fini d'extensions cycliques.* $3^{ème}$ *cas: plus généralement, son sous-groupe dérivé $\pi_1(M)'$ est de type fini.* $4^{ème}$ *cas: le noyau de $H(\mathscr{F})$ est de type fini.* $5^{ème}$ *cas: plus généralement, il existe un sous-groupe de type fini, compris entre $\pi_1(M)'$ et le noyau de $H(\mathscr{F})$.* $6^{ème}$ *cas: le groupe $\pi_1(M)$ est de type fini, et sa représentation $H(\mathscr{F})$ dans $\mathbf{R}$ vérifie la condition de Bieri-Neumann-Strebel (voir* [*BNS*]), *ainsi que la représentation opposée $-H(\mathscr{F})$.* $7^{ème}$ *cas: le centre de $\pi_1(M)$ n'est pas contenu dans le noyau de $H(\mathscr{F})$.* $8^{ème}$ *cas: plus généralement, il existe un élément de $\pi_1(M)$ qui commute à tout élément de $\pi_1(M)'$ sans appartenir au noyau de $H(\mathscr{F})$.* $9^{ème}$ *cas: le groupe $\pi_1(M)$ est produit direct de deux sous-groupes qui ne sont pas contenus dans le noyau de $H(\mathscr{F})$.*

(*Dans les* 5 *cas suivants, $\mathscr{F}$ est supposé transversalement affine sans être transversalement euclidien.*)

$10^{ème}$ *cas: le groupe* $\pi_1(M)$ *est polycyclique.* $11^{ème}$ *cas: plus généralement, le sous-groupe dérivé de son sous-groupe dérivé,* $\pi_1(M)''$, *est de type fini.* $12^{ème}$ *cas: le noyau de* $H(\mathscr{F})$ *est de type fini.* $13^{ème}$ *cas: plus généralement, il existe un sous-groupe de type fini, compris entre* $\pi_1(M)''$ *et le noyau de* $H(\mathscr{F})$. $14^{ème}$ *cas: il existe un élément de* $\pi_1(M)$ *qui commute à tout élément de* $\pi_1(M)''$ *et dont l'image par* $H(\mathscr{F})$ *est sans point fixe.*

(*Dans les* 2 *derniers cas,* $\mathscr{F}$ *est supposé transversalement projectif.*)

$15^{ème}$ *cas: le centre de* $\pi_1(M)$ *contient un élément dont l'image par* $H(\mathscr{F})$ *est sans point fixe.* $16^{ème}$ *cas: le groupe* $\pi_1(M)$ *est produit direct de deux sous-groupes, et chacun contient un élément dont l'image par* $H(\mathscr{F})$ *est sans point fixe.*

PROPOSITION 4.5. *Soit* $\mathscr{F}$ *un feuilletage principal non dégénéré qui est soit transversalement euclidien, soit transversalement affine, soit transversalement projectif avec dans son groupe d'holonomie une translation entière. On suppose que le noyau de* $H(\mathscr{F})$ *n'a pas de quotient libre à une infinité de générateurs. Alors l'espace des feuilles de la composante principale est homéomorphe à* $\boldsymbol{R}/\Gamma(\mathscr{F})$. *En particulier, la composante principale contient une feuille exceptionnelle si et seulement si* $\Gamma(\mathscr{F})$ *possède une orbite exceptionnelle.*

Je remercie G. Levitt, qui a dirigé ma thèse, dont l'essentiel de cet article est extrait. Je remercie également E. Ghys et F. Laudenbach de l'intérêt qu'ils ont accordé à ce travail.

2. Feuilletages principaux. Dans ce paragraphe nous examinons la notion de feuilletage *principal* puis nous prouvons le théorème 2.3.

DÉFINITION. Un feuilletage de la variété M est *principal* s'il a une composante de Novikov ouverte relativement à laquelle M est simplement connexe. Une telle composante est dite *principale.*

EXEMPLES. Tout feuilletage obtenu à partir d'un feuilletage qui n'a qu'une composante de Novikov, par des transformations telles que:

Tourbillonnement le long d'une courbe fermée transverse.

Introduction d'un centre (c'est-à-dire une singularité d'indice 0 ou $\dim(M)$) et d'une singularité conique (c'est-à-dire d'indice 1 ou $\dim(M)-1$), en position d'élimination.

Nous parlerons de *la* composante principale, en vertu du

LEMME 2.1. *Dans un feuilletage principal non dégénéré, la composante principale est unique.*

DÉMONSTRATION. Dans un feuilletage principal, considérons une composante de Novikov réduite à une feuille fermée. C'est une hypersurface disjointe d'une partie de la variété qui engendre le groupe fondamental. Elle donc doit séparer.

On en déduit que s'il y avait deux composantes principales, elles seraient séparées par une feuille fermée. D'après le théorème de Van Kampen et le principe d'unique représentation des éléments d'une somme amalgamée, la variété serait simplement connexe relativement à cette feuille. Donc le groupe d'holonomie serait réduit au groupe d'holonomie de cette feuille. Le groupe d'holonomie aurait donc un point fixe, et le feuilletage serait dégénéré. ■

Regroupons les feuilletages d'une variété M en "classes d'holonomie": deux feuilletages sont dans une même classe quand ils ont la même représentation d'holonomie. Nous allons maintenant voir que chaque classe (non triviale) contient un feuilletage principal.

PROPOSITION 2.2. *Soit M une variété (dont le groupe fondamental est de type fini, pour simplifier). Toute représentation non triviale de $\pi_1(M)$ dans $\boldsymbol{R}$, $GA(1, \boldsymbol{R})$ ou $\widetilde{SL}(2, \boldsymbol{R})$, est la représentation d'holonomie d'un feuilletage (singulier) principal de M.*

DÉMONSTRATION. Soit $H:\pi_1(M)\to G$ une représentation non triviale.

Rappelons d'abord comment H peut être *suspendu* en un fibré plat en droites $S(H)$ au-dessus de M.

Soit $\tilde{M}$ le revêtement universel de M. On munit $\tilde{M}\times\boldsymbol{R}$ de l'action diagonale de $\pi_1(M)$:

$$\gamma\cdot(p, x)=(\gamma\cdot p, H(\gamma)(x)) \qquad (\gamma\in\pi_1(M);\, p\in\tilde{M};\, x\in\boldsymbol{R})\,.$$

Par définition, $S(H)$ est le quotient de $\tilde{M}\times\boldsymbol{R}$ par cette action. La projection de $\tilde{M}\times\boldsymbol{R}$ sur $\tilde{M}$ passe évidemment au quotient en une fibration de $S(H)$ sur M, de fibre $\boldsymbol{R}$. On dispose de plus d'une projection de $\tilde{M}\times\boldsymbol{R}$ sur $S(H)$. Le feuilletage horizontal de $\tilde{M}\times\boldsymbol{R}$ est globalement invariant par $\pi_1(M)$, donc se projette sur un feuilletage $\mathscr{F}(H)$ de $S(H)$. Ce feuilletage est transverse aux fibres. Chacune de ses feuilles réalise un revêtement de M. Fixons une feuille F de $\mathscr{F}(H)$ qui soit sans holonomie (presque toute feuille l'est).

Soit une section de ce fibré, s: $M\to S(H)$ (il en existe puisque la fibre est une droite). Génériquement, s est en position de Morse par rapport à $\mathscr{F}(H)$. L'image inverse de $\mathscr{F}(H)$ par s est alors évidemment un feuilletage transversalement homogène singulier, qui a H pour représentation d'holonomie. Reste à voir comment choisir s pour que ce feuilletage soit principal.

Comme H est non triviale, il existe une partie génératrice finie $\{\alpha_i\}$ de $\pi_1(M)$ dont aucun élément n'appartient au noyau de H. Représentons les α_i par des lacets a_i au point-base p de M, qui forment topologiquement un bouquet de cercles au point p. Fixons un point q dans l'intersection de la fibre au-dessus de p, avec la feuille F. Chaque lacet a_i se relève en un chemin b_i dans F, d'origine q. L'extrémité de b_i est un point de la fibre autre que q. Faisons de b_i un lacet en lui ajoutant un segment de la fibre. Par une petite déformation ce lacet peut être rendu transverse à $\mathscr{F}(H)$, tout en restant au-dessus de a_i.

On a ainsi construit une section de $S(H)$ au-dessus de la réunion des a_i; comme $S(H)$ est un fibré en droites, cette section se prolonge à M. On met cette section en position de Morse part rapport à $\mathscr{F}(H)$ par une petite modification. L'image inverse de

$\mathscr{F}(H)$ par la nouvelle section est un feuilletage auquel les a_i sont transverses. Donc tous les a_i sont contenus dans la même composante de Novikov de ce feuilletage. Comme les α_i engendrent $\pi_1(M)$, cette composante est principale. ∎

Le résultat principal de ce paragraphe est que dans certaines classes d'holonomie, *tous* les feuilletages sont principaux:

THÉORÈME 2.3. *Soit un feuilletage transversalement homogène $\mathscr{F}$, non dégénéré, d'une variété M (qui n'a pas besoin d'être compacte). On suppose que $\pi_1(M)$ a un seul bout fin dans la direction $H(\mathscr{F})$ et que $\Gamma(\mathscr{F})$ n'a pas d'orbite discrète. Alors $\mathscr{F}$ est principal.*

DÉMONSTRATION. Soit $\mathscr{F}$ un feuilletage transversalement homogène singulier, d'une variété M compacte ou non. On suppose que $\Gamma(\mathscr{F})$ n'a pas d'orbite discrète. Montrons que $\mathscr{F}$ est principal. La preuve s'appuie sur le théorème de Van Kampen et sur les théorèmes 4.1 et 4.2 de [M2].

Considérons les composantes de Novikov fermées, c'est-à-dire les feuilles fermées que ne rencontre aucune courbe fermée transverse.

Fixons provisoirement une composante de Novikov fermée F.

Montrons d'abord que l'hypothèse que $\Gamma(\mathscr{F})$ n'a pas d'orbite discrète implique que F sépare M. Procédons par l'absurde: supposons que F ne sépare pas M, et montrons que $\Gamma(\mathscr{F})$ a une orbite discrète.

Considérons la variété à bord M_F obtenue en incisant M le long de F, et dont les deux composantes du bord sont homéomorphes à F. D'après le théorème de Van Kampen, $\pi_1(M)$ est la HNN-extension de $\pi_1(M_F)$ au-dessus de $\pi_1(F)$. En d'autres termes, $\pi_1(M)$ admet la présentation suivante:

Les générateurs sont les éléments de $\pi_1(M_F)$, ainsi qu'une lettre indépendante π (qui est représentée dans M par un lacet dont le nombre algébrique d'intersection avec F est $+1$). Les relations sont les relations de $\pi_1(M_F)$, ainsi que les relations:

$$i_2(\sigma)=\pi i_1(\sigma)\pi^{-1}$$

où σ décrit $\pi_1(F)$ et où i_1 et i_2 désignent les deux morphismes canoniques de $\pi_1(F)$ dans $\pi_1(M_F)$.

Comme F est une feuille fermée, la restriction de $H(\mathscr{F})$ à $\pi_1(F)$ est dégénérée. D'après le théorème 4.2 de [M2], ceci est incompatible avec le fait que $\pi_1(M)$ n'a qu'un bout fin dans la direction $H(\mathscr{F})$, sauf si i_1 ou i_2 est surjective. Supposons par exemple que i_1 est surjective; l'autre cas se ramène à celui-ci en renversant l'orientation transverse de $\mathscr{F}$.

Soit Θ l'image dans $\Gamma(\mathscr{F})$ de $\pi_1(F)$. Soit τ l'image dans $\Gamma(\mathscr{F})$ de π. En particulier $\Gamma(\mathscr{F})$ est engendré par Θ et τ.

Montrons d'abord que l'ensemble $\mathrm{Fix}(\Theta)$ des points fixes de Θ sur $\boldsymbol{R}$ n'est ni vide, ni réduit à un point. Comme F est une feuille fermée, $\mathrm{Fix}(\Theta)$ a au moins un élément t. Comme i_1 est surjective, Θ est contenu dans $\tau^{-1}\Theta\tau$. Donc $\mathrm{Fix}(\Theta)$ contient aussi $\tau^{-1}(t)$. Ce point est différent de t, car sinon t serait un point fixe commun à τ et à Θ, donc un point fixe de $\Gamma(\mathscr{F})$, et $\mathscr{F}$ serait dégénéré.

Nous pouvons maintenant préciser la situation cas par cas:

Quand $G = \boldsymbol{R}$ ou $GA(1, \boldsymbol{R})$: L'ensemble des points fixes de tout élément non trivial de G est vide ou réduit à un point. Donc le groupe Θ est trivial, donc $\Gamma(\mathscr{F})$ est le groupe infini cyclique engendré par τ. Toutes ses orbites sont donc discrètes.

Quand $G = \widetilde{SL}(2, \boldsymbol{R})$: L'ensemble des points fixes de tout élément non trivial de G est soit vide, soit une classe de réels modulo 1, soit la réunion de deux classes de réels modulo 1. Donc soit Θ est trivial, soit $\mathrm{Fix}(\Theta)$ est une classe de réels modulo 1 ou la réunion de deux classes de réels modulo 1. Dans le sous-cas où Θ est trivial, alors $\Gamma(\mathscr{F})$ est le groupe infini cyclique engendré par τ. Toutes ses orbites sont donc discrètes. Dans le sous-cas où $\mathrm{Fix}(\Theta)$ est formé d'une ou deux classes de réels modulo 1, de l'inclusion $\tau^{-1}(\mathrm{Fix}(\Theta)) \subset \mathrm{Fix}(\Theta)$ il résulte qu'en fait il y a égalité: $\mathrm{Fix}(\Theta)$ est préservé par τ, donc par l'action de $\Gamma(\mathscr{F})$ tout entier. En conséquence $\mathrm{Fix}(\Theta)$ est une réunion finie d'orbites infinies discrètes.

Nous avons donc montré que F sépare M.

Soient V et W les deux composantes connexes de $M - F$. D'après le théorème de Van Kampen, $\pi_1(M)$ est la somme amalgamée de $\pi_1(V)$ et $\pi_1(W)$ au-dessus de $\pi_1(F)$.

Comme F est une feuille fermée, la restriction de $H(\mathscr{F})$ à $\pi_1(F)$ est dégénérée. D'après le théorème 4.1 de [M 2], ceci est incompatible avec le fait que $\pi_1(M)$ n'a qu'un bout fin dans la direction $H(\mathscr{F})$, sauf si la somme amalgamée est *triviale* au sens où $\pi_1(F)$ se surjecte sur $\pi_1(V)$ ou sur $\pi_1(W)$, en d'autres termes si M est simplement connexe relativement à V ou à W.

On note que M ne peut être simplement connexe que relativement à une seule de ces composantes, que nous noterons $V(F)$, l'autre étant $W(F)$. En effet, quoiqu'il n'y ait pas de théorème d'excision en homotopie, le théorème de Van Kampen et le principe d'unique représentation des éléments d'une somme amalgamée entraînent que l'intersection dans $\pi_1(M)$ des images de $\pi_1(V)$ et $\pi_1(W)$, égale l'image de $\pi_1(F)$. Donc si M était simplement connexe relativement à V et à W, alors elle le serait relativement à F, et $\mathscr{F}$ dégénèrerait.

Considérons maintenant toutes les composantes de Novikov fermées. Toutes séparent. Tâchons d'exhiber une composante principale. Notre candidat P est l'intersection de tous les $V(F)$.

Remarquons d'abord que P est évidemment saturé pour la relation d'équivalence de Novikov. Donc son bord est une réunion de composantes de Novikov fermées F_i.

Remarquons ensuite que P est un ouvert.

En effet, par définition P est disjoint de toutes les composantes de Novikov fermées. Etant disjoint de son bord, il est ouvert.

Montrons maintenant que les $W(F_i)$ sont deux à deux disjoints.

En effet, si $W(F_i)$ rencontrait $W(F_j)$, alors ou F_i serait contenu dans $W(F_j)$, ou F_j serait contenu dans $W(F_i)$. Ceci est impossible car par définition de P, chaque $W(F)$ est disjoint de P, et donc du bord de P.

Montrons enfin que les F_i forment une famille discrète.

En effet, si elles s'accumulaient, on en verrait une, F_i, prise entre deux autres, F_j et F_k. Donc l'une des feuilles F_j, F_k serait contenue dans $W(F_i)$, ce qui est impossible comme nous venons de le voir.

En résumé, on a une partition de M en: l'ouvert P, la famille discrète de feuilles fermées F_i, bord de P, et les ouverts connexes $W(F_i)$, chacun ayant F_i pour bord. En particulier P est connexe, il s'agit donc d'une seule composante de Novikov ouverte.

Il est maintenant devenu évident que M, étant simplement connexe relativement à chaque $V(F_i)$, est simplement connexe relativement à P.

Donc P est une composante principale. ∎

3. Bouts des revêtements trivialisants. Dans ce paragraphe on démontre les théorèmes 3.6 et 3.5.

Dans tout ce paragraphe, on fixe une variété M, compacte ou non compacte, munie d'un feuilletage transversalement homogène $\mathscr{F}$, non dégénéré et principal. On fixe aussi un revêtement normal $\hat{M}$ qui trivialise $\mathscr{F}$.

Notons Π le groupe de Galois de $\hat{M}$. Fixons *une* application développante (dans la preuve du théorème 3.6, il sera essentiel de ne pas travailler à conjugaison près) $\hat{D}: \hat{M} \to R$, que nous noterons $\hat{D}$ plutôt que $\hat{D}(\mathscr{F})$. Notons $H: \Pi \to G = \boldsymbol{R}$, $GA(1, \boldsymbol{R})$ ou $\widetilde{SL}(2, \boldsymbol{R})$ *le* morphisme d'holonomie associé à $\hat{D}$. On a donc, quels que soient $\gamma \in \Pi$ et $\hat{m} \in \hat{M}$:

$$\hat{D}(\gamma(\hat{m})) = H(\gamma)(\hat{D}(\hat{m}))\,.$$

Notons P la composante principale de $\mathscr{F}$, et $\hat{P}$ l'image inverse de P dans $\hat{M}$. Ainsi $\hat{P}$ est un revêtement connexe, normal de P, de groupe Π, et qui trivialise la restriction de $\mathscr{F}$ à P.

Nous allons d'abord établir les principales propriétés des composantes connexes des ensembles $\hat{D}^{-1}([t, +\infty[)$. Il nous faut commencer par un lemme technique, qui sera également important dans la preuve du théorème 3.5.

LEMME 3.1. *Soient t un réel, et C une composante connexe de $\hat{D}^{-1}([t, +\infty[)$. On suppose que C rencontre $\hat{P}$. Alors quels que soient le point $\hat{m}$ de $\hat{M}$ et les réels x, y, il existe un élément α de Π, tel que l'on ait simultanément: $\alpha(\hat{P}) \in C$ et $H(\alpha)(x) \geq y$.*

DÉMONSTRATION. (Il s'agit de la version topologique du lemme 2.2 de [M2]).

Fixons un nombre réel t, et une composante connexe C de $\hat{D}^{-1}([t, +\infty[)$. Supposons qu'elle rencontre $\hat{P}$ en un point $\hat{p}$. Comme $\mathscr{F}$ n'est pas dégénéré, il existe un élément τ de Π tel que $H(\tau)(z) > z$ pour tout réel z (proposition 1.2 de [M2]). Comme P est la composante principale, $\hat{P}$ est connexe, donc il existe un chemin a menant de $\hat{p}$ à $\tau(\hat{p})$ dans $\hat{P}$. Montrons d'abord que C contient une image $\gamma(a)$ de a.

Soient x_0 la plus petite valeur de $\hat{D}$ sur a, et $\hat{q}$ un point de a où $\hat{D}$ prend la valeur x_0. Considérons les images p, q de $\hat{p}$ et $\hat{q}$ dans P. Comme P est une composante de

Novikov, il existe un chemin menant de p à q dans P et positivement transverse à $\mathscr{F}$ (le terme "positivement" se rapporte à l'orientation transverse de $\mathscr{F}$). Relevons ce chemin au point $\hat{p}$. L'autre extrémité du chemin relevé est un point de la forme $\gamma(\hat{q})$. Il est clair que C contient $\gamma(\hat{q})$, et donc contient $\gamma(a)$.

Prouvons maintenant que quel que soit n positif, le point $\tau^n\gamma(\hat{p})$ appartient à C.

Soit $b=\gamma(a)\cup\tau\gamma(a)\cup\tau^2\gamma(a)\cup\tau^3\gamma(a)\cup\ldots$.

Comme $\hat{D}$ est équivariante, $\hat{D}(\tau^n\gamma(a))=H(\tau)^n(H(\gamma)(\hat{D}(a)))$ qui est minoré par $H(\gamma)(x_0)$, donc par t. Donc b est contenu dans $\hat{D}^{-1}([t, +\infty[)$. Par ailleurs, comme $\tau^n\gamma(\hat{p})$ est à la fois l'origine de $\tau^n\gamma(a)$ et l'extrémité de $\tau^{n-1}\gamma(a)$, on voit que b est connexe. Donc b est contenu dans C. Donc tous les points $\tau^n\gamma(\hat{p})$ appartiennent à C.

Soient maintenant $\hat{m}$ un point de $\hat{M}$ et deux réels x, y. Montrons que pour n assez grand, on a à la fois $\tau^n\gamma(\hat{m})\in C$ et $H(\tau^n\gamma)(x)\geq y$.

Comme $H(\tau)(z)>z$ pour tout réel z, la suite $H(\tau)^n(z)$ tend vers $+\infty$ avec n, pour tout réel z. En particulier $H(\tau^n\gamma)(x)=H(\tau)^n(\gamma(x))$ tend vers $+\infty$ avec n. Donc pour n assez grand, $H(\tau^n\gamma)(x)\geq y$.

Par ailleurs, soit c un chemin menant de $\hat{p}$ à $\hat{m}$ dans $\hat{M}$. Soit x_1 le minimum de $\hat{D}$ sur c. Considérons le chemin $\tau^n\gamma(c)$: c'est un chemin liant $\tau^n\gamma(\hat{p})$ à $\tau^n\gamma(\hat{m})$ dans $\hat{M}$. Le minimum de $\hat{D}$ sur $\tau^n\gamma(c)$ est $H(\tau^n\gamma)(x_1)=H(\tau^n)(H(\gamma)(x_1))$ qui tend vers $+\infty$ avec n. Donc pour n assez grand, $\tau^n\gamma(c)$ est contenu dans $\hat{D}^{-1}([t, +\infty[)$. Comme son origine $\tau^n\gamma(\hat{p})$ appartient à C, on conclut que son extrémité $\tau^n\gamma(\hat{m})$ appartient aussi à C. ■

Nous aurons aussi besoin de la remarque suivante:

LEMME 3.2. *L'application développante d'un feuilletage non dégénéré est surjective sur* $\boldsymbol{R}$.

DÉMONSTRATION. Procédons par l'absurde. Si l'application développante d'un feuilletage n'est pas surjective, son image est un intervalle ouvert qui a une ou deux bornes finies. Comme l'application développante est équivariante relativement à la représentation d'holonomie, ces bornes sont des points fixes du groupe d'holonomie, et le feuilletage est dégénéré. ■

PROPOSITION 3.3. *Soit C une composante connexe de $\hat{D}^{-1}([t, +\infty[)$ qui rencontre $\hat{P}$. Alors*:

1. *C se surjecte sur M.*
2. *$C\cap\hat{P}$ est connexe.*
3. *$\hat{D}(C\cap\hat{P})=[t, +\infty[$ ou $]t, +\infty[$.*

DÉMONSTRATION. Le point 1 est une conséquence immédiate du lemme 3.1 car il peut se paraphraser ainsi: quel que soit le point $\hat{m}$ de $\hat{M}$, il existe un élément α de Π, tel que $\alpha(\hat{m})\in C$.

Prouvons maintenant que $C\cap\hat{P}$ est connexe.

Comme P est une composante de Novikov, le bord de $\hat{P}$ est une réunion discrète de feuilles de $\hat{\mathscr{F}}$ (rappelons que toutes les feuilles de $\hat{\mathscr{F}}$ sont fermées dans $\hat{M}$). Comme M est simplement connexe relativement à P, il est immédiat que $\hat{P}$ est connexe et que $\hat{M}$ est simplement connexe relativement à $\hat{P}$. Il en résulte que chaque composante connexe de $\hat{M}-\hat{P}$ a pour bord une seule feuille de $\hat{\mathscr{F}}$.

Comme C est connexe, si $C \cap \hat{P}$ avait deux composantes connexes distinctes, celles-ci devraient être séparées dans C par le bord de $\hat{P}$, ce qui est manifestement absurde.

Prouvons enfin que $\hat{D}(C \cap \hat{P}) = [t, +\infty[$ ou $]t, +\infty[$. Comme $\mathscr{F}$ n'est pas dégénéré, la restriction de $\mathscr{F}$ à P n'est pas dégénérée. Donc d'après le lemme 3.2, $\hat{D}$ surjecte $\hat{P}$ sur $\boldsymbol{R}$. Donc $\hat{P}$ n'est pas contenu dans C. Comme $\hat{P}$ est connexe, il doit rencontrer le bord de C en un point $\hat{p}$. On a $\hat{D}(\hat{p}) = t$. Ainsi $\hat{D}(C \cap \hat{P})$ est un intervalle (d'après le point 2) contenu dans $[t, +\infty[$ et dont l'adhérence contient t. Il n'y a plus qu'à montrer qu'il n'est pas majoré.

A cet effet, choisissons un point quelconque $\hat{m}$ dans $C \cap \hat{P}$ et posons $x = \hat{D}(\hat{m})$. D'après le lemme 3.1, quel que soit le réel y, il existe α dans Π tel que $\alpha(\hat{m})$ appartienne à C, et que $H(\alpha)(x) \geq y$. Mais ceci veut dire: $\alpha(\hat{m})$ appartient à $C \cap \hat{P}$, et $\hat{D}(\alpha(\hat{m})) \geq y$. Donc $\hat{D}(C \cap \hat{P})$ n'est pas majoré. ■

Rappelons la:

DÉFINITION. L'espace des *bouts* de $\hat{M}$ *dans la direction* $\hat{D}$ est la limite projective:

$$\lim_{t \to +\infty} \pi_0(\hat{D}^{-1}([t, +\infty[)) .$$

PROPOSITION 3.4. *On a la dichotomie suivante*:

Ou bien quel que soit le réel t, l'ensemble $\hat{P} \cap \hat{D}^{-1}([t, +\infty[)$ est connexe. Dans ce cas, $\hat{P}$ a 1 *bout dans la direction $\hat{D}$.*

Ou bien quel que soit le réel t, l'ensemble $\hat{P} \cap \hat{D}^{-1}([t, +\infty[)$ a une infinité de composantes connexes. Dans ce cas, $\hat{P}$ a une infinité de bouts dans la direction $\hat{D}$.

DÉMONSTRATION. Notons $E(t)$ l'ensemble $\hat{P} \cap \hat{D}^{-1}([t, +\infty[)$, et $N(t)$ le nombre (fini ou infini) de composantes connexes de $E(t)$.

Montrons d'abord que $N(t)$ croît avec t.

En effet, soient deux réels t, t', tels que $t \leq t'$. Donc $E(t)$ contient $E(t')$, d'où une application naturelle:

$$\pi_0(E(t')) \to \pi_0(E(t)) .$$

Le point 3 de la proposition 3.3 implique que chaque composante connexe de $E(t)$ rencontre $E(t')$. En d'autres termes, l'application ci-dessus est surjective. Ceci implique que $N(t) \leq N(t')$.

Montrons maintenant que $N(t)$ ne dépend pas de t.

En effet, soient deux réels t, t' tels que $t \leq t'$. Comme $\mathscr{F}$ n'est pas dégénéré, il existe un élément γ de Π tel que $H(\gamma)(t) \geq t'$; comme N est croissante on a:

$$N(t) \leq N(t') \leq N(H(\gamma)(t)) .$$

Considérant par ailleurs l'action de γ sur $\hat{M}$, on a:

$$\gamma(E(t)) = E(H(\gamma)(t))$$

donc:

$$N(t) = N(H(\gamma)(t)) .$$

Donc $N(t') = N(t)$. Conclusion: $N(t)$ ne dépend pas de t.

Montrons enfin que $N(t)$ ne prend que les valeurs 1 et ∞. Supposons que $N(0) > 1$. Soit un chemin joignant dans $\hat{P}$ deux composantes distinctes de $E(0)$. Soit t le minimum de $\hat{D}$ sur ce chemin, qui est donc contenu dans $E(t)$. Donc l'application naturelle:

$$\pi_0(E(0)) \to \pi_0(E(t))$$

n'est pas injective. Nous avons déjà remarqué qu'elle est surjective. Mais nous avons aussi vu que ces ensembles sont équipotents. Ils sont donc infinis: $N(t) = \infty$.

Nous sommes donc devant la dichotomie suivante:

Ou bien quel que soit le réel t, l'ensemble $E(t)$ est connexe.

Ou bien quel que soit le réel t, l'ensemble $E(t)$ a une infinité de composantes connexes.

Le calcul du nombre de bouts est maintenant évident:

Dans le cas où tous les $E(t)$ sont connexes, l'ensemble des bouts est une limite projective de singletons... donc est un singleton!

Dans le cas où au contraire tous les $E(t)$ ont une infinité de composantes connexes, l'ensemble des bouts est limite d'un système projectif dont les flèches sont surjectives; donc cet ensemble de bouts se surjecte sur chaque $\pi_0(E(t))$; donc il est infini. ■

Nous sommes maintenant prêts à démontrer le:

THÉORÈME 3.5. *On se place toujours dans la situation fixée au début de ce paragraphe. Si Π a un seul bout fin dans la direction H, alors $\hat{P}$ a un seul bout dans la direction $\hat{D}$.*

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME. Fixons un réel quelconque t, et un point $\hat{m}$ dans $\hat{M}$. A chaque composante connexe C de $\hat{D}^{-1}([t, +\infty[)$, associons le sous-ensemble de Π:

$$A_C = \{\gamma \in \Pi / \gamma(\hat{m}) \in C\} .$$

Je dis d'abord que A_C est une partie de Π *de bord majoré faiblement dans la direction* H au sens de [M 2], c'est-à-dire:

Quel que soit l'élément α de Π, il existe deux réels x et y, tels que quel que soit l'élément γ de Π, si un et un seul des deux éléments γ et $\gamma\alpha$ appartient à A_C, alors $H(\gamma)(x) \leq y$.

En effet, fixons un élément α dans Π, et choisissons un chemin $\hat{a}$ dans $\hat{M}$, d'origine $\hat{m}$ et d'extrémité $\alpha(\hat{m})$. Considérons l'intervalle $\hat{D}(\hat{a})$, et son plus petit élément x; et posons $y = t$.

Quel que soit l'élément γ de Π, si un et un seul des deux éléments γ et $\gamma\alpha$ appartient à A_C, c'est que un et un seul des deux points $\gamma(\hat{m})$ et $\gamma\alpha(\hat{m})$ appartient à C. Comme ces points sont les extrémités du chemin $\gamma(\hat{a})$, ce chemin doit rencontrer le bord de C. Donc ce chemin doit rencontrer $\hat{D}^{-1}(t)$. En d'autres termes $y=t$ est dans l'intervalle $\hat{D}(\gamma(\hat{a}))=H(\gamma)(\hat{D}(\hat{a}))$. Donc y est plus grand que le minimum de cet intervalle: $H(\gamma)(x)$.

Ceci montre bien que A_C est de bord majoré faiblement dans la direction H.

Je dis maintenant que si C rencontre $\hat{P}$, alors A_C n'est pas *majorée faiblement dans la direction* H au sens de [M 2], c'est-à-dire:

Quel que soit les réels x et y, il existe un élément α de A_C, tel que $H(\alpha)(x) \geq y$.

En effet, ceci n'est autre que le lemme 3.1.

Concluons. Supposons que $\hat{P}$ a plus d'un bout dans la direction $\hat{D}$, et montrons que Π a une infinité de bouts fins dans la direction H.

D'après la proposition 3.4, l'ensemble $\hat{P} \cap \hat{D}^{-1}([t, +\infty[)$ a deux composantes connexes distinctes. Soient C et C' les composantes connexes de $\hat{D}^{-1}([t, +\infty[)$ qui les contiennent. D'après la proposition 3.3, point 2, les composantes C et C' sont distinctes. Donc A_C et $A_{C'}$ sont disjointes. L'existence de deux parties disjointes de Π, non majorées faiblement dans la direction H, mais de bord majoré faiblement dans la direction H, entraîne que Π a une infinité de bouts fins dans la direction H (voir [M2]). ∎

THÉORÈME 3.6. *On se place toujours dans la situation fixée au début de ce paragraphe, mais on suppose de plus que M est compacte. Alors*:

1. *Si Π a un seul bout fin dans la direction H, alors $\hat{P}$ n'a qu'un bout dans la direction $\hat{D}$.*
2. *Si $\hat{P}$ n'a qu'un bout dans la direction $\hat{D}$, alors Π a un seul bout grossier dans la direction H.*

La première partie de ce théorème n'est autre que le théorème 3.5, énoncé dans le cadre des variétés compactes. Toutefois il nous paraît intéressant d'en donner une nouvelle démonstration, qui nous permettra de comprendre pourquoi quand Π a un seul bout grossier mais une infinité de bouts fins dans la direction H, on ne peut pas savoir *a priori* si $\hat{P}$ a un bout ou une infinité de bouts dans la direction $\hat{D}$. Ce phénomène sera d'ailleurs illustré au paragraphe 5 par la proposition 5.2.

Par contre, la seconde partie de ce théorème ne s'étend pas aux variétés non compactes, même les plus simples comme le produit d'une surface compacte par $\boldsymbol{R}$; la proposition 5.1 le montrera.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME. Ce théorème est en fait un corollaire topologique du théorème 2.1 de [M2], dont l'énoncé sera rappelé plus bas, et auquel nous allons nous ramener.

Il s'agit de lier un phénomène topologique qui a lieu dans $\hat{M}$: le nombre de bouts de $\hat{P}$ dans la direction $\hat{D}$, à un phénomène combinatoire qui a lieu dans le groupe Π. Pour ce faire considérons le "pavage" de $\hat{M}$ par les translatés d'un domaine fondamental:

Fixons un compact connexe Δ contenu dans $\hat{M}$, dont les translatés $\gamma(\Delta)$ par les éléments de Π recouvrent $\hat{M}$. Ce sont les relations de voisinage (=intersection non vide) entre ces translatés qui nous intéressent. Formons le graphe $\mathscr{G}$ dont les sommets sont les éléments de Π; et deux d'entre eux, α et β, sont liés par une arête quand $\alpha(\Delta)$ et $\beta(\Delta)$ sont voisins.

Voici une autre façon de voir ce graphe. Désignons par $\gamma_1, \cdots, \gamma_n$ les éléments de Π qui envoient Δ sur ses voisins. Les éléments $\gamma_1, \cdots, \gamma_n$ forment une partie génératrice finie de Π, stable par inversion. Quel que soit $\alpha \in \Pi$, les voisins de $\alpha(\Delta)$ sont $\alpha\gamma_1(\Delta), \cdots, \alpha\gamma_n(\Delta)$. Donc les voisins du sommet α dans $\mathscr{G}$ sont $\alpha\gamma_1, \cdots, \alpha\gamma_n$. En d'autres termes, $\mathscr{G}$ est le *graphe de Cayley à droite* de Π rapporté à sa partie génératrice $\{\gamma_1, \cdots, \gamma_n\}$.

Quels que soient les réels x et y, considérons le sous-graphe (maximal) de $\mathscr{G}$ dont les sommets sont les éléments γ de Π qui vérifient $H(\gamma)(x) \geq y$. Notons-le $\mathscr{G}_H(x, y)$.

Fixons un réel quelconque y. Dans [M2] (théorème 2.1) nous avons lié les nombres de bouts, fins et grossiers, de Π dans la direction H, à la connexité des graphes $\mathscr{G}_H(x, y)$:

Si Π a un seul bout fin dans la direction H, alors quel que soit x, le graphe $\mathscr{G}_H(x, y)$ est connexe.

S'il existe un x pour lequel le graphe $\mathscr{G}_H(x, y)$ est connexe, alors Π a un seul bout grossier dans la direction H.

Supposons d'abord que Π a un seul bout fin dans la direction H, et démontrons que $\hat{P}$ n'a qu'un bout dans la direction $\hat{D}$. D'après la proposition 3.4, il s'agit de démontrer que $\hat{P} \cap \hat{D}^{-1}([y, +\infty[)$ est connexe. Soient A et B deux composantes de $\hat{P} \cap \hat{D}^{-1}([y, +\infty[)$. Nous voulons montrer que $A = B$.

Désignons par A' (resp. B') la composante connexe de $\hat{D}^{-1}([y, +\infty[)$ qui contient A (resp. B). Notons $x_{\min}$ le minimum de $\hat{D}(\Delta)$ et choisissons un point $\hat{m}_{\min}$ de Δ, où $\hat{D}$ vaut $x_{\min}$.

Comme A' rencontre $\hat{P}$, d'après la proposition 3.3, il existe un élément α de Π, tel que $\alpha(\hat{m}_{\min})$ est dans A'. De même, il existe un élément β de Π, tel que $\beta(\hat{m}_{\min})$ est dans B.

D'après le théorème 2.1 de [M 2] rappelé ci-dessus, le graphe $\mathscr{G}_H(x_{\min}, y)$ est connexe. Soient donc $\alpha = \alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_n = \beta$ les sommets successifs d'un chemin menant de α à β dans $\mathscr{G}_H(x_{\min}, y)$. Pour chaque i, le point $\alpha_i(\hat{m}_{\min})$ appartient à $\hat{D}^{-1}([y, +\infty[)$.

Or $\alpha_i(\hat{m}_{\min})$ réalise le minimum de $\hat{D}$ sur $\alpha_i(\Delta)$, en vertu de la propriété $\hat{D} \circ \alpha_i = H(\alpha_i) \circ \hat{D}$, où $H(\alpha_i)$ est un difféomorphisme *croissant* de $\boldsymbol{R}$. Donc le pavé $\alpha_i(\Delta)$ est contenu en entier dans $\hat{D}^{-1}([y, +\infty[)$.

Comme les pavés $\alpha_i(\Delta)$ et $\alpha_{i+1}(\Delta)$ sont voisins, $\alpha(\Delta)$ et $\beta(\Delta)$ sont contenus dans la même composante connexe de $\hat{D}^{-1}([y, +\infty[)$, c'est-à-dire que $A' = B'$. D'après la proposition 3.3, point 2, les composantes A et B sont égales.

Supposons maintenant que $\hat{P}$ n'a qu'un bout dans la direction $\hat{D}$, et démontrons que Π a un seul bout grossier dans la direction H. Notons $x_{\max}$ la borne supérieure de $\hat{D}(\hat{P} \cap \Delta)$. D'après le théorème 2.1 de [M 2] rappelé ci-dessus, il suffit de prouver que $\mathscr{G}_H(x_{\max}, y)$ est connexe. Soient A et B deux composantes de $\mathscr{G}_H(x_{\max}, y)$. Nous voulons montrer que $A = B$.

D'après le lemme 2.2 de [M 2], A possède un sommet α tel que $H(\alpha)(x_{\max})$ est *strictement* plus grand que y. De même, B possède un sommet β tel que $H(\beta)(x_{\max})$ est *strictement* plus grand que y.

Choisissons un point $\hat{m}_{\max}$ de Δ, adhérent à $\hat{P}$, où $\hat{D}$ vaut $x_{\max}$. Considérons le point $\alpha(\hat{m}_{\max})$. Il est adhérent à $\hat{P}$ et appartient à *l'intérieur* de $\hat{D}^{-1}([y, +\infty[)$. On en conclut que la composante connexe U de $\hat{D}^{-1}([y, +\infty[)$ qui contient $\alpha(\hat{m}_{\max})$, rencontre $\hat{P}$. De même, la composante connexe V de $\hat{D}^{-1}([y, +\infty[)$ qui contient $\beta(\hat{m}_{\max})$, rencontre $\hat{P}$.

D'après la proposition 3.4, $\hat{P} \cap \hat{D}^{-1}([y, +\infty[)$ est connexe. Conclusion: il y a un chemin menant de U à V dans $\hat{P} \cap \hat{D}^{-1}(]y, +\infty[)$. Soient $\alpha(\Delta) = \alpha_0(\Delta)$, $\alpha_1(\Delta), \cdots, \alpha_n(\Delta) = \beta(\Delta)$ les pavés successivement rencontrés par ce chemin. Pour chaque i, $\alpha_i(\Delta)$ rencontre donc $\hat{P} \cap \hat{D}^{-1}(]y, +\infty[)$. Or $H(\alpha_i)(x_{\max})$ est la borne supérieure de $\hat{D}$ sur $\alpha_i(\hat{P} \cap \Delta)$, en vertu de la propriété $\hat{D} \circ \alpha_i = H(\alpha_i) \circ \hat{D}$, où $H(\alpha_i)$ est un difféomorphisme *croissant* de $\boldsymbol{R}$. Donc $H(\alpha_i)(x_{\max})$ est supérieur ou égal à y, en d'autres termes α_i appartient à $\mathscr{G}_H(x_{\max}, y)$.

Comme les pavés $\alpha_i(\Delta)$ et $\alpha_{i+1}(\Delta)$ sont voisins, les éléments $\alpha = \alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_n = \beta$ sont les sommets successifs d'un chemin menant de α *à* β dans $\mathscr{G}_H(x_{\max}, y)$, donc $A = B$. ■

Le corollaire 1.2 est immédiat.

4. Bouts d'un revêtement trivialisant et topologie du feuilletage. Dans ce paragraphe, fixons une variété M, compacte ou non compacte, munie d'un feuilletage transversalement homogène $\mathscr{F}$, non dégénéré et principal. Notons P sa composante principale.

Nous allons relier certaines propriétés topologiques de $\mathscr{F}$ au nombre de bouts de certains revêtements trivialisants dans la direction de l'application développante de $\mathscr{F}$.

En particulier nous montrerons les propositions 1.1, 4.6 et 4.5, ainsi que les théorèmes 4.2 et 4.3.

A. Le revêtement universel.

Rappelons que $\tilde{M}$ désigne le revêtement universel de M. Fixons une application développante de $\mathscr{F}$ relevé à $\tilde{M}$, que nous noterons $\tilde{D}$. Notons $\tilde{P}$ l'image inverse de P dans $\tilde{M}$.

Nous allons démontrer une version plus sophistiquée de la proposition 1.1:

PROPOSITION 4.1. *Les propriétés suivantes sont équivalentes*:

1. *$\tilde{P}$ n'a qu'un bout dans la direction $\tilde{D}$, ainsi que dans la direction opposée $-\tilde{D}$.*

2. *Tout chemin contenu dans P est homotope dans M (à extrémités fixes) soit à un chemin transverse à $\mathscr{F}$, soit à un chemin tangent à $\mathscr{F}$.*

2′. *Il existe un point p de P, tel que tout élément de $\pi_1(M, p)$ est représenté par un lacet au point p transverse ou tangent à $\mathscr{F}$.*

3. *Quel que soit le réel t, l'ensemble $\tilde{P} \cap \tilde{D}^{-1}(t)$ est connexe.*

3'. *Il existe un réel t tel que l'ensemble* $\tilde{P} \cap \tilde{D}^{-1}(t)$ *est connexe.*

(Dans le cadre des 1-formes fermées à singularités de Morse des variétés compactes, c'est la propriété appelée "complétude" dans [L]).

DÉMONSTRATION. Prouvons d'abord l'équivalence de 1, 3 et 3'.

$1 \Rightarrow 3$. Supposons que $\tilde{P}$ n'a qu'un bout dans la direction $\tilde{D}$, ainsi que dans la direction $-\tilde{D}$, et prouvons que quel que soit t, l'ensemble $\tilde{P} \cap \tilde{D}^{-1}(t)$ est connexe.

Dans le cas contraire, il y aurait un réel t tel que $\tilde{P} \cap \tilde{D}^{-1}(t)$ aurait au moins deux composantes connexes distinctes F et F'. D'après la proposition 3.4, les ensembles $\tilde{P} \cap \tilde{D}^{-1}([t, +\infty[)$ et $\tilde{P} \cap \tilde{D}^{-1}(]-\infty, t])$ sont connexes. Il y a donc un chemin menant de F à F' dans $\tilde{P} \cap \tilde{D}^{-1}([t, +\infty[)$, et un chemin menant de F à F' dans $\tilde{P} \cap \tilde{D}^{-1}(]-\infty, t])$. En les réunissant, on trouve une courbe fermée C contenue dans $\tilde{D}$ et rencountrant F transversalement, une et une seule fois. Comme F est une hypersurface fermée de $\tilde{M}$, ceci montre que C est non nulle en homologie dans $\tilde{M}$, ce qui contredit le fait que $\tilde{M}$ est simplement connexe.

$3 \Rightarrow 3'$. Evident.

$3' \Rightarrow 1$. Supposons qu'il existe un t tel que l'ensemble $\tilde{P} \cap \tilde{D}^{-1}(t)$ est connexe, et prouvons que $\tilde{P}$ n'a qu'un bout dans la direction $\tilde{D}$. (Un raisonnement identique appliqué au feuilletage opposé à $\mathscr{F}$, qui a pour application développante $-\tilde{D}$, montrera que $\tilde{P}$ n'a qu'un bout dans la direction $-\tilde{D}$).

L'ensemble $\tilde{P} \cap \tilde{D}^{-1}(t)$ est le bord de $\tilde{P} \cap \tilde{D}^{-1}([t, +\infty[)$ dans $\tilde{P}$. Or $\tilde{P}$ est connexe. Donc $\tilde{P} \cap \tilde{D}^{-1}([t, +\infty[)$ est connexe. D'après la proposition 3.4, $\tilde{P}$ n'a qu'un bout dans la direction $\tilde{D}(\mathscr{F})$.

Prouvons maintenant l'équivalence de 2 et 2' avec 1, 3 et 3'.

$3 \Rightarrow 2$. Supposons que pour tout réel t, l'ensemble $\tilde{P} \cap \tilde{D}^{-1}(t)$ est connexe.

En d'autres termes $\tilde{D}$ passe au quotient en un *homéomorphisme* de l'espace des feuilles $\tilde{P}/\tilde{\mathscr{F}}$ sur $\boldsymbol{R}$. Fixons un chemin γ contenu dans P, et exhibons un chemin γ' contenu dans M, homotope à γ (à extrémités fixes), et transverse ou tangent à $\mathscr{F}$.

Soit $\tilde{\gamma}$ un relevé de γ dans $\tilde{M}$.

Si ses extrémités sont sur la même feuille de $\tilde{\mathscr{F}}$, elles sont liées par un chemin $\tilde{\gamma}'$ contenu dans cette feuille, et il n'y a qu'à prendre pour γ' l'image de $\tilde{\gamma}'$ dans M.

Si au contraire ses extrémités ne sont pas sur la même feuille de $\tilde{\mathscr{F}}$, leurs images dans $\tilde{P}/\tilde{\mathscr{F}}$, qui est homéomorphe à $\boldsymbol{R}$, sont les extrémités d'un intervalle. Comme la projection de $\tilde{P}$ sur $\tilde{P}/\tilde{\mathscr{F}}$ est une submersion à fibres connexes, cet intervalle se relève en un chemin $\tilde{\gamma}'$ transverse à $\tilde{\mathscr{F}}$ et joignant les extrémités de $\tilde{\gamma}$. Il n'y a qu'à prendre pour γ' l'image de $\tilde{\gamma}'$ dans M.

$2 \Rightarrow 2'$. Evident.

$2' \Rightarrow 1$. Supposons qu'il existe un point p de P, tel que tout élément de $\pi_1(M, p)$ est représenté par un lacet au point p transverse ou tangent à $\mathscr{F}$; et montrons que $\tilde{P}$ n'a qu'un bout dans la direction $\tilde{D}$. (Un raisonnement identique montrera que $\tilde{P}$ n'a qu'un bout dans la direction $-\tilde{D}$).

Soit t un réel quelconque fixé. D'après la proposition 3.4, il s'agit de démontrer que $\tilde{P} \cap \tilde{D}^{-1}([t, +\infty[)$ est connexe. Fixons donc deux composantes connexes A et B de $\tilde{P} \cap \tilde{D}^{-1}([t, +\infty[)$, et montrons que $A = B$.

Soit $\tilde{p}$ un point-base de $\tilde{M}$ au-dessus de p, qui permet de faire opérer $\pi_1(M, p)$ sur $\tilde{M}$. D'après la proposition 3.3, il existe deux éléments $\alpha \in \pi_1(M, p)$ et $\beta \in \pi_1(M, p)$ tels que $\alpha(\tilde{p}) \in A$ et $\beta(\tilde{p}) \in B$. Par hypothèse $\beta\alpha^{-1}$ est représenté par un lacet γ transverse ou tangent à $\mathscr{F}$. Soit $\tilde{\gamma}$ son relevé d'extrémités $\alpha(\tilde{p})$ et $\beta(\tilde{p})$. Nous allons montrer que $\tilde{\gamma}$ est contenu dans $\tilde{P}$ et dans $\tilde{D}^{-1}([t, +\infty[)$.

Remarquons que comme P est une composante de Novikov, tout lacet transverse ou tangent à $\mathscr{F}$ qui rencontre P est en fait contenu dans P. Donc γ est lui aussi contenu dans P. Donc $\tilde{\gamma}$ est contenu dans $\tilde{P}$.

Comme γ est transverse ou tangent à $\mathscr{F}$, l'image de $\tilde{\gamma}$ par $\tilde{D}$ est l'intervalle d'extrémités $\tilde{D}(\alpha(\tilde{p}))$ et $\tilde{D}(\beta(\tilde{p}))$. Donc $\tilde{\gamma}$ est bien contenu dans $\tilde{D}^{-1}([t, +\infty[)$.

Finalement $\tilde{\gamma}$ est contenu dans $\tilde{P} \cap \tilde{D}^{-1}([t, +\infty[)$, donc $A = B$. ■

Rappelons la:

Définition. On dit qu'un feuilletage d'une variété M est *complet*, quand il existe une variété $\tilde{F}$, et un revêtement de M par $\tilde{F} \times \boldsymbol{R}$, tel que les feuilles de $\mathscr{F}$ soient les images des hypersurfaces $\tilde{F} \times c^{te}$.

Théorème 4.2. *Soient M une variété compacte de dimension 3, et $\mathscr{F}$ un feuilletage de M transversalement homogène, non singulier, non dégénéré, n'ayant qu'une composante de Novikov, et transverse au bord de M. Alors $\mathscr{F}$ est complet si, et seulement si, $\tilde{M}$ n'a qu'un bout dans la direction $\tilde{D}(\mathscr{F})$, ainsi que dans la direction opposée $-\tilde{D}(\mathscr{F})$.*

Démonstration. Si $\mathscr{F}$ est complet, alors $\tilde{M}$ n'a évidemment qu'un bout dans les directions $\tilde{D}(\mathscr{F})$ et $-\tilde{D}(\mathscr{F})$. Le contenu du théorème est dans la réciproque: supposons que $\tilde{M}$ n'a qu'un bout dans les directions $\tilde{D}(\mathscr{F})$ et $-\tilde{D}(\mathscr{F})$, et prouvons que $\mathscr{F}$ est complet.

Puisque $\mathscr{F}$ n'a qu'une composante de Novikov, d'après le célèbre théorème "de la feuille fermée" de Novikov, le groupe fondamental des feuilles doit s'injecter dans celui de M. En d'autres termes, les feuilles du feuilletage relevé $\tilde{\mathscr{F}}$ sont simplement connexes. Distinguons deux cas.

1. Toutes les feuilles de $\tilde{\mathscr{F}}$ sont difféomorphes au plan. D'après la proposition 4.1 (équivalence des points 1 et 3), chaque ensemble $\tilde{D}^{-1}(t)$ est connexe. En d'autres termes $\tilde{D}$ induit un homéomorphisme de l'espace des feuilles $\tilde{M}/\tilde{\mathscr{F}}$ sur $\boldsymbol{R}$. D'après un théorème de Palmeira ([P]), les variétés feuilletées par plans sont classifiées par l'espace des feuilles. Donc il existe un difféomorphisme de $\tilde{M}$ avec le produit $\boldsymbol{R}^2 \times \boldsymbol{R}$, qui échange les feuilletages: $\mathscr{F}$ est complet.

2. Une feuille au moins $\tilde{F}$ de $\tilde{\mathscr{F}}$ est difféomorphe à une sphère ou à un disque. Soit F l'image de $\tilde{F}$ dans M. C'est une feuille de $\mathscr{F}$ difféomorphe soit à une sphère, soit à un disque, soit à un plan projectif. Dans les deux premiers cas F est sans holonomie. Dans le troisième cas aussi, puisque $\mathscr{F}$ est transversalement orientable. D'après le

théorème de stabilité de Reeb, F possède un voisinage de feuilles compactes sans holonomie. Enfin, comme $\mathscr{F}$ est transversalement analytique, toutes ses feuilles sont compactes sans holonomie.

Donc la projection de M sur $M/\mathscr{F}$ est une fibration de M sur le cercle, de fibre F. Donc la projection de $\tilde{M}$ sur $\tilde{M}/\tilde{\mathscr{F}}$ est une fibration de $\tilde{M}$ sur la droite, de fibre $\tilde{F}$. Une telle fibration est toujours triviale, en d'autres termes il existe un difféomorphisme de $\tilde{M}$ avec le produit $\tilde{F} \times \boldsymbol{R}$, qui échange les feuilletages, ce qui signifie que $\mathscr{F}$ est complet.

∎

Le corollaire 1.3 résulte immédiatement des théorèmes 4.2 et 3.6.

Le théorème 4.2 nous mène aussi au résultat suivant:

THÉORÈME 4.3. *Soit M une variété compacte de dimension 3. Soit S une surface incompressible qui sépare M en deux régions A, B. Soit $\mathscr{F}$ un feuilletage transversalement homogène de M, non singulier, et transverse à S, ∂M et ∂S. (Donc S est un tore ou un anneau). Considérons les restrictions $\mathscr{F}|S$, $\mathscr{F}|A$, $\mathscr{F}|B$.*

1. *Si $\mathscr{F}|S$ est non dégénéré, alors les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *$\mathscr{F}$ et $\mathscr{F}|S$ sont complets.*

(ii) *$\mathscr{F}|A$ et $\mathscr{F}|B$ sont complets.*

2. *Si $\mathscr{F}|S$ est dégénéré et n'a qu'une composante de Novikov, et que $\mathscr{F}|A$ est non dégénéré et que B n'est pas simplement connexe relativement à S, alors $\mathscr{F}$ n'est pas complet.*

DÉMONSTRATION. Considérons le revêtement universel $\tilde{M}$ et l'application développante $\tilde{D}$ de $\mathscr{F}$. Fixons un réel quelconque x et notons $\tilde{F} = \tilde{D}^{-1}(x)$.

Les raisonnements suivants valent pour la variété $N = M$, A, B ou S. Comme $\mathscr{F}|S$ est non dégénéré, $\mathscr{F}|N$ est lui aussi non dégénéré. Désignons par $\tilde{N}$ l'image inverse de N dans $\tilde{M}$, et par $(\tilde{N}_i)$ la famille des composantes connexes de $\tilde{N}$. Comme S est incompressible dans M, N est aussi incompressible dans M, donc chaque $\tilde{N}_i$ est un revêtement simplement connexe de N. Et la restriction de $\tilde{D}$ à $\tilde{N}_i$ est l'application développante de $\mathscr{F}|N$.

Point 1. Vus le théorème 4.2 et la proposition 3.4, le feuilletage $\mathscr{F}|N$ est complet si et seulement si $\mathscr{F}|N$ n'a qu'une composante de Novikov, et de plus $\tilde{N}_i \cap \tilde{F}$ est connexe pour tout i. Cette dernière condition s'écrit aussi $H_1(\tilde{N}, \tilde{N} \cap \tilde{F}) = 0$.

Par conséquent, le point 1 du théorème 4.3 résulte immédiatement des 4 remarques suivantes:

(a) Les feuilletages $\mathscr{F}$ et $\mathscr{F}|S$ n'ont qu'une composante de Novikov si et seulement si les feuilletages $\mathscr{F}|A$ et $\mathscr{F}|B$ n'ont qu'une composante de Novikov.

(b) De la suite exacte de Mayer-Vietoris en homologie singulière pour le quadruplet (M, A, B, S), on tire la suite exacte suivante:

$$H_1(\tilde{S}, \tilde{S} \cap \tilde{F}) \to H_1(\tilde{A}, \tilde{A} \cap \tilde{F}) \oplus H_1(\tilde{B}, \tilde{B} \cap \tilde{F}) \to H_1(\tilde{M}, \tilde{F}) \to H_0(\tilde{S}, \tilde{S} \cap \tilde{F})$$

(c) Comme $\mathscr{F}|S$ est non dégénéré, d'après la proposition 3.2, on a $H_0(\tilde{S}, \tilde{S} \cap \tilde{F}) = 0$.

(d) Comme S est le bord de A, si $\mathscr{F}|A$ est complet, alors $\mathscr{F}|S$ est complet.

Point 2. Comme B n'est pas simplement connexe relativement à S, l'ensemble $\tilde{A}$ possède au moins deux composantes connexes distinctes $\tilde{A}_1$, $\tilde{A}_2$. Soit $\tilde{S}_i$ une des composantes connexes de $\tilde{S}$ qui séparent $\tilde{A}_1$ de $\tilde{A}_2$. Comme $\mathscr{F}|S$ est dégénéré, son groupe d'holonomie fixe un réel x. Notons $\tilde{F}=\tilde{D}^{-1}(x)$. Comme $\mathscr{F}|S$ n'a qu'une composante de Novikov, $\tilde{F}$ ne rencontre pas $\tilde{S}_i$, car l'intersection $\tilde{S}_i \cap \tilde{F}$ aurait pour image dans S une composante de Novikov fermée.

Au contraire, comme $\mathscr{F}|A$ est non dégénéré, d'après le lemme 3.2, la surface $\tilde{F}$ rencontre $\tilde{A}_1$ et $\tilde{A}_2$. Il en résulte que $\tilde{F}$ n'est pas connexe, et donc que $\mathscr{F}$ n'est pas complet. ■

REMARQUE. Dans le point 2 du théorème 4.3, l'hypothèse que $\mathscr{F}|S$ n'a qu'une composante de Novikov sert à s'assurer que son application développante n'est pas surjective. Cette hypothèse n'est utile que dans le cas où $\mathscr{F}$ est transversalement affine. En effet, quand $\mathscr{F}$ est transversalement projectif, le fait que S soit compacte et le fait que $\mathscr{F}|S$ soit dégénéré impliquent que l'application développante de $\mathscr{F}|S$ n'est pas surjective.

B. Le revêtement d'holonomie.

DÉFINITION. Le *revêtement d'holonomie* de $\mathscr{F}$ est le revêtement de M dont le groupe fondamental est exactement le noyau de la représentation d'holonomie de $\mathscr{F}$. En d'autres termes, son groupe est $\Gamma(\mathscr{F})$.

Notons ce revêtement $\bar{M}$. Fixons une application développante de $\mathscr{F}$ relevé à $\bar{M}$, que nous noterons $\bar{D}$. Notons $\bar{P}$ l'image inverse de P dans $\bar{M}$. C'est le revêtement d'holonomie de $\mathscr{F}$-restreint-à-P.

DÉFINITIONS ET NOTATIONS. En effectuant le quotient de l'application $\bar{D}$ par l'action de $\Gamma(\mathscr{F})$, on trouve une application de M sur $\boldsymbol{R}/\Gamma(\mathscr{F})$. Celle-ci est constante sur les feuilles, donc quotiente en une application continue ouverte, dite *développement*, de $M/\mathscr{F}$ sur $\boldsymbol{R}/\Gamma(\mathscr{F})$, que nous noterons D.

Considérons par ailleurs les courbes fermées tangentes au feuilletage et sans holonomie. Leurs classes d'homotopie libre engendrent un sous-groupe normal $L(\mathscr{F})$ du groupe fondamental de la variété. Il est clair que $L(\mathscr{F})$ est contenu dans le noyau de $H(\mathscr{F})$. Notons $Q(\mathscr{F})$ le quotient $\mathrm{KER}(H(\mathscr{F}))/L(\mathscr{F})$.

On se demande quand le développement de $M/\mathscr{F}$ sur $\boldsymbol{R}/\Gamma(\mathscr{F})$ est un homéomorphisme.

PROPOSITION 4.4. (i) *Les points équivalents de la proposition* 4.1 *impliquent les cinq propriétés ci-dessous.*

1. *Pour tout réel t, l'ensemble $\bar{P} \cap \bar{D}^{-1}(t)$ est connexe.*
2. *$\bar{D}$ passe au quotient en un homéomorphisme de l'espace des feuilles $\bar{P}/\bar{\mathscr{F}}$ sur $\boldsymbol{R}$.*
3. *D est un homéomorphisme de l'espace des feuilles $P/\mathscr{F}$ sur $\boldsymbol{R}/\Gamma(\mathscr{F})$.*

4. *Pour presque tout réel t (au sens de Baire), l'ensemble* $\bar{P} \cap \bar{D}^{-1}(t)$ *est connexe.*

5. $\bar{P}$ *n'a qu'un bout dans la direction* $\bar{D}$, *ainsi que dans la direction opposée* $-\bar{D}$.

(ii) *On a* $1 \Leftrightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 5$.

(iii) *Si* $Q(\mathscr{F})$ *ne se surjecte pas sur le groupe libre à une infinité de générateurs (ceci est vrai par exemple si* $\pi_1(M)$ *ne contient pas de sous-groupe libre à deux générateurs), alors* $5 \Rightarrow 1$.

(Dans le cadre des 1-formes fermées à singularités de Morse des variétés compactes, les propriétés 1 à 4 sont équivalentes et c'est la propriété appelée "complétude faible" dans [L]).

DÉMONSTRATION. Preuve du point (i). Supposons vrais les points équivalents de la proposition 4.1 et démontrons la propriété 1 de la présente proposition.

Fixons un réel t. Puisque le point 3 de la proposition 4.1 est vrai, l'ensemble $\tilde{P} \cap \tilde{D}^{-1}(t)$ est connexe. Donc l'ensemble $\bar{P} \cap \bar{D}^{-1}(t)$, qui en est l'image surjective, est connexe lui aussi.

Preuve du point (ii).

$1 \Leftrightarrow 2$. Evident.

$2 \Rightarrow 3$. Evident.

$3 \Rightarrow 4$. Prouvons la contraposée. Si 4 est en défaut, alors il existe un réel t qui n'est fixé par aucun élément de $\Gamma(\mathscr{F})$ autre que l'identité et tel que l'ensemble $\bar{P} \cap \bar{D}^{-1}(t)$ n'est pas connexe. Prenons deux de ses composantes. Si un élément de $\Gamma(\mathscr{F})$ les conjuguait, il fixerait t, ce qui est impossible. Donc elles ont pour image dans P deux feuilles distinctes. Ces deux feuilles ont même image par D dans $\boldsymbol{R}/\Gamma(\mathscr{F})$ (la classe de t), si bien que D n'est pas injectif.

$4 \Rightarrow 5$. Plaçons-nous dans $\bar{P}$. Choisissons un réel t tel que $\bar{P} \cap \bar{D}^{-1}(t)$ est connexe. Considérons l'ensemble $\bar{P} \cap \bar{D}^{-1}([t, +\infty[)$. Son bord dans $\bar{P}$ est $\bar{P} \cap \bar{D}^{-1}(t)$, qui est connexe. L'ensemble $\bar{P} \cap \bar{D}^{-1}([t, +\infty[)$ est donc lui-même connexe. D'après la proposition 3.4, $\bar{P}$ n'a qu'un bout dans la direction $\bar{D}$. Un raisonnement analogue montre que $\bar{P}$ n'a qu'un bout dans la direction opposée $-\bar{D}$.

Preuve du point (iii). Supposons maintenant que $\bar{P}$ n'a qu'un bout dans la direction $\bar{D}$, ainsi que dans la direction opposée $-\bar{D}$, et supposons aussi qu'il existe un réel t tel que $\bar{P} \cap \bar{D}^{-1}(t)$ est disconnexe; et exhibons un quotient de $Q(\mathscr{F})$ libre à une infinité de générateurs.

Soit F l'une des composantes de $\bar{P} \cap \bar{D}^{-1}(t)$. Comme $\mathscr{F}$ n'est pas dégénéré, il existe dans $\Gamma(\mathscr{F})$ un élément α sans point fixe. Les $\alpha^n(F)$ forment dans $\bar{M}$ une famille discrète fermée d'hypersurfaces fermées. Considérons le graphe $\mathscr{G}$ dont les arêtes correspondent à ces hypersurfaces, et les sommets aux composantes connexes du complémentaire de leur réunion. Ce graphe est connexe, et le groupe fondamental de $\bar{M}$, qui n'est autre que le noyau de $H(\mathscr{F})$, se surjecte sur le groupe fondamental de $\mathscr{G}$, qui est libre. Le sous-groupe $L(\mathscr{F})$ est évidemment contenu dans le noyau de cette surjection.

Il ne nous reste donc qu'à montrer que $\mathscr{G}$ possède une infinité de cycles indépendants.

Comme $\bar{P}$ n'a qu'un bout dans la direction $\bar{D}$, ainsi que dans la direction opposée $-\bar{D}$, la proposition 3.4 affirme que les ensembles $\bar{P} \cap \bar{D}^{-1}(]-\infty, t])$ et $\bar{P} \cap \bar{D}^{-1}([t, +\infty[)$ sont connexes. Il y a donc dans $\bar{P}$ une courbe fermée C rencontrant F transversalement, une et une seule fois. Considérons le minimum x de $\bar{D}$ sur C et le maximum y de $\bar{D}$ sur C. Il existe un entier n, tel que $\alpha^n(x) > y$.

Quel que soit l'entier i, la courbe fermée $\alpha^{in}(C)$ rencontre $\alpha^{in}(F)$ transversalement, une et une seule fois, mais ne rencontre aucune autre $\alpha^{jn}(F)$. Donc cette courbe représente dans $\mathscr{G}$ un cycle dual de l'arête $\alpha^{in}(F)$, mais disjoint de toutes les autres arêtes $\alpha^{jn}(F)$. On est donc devant une infinité de cycles indépendants, et donc le groupe fondamental de $\mathscr{G}$ est libre à une infinité de générateurs. ∎

C. Applications.

Rappelons qu'une feuille *exceptionnelle* est une feuille dont la fermeture est transversalement un ensemble de Cantor.

On sait qu'il n'y en a pas dans les feuilletages transversalement euclidiens, même singuliers, des variétés compactes (Imanishi; voir [AL], appendice). Cependant on connaît un example de feuille exceptionnelle dans un feuilletage transversalement euclidien non singulier d'une variété non compacte (Imanishi, voir [I]), ainsi que dans un feuilletage transversalement affine non singulier d'une variété compacte (Hector, non publié, voir [M1]).

Rappelons aussi que $\Gamma(\mathscr{F})$ ne peut posséder une orbite *exceptionnelle* (c'est-à-dire dont la fermeture est totalement discontinue et sans point isolé) que quand $\mathscr{F}$ est transversalement projectif, et jamais quand $\mathscr{F}$ est transversalement euclidien ou affine.

PROPOSITION 4.5. *Soit $\mathscr{F}$ un feuilletage principal non dégénéré qui est soit transversalement euclidien, soit transversalement affine, soit transversalement projectif avec dans son groupe d'holonomie une translation entière.*

On suppose que le noyau de $H(\mathscr{F})$ n'a pas de quotient libre à une infinité de générateurs: par exemple, il est de type fini, ou moyennable....

Alors l'espace des feuilles de la composante principale est homéomorphe à $\boldsymbol{R}/\Gamma(\mathscr{F})$. En particulier, la composante principale contient une feuille exceptionnelle si et seulement si $\Gamma(\mathscr{F})$ possède une orbite exceptionnelle.

DÉMONSTRATION. Soient P la composante principale. Considérons $\Gamma(\mathscr{F})$ comme un groupe muni d'un morphisme dans $\boldsymbol{R}$, $GA(1, \boldsymbol{R})$ ou $\widetilde{SL}(2, \boldsymbol{R})$: l'inclusion. Le théorème 3.10 de [M2] montre que $\Gamma(\mathscr{F})$ n'a qu'un bout fin dans cette direction (dans le cas projectif, nous employons ici le fait que $\Gamma(\mathscr{F})$ contient une translation entière).

Le théorème 3.5 conclut que $\bar{P}$ n'a qu'un bout dans la direction $\bar{D}(\mathscr{F})$. Le même raisonnement appliqué au feuilletage opposé à $\mathscr{F}$ conclut que $\bar{P}$ n'a qu'un bout dans la direction opposée $-\bar{D}(\mathscr{F})$.

Grâce au point iii de la proposition 4.4, et à l'hypothèse que le noyau de $H(\mathscr{F})$ n'a pas de quotient libre à une infinité de générateurs, nous savons que pour tout réel t, l'ensemble $\bar{P} \cap \bar{D}^{-1}(t)$ est connexe. Ceci implique (point ii de cette même proposition) que D est un homéomorphisme de l'espace des feuilles $P/\mathscr{F}$ sur $\boldsymbol{R}/\Gamma(\mathscr{F})$. ■

Démontrons enfin la proposition 4.6 (pour l'énoncé, se reporter à l'introduction).

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 4.6. Soit $\mathscr{F}$ un feuilletage non dégénéré d'une variété M. Supposons que $\pi_1(M)$ et $H(\mathscr{F})$ tombent dans l'un des seize cas énoncés dans l'introduction. Alors d'après le théorème 3.10 ou 3.19 de [M2], ou l'une des propositions 3.11 à 3.18 de [M2], $\pi_1(M)$ n'a qu'un bout fin dans la direction $H(\mathscr{F})$, ainsi que dans la direction $-H(\mathscr{F})$.

D'après le théorème 2.3 du présent article, ce feuilletage est principal.

D'après le théorème 3.5 l'image inverse, dans le revêtement universel de M, de la composante principale, n'a qu'un bout dans la direction $\tilde{D}(\mathscr{F})$, ainsi que dans la direction $-\tilde{D}(\mathscr{F})$.

D'après la proposition 4.1, tout chemin contenu dans la composante principale est homotope à un chemin transverse ou tangent à $\mathscr{F}$.

D'après la proposition 4.4, point (i) l'espace des feuilles de la composante principale est homéomorphe à l'espace des orbites du groupe d'holonomie.

En particulier, si ce feuilletage est transversalement euclidien ou transversalement affine, alors sa composante principale est dépourvue de feuille exceptionnelle. ■

5. Exemple. Soit une surface compacte orientable sans bord Σ de genre ≥ 2. Nous allons prouver les deux propositions suivantes:

PROPOSITION 5.1. *Il existe sur $\Sigma \times \boldsymbol{R}$ deux feuilletages transversalement euclidiens $\mathscr{E}_1$, $\mathscr{E}_2$, non dégénérés, non dégénérés, à feuilles denses, qui vérifient les deux propriétés suivantes:*

Ils ont la même représentation d'holonomie.

Le revêtement universel de $\Sigma \times \boldsymbol{R}$ n'a qu'un bout dans la direction $\tilde{D}(\mathscr{E}_1)$ et a une infinité de bouts dans la direction $-\tilde{D}(\mathscr{E}_1)$. Au contraire, il a une infinité de bouts dans la direction $\tilde{D}(\mathscr{E}_2)$ et n'a qu'un bout dans la direction $-\tilde{D}(\mathscr{E}_2)$.

Ceci montre que le corollaire 1.2 est faux pour les variétés non compactes, et donc montre qu'il n'y a pas d'espoir d'étendre le point 2 du théorème 3.6 aux feuilletages, même transversalement euclidiens et non singuliers, des variétés non compactes, même topologiquement finies comme $\Sigma \times \boldsymbol{R}$.

PROPOSITION 5.2. *Il existe une variété M de dimension 3, fibrant sur le cercle avec pour fibre Σ, et deux feuilletages transversalement affines $\mathscr{A}_1$, $\mathscr{A}_2$ de M, non singuliers, non dégénérés, à feuilles denses, qui vérifient les deux propriétés suivantes:*

Ils ont la même représentation d'holonomie.

Le revêtement universel de M n'a qu'un bout dans la direction $\tilde{D}(\mathscr{A}_1)$ et a une infinité de bouts dans la direction $-\tilde{D}(\mathscr{A}_1)$. Au contraire, il a une infinité de bouts dans la direction $\tilde{D}(\mathscr{A}_2)$ et n'a qu'un bout dans la direction $-\tilde{D}(\mathscr{A}_2)$.

Ceci montre que le corollaire 1.2 ne s'étend pas aux feuilletages transversalement affines, même non singuliers, des variétés compactes.

Ces deux propositions sont deux points de vue sur un seul et même exemple. Le reste de cette section est consacré à la construction de cet exemple et à la preuve des propriétés annoncées dans ces propositions.

DÉMONSTRATION DES PROPOSITIONS 5.2 ET 5.1. On peut construire un difféomorphisme ϕ de Σ, et une 1-forme fermée ω, dont les singularités sont des selles, et à feuilles denses, tels qu'il existe une constante réelle $\lambda > 1$, pour laquelle:

$$\phi^*\omega = \lambda\omega .$$

Pour la construction, voir [FLP], exposé 13, §II.

Soit M la suspension de ϕ, c'est-à-dire le quotient de $\hat{M} = \Sigma \times \boldsymbol{R}$ par le difféomorphisme $\Phi\colon (p, x) \to (\phi(p), x+1)$. Nous allons voir que ω induit sur M deux feuilletages transversalement affines non singuliers $\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{A}_2$.

Donnons des noms aux projections:

$$\begin{tikzcd}
\tilde{\Sigma} \arrow[d, "\sigma"'] & \tilde{M} = \tilde{\Sigma} \times \boldsymbol{R} \arrow[l, "\tilde{\pi}"'] \arrow[d, "\mu"'] \arrow[dr, "\tilde{x}"] & \\
\Sigma & \hat{M} = \Sigma \times \boldsymbol{R} \arrow[l, "\pi"'] \arrow[r, "x"] \arrow[d] & \boldsymbol{R} \\
 & M &
\end{tikzcd}$$

Désingularisons $\pi^*\omega$ de deux façons différentes: soient

$$\Omega_1 = \pi^*\omega + \lambda^x dx \qquad \Omega_2 = \pi^*\omega - \lambda^x dx .$$

Ce sont deux 1-formes fermées non-singulières sur $\hat{M}$, elles y définissent donc deux feuilletages transversalement euclidiens non singuliers: $\mathscr{E}_1$ et $\mathscr{E}_2$. Or Ω_1 et Ω_2 sont équivariantes pour l'action de Φ:

$$\Phi^*\Omega_1 = \lambda\Omega_1 \qquad \Phi^*\Omega_2 = \lambda\Omega_2 .$$

Par conséquent, le difféomorphisme Φ respecte $\mathscr{E}_1$ et $\mathscr{E}_2$ en tant que feuilletages, mais modifie leur structure euclidienne transverse. Cependant nous pouvons considérer $\mathscr{E}_1$ et $\mathscr{E}_2$ comme des feuilletages transversalement *affines*, et nous voyons que Φ respecte cette structure affine transverse. Donc $\mathscr{E}_1$ et $\mathscr{E}_2$ se projettent sur M en deux feuilletages transversalement affines non singuliers: $\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{A}_2$.

Notons aussi $\mathscr{E}$ le feuilletage transversalement euclidien singulier tracé par ω sur Σ.

Les formes fermées Ω_1 et Ω_2 sont cohomologues entre elles (et cohomologues à $\pi^*\omega$). En d'autres termes, $\mathscr{E}$, $\mathscr{E}_1$ et $\mathscr{E}_2$ ont même représentation d'holonomie. Comme ω est à feuilles denses, le groupe d'holonomie est non nul. En d'autres termes, $\mathscr{E}_1$ et $\mathscr{E}_2$ ne sont pas dégénérés.

Donc $\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{A}_2$ ont aussi même représentation d'holonomie. La représentation $H(\mathscr{A}_1)=H(\mathscr{A}_2)$ est d'ailleurs aisée à calculer. Remarquons seulement ici que le groupe d'holonomie linéaire (i.e. l'image de $\Gamma(\mathscr{A}_1)=\Gamma(\mathscr{A}_2)$ dans $\boldsymbol{R}_+^*$) est le groupe des puissances de λ; tandis que le groupe des périodes (i.e. l'intersection de $\Gamma(\mathscr{A}_1)=\Gamma(\mathscr{A}_2)$ avec le groupe $\boldsymbol{R}$ des translations) est le groupe d'holonomie de $\mathscr{E}$. En particulier, $\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{A}_2$ ne sont pas dégénérés.

Montrons maintenant que $\mathscr{E}_1$, $\mathscr{E}_2$, $\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{A}_2$ sont à feuilles denses. Les feuilles de $\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{A}_2$ sont les images des feuilles de $\mathscr{E}_1$ et $\mathscr{E}_2$, il suffit donc de montrer que $\mathscr{E}_1$ et $\mathscr{E}_2$ sont à feuilles denses.

Soit une feuille F de $\mathscr{E}_1$ (resp. $\mathscr{E}_2$). Nous allons construire une section de $\hat{M}$ au-dessus de $\boldsymbol{R}$, dont l'image sera contenue dans F. Donc l'intersection de F avec chaque fibre, identifiée à Σ, sera une réunion *non vide* de feuilles de $\mathscr{E}$. Comme les feuilles de $\mathscr{E}$ sont denses dans Σ, la feuille F sera dense dans $\hat{M}$.

Pour construire cette section, choisissons sur cette feuille un point (p_0, x_0) dont l'image p_0 dans Σ n'est pas une singularité de $\mathscr{E}$. Il existe dans Σ une courbe fermée transverse à $\mathscr{E}$ et qui passe par p_0. Soit

$$\gamma: \boldsymbol{R}\to\Sigma: y\to\gamma(y)$$

le paramétrage de cette courbe tel que $\gamma^*\omega=dy$ et qui passe par p_0 à l'instant $y_0=\alpha(x_0)$, où α est défini par

$$\alpha: \boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}: x\to -\mathrm{Log}(\lambda)^{-1}\lambda^x$$

$$(\text{resp. } \alpha: \boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}: x\to +\mathrm{Log}(\lambda)^{-1}\lambda^x)\,.$$

Notre section est l'application $\sigma: x\to(\gamma(\alpha(x)), x)$. Vérifions que son image est contenue dans F, par exemple dans le cas de $\mathscr{E}_1$. D'une part, $\sigma(x_0)=(p_0, x_0)$ appartient à F. D'autre part,

$$\alpha^*dy=-\lambda^x dx$$

donc

$$\sigma^*\Omega_1=\alpha^*\gamma^*\omega+\lambda^x dx=0$$

ce qui montre que le chemin σ est tangent à $\mathscr{E}_1$.

Considérons maintenant l'application développante de $\mathscr{A}_1$ qui est aussi celle de $\mathscr{E}_1$, que nous noterons $\tilde{D}_1: \tilde{M}\to\boldsymbol{R}$; et l'application développante de $\mathscr{A}_2$ qui est aussi celle de $\mathscr{E}_2$, que nous noterons $\tilde{D}_2: \tilde{M}\to\boldsymbol{R}$.

Je dis que $\tilde{M}$ n'a qu'un bout dans la direction $\tilde{D}_1$, ainsi que dans la direction $-\tilde{D}_2$. Ceci découle de deux propriété évidentes des champs de vecteurs définis comme suit sur $\hat{M}$:

$$X_1=+\lambda^{-x}\partial/\partial x \qquad X_2=-\lambda^{-x}\partial/\partial x\,.$$

La première de ces propriétés est que:

$$\Omega_1 \cdot X_1 = \Omega_2 \cdot X_2 = 1 .$$

La seconde propriété est que X_1 est intégrable à droite, au sens que l'orbite de chaque point de $\hat{M}$ est définie pour toutes les valeurs positives du paramètre. Symétriquement, X_2 est intégrable à gauche.

Plaçons-nous dans $\tilde{M}$. Soient $\tilde{X}_1 = \mu^* X_1$ et $\tilde{X}_2 = \mu^* X_2$ les relevés de X_1 et X_2. Ils sont donc intégrables l'un à droite, l'autre à gauche. Les différentielles de $\tilde{D}_1$ et $\tilde{D}_2$ ne sont autres que $\mu^*\Omega_1$ et $\mu^*\Omega_2$, donc $\tilde{X}_1$ est un champ de gradient pour $\tilde{D}_1$ et $\tilde{X}_2$ est un champ de gradient pour $\tilde{D}_2$.

Nous pouvons maintenant prouver que $\tilde{D}_1^{-1}([y, +\infty[)$ et $\tilde{D}_2^{-1}(]-\infty, y])$ sont connexes, quel que soit le réel y. En effet, ce sont des rétracts de $\tilde{M}$. La rétraction consiste pour l'un, à suivre positivement le flot de $\tilde{X}_1$ jusqu'à ce que $\tilde{D}_1$ devienne supérieur ou égal à y; pour l'autre, à suivre négativement le flot de $\tilde{X}_2$ jusqu'à ce que $\tilde{D}_2$ devienne inférieur ou égal à y.

D'après la proposition 3.4, $\tilde{M}$ n'a qu'un bout dans la direction $\tilde{D}_1$, ainsi que dans la direction $-\tilde{D}_2$.

Montrons enfin que $\tilde{M}$ a une infinité de bouts dans la direction $-\tilde{D}_1$, ainsi que dans la direction $\tilde{D}_2$. Nous allons procéder par comparaison avec $\mathscr{E}$.

Considérons en effet une application $\tilde{D}(\mathscr{E})$: $\tilde{\Sigma} \to \boldsymbol{R}$ développante de $\mathscr{E}$, c'est-à-dire une primitive de $\sigma^*\omega$. Les ensembles $\tilde{D}(\mathscr{E})^{-1}([y, +\infty[)$ et $\tilde{D}(\mathscr{E})^{-1}(]-\infty, y])$ ont une infinité de composantes connexes (quel que soit le réel y). Outre que c'est une propriété bien connue des 1-formes fermées sur les surfaces de grand genre, ce serait un cas simple d'application de nos théorèmes... si nous n'avions exclu les feuilletages des surfaces de notre étude.

Considérons sur $\tilde{M}$ la fonction $\tilde{D} = \tilde{D}(\mathscr{E}) \circ \tilde{\pi}$. Faisons maintenant un choix précis de $\tilde{D}_1$ et $\tilde{D}_2$:

$$\tilde{D}_1 = \tilde{D} + \lambda^{\tilde{x}} \qquad \tilde{D}_2 = \tilde{D} - \lambda^{\tilde{x}} .$$

Prouvons que $\tilde{D}_1^{-1}(]-\infty, y])$ a une infinité de composantes connexes, quel que soit y. On remarque que $\tilde{D}_1 > \tilde{D}$, et par conséquent $\tilde{D}_1^{-1}(]-\infty, y])$ est contenu dans $\tilde{D}^{-1}(]-\infty, y])$. Or nous savons que $\tilde{D}^{-1}(]-\infty, y])$ a une infinité de composantes connexes, puisque c'est simplement l'image inverse par $\tilde{\pi}$ de $\tilde{D}(\mathscr{E})^{-1}(]-\infty, y])$. Il suffit donc de prouver que chaque composante connexe de $\tilde{D}^{-1}(]-\infty, y])$ rencontre $\tilde{D}_1^{-1}(]-\infty, y])$. Pour cela, on se restreint à une hypersurface $\tilde{\Sigma} \times \{x_0\}$ rencontrant cette composante, et cela revient à dire simplement que sur chaque composante de $\tilde{D}(\mathscr{E})^{-1}(]-\infty, y])$, la fonction $\tilde{D}(\mathscr{E})$ prend une valeur plus petite que $y - \lambda^{x_0}$. Ceci est encore bien connu, et si nous n'étions sur une surface, résulterait de notre proposition 3.3 (point 3). Donc d'après la proposition 3.4, $\tilde{M}$ a une infinité de bouts dans la direction $-\tilde{D}_1$.

Un raisonnement semblable montre que $\tilde{D}_2^{-1}([y, +\infty[)$ a une infinité de composantes connexes: on remarque que $\tilde{D}_2 < \tilde{D}$, et par conséquent $\tilde{D}_2^{-1}([y, +\infty[)$ est contenu dans $\tilde{D}^{-1}([y, +\infty[)$. Ce dernier a une infinité de composantes connexes, puisque c'est simplement l'image inverse par $\tilde{\pi}$ de $\tilde{D}(\mathscr{E})^{-1}([y, +\infty[)$. Enfin, quel que soit x_0, sur chaque composante de $\tilde{D}(\mathscr{E})^{-1}([y, +\infty[)$, la fonction $\tilde{D}(\mathscr{E})$ prend une valeur plus grande que $y+\lambda^{x_0}$; et cela montre que chaque composante connexe de $\tilde{D}^{-1}([y, +\infty[)$ rencontre $\tilde{D}_2^{-1}([y, +\infty[)$.

D'après la proposition 3.4, $\tilde{M}$ a une infinité de bouts dans la direction $\tilde{D}_2$. ■

REMARQUE. Les feuilletages construits dans le présent paragraphe sur la variété M sont des perturbations de la fibration de M sur le cercle. Plus précisément, considérons, pour chaque réel t, la 1-forme fermée

$$\Omega(t) = t\pi^*\omega + \lambda^x dx .$$

C'est une 1-forme fermée non-singulière sur $\hat{M}$, qui se projette sur M en un feuilletage transversalement affine non singulier: $\mathscr{A}(t)$.

Pour $t \neq 0$, le feuilletage $\mathscr{A}(t)$ n'est pas complet. En fait, le revêtement universel de M n'a qu'un bout dans la direction $\tilde{D}(\mathscr{A}(t))$ et a une infinité de bouts dans la direction $-\tilde{D}(\mathscr{A}(t))$. (Même preuve que pour $\mathscr{A}_1$).

Pour $t=0$, le feuilletage $\mathscr{A}(t)$ est la fibration de M sur le cercle.

REFERENCES

[AL] P ARNOUX ET G LEVITT, Sur l'unique ergodicité des 1-formes fermées singulières, Invent Mat 84 (1986), 141–156

[B] R. A. BLUMENTHAL, Transversely homogenous foliations, Ann Inst Fourier, Grenoble, 29 (1979), 143–158

[BNS] R. BIERI, W D NEUMANN ET R. STREBEL, A geometric invariant of discrete groups, Invent Math 90 (1987), 451–477

[BS] BOBO SEKE, Sur les structures transversalement affines des feuilletages de codimension 1, Ann Inst Fourier, Grenoble, 30 (1980), 1–29

[FLP] A FATHI, F LAUDENBACH ET V POENARU, Travaux de Thurston sur les surfaces, Séminaire Orsay, Astérisque 66–67 (1979).

[I] H IMANISHI, Structure of codimension 1 foliations without holonomy on manifolds with abelian fundamental group, J Math Kyoto Univ 19 (1979), 481–495

[L] G LEVITT, 1-formes fermées singulières et groupe fondamental, Invent Math 88 (1987), 635–667

[M1] G MEIGNIEZ, Actions de groupes sur la droite et feuilletages de codimension un, Thèse, Univ Lyon 1 (1988).

[M2] G. MEIGNIEZ, Bouts des groupes opérant sur la droite, I: Théorie algébrique, Ann Inst Fourier, Grenoble, 40 (1990), 271–312

[P] C F B PALMEIRA, Open manifolds foliated by planes, Ann of Math 107 (1978), 109–131

UNIVERSITE PARIS 7
UFR DE MATHEMATIQUES
2, PLACE JUSSIEU
75251 PARIS CEDEX 05
FRANCE