И. А. Баталин, И. В. Тютин, БРСТ-инвариантная алгебра связей в терминах коммутаторов и квантовых антискобок, *ТМФ*, 2004, том 138, номер 1, 3–22

DOI: https://doi.org/10.4213/tmf4

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 138, № 1
январь, 2004

 И. А. Баталин*, И. В. Тютин*

БРСТ-ИНВАРИАНТНАЯ АЛГЕБРА СВЯЗЕЙ В ТЕРМИНАХ КОММУТАТОРОВ И КВАНТОВЫХ АНТИСКОБОК

На основе формулировки производящих уравнений в дополнительно расширенном фазовом пространстве установлена общая структура БРСТ-инвариантной алгебры связей в коммутаторной и антискобочной формах. Новые переменные гостовского типа обладают относительно квантовой антискобки свойствами полей и антиполей. Приведена явная форма БРСТ-инвариантной калибровочной алгебры для теорий ранга 1 для случаев вейлевского и виковского упорядочений гостовского сектора. Построен унитаризующий гамильтониан в фиксированной калибровке, и показано, что расширенный формализм эквивалентен стандартному БРСТ–БВФ-подходу.

Ключевые слова: БРСТ-симметрия, алгебра связей, квантовые антискобки.

1. ВВЕДЕНИЕ

При квантовании калибровочных теорий общего вида руководящий принцип состоит в построении фермионного оператора БРСТ-заряда Ω, который удовлетворяет стандартной БРСТ-алгебре $\Omega^2 \equiv [\Omega, \Omega]/2 = 0$, $[G_C, \Omega] = i\hbar\Omega$, где G_C – бозонный оператор гостовского числа [1]–[3]. При разложении в ряд по степеням канонических гостовских переменных $(C^\alpha, \overline{\mathcal{P}}_\alpha)$ оператор Ω имеет вид $\Omega = C^\alpha T_\alpha + O(C^2\overline{\mathcal{P}})$, где T_α представляют собой исходные связи первого рода, действующие как генераторы калибровочной алгебры.

Замечательно, что существуют БРСТ-инвариантные модифицированные связи

$$\mathcal{T}_\alpha = (i\hbar)^{-1}[\Omega, \overline{\mathcal{P}}_\alpha] = T_\alpha + O(C\overline{\mathcal{P}}),$$

по построению удовлетворяющие условию $[\Omega, \mathcal{T}_\alpha] = 0$, которые, по существу, задают новый предписываемый динамикой набор генераторов калибровочной алгебры. Так как

*Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва, Россия. E-mail: batalin@lpi.ru, tyutin@lpi.ru

эти генераторы существенно зависят от гостовских операторов $(C^\alpha, \overline{\mathcal{P}}_\alpha)$, они определены в расширенном фазовом пространстве, в противоположность исходным связям первого рода T_α.

Основная идея настоящей работы состоит в переформулировке стандартной БРСТ–БВФ-схемы квантования непосредственно в терминах БРСТ-инвариантных связей $\mathcal{T}_\alpha$, рассматриваемых как новые базисные ингредиенты, посредством дальнейшего расширения фазового пространства, которое прежде описывалось исходными фазовыми переменными и обычными гостами $(C^\alpha, \overline{\mathcal{P}}_\alpha)$. Главной мотивацией было ожидание того, что связи $\mathcal{T}_\alpha$ будут иметь, вообще говоря, лучшие алгебраические свойства, чем исходные связи T_α. В частности, как хорошо известно, это происходит в теории бозонной струны (см. [4] и приведенные там ссылки), где алгебра исходных генераторов Вирасоро центрально-расширена, в то время как алгебра соответствующих БРСТ-инвариантных генераторов совпадает с классической.

Характерным свойством БРСТ-инвариантных генераторов $\mathcal{T}_\alpha$ является тот факт, что их алгебра замкнута только в том случае, когда исходные связи первого рода образуют алгебру лиевского типа с постоянными структурными коэффициентами. Оказывается, однако, что алгебра, образуемая генераторами $\mathcal{T}_\alpha$ и гостовскими импульсами $\overline{\mathcal{P}}_\alpha$, всегда замкнута по построению. Это обстоятельство позволяет сформулировать замкнутую систему производящих уравнений БРСТ-инвариантной калибровочной алгебры в дополнительно расширенном фазовом пространстве. С этой целью мы введем два набора новых канонических пар гостовского типа (B^α, Π_α) и $(B^*_\alpha, \Pi^\alpha_*)$, которые ведут себя как поля и антиполя относительно квантовых антискобок.

Оказывается, что новые производящие уравнения БРСТ-инвариантной калибровочной алгебры приводятся к форме операторнозначного мастер-уравнения [5], сформулированного в терминах квантовых антискобок, введенных в работе [6]. Эти квантовые антискобки естественным образом генерируют операторнозначные антиканонические преобразования. Мы опишем их общий вид и трансформационные свойства антискобок, используя дифференциальные уравнения по вспомогательной переменной.

В результате мы получаем два дуальных описания БРСТ-инвариантной калибровочной алгебры в терминах стандартных коммутаторов и квантовых антискобок. Для иллюстрации этого дуализма в техническом отношении подробно рассмотрен случай теорий ранга 1 с вейлевским и виковским упорядочением гостовского сектора.

Как обычно, $\varepsilon(f) \equiv \varepsilon_f$ означает грассманову четность величины f, $[f,g]$ означает стандартный суперкоммутатор $[f,g] \equiv fg - (-1)^{\varepsilon_f \varepsilon_g} gf$ любых двух операторов f и g. Он удовлетворяет стандартному правилу Лейбница, $[fg,h] = f[g,h] + [f,h]g(-1)^{\varepsilon_g \varepsilon_h}$, и тождеству Якоби, $\big[f,[g,h]\big]\,(-1)^{\varepsilon_f \varepsilon_h} + \mathrm{cycle}(f,g,h) = 0$. Смысл других обозначений ясен из контекста.

2. КВАНТОВЫЕ АНТИСКОБКИ И АНТИКАНОНИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Здесь мы напомним определения и свойства квантовых антискобок, введенных в работах [6], [7]. Затем определим операторнозначные антиканонические преобразования и выведем трансформационные свойства антискобок относительно антиканонических преобразований их аргументов.

Пусть Q – фермионный нильпотентный оператор,

$$\varepsilon(Q) = 1, \qquad Q^2 \equiv \frac{1}{2}[Q, Q] = 0. \tag{2.1}$$

Тогда квантовая антискобка любых двух операторов f и g определяется формулой

$$(f, g)_Q \equiv \frac{1}{2}\big(\big[f, [Q, g]\big] - \big[g, [Q, f]\big](-1)^{(\varepsilon_f+1)(\varepsilon_g+1)}\big). \tag{2.2}$$

Она обладает следующими свойствами:

$$\varepsilon\big((f, g)_Q\big) = \varepsilon_f + \varepsilon_g + 1, \tag{2.3}$$

$$(f, g)_Q = -(g, f)_Q(-1)^{(\varepsilon_f+1)(\varepsilon_g+1)}. \tag{2.4}$$

Из определения (2.2) следует, что справедливы модифицированные правило Лейбница

$$\begin{aligned}(fg, h)_Q - f(g, h)_Q - (f, h)_Q g(-1)^{\varepsilon_g(\varepsilon_h+1)} &= \\ = \frac{1}{2}\big([f, h][g, Q](-1)^{\varepsilon_h(\varepsilon_g+1)} + [f, Q][g, h](-1)^{\varepsilon_g}\big)&\end{aligned} \tag{2.5}$$

и тождество Якоби

$$\big(f, (g, h)_Q\big)_Q(-1)^{(\varepsilon_f+1)(\varepsilon_h+1)} + \text{ cycle}(f, g, h) = -\frac{1}{2}\big[(f, g, h)_Q(-1)^{(\varepsilon_f+1)(\varepsilon_h+1)}, Q\big], \tag{2.6}$$

где равенство

$$\begin{aligned}(f, g, h)_Q &\equiv \frac{1}{3}(-1)^{(\varepsilon_f+1)(\varepsilon_h+1)}\big(\big[(f, g)_Q, h\big](-1)^{\varepsilon_h+(\varepsilon_f+1)(\varepsilon_h+1)} + \text{ cycle}(f, g, h)\big) = \\ &= \frac{1}{3}(-1)^{(\varepsilon_f+1)(\varepsilon_h+1)}\big(\big[f, (g, h)_Q\big](-1)^{\varepsilon_g+(\varepsilon_f+1)(\varepsilon_h+1)} + \text{ cycle}(f, g, h)\big)\end{aligned} \tag{2.7}$$

определяет следующую, 3-антискобку для любых операторов f, g, h.

В свою очередь, 3-антискобка (2.7) удовлетворяет следующему тождеству, включающему следующую, 4-антискобку, и т.д. В работах [7] эта иерархия последовательных квантовых антискобок высших порядков полностью определена с помощью соответствующего производящего механизма.

Пусть B – бозонный оператор и A – произвольный оператор. Из (2.6) получаем

$$\big(B, (B, A)_Q\big)_Q = \frac{1}{2}\big((B, B)_Q, A\big)_Q - \frac{1}{4}\big[(B, B, A)_Q, Q\big], \tag{2.8}$$

$$(B, B, A)_Q = \frac{1}{3}\big(-\big[A, (B, B)_Q\big] + 2\big[(A, B)_Q, B\big]\big), \tag{2.9}$$

$$\big(B, (B, B)_Q\big)_Q = \frac{1}{6}\big[\big[B, (B, A)_Q\big], Q\big]. \tag{2.10}$$

Другое важное следствие определения (2.2) и условия нильпотентности (2.1) есть

$$\big[Q,(f,g)_Q\big]=\big[[Q,f],[Q,g]\big]. \tag{2.11}$$

Определим операторнозначное антиканоническое преобразование следующим образом. Пусть A_0 – произвольный исходный оператор, а X, $\varepsilon(X)=1$, – фермионный антиканонический генератор. Тогда уравнение

$$\frac{dA(\lambda)}{d\lambda}=\big(X,A(\lambda)\big)_Q,\qquad A(0)=A_0, \tag{2.12}$$

определяет антиканоническое преобразование $A_0\to A$.

Из (2.11), (2.12) следует

$$\frac{d}{d\lambda}[Q,A]=\big[[Q,X],[Q,A]\big], \tag{2.13}$$

откуда видно, что $[Q,X]$ представляет собой бозонный генератор канонического преобразования $[Q,A_0]$. Общее решение параметрического дифференциального уравнения (2.12) есть

$$A=\tilde{A}+[Q,Y], \tag{2.14}$$

где

$$\tilde{A}\equiv\tilde{A}(\lambda)=e^{\lambda[Q,X]}A_0e^{-\lambda[Q,X]}, \tag{2.15}$$

$$Y=-\frac{1}{2}\int_0^\lambda d\lambda'\,e^{(\lambda-\lambda')[Q,X]/2}\big[X,\tilde{A}(\lambda')\big]e^{-(\lambda-\lambda')[Q,X]/2}. \tag{2.16}$$

Существует красивая интерпретация решения (2.14): первый член в правой части, $\tilde{A}$, представляет собой каноническое преобразование A_0 с генератором $[Q,X]$, в то время как второй член, $[Q,Y]$, есть “точная” форма. Вычисляя выражение (2.14) в первом порядке по X,

$$A-A_0=\lambda\left(\big[[Q,X],A_0\big]-\frac{1}{2}\big[Q,[X,A]\big]\right)+O(\lambda^2)=\lambda(X,A_0)_Q+O(\lambda^2), \tag{2.17}$$

мы видим, что часть $\big[[Q,X],A_0\big]$ квантовой антискобки $(X,A_0)_Q$ есть в точности инфинитезимальное каноническое преобразование A_0 с оператором $[Q,X]$ в качестве генератора, в то время как слагаемое $\big(-\big[Q,[X,A]\big]/2\big)$ (“точная” часть) представляет собой отклонение от унимодулярности, характерное для антиканонических преобразований.

Пусть A и B – антиканонические преобразования A_0 и B_0 согласно уравнению (2.12). Тогда квантовая антискобка $(A,B)_Q$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{d\lambda}(A,B)_Q=\big(X,(A,B)_Q\big)_Q+\frac{1}{2}\big[(X,A,B)_Q,Q\big], \tag{2.18}$$

где учтено модифицированное тождество Якоби (2.6) для $f = X, \;\; g = A, \;\; h = B$. Из (2.18) следует, что отклонение трансформационных свойств антискобки $(A, B)_Q$ от канонических (решения однородной части уравнения (2.18)) дается "точной" формой

$$\left[\frac{1}{2}\int_0^\lambda d\lambda'\, e^{(\lambda-\lambda')[Q,X]/2}(X, A, B)_Q e^{-(\lambda-\lambda')[Q,X]/2}, Q\right]. \tag{2.19}$$

Таким образом, мы видим, что появление ненулевой "точной" формы $\big[(f, g, h)_Q, Q\big]$, которая деформирует сильное тождество Якоби до модифицированной формы, приводит к аналогичной деформации инвариантных свойств квантовой антискобки относительно антиканонического преобразования ее аргументов.

3. БРСТ-ИНВАРИАНТНАЯ АЛГЕБРА СВЯЗЕЙ

Пусть Ω – фермионный оператор, удовлетворяющий стандартной БРСТ-алгебре

$$[\Omega, \Omega] = 0, \qquad [G_C, \Omega] = i\hbar\Omega, \tag{3.1}$$

где G_C – бозонный оператор гостовского числа.

Для определенности мы предположим, что гостовский сектор содержит канонические пары $(C^\alpha, \overline{\mathcal{P}}_\alpha), \; \varepsilon(C^\alpha) = \varepsilon(\overline{\mathcal{P}}_\alpha) = \varepsilon_\alpha + 1$, с ненулевыми коммутаторами

$$[C^\alpha, \overline{\mathcal{P}}_\beta] = i\hbar\delta^\alpha_\beta, \tag{3.2}$$

и БРСТ-оператор Ω $C\overline{\mathcal{P}}$-упорядочен. Кроме того, мы примем следующее предписание для значений гостовских чисел:

$$[G_C, C^\alpha] = i\hbar C^\alpha, \qquad [G_C, \overline{\mathcal{P}}_\alpha] = -i\hbar\overline{\mathcal{P}}_\alpha, \tag{3.3}$$

что соответствует неприводимым теориям. БРСТ-инвариантные связи определяются следующим образом:

$$\mathcal{T}_\alpha = (i\hbar)^{-1}[\Omega, \overline{\mathcal{P}}_\alpha], \qquad [\Omega, \mathcal{T}_\alpha] = 0. \tag{3.4}$$

В терминах квантовой антискобки (2.2) с заменой Q на Ω мы имеем следующие соотношения:

$$\begin{aligned}(\mathcal{T}_\alpha, \mathcal{T}_\beta)_\Omega &= 0,\\ (\overline{\mathcal{P}}_\alpha, \overline{\mathcal{P}}_\beta)_\Omega &= (i\hbar)^2 U^\gamma_{\alpha\beta}\overline{\mathcal{P}}_\gamma(-1)^{\varepsilon_\alpha+\varepsilon_\beta+\varepsilon_\gamma},\\ (\overline{\mathcal{P}}_\alpha, \mathcal{T}_\beta)_\Omega &= \frac{1}{2}i\hbar[\mathcal{T}_\alpha, \mathcal{T}_\beta](-1)^{\varepsilon_\alpha},\end{aligned} \tag{3.5}$$

где операторнозначные структурные коэффициенты

$$U^\gamma_{\alpha\beta} = -U^\gamma_{\beta\alpha}(-1)^{\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta}, \tag{3.6}$$

вообще говоря, зависят от гостов.

Если мы представим оператор Ω явно в виде $C\overline{\mathcal{P}}$-упорядоченного разложения по степеням гостов с учетом (3.1), (3.3),

$$\Omega = C^{\alpha}T_{\alpha} + \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n!\,(n+1)!}C^{\alpha_{n+1}}\dots C^{\alpha_1}\Omega^{\beta_n\dots\beta_1}_{\alpha_1\dots\alpha_{n+1}}\overline{\mathcal{P}}_{\beta_1}\dots\overline{\mathcal{P}}_{\beta_n}, \tag{3.7}$$

то соответствующие разложения операторов $\mathcal{T}_{\alpha}$ и $U^{\gamma}_{\alpha\beta}$ суть

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{\alpha} &= T_{\alpha} + \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{(n!)^2}C^{\alpha_n}\dots C^{\alpha_1}\Omega^{\beta_n\dots\beta_1}_{\alpha_1\dots\alpha_n\alpha}\overline{\mathcal{P}}_{\beta_1}\dots\overline{\mathcal{P}}_{\beta_n},\\ U^{\gamma}_{\alpha\beta} &= \sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{n!\,(n+1)!}C^{\alpha_n}\dots C^{\alpha_1}\Omega^{\gamma\beta_n\dots\beta_1}_{\alpha_1\dots\alpha_n\alpha\beta}\overline{\mathcal{P}}_{\beta_1}\dots\overline{\mathcal{P}}_{\beta_n}(-1)^{\varepsilon_{\beta}+\varepsilon_{\gamma}}.\end{aligned} \tag{3.8}$$

Используя свойство (2.11) и определение (3.4), мы получаем следующую коммутаторную алгебру:

$$\begin{aligned}[][\mathcal{T}_{\alpha},\mathcal{T}_{\beta}] &= i\hbar U^{\gamma}_{\alpha\beta}\mathcal{T}_{\gamma} - [U^{\gamma}_{\alpha\beta},\Omega]\overline{\mathcal{P}}_{\gamma},\\ [\overline{\mathcal{P}}_{\alpha},\overline{\mathcal{P}}_{\beta}] &= 0,\\ [\overline{\mathcal{P}}_{\alpha},\mathcal{T}_{\beta}] &= (i\hbar)^{-1}(\overline{\mathcal{P}}_{\alpha},\overline{\mathcal{P}}_{\beta})_{\Omega}.\end{aligned} \tag{3.9}$$

Таким образом, мы видим, что БРСТ-инвариантные связи $\mathcal{T}_{\alpha}$ вместе с гостовскими импульсами $\overline{\mathcal{P}}_{\alpha}$ образуют две дуальные операторные алгебры, а именно квантово-антискобочную алгебру (3.5) и коммутаторную алгебру (3.9).

4. ПРОИЗВОДЯЩИЕ УРАВНЕНИЯ БРСТ-ИНВАРИАНТНОЙ АЛГЕБРЫ СВЯЗЕЙ

Так как мы установили, что $\mathcal{T}_{\alpha}$ вместе с $\overline{\mathcal{P}}_{\alpha}$ образуют две дуальные алгебры, кажется совершенно естественным сформулировать соответствующие производящие уравнения в духе общей идеологии БРСТ–БВФ-подхода. Мы можем рассматривать $\mathcal{T}_{\alpha}$ и $\overline{\mathcal{P}}_{\alpha}$ как связи первого рода, а формулы (3.9) как их соотношения инволюции. Мы можем поворачивать эти связи первого рода несингулярными операторными матрицами, так что кажется естественным несколько обобщить определение $\mathcal{T}_{\alpha}$.

Прежде всего, повернем $\overline{\mathcal{P}}_{\alpha}$ в соотношении (3.4),

$$\overline{\mathcal{P}}_{\alpha} \to X_{\alpha} = \Lambda^{\beta}_{\alpha}\overline{\mathcal{P}}_{\beta}, \tag{4.1}$$

так что новые связи $\mathcal{T}_{\alpha}$ суть

$$\mathcal{T}_{\alpha} = (i\hbar)^{-1}[\Omega, X_{\alpha}], \qquad [G_C, X_{\alpha}] = -i\hbar X_{\alpha}. \tag{4.2}$$

Эти $\mathcal{T}_{\alpha}$, однако, остаются сильно БРСТ-инвариантными, $[\Omega,\mathcal{T}_{\alpha}] = 0$. Чтобы ослабить инвариантность, мы можем еще более модифицировать определение $\mathcal{T}_{\alpha}$:

$$\mathcal{T}_{\alpha} = (i\hbar)^{-1}[\Omega, X_{\alpha}] - V^{\beta}_{\alpha}X_{\beta}(-1)^{\varepsilon_{\alpha}+\varepsilon_{\beta}}, \tag{4.3}$$

где V_α^β есть плоская БРСТ-связность,

$$R_\alpha^\beta \equiv (i\hbar)^{-1}[\Omega, V_\alpha^\beta] - V_\alpha^\gamma V_\gamma^\beta (-1)^{\varepsilon_\alpha+\varepsilon_\gamma} = 0. \tag{4.4}$$

В этом случае мы имеем слабую БРСТ-инвариантность,

$$[\Omega, \mathcal{T}_\alpha] = i\hbar V_\alpha^\beta \mathcal{T}_\beta, \tag{4.5}$$

которая соответствует повороту

$$\mathcal{T}_\alpha \to G_\alpha^\beta \mathcal{T}_\beta, \qquad X_\alpha \to G_\alpha^\beta X_\beta (-1)^{\varepsilon_\alpha+\varepsilon_\beta} \tag{4.6}$$

в (4.2) и выбору

$$V_\alpha^\beta = (i\hbar)^{-1}[\Omega, G_\alpha^\gamma] G_\gamma^{-1\beta}. \tag{4.7}$$

Мы ожидаем, что такие повороты (4.1)–(4.6) будут частью естественного произвола в общем решении производящих уравнений алгебры.

Перейдем непосредственно к формулировке нужных нам производящих уравнений. Начнем с некоторых операторов $\mathcal{T}_\alpha$ и X_α, определенных в том же расширенном фазовом пространстве, что и БРСТ-оператор Ω. Их грассмановы четности и значения внутренних гостовских чисел имеют вид

$$\varepsilon(\mathcal{T}_\alpha) = \varepsilon_\alpha, \qquad \varepsilon(X_\alpha) = \varepsilon_\alpha + 1, \tag{4.8}$$

$$[G_C, \mathcal{T}_\alpha] = 0, \qquad [G_C, X_\alpha] = -i\hbar X_\alpha. \tag{4.9}$$

Затем мы еще расширяем фазовое пространство, вводя новые канонические пары гостовского типа посредством соответствия

$$\mathcal{T}_\alpha \mapsto (B^\alpha, \Pi_\alpha), \qquad X_\alpha \mapsto (B_\alpha^*, \Pi_*^\alpha) \tag{4.10}$$

с ненулевыми коммутаторами

$$[B^\alpha, \Pi_\beta] = i\hbar\delta_\beta^\alpha, \qquad [B_\alpha^*, \Pi_*^\beta] = i\hbar\delta_\alpha^\beta. \tag{4.11}$$

Их грассмановы четности суть

$$\varepsilon(B^\alpha) = \varepsilon(\Pi_\alpha) = \varepsilon_\alpha + 1, \qquad \varepsilon(B_\alpha^*) = \varepsilon(\Pi_*^\alpha) = \varepsilon_\alpha. \tag{4.12}$$

Все новые операторы коммутируют с оператором внутреннего гостовского числа G_C. Однако они имеют свои собственные операторы гостовского числа G_B и G_{B^*},

$$[G_B, B^\alpha] = i\hbar B^\alpha, \qquad [G_B, \Pi_\alpha] = -i\hbar\Pi_\alpha, \tag{4.13}$$

$$[G_{B^*}, B_\alpha^*] = i\hbar B_\alpha^*, \qquad [G_{B^*}, \Pi_*^\alpha] = -i\hbar\Pi_*^\alpha, \tag{4.14}$$

$$[G_{B^*}, B^\alpha] = [G_{B^*}, \Pi_\alpha] = [G_B, B_\alpha^*] = [G_B, \Pi_*^\alpha] = 0, \tag{4.15}$$

$$[G_B, G_{B^*}] = [G_C, G_B] = [G_C, G_{B^*}] = 0. \tag{4.16}$$

Полный оператор гостовского числа равен

$$G = G_C + G_B - 2G_{B^*} = G_{CB^*} + G_{BB^*}, \tag{4.17}$$

где

$$G_{CB^*} = G_C - G_{B^*}, \qquad G_{BB^*} = G_B - G_{B^*}. \tag{4.18}$$

Пусть A – произвольный оператор. Определим значения полного гостовского числа, $\mathrm{gh}(A)$, и полной степени, $\deg(A)$, следующим образом:

$$[G, A] = i\hbar\,\mathrm{gh}(A)A, \qquad [G_{BB^*}, A] = i\hbar\deg(A)A, \tag{4.19}$$

так что

$$[G_{CB^*}, A] = i\hbar\big(\mathrm{gh}(A) - \deg(A)\big)A. \tag{4.20}$$

В частности, мы имеем

$$\varepsilon(\Omega) = 1, \qquad \mathrm{gh}(\Omega) = 1, \qquad \deg(\Omega) = 0. \tag{4.21}$$

Для дальнейшего рассмотрения удобно ввести конденсированные обозначения

$$T_A \equiv \{\mathcal{T}_\alpha; -X_\alpha\}, \tag{4.22}$$

$$C^A \equiv \big\{B^\alpha; \Pi^\alpha_*(-1)^{\varepsilon_\alpha+1}\big\}, \qquad \overline{\mathcal{P}}_A \equiv \{\Pi_\alpha; B^*_\alpha\}, \qquad [C^A, \overline{\mathcal{P}}_B] = i\hbar\delta^A_B. \tag{4.23}$$

Имеем

$$\varepsilon(T_A) = \{\varepsilon_\alpha; \varepsilon_\alpha + 1\}, \qquad \mathrm{gh}(T_A) = \{0; -1\}, \qquad \deg(T_A) = \{0; 0\}, \tag{4.24}$$

$$\varepsilon(C^A) = \{\varepsilon_\alpha + 1; \varepsilon_\alpha\}, \qquad \mathrm{gh}(C^A) = \{1; 2\}, \qquad \deg(C^A) = \{1; 1\}, \tag{4.25}$$

$$\varepsilon(T_A) \equiv \varepsilon_A, \qquad \varepsilon(\overline{\mathcal{P}}_A) = \varepsilon(C^A) = \varepsilon_A + 1, \tag{4.26}$$

$$\mathrm{gh}(\overline{\mathcal{P}}_A) = -\,\mathrm{gh}(C^A), \qquad \deg(\overline{\mathcal{P}}_A) = -\deg(C^A). \tag{4.27}$$

В новом расширенном фазовом пространстве, координатами которого являются исходные фазовые переменные, обычные госты и новые переменные (4.10), мы рассмотрим следующую систему уравнений:

$$[\Sigma_1, \Sigma_1] = 0, \qquad [\Delta, \Delta] = 0, \qquad [\Delta, \Sigma_1] = 0, \tag{4.28}$$

$$\varepsilon(\Sigma_1) = 1, \quad \mathrm{gh}(\Sigma_1) = 1, \quad \deg(\Sigma_1) = 1, \tag{4.29}$$

$$\varepsilon(\Delta) = 1, \qquad \mathrm{gh}(\Delta) = 1, \qquad \deg(\Delta) = 0, \tag{4.30}$$

вместе с граничными условиями

$$\Sigma_1 = C^A T_A + \cdots, \qquad \Delta = \Omega + \cdots, \tag{4.31}$$

где многоточием обозначены все возможные члены высшего порядка по $(C^A, \overline{\mathcal{P}}_A)$, совместные с (4.29), (4.30). Мы также потребуем, чтобы оператор Δ удовлетворял дополнительному условию: матрица Δ-антискобок $(B^\alpha, B^*_\beta)_\Delta$ должна быть обратима.

Мы утверждаем, что уравнения (4.28)–(4.31), разложенные в ряд по $(C^A, \overline{\mathcal{P}}_A)$, генерируют БРСТ-инвариантную алгебру связей. Чтобы увидеть это, рассмотрим $C\overline{\mathcal{P}}$-упорядоченное разложение Σ_1 и Δ,

$$\Sigma_1 = C^A T_A + \frac{1}{2} C^B C^A U^C_{AB} \overline{\mathcal{P}}_C (-1)^{\varepsilon_B + \varepsilon_C} + \cdots , \tag{4.32}$$

$$\Delta = \Omega + C^A V^B_A \overline{\mathcal{P}}_B (-1)^{\varepsilon_B} + \frac{1}{4} C^B C^A V^{CD}_{AB} \overline{\mathcal{P}}_D \overline{\mathcal{P}}_C (-1)^{\varepsilon_B + \varepsilon_D} + \cdots . \tag{4.33}$$

Подставляя (4.32) в первое уравнение (4.28), мы получаем во втором порядке по C^A стандартные соотношения инволюции

$$[T_A, T_B] = i\hbar U^C_{AB} T_C. \tag{4.34}$$

Далее после подстановки (4.33) во второе уравнение (4.28) имеем в нулевом и первом порядках по C^A

$$[\Omega, \Omega] = 0 \tag{4.35}$$

и

$$[V^B_A, \Omega](-1)^{\varepsilon_B} = i\hbar V^C_A V^B_C . \tag{4.36}$$

Аналогично, подставляя (4.32), (4.33) в третье уравнение (4.28), мы получаем в первом порядке по C^A

$$[T_A, \Omega] = -i\hbar V^B_A T_B. \tag{4.37}$$

В уравнении (4.35) мы узнаем условие нильпотентности для Ω. Замечательно, что уравнение (4.36) есть не что иное, как условие нильпотентности матрично-расширенного Ω, $\widehat{\Omega}^B_A$,

$$\widehat{\Omega}^C_A \widehat{\Omega}^B_C = 0, \qquad \widehat{\Omega}^B_A \equiv (-1)^{\varepsilon_A} \delta^B_A \Omega - i\hbar V^B_A. \tag{4.38}$$

Соотношения инволюции (4.37) по своей сути означают БРСТ-инвариантность связей T_A в наиболее общей (слабой) форме.

Нетрудно видеть, что приведенные выше (частные) представления (4.2), (4.3), (4.5) немедленно вытекают из (4.37), если V^B_A выбрать в виде

$$V^B_A = \begin{pmatrix} V^\beta_\alpha (-1)^{\varepsilon_\alpha} & 0 \\ \delta^\beta_\alpha (-1)^{\varepsilon_\alpha} & -V^\beta_\alpha (-1)^{\varepsilon_\beta} \end{pmatrix} . \tag{4.39}$$

Рассмотрим теперь второе уравнение (4.28) во втором порядке по C^A. Мы имеем

$$\begin{aligned}
&[V^C_A, V^D_B](-1)^{(\varepsilon_B+1)(\varepsilon_C+1)} - (A \leftrightarrow B)(-1)^{\varepsilon_A \varepsilon_B} = \\
&= i\hbar\big(V^E_A V^{CD}_{EB} (-1)^{\varepsilon_B} - (A \leftrightarrow B)(-1)^{\varepsilon_A \varepsilon_B}\big) + \\
&\quad + i\hbar\big(V^{CE}_{AB} V^D_E (-1)^{\varepsilon_C} - (C \leftrightarrow D)(-1)^{\varepsilon_C \varepsilon_D}\big) - \\
&\quad - [V^{CD}_{AB}, \Omega](-1)^{\varepsilon_C + \varepsilon_D} - \frac{1}{2}(i\hbar)^2 V^{EF}_{AB} V^{CD}_{FE} .
\end{aligned} \tag{4.40}$$

В том же самом порядке по C^A третье уравнение (4.28) дает

$$\begin{aligned}\big([T_A, V_B^C] - (A\leftrightarrow B)(-1)^{\varepsilon_A\varepsilon_B}\big) - i\hbar U_{AB}^D V_D^C +\\ + i\hbar\big(V_A^D U_{DB}^C(-1)^{\varepsilon_B} - (A\leftrightarrow B)(-1)^{\varepsilon_A\varepsilon_B}\big) +\\ + [U_{AB}^C, \Omega](-1)^{\varepsilon_C} + \frac{1}{2} i\hbar V_{AB}^{ED} Z_{DE}^C = 0,\end{aligned} \tag{4.41}$$

где

$$Z_{AB}^C \equiv T_A\delta_B^C - T_B\delta_A^C(-1)^{\varepsilon_A\varepsilon_B} - i\hbar U_{AB}^C, \tag{4.42}$$

$$Z_{AB}^C T_C = 0. \tag{4.43}$$

Умножая (4.41) на T_C справа, мы получаем тождественный ноль благодаря соотношениям (4.34), (4.37).

В разложении (4.28) с точностью до третьего порядка по C^A других уравнений не возникает.

Если заданы связи первого рода T_A, из уравнения (4.34) определяются U_{AB}^C. Далее уравнения (4.36), (4.37) определяют V_B^A. Затем уравнения (4.40), (4.41) определяют V_{AB}^{CD} и т.д.

Если производящие уравнения (4.28) допускают решение для Δ, линейное по C^A,

$$\Delta = \Omega + C^A V_A^B \overline{\mathcal{P}}_B(-1)^{\varepsilon_B}, \tag{4.44}$$

что в соответствии с (4.40), (4.41) подразумевает

$$[V_A^C, V_B^D](-1)^{(\varepsilon_B+1)(\varepsilon_C+1)} - (A\leftrightarrow B)(-1)^{\varepsilon_A\varepsilon_B} = 0 \tag{4.45}$$

и

$$\begin{aligned}\big([T_A, V_B^C] - (A\leftrightarrow B)(-1)^{\varepsilon_A\varepsilon_B}\big) - i\hbar U_{AB}^D V_D^C +\\ + i\hbar\big(V_A^D U_{DB}^C(-1)^{\varepsilon_B} - (A\leftrightarrow B)(-1)^{\varepsilon_A\varepsilon_B}\big) + [U_{AB}^C, \Omega](-1)^{\varepsilon_C} = 0,\end{aligned} \tag{4.46}$$

то для любых величин f, g, h, зависящих только от B^α, B^*_α, их Δ-антискобки обладают свойством

$$\big[(f,g)_\Delta, h\big] = 0, \tag{4.47}$$

так что их 3-антискобки исчезают,

$$(f,g,h)_\Delta = 0, \tag{4.48}$$

и поэтому тождество Якоби становится сильным. Поскольку f, g, h коммутируют между собой, правило Лейбница (2.5) также становится сильным. Кроме того, согласно предписанию (4.12)–(4.15) мы имеем

$$\varepsilon(B^\alpha) + \varepsilon(B^*_\alpha) = 1, \tag{4.49}$$

$$\mathrm{gh}(B^\alpha) + \mathrm{gh}(B^*_\alpha) = -1, \tag{4.50}$$

$$\deg(B^\alpha) + \deg(B^*_\alpha) = 0. \tag{4.51}$$

Таким образом, из уравнений (4.48)–(4.51) следует, что переменные B^α и B^*_α ведут себя как нормальные поля и антиполя относительно Δ-антискобки при условии, что соотношения (4.45), (4.46) удовлетворены.

Подчеркнем, однако, что не требуется, чтобы условия (4.45), (4.46) обязательно выполнялись. Они только выделяют определенный базис связей T_A и величин V_A^B, в котором переменные B^α, B^*_α допускают простую интерпретацию. В общем случае коэффициенты V_{AB}^{CD} отличны от нуля и разложения (4.32), (4.33) включают все высшие порядки по гостам. Поэтому, вообще говоря, Δ-антискобки не удовлетворяют сильному тождеству Якоби, даже если их аргументы зависят только от B^α, B^*_α.

В принципе соотношения инволюции (4.34)–(4.37) являются единственными условиями, которым должны удовлетворять члены низших порядков в (4.32), (4.33). Однако мы требуем дополнительно, чтобы правая часть (4.37) была разрешима относительно $\mathcal{T}_\alpha$: это есть в точности дополнительное условие, сформулированное ниже формул (4.31). Это условие означает, что любые связи T_A, удовлетворяющие соотношениям инволюции, могут быть повернуты несингулярной матрицей к форме $T_A = \big\{(i\hbar)^{-1}[\Omega, \overline{\mathcal{P}}_\alpha]; -\overline{\mathcal{P}}_\alpha\big\}$.

5. ПРОИЗВОДЯЩИЕ УРАВНЕНИЯ АНТИСКОБОЧНОЙ АЛГЕБРЫ

Как мы видели выше, переменные B^α и B^*_α ведут себя как поля и антиполя относительно Δ-антискобки. Кажется совершенно естественным ожидать подобного поведения импульсов Π^α_* и Π_α относительно некоторой “дуальной” антискобки.

Для реализации этой идеи определим резольвентный оператор $\bar\Delta$ как решение производящих уравнений

$$[\bar\Delta, \bar\Delta] = 0, \qquad [\Delta, \bar\Delta] = i\hbar G_{BB^*}, \tag{5.1}$$

$$\varepsilon(\bar\Delta) = 1, \qquad \mathrm{gh}(\bar\Delta) = -1, \qquad \deg(\bar\Delta) = 0, \tag{5.2}$$

с граничными условиями

$$\bar\Delta = \overline{\Omega} + \cdots, \tag{5.3}$$

где многоточием обозначены все члены высших порядков по переменным $(C^A, \overline{\mathcal{P}}_A)$, допускаемые свойствами (5.2), а $\overline{\Omega}$ является членом нулевого порядка.

Рассмотрим $C\overline{\mathcal{P}}$-упорядоченное разложение $\bar\Delta$ в степенной ряд

$$\bar\Delta = \overline{\Omega} + C^A \overline{V}{}_A^B \overline{\mathcal{P}}_B (-1)^{\varepsilon_B} + \frac{1}{4} C^B C^A \overline{V}{}_{AB}^{CD} \overline{\mathcal{P}}_D \overline{\mathcal{P}}_C (-1)^{\varepsilon_B + \varepsilon_D} + \cdots, \tag{5.4}$$

аналогичное (4.33). Из уравнений (5.1), (5.2) мы получаем следующие уравнения низших порядков для операторных коэффициентов:

$$[\overline{\Omega}, \overline{\Omega}] = 0, \tag{5.5}$$

$$[\overline{V}{}_A^B, \overline{\Omega}](-1)^{\varepsilon_B} = i\hbar \overline{V}{}_A^C \overline{V}{}_C^B, \tag{5.6}$$

$$[\Omega, \overline{\Omega}] = 0, \tag{5.7}$$

$$[V_A^B, \overline{\Omega}](-1)^{\varepsilon_B} + [\overline{V}{}_A^B, \Omega](-1)^{\varepsilon_B} + i\hbar\delta_A^B = i\hbar V_A^C \overline{V}{}_C^B + i\hbar \overline{V}{}_A^C V_C^B. \tag{5.8}$$

В терминах операторнозначной матрицы (4.38) и аналогичной матрицы для $\overline{\Omega}$,

$$\widehat{\overline{\Omega}}{}_A^B \equiv (-1)^{\varepsilon_A}\delta_A^B\overline{\Omega} - i\hbar\overline{V}{}_A^B, \tag{5.9}$$

уравнения (5.5)–(5.8) переписываются в виде

$$\widehat{\overline{\Omega}}{}_A^C\widehat{\overline{\Omega}}{}_C^B = 0, \tag{5.10}$$

$$\widehat{\Omega}_A^C\widehat{\overline{\Omega}}{}_C^B + \widehat{\overline{\Omega}}{}_A^C\widehat{\Omega}_C^B = i\hbar\delta_A^B. \tag{5.11}$$

Нильпотентный оператор $\overline{\Omega}$ определен в том же самом пространстве, что и Ω, и его разложение в ряд по обычным гостам $(C^\alpha, \overline{\mathcal{P}}_\alpha)$ начинается с члена $\overline{T}{}^\alpha\overline{\mathcal{P}}_\alpha(-1)^{\varepsilon_\alpha}$, где $\overline{T}{}^\alpha$ представляют собой линейные комбинации связей T_α, дуальные к T_α, $\overline{T}{}^\alpha T_\alpha = 0$.

Аналогично ситуации с оператором Δ, если производящие уравнения допускают решение для $\bar{\Delta}$, линейное по C^A, то для любых величин, зависящих только от Π_*^α, Π_α, $\bar{\Delta}$-антискобка удовлетворяет сильному тождеству Якоби.

Однако согласно нашему предписанию аналог соотношений (4.49)–(4.51) теперь имеет вид

$$\varepsilon(\Pi_*^\alpha) + \varepsilon(\Pi_\alpha) = 1, \tag{5.12}$$

$$\mathrm{gh}(\Pi_*^\alpha) + \mathrm{gh}(\Pi_\alpha) = 1, \tag{5.13}$$

$$\deg(\Pi_*^\alpha) + \deg(\Pi_\alpha) = 0. \tag{5.14}$$

Мы видим, что знаки в правых частях соотношений (4.50) и (5.13) противоположны. Это означает, что импульсы Π_*^α и Π_α, в отличие от B^α, B_α^*, ведут себя как "скрученные" поля и антиполя [8].

В дальнейшем мы подразумеваем, что решение производящих уравнений (4.28)–(4.31) и (5.1)–(5.3) действительно существует.

Коммутируя $\bar{\Delta}$ с третьим уравнением в (4.28) и используя третье условие в (4.29) и второе уравнение в (5.1), получаем

$$\Sigma_1 = (i\hbar)^{-1}[\Delta, S_1], \tag{5.15}$$

где

$$S_1 = (i\hbar)^{-1}[\bar{\Delta}, \Sigma_1] + (i\hbar)^{-1}[\Delta, Y_1], \tag{5.16}$$

Y_1 – произвольный фермионный оператор с $\mathrm{gh}(Y_1) = -1$, $\deg(Y_1) = 1$. Для S_1 мы имеем

$$\varepsilon(S_1) = 0, \qquad \mathrm{gh}(S_1) = 0, \qquad \deg(S_1) = 1. \tag{5.17}$$

Подставляя представление (5.15) в первое из уравнений (4.28) и используя свойство (2.11), получаем

$$\big[\Delta, (S_1, S_1)_\Delta\big] = 0. \tag{5.18}$$

Коммутируя далее $\bar{\Delta}$ с уравнением (5.18), находим, аналогично (5.15),

$$(S_1, S_1)_\Delta = i\hbar[\Delta, S_2], \tag{5.19}$$

где

$$S_2 = \frac{1}{2}(i\hbar)^{-3}\left[\bar{\Delta}, (S_1, S_1)_\Delta\right] + (i\hbar)^{-1}[\Delta, Y_2], \tag{5.20}$$

Y_2 – произвольный фермионный оператор с $\mathrm{gh}(Y_2) = -1,\ \deg(Y_2) = 2$. Для S_2 мы имеем

$$\varepsilon(S_2) = 0, \quad \mathrm{gh}(S_2) = 0, \quad \deg(S_2) = 2. \tag{5.21}$$

Рассмотрим теперь мастер-уравнение

$$(S, S)_\Delta = i\hbar[\Delta, S] \tag{5.22}$$

для бозонного оператора S вида

$$S = \sum_{k \geqslant 0} S_k, \quad S_0 = G_{CB^*}, \quad \varepsilon(S_k) = 0, \quad \mathrm{gh}(S_k) = 0, \quad \deg(S_k) = k. \tag{5.23}$$

Имеем

$$[S_0, \Delta] = i\hbar\Delta, \quad [S_0, S_k] = -i\hbar k S_k. \tag{5.24}$$

Подставляя разложение (5.23) в уравнение (5.22) и используя соотношения (5.24), мы получаем следующую цепочку уравнений:

$$F_k = 0, \quad k \geqslant 2, \tag{5.25}$$

где

$$F_k \equiv R_k - i\hbar(k-1)[\Delta, S_k], \tag{5.26}$$

$$R_k \equiv \sum_{j=1}^{k-1} (S_j, S_{k-j})_\Delta. \tag{5.27}$$

При $k = 2$ уравнение (5.25) точно совпадает с (5.19), так что мы можем идентифицировать S_1 и S_2 в разложении (5.23) с соответствующими операторами в формулах (5.16) и (5.20). Используя тождество (2.10) для $Q = \Delta,\ B = S$, нетрудно вывести равенства

$$[\Delta, R_k] = 0 \tag{5.28}$$

при условии, что выполнены уравнения

$$F_m = 0, \quad m = 2, \dots, k-1. \tag{5.29}$$

Именно, из (2.10) следует

$$6(S,F)_\Delta - \big[[S,F],\Delta\big] = 4i\hbar[\Delta,F], \tag{5.30}$$

где

$$F \equiv (S,S)_\Delta - i\hbar[\Delta,S]. \tag{5.31}$$

Предположим, что уравнения (5.29) выполняются. Рассматривая тождество (5.30) в секторе с $\deg = k$, находим

$$6(S_0,F_k)_\Delta - \big[[S_0,F_k],\Delta\big] = 4i\hbar[\Delta,F_k], \tag{5.32}$$

откуда следует равенство

$$(k-2)[\Delta,R_k] = 0. \tag{5.33}$$

Наконец, коммутируя $\bar{\Delta}$ с уравнениями (5.28), мы получаем уравнение (5.25) для $m = k$ с

$$S_k = \frac{1}{k(k-1)}(i\hbar)^{-3}[\bar{\Delta},R_k] + (i\hbar)^{-1}[\Delta,Y_k], \tag{5.34}$$

$$\varepsilon(Y_k) = 1, \quad \mathrm{gh}(Y_k) = -1, \quad \deg(Y_k) = k. \tag{5.35}$$

Таким образом, мы показали, что все операторы S_k в разложении (5.23) существуют. Тем самым установлено, что мастер-уравнение (5.22) имеет решение, генерируемое оператором Σ_1 посредством соотношений (5.15), (5.19). Это решение описывает антискобочную алгебру, генерируемую БРСТ-инвариантными связями.

Рассмотрим простейший случай теории ранга 1 с алгеброй лиевского типа с постоянными структурными коэффициентами. Выбирая $C\overline{\mathcal{P}}$-упорядочение в гостовском секторе, мы имеем следующий БРСТ-оператор Ω:

$$\Omega = C^\alpha T_\alpha + \frac{1}{2}C^\beta C^\alpha U^\gamma_{\alpha\beta}\overline{\mathcal{P}}_\gamma(-1)^{\varepsilon_\beta+\varepsilon_\gamma}, \tag{5.36}$$

с постоянными $U^\gamma_{\alpha\beta}$. Выберем простейшую возможную форму оператора Δ:

$$\Delta = \Omega + \Pi^\alpha_*\Pi_\alpha(-1)^{\varepsilon_\alpha+1}, \tag{5.37}$$

так что соответствующий резольвентный оператор $\bar{\Delta}$ есть

$$\bar{\Delta} = \overline{\Omega} - B^\alpha B^*_\alpha. \tag{5.38}$$

Для оператора Δ, выбранного в форме (5.37), уравнение (5.19) имеет решение вида

$$S_1 = \overline{\mathcal{P}}_\alpha B^\alpha + \frac{1}{2}B^\beta B^\alpha U^\gamma_{\alpha\beta}B^*_\gamma(-1)^{\varepsilon_\beta}, \tag{5.39}$$

$$(S_1,S_1)_\Delta = 0, \quad S_2 = 0, \tag{5.40}$$

а нильпотентный оператор Σ_1 в равенстве (5.15) дается формулой

$$\Sigma_1 = (i\hbar)^{-1}[\Delta, S_1] = B^\alpha \mathcal{T}_\alpha + \frac{1}{2} B^\beta B^\alpha U^\gamma_{\alpha\beta} \Pi_\gamma (-1)^{\varepsilon_\beta + \varepsilon_\gamma} + \\ + \Pi^\alpha_* \overline{\mathcal{P}}_\alpha (-1)^{\varepsilon_\alpha} - \Pi^\beta_* B^\alpha U^\gamma_{\alpha\beta} B^*_\gamma (-1)^{\varepsilon_\beta}, \tag{5.41}$$

где $\mathcal{T}_\alpha$ есть $C\overline{\mathcal{P}}$-упорядоченные БРСТ-инвариантные связи,

$$\mathcal{T}_\alpha = (i\hbar)^{-1}[\Omega, \overline{\mathcal{P}}_\alpha] = T_\alpha + C^\beta U^\gamma_{\alpha\beta} \overline{\mathcal{P}}_\gamma (-1)^{\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\gamma}. \tag{5.42}$$

В общем случае можно показать, что появление ненулевых S_k, $k \geqslant 2$, в разложении (5.23) является следствием антиканонического преобразования (2.14)–(2.16), примененного к оператору S_1, удовлетворяющему однородному мастер-уравнению (5.40). Условно можно сказать, что правая часть уравнения (5.19) возникает из деформационного члена (2.19).

Отметим также, что решение вида (5.39), (5.40) остается справедливым и в случае, когда структурные коэффициенты $U^\gamma_{\alpha\beta}$ в (5.36) не постоянны, но удовлетворяют квазигрупповым условиям

$$[U^\gamma_{\alpha\beta}, U^\rho_{\mu\nu}] = 0, \qquad [[T_\alpha, U^\delta_{\beta\gamma}], U^\rho_{\mu\nu}] = 0. \tag{5.43}$$

6. БРСТ-ИНВАРИАНТНАЯ АЛГЕБРА СВЯЗЕЙ В ТЕОРИЯХ РАНГА 1

Здесь мы приведем явные формулы, которые могут оказаться полезными для применений в теориях ранга 1. Мы рассмотрим БРСТ-инвариантную алгебру в коммутаторной и антискобочной формах для наиболее популярных случаев вейлевского и виковского упорядочений гостовского сектора.

6.1. Вейлевски упорядоченный гостовский сектор. В случае вейлевски упорядоченного гостовского сектора теория ранга 1 описывается следующим БРСТ-оператором, линейным по гостовскому импульсу [9]:

$$\Omega = C^\alpha T_\alpha + \frac{1}{6} C^\beta C^\alpha U^\gamma_{\alpha\beta} \overline{\mathcal{P}}_\gamma (-1)^{\varepsilon_\beta + \varepsilon_\gamma} + \frac{1}{6} C^\alpha U^\gamma_{\alpha\beta} \overline{\mathcal{P}}_\gamma C^\beta (-1)^{\varepsilon_\beta + \varepsilon_\gamma} + \\ + \frac{1}{6} \overline{\mathcal{P}}_\gamma U^\gamma_{\alpha\beta} C^\beta C^\alpha (-1)^{\varepsilon_\beta + \varepsilon_\gamma + (\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta)(\varepsilon_\gamma + 1)}. \tag{6.1}$$

Исходная алгебра связей задается соотношениями “инволюции” [9]

$$[T_\alpha, T_\beta] = \frac{i\hbar}{2}\big(U^\gamma_{\alpha\beta} T_\gamma + T_\gamma U^\gamma_{\alpha\beta} (-1)^{(\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta + 1)\varepsilon_\gamma}\big) + \left(\frac{i\hbar}{2}\right)^2 [U^\gamma_{\alpha\delta}, U^\delta_{\gamma\beta}] (-1)^{\varepsilon_\delta(\varepsilon_\beta + 1)}. \tag{6.2}$$

БРСТ-инвариантные связи равны

$$\mathcal{T}_\alpha = (i\hbar)^{-1}[\Omega, \overline{\mathcal{P}}_\alpha] = \\ = T_\alpha + \frac{1}{2}\big(C^\beta U^\gamma_{\beta\alpha}\overline{\mathcal{P}}_\gamma(-1)^{\varepsilon_\alpha+\varepsilon_\gamma} + \overline{\mathcal{P}}_\gamma U^\gamma_{\alpha\beta}C^\beta(-1)^{\varepsilon_\alpha+(\varepsilon_\alpha+\varepsilon_\beta+1)\varepsilon_\gamma}\big). \tag{6.3}$$

Их коммутаторная алгебра есть

$$[\mathcal{T}_\alpha, \mathcal{T}_\beta] = \frac{i\hbar}{2}\big(U^\gamma_{\alpha\beta}\mathcal{T}_\gamma + \mathcal{T}_\gamma U^\gamma_{\alpha\beta}(-1)^{(\varepsilon_\alpha+\varepsilon_\beta+1)\varepsilon_\gamma}\big) + \\ + \frac{1}{2}\big([\Omega, U^\gamma_{\alpha\beta}]\overline{\mathcal{P}}_\gamma(-1)^{\varepsilon_\alpha+\varepsilon_\beta+\varepsilon_\gamma} - \overline{\mathcal{P}}_\gamma[\Omega, U^\gamma_{\alpha\beta}](-1)^{(\varepsilon_\alpha+\varepsilon_\beta)\varepsilon_\gamma}\big), \tag{6.4}$$

$$[\overline{\mathcal{P}}_\alpha, \overline{\mathcal{P}}_\beta] = 0, \qquad [\overline{\mathcal{P}}_\alpha, \mathcal{T}_\beta] = i\hbar U^\gamma_{\alpha\beta}\overline{\mathcal{P}}_\gamma(-1)^{\varepsilon_\alpha+\varepsilon_\beta+\varepsilon_\gamma}. \tag{6.5}$$

Видно, что расширение, генерируемое третьим членом в правой части соотношения (6.2), отсутствует в формуле (6.4), а вместо этого в (6.4) присутствует примесь гостовских импульсов $\overline{\mathcal{P}}_\alpha$.

Антискобочная алгебра, соответствующая коммутаторной алгебре (6.4), (6.5), есть

$$(\mathcal{T}_\alpha, \mathcal{T}_\beta)_\Omega = 0, \qquad (\overline{\mathcal{P}}_\alpha, \overline{\mathcal{P}}_\beta)_\Omega = (i\hbar)^2 U^\gamma_{\alpha\beta}\overline{\mathcal{P}}_\gamma(-1)^{\varepsilon_\alpha+\varepsilon_\beta+\varepsilon_\gamma}, \tag{6.6}$$

$$(\overline{\mathcal{P}}_\alpha, \mathcal{T}_\beta)_\Omega = \frac{1}{2}i\hbar[\mathcal{T}_\alpha, \mathcal{T}_\beta](-1)^{\varepsilon_\alpha}. \tag{6.7}$$

6.2. Виковски упорядоченный гостовский сектор. Как обычно, виковский гостовский сектор описывается двумя наборами виковских пар, $(C^\alpha, \overline{C}^\dagger_\alpha)$ и $(\overline{C}_\alpha, C^{\dagger\alpha})$, с ненулевыми коммутаторами

$$[C^\alpha, \overline{C}^\dagger_\beta] = \delta^\alpha_\beta, \qquad [\overline{C}_\alpha, C^{\dagger\beta}] = \delta^\beta_\alpha. \tag{6.8}$$

В теории ранга 1 виковски упорядоченный БРСТ-оператор равен [9]

$$\Omega = T^\dagger_\alpha C^\alpha + C^{\dagger\alpha}T_\alpha + \bigg(\frac{1}{2}\overline{C}^\dagger_\gamma U^{\dagger\gamma}_{\alpha\beta}C^\alpha C^\beta + \frac{1}{2}C^{\dagger\beta}C^{\dagger\alpha}U^\gamma_{\alpha\beta}\overline{C}_\gamma + \\ + C^{\dagger\alpha}\overline{U}^\gamma_{\alpha\beta}\overline{C}_\gamma C^\beta + C^{\dagger\beta}\overline{C}^\dagger_\gamma\overline{U}^{\dagger\gamma}_{\alpha\beta}C^\alpha\bigg)(-1)^{\varepsilon_\beta}. \tag{6.9}$$

Исходная алгебра связей задается соотношениями “инволюции” [9]

$$[T_\alpha, T_\beta] = U^\gamma_{\alpha\beta}T_\gamma, \qquad [T^\dagger_\beta, T^\dagger_\alpha] = T^\dagger_\gamma U^{\dagger\gamma}_{\alpha\beta}, \tag{6.10}$$

$$[T_\alpha, T^\dagger_\beta] = \overline{U}^\gamma_{\alpha\beta}T_\gamma + T^\dagger_\gamma\overline{U}^{\dagger\gamma}_{\beta\alpha} + \overline{U}^\gamma_{\alpha\delta}\overline{U}^{\dagger\delta}_{\beta\gamma}(-1)^{\varepsilon_\gamma\varepsilon_\delta}. \tag{6.11}$$

БРСТ-инвариантные связи равны

$$\mathcal{T}_\alpha = [\overline{C}_\alpha, \Omega] = T_\alpha + C^{\dagger\beta}U^\gamma_{\beta\alpha}\overline{C}_\gamma(-1)^{\varepsilon_\alpha} + \overline{U}^\gamma_{\alpha\beta}\overline{C}_\gamma C^\beta(-1)^{\varepsilon_\beta} + \overline{C}^\dagger_\gamma\overline{U}^{\dagger\gamma}_{\beta\alpha}C^\beta(-1)^{\varepsilon_\alpha},$$

$$\mathcal{T}^\dagger_\alpha = [\Omega, \overline{C}^\dagger_\alpha] = T^\dagger_\alpha + \overline{C}^\dagger_\gamma U^{\dagger\gamma}_{\beta\alpha}C^\beta(-1)^{\varepsilon_\alpha} + C^{\dagger\beta}\overline{C}^\dagger_\gamma\overline{U}^{\dagger\gamma}_{\alpha\beta}(-1)^{\varepsilon_\beta} + C^{\dagger\beta}\overline{U}^\gamma_{\beta\alpha}\overline{C}_\gamma(-1)^{\varepsilon_\alpha}.$$

Ненулевые соотношения их коммутаторной алгебры суть

$$[\mathcal{T}_\alpha, \mathcal{T}_\beta] = U^\gamma_{\alpha\beta}\mathcal{T}_\gamma + [\Omega, U^\gamma_{\alpha\beta}]\overline{C}_\gamma(-1)^{\varepsilon_\alpha+\varepsilon_\beta}, \tag{6.12}$$

$$[\mathcal{T}^\dagger_\beta, \mathcal{T}^\dagger_\alpha] = \mathcal{T}^\dagger_\gamma U^{\dagger\gamma}_{\alpha\beta} + \overline{C}^\dagger_\gamma[U^{\dagger\gamma}_{\alpha\beta}, \Omega](-1)^{\varepsilon_\alpha+\varepsilon_\beta}, \tag{6.13}$$

$$\begin{aligned}[\mathcal{T}_\alpha, \mathcal{T}^\dagger_\beta] = \overline{U}{}^\gamma_{\alpha\beta}\mathcal{T}_\gamma + \mathcal{T}^\dagger_\gamma\overline{U}{}^{\dagger\gamma}_{\beta\alpha} + [\Omega, \overline{U}{}^\gamma_{\alpha\beta}]\overline{C}_\gamma(-1)^{\varepsilon_\alpha+\varepsilon_\beta} +\\ + \overline{C}^\dagger_\gamma[\overline{U}{}^{\dagger\gamma}_{\beta\alpha}, \Omega](-1)^{\varepsilon_\alpha+\varepsilon_\beta},\end{aligned} \tag{6.14}$$

$$[\overline{C}_\alpha, \mathcal{T}_\beta] = U^\gamma_{\alpha\beta}\overline{C}_\gamma(-1)^{\varepsilon_\beta}, \qquad [\mathcal{T}^\dagger_\beta, \overline{C}^\dagger_\alpha] = \overline{C}^\dagger_\gamma U^{\dagger\gamma}_{\alpha\beta}(-1)^{\varepsilon_\beta}, \tag{6.15}$$

$$[\mathcal{T}_\alpha, \overline{C}^\dagger_\beta] = \overline{U}{}^\gamma_{\alpha\beta}\overline{C}_\gamma(-1)^{\varepsilon_\beta} + \overline{C}^\dagger_\gamma\overline{U}{}^{\dagger\gamma}_{\beta\alpha}(-1)^{\varepsilon_\alpha}, \tag{6.16}$$

$$[\overline{C}_\beta, \mathcal{T}^\dagger_\alpha] = \overline{C}^\dagger_\gamma\overline{U}{}^{\dagger\gamma}_{\alpha\beta}(-1)^{\varepsilon_\beta} + \overline{U}{}^\gamma_{\beta\alpha}\overline{C}_\gamma(-1)^{\varepsilon_\alpha}. \tag{6.17}$$

Как и в случае вейлевски упорядоченного гостовского сектора, видно, что расширение, генерируемое третьим членом в правой части соотношения (6.11), отсутствует в формуле (6.14), а вместо этого в (6.14) присутствует примесь гостовских импульсов $\overline{C}_\alpha$ и $\overline{C}^\dagger_\alpha$.

Антискобочная алгебра, соответствующая коммутаторной алгебре (6.12)–(6.17), есть

$$\begin{gathered}(\mathcal{T}_\alpha, \mathcal{T}_\beta)_\Omega = 0, \qquad (\mathcal{T}^\dagger_\alpha, \mathcal{T}^\dagger_\beta)_\Omega = 0, \qquad (\mathcal{T}_\alpha, \mathcal{T}^\dagger_\beta)_\Omega = 0,\\ (\overline{C}_\alpha, \overline{C}_\beta)_\Omega = U^\gamma_{\alpha\beta}\overline{C}_\gamma, \qquad (\overline{C}^\dagger_\beta, \overline{C}^\dagger_\alpha)_\Omega = \overline{C}^\dagger_\gamma U^{\dagger\gamma}_{\alpha\beta},\\ (\overline{C}_\alpha, \overline{C}^\dagger_\beta)_\Omega = \overline{U}{}^\gamma_{\alpha\beta}\overline{C}_\gamma(-1)^{\varepsilon_\beta} + \overline{C}^\dagger_\gamma\overline{U}{}^{\dagger\gamma}_{\beta\alpha}(-1)^{\varepsilon_\alpha},\\ (\overline{C}_\alpha, \mathcal{T}_\beta)_\Omega = \frac{1}{2}[\mathcal{T}_\alpha, \mathcal{T}_\beta], \qquad (\mathcal{T}^\dagger_\beta, \overline{C}^\dagger_\alpha)_\Omega = \frac{1}{2}[\mathcal{T}^\dagger_\beta, \mathcal{T}^\dagger_\alpha],\\ (\overline{C}_\alpha, \mathcal{T}^\dagger_\beta)_\Omega = \frac{1}{2}[\mathcal{T}_\alpha, \mathcal{T}^\dagger_\beta], \qquad (\mathcal{T}_\beta, \overline{C}^\dagger_\alpha)_\Omega = \frac{1}{2}[\mathcal{T}_\beta, \mathcal{T}^\dagger_\alpha].\end{gathered}$$

Явные формулы, приведенные в п. 6.1 и 6.2, наглядно демонстрируют существование очевидного дуализма между двумя альтернативными формами БРСТ-инвариантной алгебры связей, описываемого общим соответствием

$$\mathcal{T}, \;\; \overline{\mathcal{P}}, \;\; [\cdot,\cdot] \qquad \Longleftrightarrow \qquad \overline{\mathcal{P}}, \;\; \mathcal{T}, \;\; (\cdot,\cdot)_\Omega.$$

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, сформулирован новый подход к квантованию калибровочно-инвариантных динамических систем, который, по существу, основан на концепции БРСТ-инвариантных связей. В основе всей конструкции лежит новый нильпотентный “БРСТ-заряд” Σ_1, который определен в дополнительно расширенном фазовом пространстве. Прежнее расширенное фазовое пространство, координатами которого являются исходные фазовые переменные и обычные госты, теперь становится новым “исходным” пространством. Новые канонические пары $(C^A, \overline{\mathcal{P}}_A)$ (4.23), (4.10) играют роль новых “минимальных” гостов, в то время как новое квантовое число, степень (deg), играет роль нового гостовского числа. Рассматривая эти новые канонические пары как “минимальные” госты, мы можем ввести новые антигосты $(\mathcal{P}^A, \overline{C}_A)$, $\varepsilon(\mathcal{P}^A) = \varepsilon(\overline{C}_A) = \varepsilon_A + 1$,

$\mathrm{gh}(\mathcal{P}^A) = -\mathrm{gh}(\overline{C}_A) = \{1;2\}$, $\deg(\mathcal{P}^A) = -\deg(\overline{C}_A) = \{1;1\}$, и лагранжевы множители (λ^A, π_A), $\varepsilon(\lambda^A) = \varepsilon(\pi_A) = \varepsilon_A$, $\mathrm{gh}(\lambda^A) = -\mathrm{gh}(\pi_A) = \{0;1\}$, $\deg(\lambda^A) = -\deg(\pi_A) = \{0;0\}$, с ненулевыми коммутаторами

$$[\mathcal{P}^A, \overline{C}_B] = i\hbar\delta^A_B, \qquad [\lambda^A, \pi_B] = i\hbar\delta^A_B \tag{7.1}$$

и затем обычным образом построить новый клибровочно-фиксированный унитаризующий гамильтониан.

Чтобы реализовать эту программу, мы должны сначала построить "минимальный" гамильтониан Ξ, который удовлетворяет уравнениям

$$[\Sigma_1, \Xi] = 0, \tag{7.2}$$

$$\varepsilon(\Xi) = 0, \qquad \mathrm{gh}(\Xi) = 0, \qquad \deg(\Xi) = 0, \tag{7.3}$$

и граничному условию

$$\Xi = \mathcal{H} + \cdots, \qquad [\mathcal{H}, \Omega] = 0. \tag{7.4}$$

Затем мы построим полный унитаризующий гамильтониан в стандартной форме,

$$H = \Xi + (i\hbar)^{-1}[\Sigma, \Psi], \tag{7.5}$$

$$\varepsilon(\Psi) = 1, \qquad \mathrm{gh}(\Psi) = -1, \qquad \deg(\Psi) = -1, \tag{7.6}$$

где

$$\Sigma = \Sigma_1 + \pi_A\mathcal{P}^A, \qquad \Psi = \overline{C}_A\chi^A + \overline{\mathcal{P}}_A\lambda^A \tag{7.7}$$

и χ^A есть оператор, фиксирующий калибровку. Исходный гамильтониан и связи первого рода содержатся в $\mathcal{H}$ и Ω, соответственно, в членах низшего порядка разложения в ряд по степеням операторов обычных гостов $(C^\alpha, \overline{\mathcal{P}}_\alpha)$.

Физические наблюдаемые коммутируют с Σ, а физические состояния аннигилируются этим оператором. Если подходящим образом определить физическое скалярное произведение, то физические матричные элементы физических операторов не будут зависеть от калибровки. Тогда можно перейти к унитарному пределу, выбирая унитарную калибровку вида

$$\chi^A = 0, \qquad \chi^A \equiv \{\chi^\alpha; C^\alpha\}, \tag{7.8}$$

где χ^α – обычная калибровка по отношению к исходным связям T_α, и установить совпадение физических амплитуд переходов (S-матрицы) с физическими амплитудами переходов в стандартном БРСТ–БВФ-подходе. Однако при использовании общих релятивистских калибровок расширенный формализм существенно обобщает стандартный, сохраняя более явной БРСТ-симметрию производящего механизма калибровочной алгебры.

В заключение сделаем следующее замечание. Рассмотрим стандартную форму [2] унитаризующего гамильтониана в БРСТ–БВФ-подходе

$$H = \mathcal{H} + (i\hbar)^{-1}[Q, \Psi], \tag{7.9}$$

где $\mathcal{H}$ есть минимальный гамильтониан,

$$Q = \Omega + \pi_\alpha \mathcal{P}^\alpha, \qquad \Psi = \overline{C}_\alpha \chi^\alpha + \overline{\mathcal{P}}_\alpha \lambda^\alpha, \tag{7.10}$$

$$[\Omega, \Omega] = 0, \qquad [\mathcal{H}, \Omega] = 0, \tag{7.11}$$

Ω – минимальный БРСТ-оператор, Ψ – калибровочный фермион. Мы имеем

$$H = \mathcal{H} + (i\hbar)^{-1}[\Omega, \overline{\mathcal{P}}_\alpha]\lambda^\alpha + \overline{\mathcal{P}}_\alpha \mathcal{P}^\alpha + \pi_\alpha \chi^\alpha + \overline{C}_\alpha (i\hbar)^{-1}[\chi^\alpha, \Omega]. \tag{7.12}$$

Во втором и третьем членах в правой части мы узнаем связи $\mathcal{T}_\alpha$ и X_α в их простейшей возможной форме,

$$\mathcal{T}_\alpha = (i\hbar)^{-1}[\Omega, \overline{\mathcal{P}}_\alpha], \qquad -X_\alpha = \overline{\mathcal{P}}_\alpha, \tag{7.13}$$

с λ^α и $-\mathcal{P}^\alpha$ в качестве соответствующих лагранжевых множителей. Четвертый и пятый члены фиксируют калибровку, причем χ^α и $(i\hbar)^{-1}[\chi^\alpha, \Omega]$ являются операторами, фиксирующими калибровку $\mathcal{T}_\alpha$ и X_α, соответственно, а π_α, $\overline{C}_\alpha$ – соответствующие лагранжевы множители.

Таким образом, выясняется, что фактически стандартный гамильтониан (7.9), (7.10) построен именно в терминах "стандартных" БРСТ-инвариантных связей (7.13) и соответствующих фиксирующих калибровку операторов. Однако по сравнению с операторами T_A в общем положении, которые удовлетворяют только соотношениям (4.34), (4.37), связи (7.13) являются довольно специальными в том смысле, что рассматриваемые как объекты линейного комбинирования, они соответствуют выбору специального базиса.

В противоположность ситуации со стандартным гамильтонианом, новый гамильтониан (7.12), определенный в дополнительно расширенном фазовом пространстве, построен прямо в терминах общих операторов T_A, подчиненных только условиям (4.34), (4.37). Таким образом, введение новых переменных $(C^A, \overline{\mathcal{P}}_A)$, $(\mathcal{P}^A, \overline{C}_A)$, (λ^A, π_A) есть цена возможности произвольно выбирать базис БРСТ-инвариантных связей T_A общего положения.

Наконец, следует отметить, что переход от формализма, описываемого формулами (7.9)–(7.11), к формализму, описываемому формулами (7.2)–(7.7), представляется только первым шагом в, возможно бесконечной, иерархии гамильтонианов.

Благодарности. Авторы признательны М. Григорьеву и А. Семихатову за плодотворные дискуссии. И. А. Баталин благодарен Р. Марнелиусу за важные обсуждения аспектов, связанных с квантовыми антискобками и операторнозначным мастер-уравнением. Работа И. А. Баталина частично поддержана Президентским грантом № 00-15-96566, грантом РФФИ № 02-01-00930 и грантом INTAS № 00-00262. Работа И. В. Тютина частично поддержана Президентским грантом № 00-15-96566, грантом РФФИ № 02-02-16944 и грантом INTAS № 00-00262.

Список литературы

[1] *C. Becchi, A. Rouet, R. Stora.* Phys. Lett. B. 1974. V. 54. P. 344; Commun. Math. Phys. 1975. V. 42. P. 127; Ann. Phys. 1976. V. 98. P. 287; *И. В. Тютин.* Калибровочная инвариантность в теории поля и статистической физике в операторной формулировке. Препринт ФИАН № 39. М.: ФИАН, 1975; *E. S. Fradkin, G. A. Vilkovisky.* Phys. Lett. B. 1975. V. 55. P. 224; Quantization of relativistic systems with constraints: equivalence of canonical and covariant formalisms in quantum theory of gravitational field. CERN preprint TH 2332-CERN. Geneva: CERN, 1977.

[2] *I. A. Batalin, G. A. Vilkovisky.* Phys. Lett. B. 1977. V. 69. P. 309; *E. S. Fradkin, T. E. Fradkina.* Phys. Lett. B. 1978. V. 72. P. 343.

[3] *I. A. Batalin, E. S. Fradkin.* Phys. Lett. B. 1983. V. 128. P. 303; Riv. Nuovo Cimento. 1986. V. 9. P. 1; *T. Kugo, I. Ojima.* Progr. Theor. Phys. Suppl. 1979. V. 66. P. 1; *K. Nishijima.* Nucl. Phys. B. 1984. V. 238. P. 601; Progr. Theor. Phys. 1988. V. 80. P. 897; P. 905; *M. Henneaux.* Phys. Rep. 1985. V. 126. P. 1; *M. Henneaux, C. Teitelboim.* Quantization of Gauge Sistems. Princeton: Princeton Univ. Press, 1992.

[4] *M. B. Green, J. H. Shwarz, E. Witten.* Superstring Theory. V. 1. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1987.

[5] *I. A. Batalin, R. Marnelius.* Phys. Lett. B. 1998. V. 441. P. 243; hep-th/9806114; Nucl. Phys. B. 1998. V. 551. P. 450; hep-th/9809208; Mod. Phys. Lett. A. 1999. V. 14. P. 1643; hep-th/9905193; Int. J. Mod. Phys. A. 2000. V. 15. P. 2077; hep-th/9909223.

[6] *I. A. Batalin, R. Marnelius.* Phys. Lett. B. 1998. V. 434. P. 312; hep-th/9805084.

[7] *И. А. Баталин, Р. Марнелиус.* ТМФ. 1999. Т. 120. С. 358; hep-th/9905083; *I. A. Batalin, R. Marnelius.* Int. J. Mod. Phys. A. 1999. V. 14. P. 5049; hep-th/9909210.

[8] *A. S. Cattaneo, G. Felder.* Commun. Math. Phys. 2000. V. 212. P. 591; math.QA/9902090; Mod. Phys. Lett. A. 2001. V. 16. P. 179; hep-th/0102208; *I. A. Batalin, R. Marnelius.* Phys. Lett. B. 2001. V. 512. P. 225; hep-th/0105190; Superfield algorithms for topological field theories. In: Multiple Facets of Quantization and Supersymmetry: Memorial Volume Dedicated to M. Marinov. Ed. M. Olshanetsky, A. Vainshtein. River Edge: World Scientific, 2002. P. 233; hep-th/0110140.

[9] *I. A. Batalin, E. S. Fradkin.* Ann. Inst. Henri Poincare. 1988. V. 49. P. 145.

Поступила в редакцию 17.III.2003 г.