土木学会論文集No. 647/1-51, 111-126, 2000. 4
ハイアラ一キ要素による平板の座屈解析
林正1・ 渡辺力2・ 増井由春3・ 上田隆博4
1正会員工博長岡技術科学大学教授工学部環境 ・建設系(〒940-2188長岡市上富岡町1603-1)
2正会員工修函館工業高等専門学校助教授環境都市工学科(〒042 -8501函館市戸倉町14-1)
3正会員長岡技術科学大学文部技官(〒940 -2188長岡市上富岡町1603-1)
4長岡技術科学大学大学院建設工学専攻(〒940 -2188長岡市上富岡町1603-1)
本論文では, 全ラグランジュ表記法によるハイアラーキ平面シェル要素とソリッド要素の接線剛性行列を求
め, 線形座屈理論に基づいたハイアラーキ要素による座屈解析法を開発する. 本解析法の精度を調べるために
平板の座屈解析を行って, 提案する要素と各非線形項の影響を検討する. 平板の解析では, 一般にKirchhoff理
論, Mindlin理論と3次元弾性論が用いられるが, ハイアラーキ要素による解法では, それぞれの理論解に対
して高精度の値が得られることを示す. また, 実用的な観点から, 計算効率の良いMind1in要素を用いて, 弾
性論による解に匹敵する値が得られるせん断補正係数を提案する.
Key Words : hierarchical finite element method, buckling analysis, tangent stiffness matrix, thin and
 thick plates.
1. まえがき
圧縮力を受ける板構造の不安定現象を解析的に評価
する場合, 微小変位理論では適切な評価ができないの
で有限変位理論を用いた構造解析が必要になる. しか
し, 反復計算を伴う有限変位解析では多くの計算コス
トを強いられることから, 比較的容易に解が求まる線
形座屈解析が実用的に重要である.
平板の座屈解析1)はKirchhoffの薄板理論に基づくも
のが多いが, 面外せん断力による変形と回転変位成分
に及ぼす面内力の非線形性(回転変位によるひずみの非
線形項)を無視しているために, 適用できる板厚比に制
限がある. 一方, Mindlin理論ではこれらの影響を考慮
することができて, 圧縮力が作用する四辺単純支持板
の座屈荷重は, 本文中に示すように陽な式で求められ
る. ただし, 回転変位による非線形項は高次の非線形項
と考えて省略する定式化2)やせん断変形を単純化した解
法3)が用いられることもある ・ また, Mindlin理論では
板厚方向のひずみを近似的に扱っているので, 厚板解
析では誤差が生じる. これらの理論に対して, Srinivas
とRao5),6)は3次元弾性理論に基づいた正確な解法を
発表している.
分岐座屈問題は, 全ラグランジュ表記による接線剛
性を用いて固有値問題として定式化される. このとき,
初期応力と初期変位に関する非線形項が現れる. 座屈
前に生じる変位は微小と仮定する線形座屈解析では, 通
常, 初期変位による影響は少ないものとしてこの項を
省略する. Xiang4)らはこの非線形効果を初期変形で表
して, 厚板ほどその非線形項が大きくなる結果を得て
いる. なお, この論文では非線形固有値問題として定
式化されている.
有限要素法や有限帯板法などの計算力学の手法を用
いれば, 幾何剛性の取り扱いも比較的容易となる. 著
者らも薄肉構造物の全体解析のためにMind1in理論に
よる節点帯板法7)を開発し, 幾何剛性に回転変位成分に
よる非線形項を用いた座屈解析を行っている. この解
法をさらに改良して極めて高精度なハイアラーキ要素
8), 9)・10)を開発している・ このハイアラーキ要素は, 要
素の細分割を行わずに高次の変位関数によって精度を
改善する方法, いわゆるp法である. このp法を用い
て, Smith11)はMindlin平板理論によりー一方向圧縮力
及び純せん断力を受ける単純支持板の座屈解析を行っ
て, 板の形状比と板厚比によるせん断変形の影響を調
べている. なお, この論文では変位関数にセレンディピ
ティ形式の関数を用いて完全多項式より高次の形状関
数を省略しているためか, 一枚の平板を4要素に分割
しているので, 幾分数値計算の効率は悪くなる8).
本論文では, 全ラグランジュ表記法によるハイアラー
キ平面シェル要素とソリッド要素の初期変位を含む接線
剛性行列を求め, 線形座屈理論に基づいたハイアラー
キ要素による座屈解析法を開発する.
ハイアラーキ要素法では, 2次元及び3次元要素に
おいて, 要素内で変位を二重または三重級数展開する.
したがって, 非線形の剛性行列はこれら多重級数の三
重積で与えられるので, すべての非線形項を用いた剛
性行列はかなり煩雑な式となる. そこで, プログラミ
ングと数値計算の効率を考慮した定式化を示す.
本解析法の精度を調べるために平板の座屈解析を行っ
111

て, 提案する要素と各非線形項の影響を検討する. 平
板の解析では, 薄板と厚板に対して一般にKirchhoff理
論とMindlin理論が用いられるが, 3次元弾性論に基
づく解法により薄板から厚板までのさらに正確な値が
得られる. 本論文のハイアラーキ要素による解法では,
上記のそれぞれの理論解に対して高精度の値が得られ
ることを示す. また, 実用的な観点から, 計算効率の
良いMindlin要素を用いて, 弾性論による解に匹敵す
る値が得られるせん断補正係数を提案する.
2. 座屈方程式
3次元弾性体について, 一般的な座屈方程式を誘導
する.
(1)ひずみ増分
デカルト直角座標系(x, y, Z)における変位成分u, v, U
を
u(x, y, Z)=luvw (1)
とおくと, グリーンのひずみ成分を次式のように表す
ことができる.
(2)
ここに, ()Tは転置記号である.
3次元問題における他のひずみ成分も同様な式で表
し, これを次のようにおく.
E = Ex Ey Ez Yxy Yyz Yzx } = EL + EN (3)
ここに, 添字()Lは線形項, ()Nは非線形項を表す.
式(1)の変位を有限要素法の定式化により, 形状関数
行列Nと一般化変位ベクトルdを用いて
u=Nd (4)
と表し, これを式(2)に代入して次式が求められる.
(5)
ここに, BLは線形のひずみマトリックス, BNは非線
形のひずみマトリックスである. R3Lは各要素で示すこ
とにして, BNを垂直ひずみとせん断ひずみに分けて
表すと次式が得られる.
BN =
BoN
ByN
BAN =
dT 11
d G22
dTCT33
ByN=
dT (G12 + G21)
dT (G23 + G32)
dT (G13+G31)
(6)
(7)
ここで, 増分理論を用いて, 変位とひずみを次のよ
うに表す.
d=d0+△d, e=e0+△e (8)
添記号 △ は増分量を表し, 上添字()oは増分前の既
知量である.
式(5), (6)に式(8)を代入してひずみ増分が求めら
れる.
(9)
ここに, B0Nと △BNは式(6)のdをそれぞれdO, △d
に置き換えた行列である.
(2)接線剛性行列
初期応力 σ0を
0'u=Q cT 7 TO T O T O (10)
で表し, △dによる応力増分はフックの法則に従うもの
とする.
一般化変位dに対応する一般化力をq, 外力ベクト
ルをpとして, 仮想仕事の原理に式(9), (10)を用いる.
ここで, 式(6)を考慮すると
△BTnσ0=S0△d (11)
S=QG11+QG22+UG33+T0 I G12 + G21
+ Tvz I G23 + G32 I + T, G13 + G31 (12)
と表すことができるので, △dに関する2次以上の非線
形項を省略して次の要素剛性方程式が得られる.
[kL+kD+kc]△d=△q+△P+TO (13)
ここに,
kL = BTDBLdV
kD = I BT DBN + BN DBL + BN DBN dV
kG = SUdV
(14)
r = q + p - / I BL + BN I y0 dV (15)
式(13)の左辺の係数行列は全ラグランジュ表記法に
よる接線剛性行列で, kLは線形剛性行列8), kcは幾
何剛性行列, kDは初期変位マトリックスである. TOは
不平衡力ベクトルで, 固有値問題として定式化する線
形座屈解析ではTO=△p:Oとする. なお, Dは応
カ-ひずみマトリックスである.
一定な基準荷重ベクトルpoに対する荷重倍率を λ*,
初期変位dOをpoにより座屈前に生じた変位とすると,
kDの下線の項は λ*2を含むのでこの項を省略する.
112

式(13)を 構造全体の要素について集める と次の座屈方程式が得られる.

[KL+λ*KD+λ*Kc]△D=O (16)

3. 平 面 シ ェル要 素

(1) ひずみマ トリックス
ニ次元要素と して, 図一1に示す4節 点及び要素の周
辺に節線(1)～(4)を有する四辺形要素を用いる. 四辺形要素では, 要素中央面上の任意の変位成分diを 次式で仮定する8).

dz(r1) = Nmn (e, ii)dmn=, f T di (17)

こ こ に, (ξ, η) は中央面に設けた自然座標, Nmnは 形
状関数, dmnは 節点, 節線, 節面 自由度の一般化変位
で, 添字m, nは 変位 関数 碕 を二重級数展開 したハイア ラーキ多項式(1. 1)の 次数を表す. fとdiはK次 の列ベク トル(Kはdmnの 自由度数)で, 形状関数ベク
トルfはCo級 要素によ りすべての変位成分に対 して
同一である. なお, ベ ク トルのスカラー積で表 したdづを用いれば, 以下の定式化は四辺形要素と三角形要素で共通となる. ただ し, (ξ, η)には面積座標(ξ1, ξ2, ξ3) を用いるもの とする.
偽 に並進変位の3成 分と直交座標軸x, yま わ りの回転角の2成 分を用いる と, 平面シェル要素の一般化変位dは5成 分に対するdiを 並べた次のベク トルで与えられる.

d = uT vT wT ex ev (18)
式(17), (18)を 式(4)に 用いる と, Mindlinの 仮定から形状関数行列は次のようになる.

N=

fT 0 0 0 zfT
0 fT 0 -zfT 0
0 0 fT 0 0

(19)

Nrは(3×5K)の 行列で, ゼ ロ列ベク トルの転置記号を省略 している. また, zは 中央面の法線方向の座標軸で ある.

式(3)で 板厚方向の垂直ひずみ ε、を省略すると, BL とBNVは 次式のようになる.

BL =

gi 0 0 0 zgi
0 92 0 -zg2 0
92 gi 0 -z9i zgT
0 0 g2 -fT 0
0 0 gi 0 fT

(20)

BN =

dT G11
dT - 22
dT (G12 +G21)
dT (G23 +G32)
dT l G13 +G31)

(21)

に こ こ,

(22)

また, 式(7)に 式(19)を 代入 して次式が得 られる.

G2=

Gti3 zG2
Gz, -zG23
Gti;
-zGi3 z2G23
zG2 z2Gz3

(23)

Gi3 -

0 H2o
0 -H20
0
0 zH2O

0 zHip

(24)

こ こ に, OはK次 の正方ゼ ロ行列で, 空白の要素はO である. また, 他の小行列は次のダイア ドである.

Gij=gigTj, Hi0=gifT(i, j=1, 2) (25)

(2)幾 何剛性行列
初期応力を之について積分 し, 次の断面力を定義する.

f o dz = P, f ozdz = M, f cz2dz = 12Po fadz=P75, yf Qyzdz = M, faz2dz y 1fPy f Tydz = Py, f Tyzdz = f Tyz2dz = 2PJ frdz=Q, yf Tdz = QO
(26)
こ こ に, 積分範囲は[-t/2, t/2]で, tは 板厚である.
式(23)～(26)を 式(12)に 代入 して σ9の項を省略す
る と, 式(14)の 幾何剛性行列は次のようになる ・

kG =

k p 0 0 0 kM +kQ
kP 0 -k--kQ 0
kP 0 0
sym. kR 0
kR

(27)

図-1四 辺形要素

113

こ こ に,

kp=lIlPGii+P?G22+P. fGi2+G2i1 dxdj

k M =Il MGi+MyG22+Mxy[G12+G21] dxdy kQ = //iQxHio +QyH2O dxdy

kR = (t/12) kp
(28)
Kirchhoffの 仮定を用いるときには, 回転変位 に対する幾何剛性k裏 と面外せん断力の項kる を省略する.

(3)初 期変位マ トリックス
初期変位dOを 含むひずみマ トリックスBoNを 簡潔
な式で表すために, 次のスカ ラー量を定める.
UO-9T u0 VO-9G O, WG0 -4 O
xk - 9k x ovk - 9kav

(k=0, 1, 2)(29)
こ こで. k=0の 場合にはgkの 代わ りに式(17)のf
を用いるものとする. u0な どはp0に よる一般化変位ベ ク トルであ る.
式(23), (24)の 行列にdOを 掛けてzに ついて積分す
ると, 次の5K次 の列ベ ク トルが得 られる.

∫Gikd0dz

=t{U0kgTi V0kgTi W0kgTi t2/1202 L090}

∫u3kα-αz=τ100-vyfUf}

∫G3dudz=zt9-9r-0997O O OI

∫Gkd0zdz

=≒{02g97-09grOV,gU9gTl

(30)
式(14)のkDの 下線の項を省略 した式に式(20), (21)
と式(30)を 代入 して次の初期変位マ トリックスが得られる、
kD=AM dxdy (31)
5K次 の対称行列AMをK次 の小行列Aij(i, j=1～
5)に 分割 して示す.

A11= Dp [2uc2 + PUC4]
A22 Dp [2v2c3 + PV 0C4]
A12 = D [u2c3+v1c2 + (U + v2)C5] A13 = Dp [w10c2 +W2 C5]+DypC1
A23 = Dp {w2c3 + WPCs] - Ds0C1
A14 = Db [e1c2 - y2C3 + (e2 - eyl)C5] -Ds0y0H2O

A15 = Db [2e1c2 y+ PDy2C4] + DSEy0H10

A24 = Db [2e2c3 + PD1C4] + Dse0H2O A25 = -Db [1C2-Oy2C3+(e2-Oyl) C6]
-DSe0H10

A33=0

A34 = -D3 [v10H10 +V 0H2O]
A35 = DS [UH1O + UH20]
A44 = Db [2V20C3 + PV 0C4] + 2D8V OF

A55 = Db [2U?C2 + pUC4]+ 2D3U1F A45 = -Db [u20c3 + V0C2 + (U? + V 0)Cg] -DS(U+V0)F

(32)

こ ご こ,

C1 = G11 + G22, C2 = G11 + G22
C3 = G22 + G11, C4 = G12 + G21
C5 = uG12 + 1tG21, C6 =G12 + vG21
F=ffT
(33)

(34)
Eは ヤング係数, Gは せん断弾性係数, vは ボア ソン比, kは せん断補正係数である.

4. ソ リ ッ ド要 素

(1)幾 何剛性行列
三次元要素として, 図一2に示す8個 の節点, 12本 の節線6節 面を有す る六面体ソ リッ ド要素を用いる. 六面体 ソリッ ド要素では, 並進変位の3成 分をそれぞれ三重級数展開 して式(17)の ようにスカラー積で表す. ここで, fは 形状関数Nmn(ξ, η, ζ)を適当な順序で並べたベク トルである8).
umn, などの一般化変位 をK次 の列ベク トルuで 表

図一2ソ リ ッ ド要素

面番号

1
2
3
4
5
6

節点番号

1-2-4-3
5-6-8-7
1-2-6-5
3-4-8-7
1-3-7-5
2-4-8-6

114

して, 要素の一般化変位ベク トルdを 次のようにお く.

d=uTvTwTr (35)

これよ り, 式(4)の 行列Nは(3×3K)次 のブロ ック
対角行列になる.

N=

fT
fT
fT

(36)

式(5)の 線形ひずみマ トリックスBLを 垂直ひずみ
とせん断ひずみに分けて表す.

BL =

BBL
BBL

BBL =

9T1

92

93

BBL =

92 9i 0
0 93 92
93 0 9i

(37)

こ こ に, 島 はfを それぞれx, y, zで 微分 したものである.
非線形ひずみマ トリックスBNは 式(6)で 与えられ
るので, 式(36)を 用いる と式(7)のGijは 次のように
なる.

G2, =

Gig
Gz,
Gi,

(38)

Gijj=gigTi (i, j=1, 2, 3) (39)

初期応力に式(10)の6成 分を用いると, 式(14)の 幾
何剛性行列は次式で与え られる.

kG =

ko
ko
ko

(40)

こ ご こ,

ks = QG11+ UvG22 + QzG33 + T0 xv [G12 + G21

+ Tyz [G23 + G32 j + Tzx [G1 3 + G31 j (41)

(2)初 期変位マ トリックス
式(6), (37), (38)を 式(14)のkDに 代入 して下線の項を省略すると, 次の初期変位マ トリックスが得られる.
kD=∫vAsdV (42)

こ こ に, Asは3K次 の対称行列で, これを3×3個 の小行列. Aijに分割 して示す.

A11 = 2 G U Goo + Cl [Ug+g1UT] i A22 = 2 G V2 Goo + Cl [vg+g2vT] 2 A33 = 2 G W Goo + Cl [wg3 + g3 WT
A12=G(U2+V0)Goo+a UgT+g1VT

+ G Vgi + g2VT

A13 =G(U+W)G00+ U93 +91WT

+ G [wgT + g3UT

A23 = G (V3 +W2) G00 + A [vg'3 + g2W T + G 1wg' + g3V T1
(43)

U=Ug1+U2 g2+Ug3
V =Vg1+Vg2+Vg3
W =Wg1+Wg2+Wg3
G00 = G11 + G22 + C33

(44)

(45)

U0k, V0k, W0kは 式(29)と 同様に定義されるスカラー量, λはLameの 定数である.

5. 剛性行列の積分

ハイアラーキ要素では変位を二重または三重級数展開 しているので, 非線形剛性行列の計算では多重級数の三重積の積分が必要である. そこで, 数値計算を考慮した定式化を行う.

(1)幾 何剛性行列
平面シェル要素では, 初期応力を面内成分と面外成分に分けて, これらをひずみで表す. 線形座屈解析の仮定により, 初期ひずみの面内成分に次の線形項
= DT u, E?. = 4Tv, 'Y= 9'1 u +9i vu (46)

を用いる と, 式(28)のk3を 次式のように表すこ とができ る.

kP=D1I191 {(x+vey)91+ LYxy921

+ g2 (y + vex) 92 +'Yxy 91 fttut (47)
こ こ に, (ξ, η)は要素の 自然座標系, 1Jlは ヤコ ビアンであ る. 式(47)の{}は1つ のベク トルであるから, k3は ベク トルのダイア ドを積分 して求められる. 初期曲げモーメン トの項k0Mは, 式(47)に おいてDp を曲げ剛性Dbに 置き換えて, 初期ひずみに次の曲げひずみ(た だ し, ひずみの次元とは異なる)を 用いる.

T=s=-92a, 'Yxv = 92 8- gj1 8 (48)
面外せん断力の項kる は次のようになる.

k=DS I I I {y91+y92} fTIJddry (49)

こ こ に,

y9 = 9, w f e, 'Yvz = 92 w - x (50)

115

ソリッド要素では, 式(41)を次式のダイアディック
(dyadic)で表して積分する.
ks+91x 91 + Txy 92 + Txx 931
+g2 Qy 92 +r91 + Tyz 93
+ 93z 93 T Oz 92 + T 9i 1 IIJIddijdC (51)
多項式の次数が高次になると, 式(47), (51)などの
数値積分では非常に多くの積分点が必要になる(6次式
の三重積分では, 各座標軸方向に10点積分が必要であ
る). そこで, 長方形要素や直方体要素では解析的な積
分法を用いて, 計算時間の短縮を図る.
まず, 長方形要素について幾何剛性行列の要素を陽
な式で求めるために, 式(18)の一般化変位ベクトルd
の成分を級数項(ui, vi, wi, θxi, θyi) の順に並び換えて,
式(27)のkGを級数項毎の小行列に分割すると, (i, j)
小行列kijを次式のように表すことができる(iは級数
m, nの二重級数項を適当な順序で並べた一般化変位の
番号である).
k23=
 kP kM +kQ
 kP -k-
 -k- Q kR
kM +kQ kR
(i, j=1, 2, …, K) (52)
ここで, 空白の要素はゼロである.
一般化変位に対する形状関数Ni, Njを
N2(e, 1) = fm(n)fn(ii), Nj(i1) = fm' (n)fn' (TiJ (53)
とするとき, 式(25)のG11, G12などの(i, j)要素
G11, ij, G12, ijは次式のようになる.
(54)
fm, fnは式(1.1) に示すハイアラーキ多項式, 4ξ, 8ηは
座標 ξ, η に平行な要素の辺長(要素寸法はln×4η)で
ある. また, gm, gnは ξ と η によるfm, fnの導関数で
ある.
(55)
二重級数展開した任意の変位成分dを1次元配列に
並べて
d = fm(s) fn(r))drnn = >fk(s)fk'(Tl)dk
(56)
と表す. ここに, kは一般化変位dkの自由度番号で,
fkとfk'はdkに用いた多項式である. なお, 総和はk
及びk'(k'はdkに応じて一意的に定まる)について求
めるものとする.
式(47)の(i, j)要素に式(46), (54), (56)を代入して
積分すると, 式(52)のk3は次式のように求められる.
+Hmm'kKk'n'n + It Hm'mkKk'nn' I
+Kkmm'Hn'nk' +Kkm'mhnn'k' (57)
ここに, Fkmm'などは次のハイアラーキ多項式の線積
分値である.
F'kmm'=l fkfmfm'k, Gkmm'=/ gkgmgm'd
Hkmm' = I gk fm frn'd, Kkmm' = I gk gm frn'd
(58)
なお, 式(57)のHkmm'とKkmm'では, 式(58)の多
項式の積に合わせて添字の順序を交換している. 数値
計算では, これらの積分値を一度求めておくと, すべ
ての長方形要素や直方体要素に共通して使用すること
ができる. 式(58)の定積分は付録1に示す漸化式で容
易に求められる.
式(52)のk0Rは, 式(57)のDpをD6に置き換えた
ものである. k0Mは, 式(57)のDpをD6に置き換え
て, u0kを θykに, vgを-θ0xkに置換して得られる. k0Q
は次式のようになる.
(59)
また, k0は喝のmとm'及びnとn'を交換した式
で与えられる.
直方体要素の幾何剛性行列も, 付録IIに示すように
式(58)を用いて求められる.
(2)初期変位マトリックス
初期変位マトリックスは, 式(29)の初期変位を含む
ベクトルのダイアディックで表すことができる. 例えば,
式(32)のA11を次式のように表して, 2つのダイアド
を数値積分すればよい.
A11=D 191 2Ui91+pU292
+92t2pUi92+PU291t (60)
長方形要素では, 式(58)の積分値を用いて解析的に
積分することができる. そこで, 式(31)のkDを式(52)
のような(5×5)の小行列k島に分割すると, k0の上
116

三角部分の要素kpqは 次のようになる.

k11 - Dpuk (212 +14 +I6)
k22 Dp vk (211 + 13 + 15)
k12=Dp>{uk(I1+13)+vk(I2+14)}
k13 = Dp>wk (I2 +14) +D>eykI8
k23 Dp > wk (I1 + 15) - Ds > exxk 18
k14 = Db { 8Xk (12 + 14) - 8yk (I1 + 13)}
-Ds 6k'9

k15 =>Byk{Db(2I2+14+16)+DSI10} k24;>8k{Db(2I1+13+I5)+DSI9} k25 Db > { eyk (I1 + 15) - ek (I2 + 16)} -D8> 9xk 110
k33 = 0
k34 = -Ds > vk I7
k35 = Ds > uk I7

k44 = >vk {Db(211 +13+15)+2D8111}
k55= uk{Db(2I2+14+16)+2D8112} k45=-DbE{uk(I1+I5)+vk(I2+16)}
-Ds > (uk Ill + vk I12)
(61)

こ ご こ,

I1 = (2/4) {(4/4)2Fkmm'Gk'nn' + /LKmm'kHk'nn'} I2 = (2/4,){(i, /4)2GkmmFknn , +/tHkmm'Knn'k'} 13 = (2/4) (VKkmm'Hn'nk'+Kkm'mHnn'k')
14 = (2/4,) (VHmm'kKk'n'n + Hm'rnkKk'nn')
15 (2/4) (VKkm'mHnn'k' +/'Kkmm'Hn'nk')
16 = (2/) (VHm'mkKk'nn' + /Hmm'kKk'n'n)
17 = (4/4) Kkmm' Fk' nn' + (4/4) Fkmm' Kk' nn'
18 = (6/4) Kmm'kF'k'nn' + (4/tn) F'kmm'Knn'k' 19 = (4/2) Fkmm'Hnn'k'
110 = (fin/2) Hmm'kF'k'nn'
111 = (4/2) F'kmm'Hk'nn'
112 = (4/2) Hkmm'Fk'nn'

(62)

なお, 式(61)の Σ は, 初期変位 媛 についてk=1～K の総和を表す.
k易 の下三角部分の要素kqpは, 式(61)の 要素kpqに用いる積分値HとKの 添字mとm'及 びnとn'を 交
換 したものである.
直方体要素の初期変位マ トリックスを付録IIに 示す.

6. 数値計 算例

(1)Kirchhoff要 素
a)最 適ペナルティ数
Co連 続性の変位関数を用いた薄板解析では, Kirch-hoffの 拘束条件が満足 されていないために精度が悪 くなる. ハイ アラーキ要素では, せん断 ロッキングは級数展開 したたわみ角の最高次の項で起きるので9), 剛性
行列kLの 最高次の多項式の積分に次数低減積分法を用
いればせん断 ロッキング現象は生 じない. しかし, Co 級要素ではせん断変形が必然的に考慮 されているために, 板厚比によってはその影響が現れる. せん断変形を除 くためには, 通常, ペナルテ ィ要素が用いられる. そ こで, ハイアラー キ要素を用いた座屈解析におけるペナルテ ィ数の効果を調べてみる.
表一1, 2は, 図一3に示す一方向圧縮力 σ. を受ける四辺単純支持板及び四辺固定支持 された長方形板の座屈係数k6を, ペナルティ数 αを変えて求めたもである. ここで, α/bは板の形状比, t/わは板厚比(幅 厚比)で ある. t/b=0. 3は 厚板であるが, ペナルティ数の効果を調べるために用いた.
数値計算では式(28)の 回転変位に対する幾何剛牲k0
を省略 し, 正確な値を得るため と桁落ちを調べるためにm=n=10次 式を用いる. なお, 桁落ちはm, nが 高次になる程起き易い8). v=0. 3と して, 座屈荷重 σcr と線形剛性行列kLの せん断剛性Dsを 次式で与える.

(63)

なお, Co級 要素の定式では, α はせん断補正係数kとなる.
表-1よ り, kbは α と(t/b)-2に 比例 してKirchhoff理
論による解4. 0に 収束するが, α>104で は桁落ちが生

図一3一 方向圧縮力を受ける平板 図一4縮 退三角形要素による分割

117

じるために消去演算が不能になることがある(表中の-の箇所). 初期応力解析の数値計算では, 条件数が1012
以上になる場合を演算不能と判定している. 表。2の固
定支持の場合でも同じ結果が得られているので, 最適
ペナルティ数 α*として次の値を用いる.
α*=10jt2/IJI, j=6～8 (64)
α*は板厚比に応じた値になるので, 表一1, 2に示すよ
うに板厚比に依らず, Co級要素を用いて薄板理論によ
る値が得られる. ここでは, j=8としている.
b)荷重状態と要素形状
四辺単純支持板に種々の荷重が作用する場合につい
て, 板の形状比を変えて計算する. また, 任意形状要素
の精度を調べるために, 四辺形要素の2つの節点を重
ね合わせた縮退三角形要素についても計算する. 図-4
に, 2つの三角形要素による要素分割を示す. 図中の ◎
印は重合節点である. 数値計算ではt/δ=0. 01, v=0. 3
とし, 式(64)のペナルティ数を用いる.
表一3～6に一方向圧縮力(σx), 二方向圧縮力(σ. =
σy), 三角形分布の純曲げ荷重(上下縁荷重 σx, u=
一σx, の及び純せん断力(τxy)による座屈係数k6の解
析解1)に対する誤差(%)を示す. 表中の数値の無い箇
所は, 多項式の次数m, nが低いために解析解と同じ座
屈モード(括弧内の数はx, y方向の半波形数)が求め
られなかった. また, 比較のために内部自由度(バブル
モード)を用いた4節点離散Kirchhoff要素によるFEM
解12)(1o×1o分割)も示してある.
数値計算の結果より, 次のことが分かる.
(1)2方向圧縮力を受ける場合の精度は極めて良いが,
その他の荷重に対しては, 要素形状比の限界は3～4
といえる.
(2)曲げ荷重に対する誤差が最も大きくて, 特に縮退
三角形要素の精度が悪い. これは, 通常の有限要素と
同様に, 面内曲げ問題では鋭角三角形要素による平面
応力解析の精度(初期応力の精度)が悪いことによる.
(3)作用荷重による精度の差は, 座屈モードの半波形
数によるものであり, 表一4と他の表を比べれば明らか
である.
(4)表一3, 4において, 多項式の次数m=8と10で
誤差が同じ場合があるが, これはペナルティによる桁
落ちのためと考えられる(表-8のペナルティを用いない
Mindlin要素では精度が向上している)・
(5)10次式を用いた本解法は, h法による4節点FEM
要素より2～5桁精度がよい(FEM要素は, バブルモー
ドだけ自由度数が多い).
c)境界条件
境界条件が異なる長方形板に一方向圧縮力が作用す
る場合の精度を調べる.
表一7に, 載荷辺が単純支持で, 非載荷辺が単純支持と
自由(SFSS)及び固定支持と自由(SFSC)の場合の解析
解1)に対する誤差を示す ・数値計算で用いた数値はb)
と同じである.
この場合は座屈モードの半波形数が少ないことから
要素形状比の大きな場合でも精度の良い値が得られて
おり, 境界条件が異なる場合でもb)で述べたことがい
える.
(2)厚板の座屈係数
a)座屈係数の解析解
数値計算結果の照査に用いる解析解の理論を明確に
するために, 一方向圧縮力を受ける単純支持板の式を
示す(図-3を参照).
表一1一方向圧縮を受ける単純支持板の座屈係数(m=n=10, μ=0. 3)
表一2一方向圧縮を受ける固定支持板の座屈係数(m=n:10, 〃:0. 3)
118

Mindlin理論による座屈解析の特性方程式は次式で
与えられる.
(65)
ここに, λ*は固有値, kはせん断補正係数, μ は板の
曲げ剛性Dbから導かれる.
(66)
なお, 下線の項はせん断変形効果, 二重下線の項は回
転変位に対する幾何剛性を表し, これらの項を省略す
るとKirchhofF理論による式に一・致する. ここで, mと
nは座屈モードのx, y方向の半波形数である.
3次元弾性論によるスラブの特性方程式は次式で与え
られる.
492γ, stanh(T/2)-(72+g2)2tanh(s/2)=0 (67)
ここに,
(68)
固有値 λ*とパラメータ9は式(66)と同じである. ま
た, 境界条件はスラブの上下面で自由, 4つの周面で次
表-3一方向圧縮を受ける四辺単純支持板の座屈係数の誤差(%)
表一4二方向圧縮を受ける四辺単純支持板の座屈係数の誤差 --(%)
表一5純曲げを受ける四辺単純支持板の座屈係数の誤差(%)
表一6純せん断を受ける四辺単純支持板の座屈係数の誤差(%)
119

式を仮定している.
v=ω=0 (αtx=0, α)
u=u=0 (αty=0, b)
(69)
式(65), (67)は座屈解析と自由振動解析の微分方程
式の類似性からも導くことができる6), 10). 座屈係数は
式(65)または式(67)の解 λき. を用いて求められる.
(70)
b)Mindlin要素による座屈係数
図-3の長方形要素について, 薄板から厚板までの座
屈解析にMindlin要素を用いた結果を表 □8に示す. こ
こでは, k=5/6, μ=0. 3として完全積分を用いる. ま
た, 比較のために8節点要素を用いたFEM解12)(10×
10分割)も示してある.
表一8は式(65)の解析解に対する誤差(%)で, 板厚比
に関係なくほぼ同程度の値が得られている. また, ペ
ナルティ数を用いていないことから, ハイアラーキ多
項式による級数の収束性は良好であり, 1o次式による
値は総自由度数が約2. 8倍のFEM解に比べて3～10桁
精度がよい.
表に示した α/b=2の場合には, 最小座屈係数を与
えるモードが板厚比によって変わる. このときの板厚比
はせん断補正係数kの値によって多少変化するが, 表
表一7一方向圧縮を受ける長方形板の座屈係数の誤差 (%)
表一8一方向圧縮を受ける四辺単純支持Mindlin板の座屈係数の誤差 (%)
表一9一方向圧縮を受ける周面単純支持スラブの座屈係数の誤差 (%)
120

の場合にはt/b≒0. 245で2半波形から3半波形に転
移する(図-5を参照).
c)ソリッド要素による座屈係数
前述のb)の問題を, ソリッド要素を用いて計算する.
この場合の有限要素解析で, 式(69)の境界条件を用い
て図一3に示した一様分布荷重 σxを作用させたのでは,
解析解で仮定している一様圧縮応力状態が得られない.
そこで, 式(69)を満たし, かつ同一の応力状態を得る
ために, 次の強制変位を各節点に加える.
un = -Qx a /E (at x = a)
vn = -v (b/a) un (at y = b)
wn = -v (t/a)un (at z = t)
(71)
ν=0.3を用いて表一8と同じような計算を行った結果
を表-9に示す. 解析解は式(67)から求めた値で, 表中
の記号Zは変位を厚さz方向に級数展開した多項式の
次数である.
表一8のMindlin要素に比べて α/b=1の場合に収束性
がやや悪いが, 薄板解析にソリッド要素を用いて精度の
良い値が得られている. 記, y方向に4次式(m=n=4)
を用いた α/b=2の値はあまり良くないが, ロッキン
グは起きていない. なお, ソリッド要素でも α/b=2
の場合に座屈係数が最小になるモードは, 板厚比が約
o. 25で2半波形から3半波形に移る.
d)Mindlin要素の等価せん断補正係数
Mindlin要素に用いるせん断補正係数には種々の式が
提案されていて, 通常, その違いによる影響は小さい
ものと考えられるが, 座屈係数に若干の差が生じる.
そこで, 種々の板厚比とせん断補正係数を用いて, 式
(65)から求めた座屈係数k6の値を表-10に示す. ここ
で, α/b=1, ν=0. 3としている. 補正係数は値の小さ
い順にMindlin, Nanni4), Reissner, Cowperl3)による
係数で, 5番目は式(72)の提案する値である. 表の最
後に, 3次元弾性論による値を示した.
k=5/(6-v) (72)
Mindlinの平板理論から求めた座屈係数は, すべての
値とも3次元弾性理論による値よりも小さいことから,
せん断補正係数の値がやや小さ過ぎる, すなわち過剰補
正になっている(補正係数を用いない場合の値は, 表一1
の第1列目 α=1の値). このため, t/b=o. 3のとき
には1～2%小さくて, 補正値の大きい提案式を用い
た値は約0. 1%小さい.
Mindlin要素を用いてソリッド要素と同じ座屈係数が
得られるための等価せん断補正係数の値を解析解から
求めると表一11のようになる. この表の数値から先述の
補正係数の式を提案した ・ この提案式の妥当性を調べ
るために, Mindlin要素とソリッド要素について数値計
算を行う. なお, 固定支持板のソリッド要素の計算で
は, 先のc)のソリッド要素による計算と同様に, 周辺
の4面を固定支持(u=v=ω=0)にして, 式(71)の
強制変位を加えた.
表一12の値は, Mindlin要素から求めた座屈係数の値
をソリッド要素による値に対する誤差(%)として表し
表一10一方向圧縮力を受ける周辺単純支持板の解析解による座屈係数(v=0・3)
表一113次元弾性論による座屈係数から求めた等価せん断補正係数
表一12ソリッド要素に対するMindlin要素の誤差一(%)
121

たものである. 単純支持の場合は表-10と同じ結果が得
られている. 固定支持の場合には差はやや大きくなり,
・k=π2/12では最大5%の差があるが, 提案式を用いた
Mindlin要素では1%以内の誤差でより正確なソリッド
要素に近い値が得られる.
(3)板厚比と非線形項の影響
Kirchho狂の仮定を用いた薄板の座屈係数は板厚比に
依らず一定になるが, せん断変形を考慮するMindlin理
論や3次元弾性理論による座屈係数には板厚比が影響
する. また, 回転変位に対する式(28)の幾何剛性k隻や
式(31), (42)の初期変位の項kDの影響も板厚比によっ
て異なる. ここでは, せん断変形を無視するKirchhoff
要素と, これを考慮するMindlin要素とソリッド要素
について, これらの非線形項k隻とkDの影響を調べ
る.
図一5に, 単純支持板に図一3の荷重が作用する場合の
座屈係数kbの値を示す. 点線, 一点鎖線と実線は計算
値で, 図(a), (b)のkGは式(28)のk争+k隻を表す.
図中の○ と △印は, 式(65), (67)から求めた解析解であ
る ・図(b), (c)でt/わが約0・25以下のときには ・座屈係
数は形状比が1と2の場合で同じであるが(○ 印), こ
れより厚い α/b=2の板では △ 印で示すように α/b=1
より小さな値となる(表ー8, 9参照). また, ▲ と● は文
献4)の値をプロットしたものである. ▲ は上述の非線
形項を省略した値で, 点線の計算値と完全に(文献に示
された5桁の数値と)一致する. ● は座屈前の初期変形
を考慮した値で, 本論文の初期変位と定式化が異なる
ために同一の非線形項ではないが参考のために示した.
なお, 回転変位に対する非線形項は本論文と同じよう
に撞われている. また, 図(b)では, 上記の文献と同じ
せん断補正係数k=5/(6+ν/4)を用いている.
図一5単純支持板における厚板比と非線形項の影響(α/b=1&2, ν=0. 3)
(a)Kirchhoff要素 (b)Mindlin要素 (c)ソリッド要素
図一6固定支持板における厚板比と非線形項の影響(α/b=1&2, ν=:0. 3)
(a)Krchhoff要素 (b)Mindlin要素 (c)ソリッド要素
122

板厚比が0. 01の薄板領域では非線形項の影響は現れ
ず, かつ, 3つの要素によるkbの差は0. 1%以下である.
非線形項の影響は, t/わが0. 05～0. 1以上で現れて, 図
(a), (b)よりk隻とkDの非線形性は同程度である ・ な
お, 図(a)では顕著であるが, 厚板領域ではKirchhoff
の仮定は成り立たない. また, 平板要素に比べて図(c)
のソリッド要素ではkDの影響はやや少ない.
固定支持板について同様な計算を行った結果を図一6
に示す ・ 図中の記号は図-5と同じである・形状比によっ
て座屈係数の値が異なる他は, 単純支持板と同様な傾
向である.
初期変位を考慮した場合の座屈係数の減少率(%)を
表一13に示す. 表の数値は図-5, 6(b), (c)の一点鎖線の
値に対する実線の値の減少率を表す. なお, 表一13の
Mindlin要素では, 式(72)のせん断補正係数を用いて
いる. 表より, 初期変位の影響は厚板ほど大きく現れ
て, 固定支持板のMind1in要素では最大12%, ソリッ
ド要素では10%減少している.
図-5, 6の図(a), (b)から明らかなように, Kirchhoff
理論の適用は板厚比にかなり厳しい制限(t/わく1/30)
を設けるべきであろう. しかし, ハイアラーキMindlin
要素を用いれば, 板厚比が0. 01～0. 3までの平板の座
屈解析を効率よく行うことができる.
7. 結論
線形座屈理論に基づくハイアラーキ要素を開発し, 数
値計算の効率性を考慮した接線剛性行列を定式化した.
平板の座屈解析に適用した結果から以下の知見が得ら
れた.
(1)薄板及び厚板の座屈解析において, ハイアラーキ
要素法により極めて高精度の解が得られる.
(2)Mindlin要素を用いて3次元弾性論の解に近い値
が得られるせん断補正係数を提案した.
(3)Co級要素を用いてKirchhoff理論による解を得る
ための最適ペナルティ数を求めた.
以上のことから, 板厚比が0. 01～0. 3の薄板から厚
板までの平板の座屈解析では, ハイアラーキMindlin
要素を用いて3次元弾性理論の解に良く一致する高精
度の値を効率よく計算することができる. 数値計算例
では初期変位の影響は少なかったが, 面外荷重が作用
する場合などについて検討する必要がある.
付録1積分の漸化式
ハイアラーキ多項式は次式で与えられる8)・
fz(s)= (1. 1)
これに ξPを掛けた次の積分を考える.
F2 (p) = I f(e)d, i G2 (p) = /p 9i (s) d
(p=0, 1, 2, …) (1. 2)
ここに, gi=dfi/dξ である.
n, Giは, 整数pをパラメータとする積分値である.
これに式(1. 1)を代入して表-1の値が得られる.
次に, 多項式の二重積の積分を考える.
(p) = / fi fj d, (p) = I gi gj d
Hii (p) = I & gi f i d
(1. 3)
式(1. 3)は式(1. 2)の積分値を用いて次式のように表
すことができる.
(i=0, 1)(1. 4)
F23(p) = F3(p + i -2) - F3(p + i)
G23(p) =(i-2)G3(p+2-3)-iG, (p+z-1)
H23(p)=(2-2)F3(p+2-3)-iF3(p+z-1)
(i≧2)(1. 5)
ここで,
Fl(一1)=Gj(一1):o(1・6)
とする. 式(1. 4), (1. 5)に表-1の値を代入した結果を表一
IIに示す. なお, p=0とした二重積の積分値は先の論
文8)で示した値である(ただし, xについての微分によ
る変換長=2を含めている).
表-13座屈係数に及ぼす初期変位の影響(α/6=1) (%)
123

次の三重積の積分値を求める.

Fij k (p) -efifjfkd, Gk (p)e9i9j9kd

Hij k (p) =p 9i f j f k d, Ki j k (p)=9i9jfkd
(1. 7)
これ らの積分値は式(1. 4), (1. 5)を 用いて次式で求め られる.

F3k(p)=2{Fk(p) - (-1)2 F3k(p+ 1) } Gtijk(p) =2 (-1)+1 G7k(p)
H2jk(p) = a (1)i+1 Fjk(p)
K2k(p) = (-1)2+1 H3k(p)

(i=0, 1) (1.8)
F2k (p) = Fjk (p + i - 2) - Fjk (p + i)
G2k (p) = (i - 2) Gk (p + i - 3) - i Gk(p + i -1) Hijk(p) = (i-2)F, k(p+i-3) -iF3k(p+i 1) K2, k(p) = (i - 2)H3k(p+i -3)- iH3k(p+i-1)

(i≧2) (1. 9)

式(1. 8), (1…9)を式(1. 4), (1・5)と比べ る と, 多重積の積分値は漸化式で求め られるこ とが分かる. したがって, 式(1. 1)の ハイアラーキ多項式は関数値及び微分値も漸化式で計算できるので8), プログラムが簡単になる. 式(1. 8), (1. 9)に 表-IIの 積分値 を代入する と, 陽な式

で三重積の定積分が得られる ・ なお, fi, 9fな どの順序によ りHijkとKijkに はそれぞれ3通 りの場合があるが, これらは添字の順序を交換 して求められる. 式(58) は, 式(1. 8), (1. 9)に おいてP=0と した値である.

付録II直 方体要素

(1)幾 何剛性行列
直方体要素では, 式(35)の 一般化変位dを(uvi, vi, u) の順に並び変えて, fのi, j成 分を

Nz (e, (s) = fm (s) f (ij) f ((s)
N; (e, c) = fm, (e) f n' (r) fl' (s)

(II. 1)

と す る と, 式(39)のG11, G12な どの(i, j)要 素 G11, ij, G12,jは 次の よ うにな る.

(II. 2)

こ こに, 9m, 9n, 9zは, fm, fn, fεをそれぞれ ξ, η, ζで
微分 したものであ り, 4ξ, ち, 4ζは要素寸法である. 荷重pOに よる一般化変位(u2, v2, U£)で表 した初期
応力 と式(II. 2)を 式(41)に 用いる と, k2の(i, j)要 素

表一1単 項式の積分値

表-II二 重積の積分値

124

k9は 式(58)の 積分値 を用いて次式のようになる.

(II. 3)
こ こ に

Akl = Fknn' { A Hkmm' Kll'k +G Hmm'k Kkl'l

+G Hmmmk Kkll' + Dl Gkmm' Fkll' (/f2
Ak2 = Fkll' A Hkmm' Knn'k + G Hmm'k Kknn

+GHm'mk Kknn'
Bkl = Fkll' A Hknn' Kmm'k + G Hnn'k Kkmm

+ G Hn'nk Kkmm' + D1 Gk' Fkmm' (s)2
Bk2 = Fkmm' A Hknn' Kll' k + G Hnn' k Kkl'l

+ G Hn'nk Kkll'

ckl = Fkmm' A Hkll' Knn'k + G Hll'k Kknn

+ G H1'lk Kknn' + D1 Gkll' Fknn' (/C)2
ck2 = Fknn' A Hkll' Kmm'k + G Hll'k Kkmm

+GHI'lk Kkmm'
(IL4)
D1=2G+λ (II. 5)
λ は式(45)の 工Lam6の 定数である. なお, 初期変位魂 などの添字kは, 三重級数項で表 される一般化変位
umnZな どを1次 元配列に並べたときの自由度番号で,
式(II・4)の積分値の添字kは 魂 に用いる多項式fの 番号であ る.

(2)初 期変位マ トリックス
3K次 の初期変位マ トリックスkDを3次 の正方行列
k0ijに分割する.
dのi, j成 分の形状関数を式(II. 1)で 表すと, k0ijの上三角部分の要素kpqは 次式で次式で与えられる.

k11 =uk(2I1 +I4+I5+Is+I7)
k22=vk(212+18 +19+110+I11)

k33-wk(213+112+113+114+115) k12=L.uk(I2+Is+I1o)+vk(I1+I4+Is)
k13= uk(I3+I12+I14)+wk(I1+14+Is)

Ic23=J{vk0(I3 + 112+114)+wk(I2+19+111)}
(II. 6)

こ ご こ,

Il = (t/) D1 Gkmm' Fknn' Fkll'
12 = (4(/t) D1 Fkmm' Gk' Fkll'
13 = ((i/c) D1 Fkmm' Fknn' Gktl'
14 = (t(/4l) Fkll' (G Hkmm' Knn'k + G Hm'mk Kknn' + A Hmm' k Kkn' n)
15 = (/t) Fklz' (G Hkmm' K' k + A Hm' mk Kknn' + G Hmm' k Kkn' n)
16 = (4/t(s) Fknn' (G Hkmm' Kll'k + G Hm'mk Kkll' + A Hmm'k Kkl'l)
17 = (4/e(s) Fknn' (G Hkmm' Kll'k + A Hm'mk Kkll' +GHmm'k Kkl'l)
18 = (t(/) Fkll' (G Hknn' Kmm'k + G Hnn'k Kkmm + A H'k Fkmm')
19 = ((/) Fkcl' (G Hknn' Kmm'k + A Hnn'k Kkmm + G H'k Kkmm)
110 = (is) Fkmm' (G Hknn' Kll'k + G H'k Kkl'l + A H'k Kkll')
Ill = (/) Fkmm' (G Hknn' Kll'k + A H'k Kkl'l + G H'k Kkll')
112 = Fknn' (G Hkll' Kmm'k + G Hll'k Km m + A H1'lk Kkmm')
113 = (/) Fknn' (G Hkll' Kmm'k + A Hll'k Kkmm + G HI'lk Kkmm')
114 = (t(/6) Fkmm' (G Hkll' Knn'k + G Hll'k Kknn +IIl'lk Kknn)
115 = ((/4,)Fkmm' (GHkll' Knn'k + AHll'k Kknn
+ G Hl'lk Kknn') (II. 7)
Fkmm'な どは式(58)の 積分値で, 総和 Σ はk=1～K
とす る. 下三角部分の要素kqpは, PfとKの 添字m とm', nとn'及 びZとZ'を それぞれ交換する.

参考文献
1) Timoshenko, S. P. and Gere, 3. M. : Theory of Elastic Stability, 2nd ed., McGraw-Hill, pp. 348-439, 1961.
2) Liew, K. M., Xiang, Y. and Kitipornchai, S. : Ana-lytical buckling solutions for Mindlin plates involving free edges, Int. J. Mech. Sei., Vol. 38, No. 10., pp. 1127-1138, 1996.
3) Sethilnathan, N. R., Lim, S. P., Lee, K. H. and Chow, S. T. : Buckling of shear-deformable plates, AIAA J.,
Vo1. 25, pp. 1268-1271, 1987.
4) Xiang, Y., Wang, C. M., Liew, K. M. and Kitipornchai, S. : Mindlin plate buckling with prebuckling in-plane deformation, J. Engrg. Mech., ASCE, Vol. 119, pp. 1-
18, 1993.

125

5) Srinivas, S. and Rao, A. K. : Buckling of thick rectan-gular plates, AIAA J., Vol. 7, pp. 1645-1646, 1969.
6) Srinivas, S. and Rao, A. K. : Bending, vibration and
buckling of simply supported thick orthotropic rectan-gular plates and laminates, Int. J. Solids Structures,
Vol. 6, pp. 1463-1481, 1970.
7)林正, 渡辺力:節点帯板法による薄肉構造物の座屈
解析, 土木学会論文集, No. 525/1。33, pp. 17-25, 1995.
8)林正, 山中素直, 加瀬部弘, 佐藤敏亮=ハイアラー
キ要素による有限要素解析の効率化, 土木学会論文集,
No. 591/1-43, pp. 71-84, 1998.
9)林正, 岩崎英治:ハイアラーキ要素による骨組構造解
析, 土木学会論文集, No. 570/1-40, pp. 163-174, 1997.
10)林正, 渡辺力:2段階動的縮小法を用いたハイアラー
キ要素による自由振動解析, 土木学会論文集, No. 619/1-
47, pp. 35-46, 1999.
11) Smith, J. P. : Buckling of shear deformable plates us-ing the p-version of the finite element method, Com-puters & Structures, Vol. 57, pp. 527-532, 1995.
12) NISA II ユーザーズ・マニュアル Version 93. 0: Engi-neering Mechanics Research Corporation, 1994.
13) Dym, C. V. and Shames, I. H. Solid Mechanics,
McGraw-Hill, p. 190, 1973.
(1999. 1. 29受付)
BUCKLING ANALYSIS OF PLATES BY HIERARCHICAL ELEMENTS
Masa HAYASHI, Chikara WATANABE, Yoshiharu MASUI and Takahiro UEDA
Hierarchical finite element method is proposed for the elastic buckling analysis using tangent stiffness
matrices of shell elements and solid elements by total Lagrangian formulation. In this paper, the buckling
analysis of the thin and thick plates is performed to examine the accuracy of this method and the effects
of nonlinear components of the tangent matrices on buckling loads. For Kirchhoff's plate theory, Mindlin's
plate theory and three-dimensional theory of elasticity, the solutions of the hierarchical element method
agree very well with detailed-calculations of each plate theory. Moreover, a shear correction factor is
proposed for the Mindlin element and the good solutions are obtained for those of three-dimensional
theory of elasticity.
126