

Calcul global en éléments finis d'un portique tridimensionnel fondé sur un massif d'argile

V. NASRI
J.-P. MAGNAN

Laboratoire Central
des Ponts et Chaussées,
58, boulevard Lefebvre,
75732 Paris Cedex 15

Résumé

Cet article présente l'analyse en éléments finis de la consolidation d'un massif d'argile et de son interaction au cours du temps avec un portique tridimensionnel fondé superficiellement sur l'argile. L'évolution en fonction du temps des efforts normaux et des moments fléchissants dans les éléments de la structure (poutres et colonnes) est comparée avec celle de l'analyse indépendante du temps. On observe que, dans certains éléments de la structure, les forces maximales se produisent pendant la consolidation et que le contrôle des efforts finaux obtenus par une analyse conventionnelle indépendante du temps peut être insuffisant.

Interactive finite element analysis of a three-dimensional frame on a clay medium

Abstract

Consolidation analysis using a finite element formulation based on Biot's consolidation theory has been used to study the time-dependent behaviour of a frame structure resting on a soft clay layer. The effect of soil consolidation on the entire interactive behaviour of a frame-soil mass system is considered. Time history of axial forces and bending moments of the structural elements (beams and columns) are compared with those of time-independent analysis. It is shown that, in some elements, the maximum forces in the frame occur during consolidation and that checking the final forces in the frame by time-independent conventional frame analysis may not be sufficient.

Introduction

Le comportement des structures reposant sur des sols déformables est souvent analysé en séparant le calcul des déformations et de la consolidation des sols, d'une part, et le calcul de la structure, d'autre part. Les recherches sont aussi menées en général de façon séparée, avec une série de travaux de développement de la modélisation des sols argileux saturés, dans la lignée des travaux de Terzaghi pour la consolidation unidimensionnelle et de Biot pour le couplage des équations de la mécanique des milieux continus et de l'hydraulique des sols, et une série de travaux sur la modélisation des structures (Magnan, 1987). Le développement de procédures de calcul simultané des déformations des structures et des sols dans le logiciel CÉSAR-LCPC (Humbert, 1989 ; Nasri, 1996) permet d'envisager un développement important des analyses couplées de sols et de structures, en levant certaines limitations des méthodes d'analyse classiques.

Après un rappel de quelques étapes du développement des recherches sur les calculs d'interaction des sols et des structures, l'article présente l'analyse globale des efforts et des déformations dans un portique tridimensionnel fondé superficiellement sur une couche d'argile saturée.

Interaction sol-structure : repères bibliographiques

Depuis une vingtaine d'années, de nombreux travaux ont été effectués pour étudier l'influence de l'interaction sol-structure dans les structures en portiques. Lee et Harrison (1970) ont présenté deux méthodes dans lesquelles la distribution supposée de la pression de contact est modifiée par un processus itératif. Haddadin (1971) a proposé une approche de sous-structuration bidimensionnelle pour l'analyse interactive linéaire des portiques avec les radiers. Lee et Brown (1972) ont effectué deux analyses d'interaction pour une structure de sept étages et trois travées : pour la première, le sol est traité à l'aide du modèle de Winkler ; dans la seconde, il est considéré comme un milieu semi-infini. La solution pour un système portique-radier-sol bidimensionnel, dans lequel le portique et le radier ont été discrétisés en éléments de poutre et le massif de sol en éléments de massif rectangulaires, a été présentée par King et Chandrasekaran (1974). Brown (1986) a examiné l'effet de l'évolution de la construction sur l'interaction du sol et de la structure : il a trouvé que la rigidité effective d'un bâtiment pendant la construction représente environ la moitié de la rigidité de la structure complète.

Des études concernant l'influence de l'interaction entre un portique tridimensionnel, un radier et un massif de sol sur la redistribution des moments fléchissants, des efforts tranchants, des pressions de contact et des tassements différentiels ont été rapportées par plusieurs auteurs. Hain et Lee (1974) ont

analysé des portiques tridimensionnels de (trois par trois) et (six par trois) travées en utilisant l'approche de la sous-structure. King et Chandrasekaran (1977) ont utilisé la méthode des éléments finis pour modéliser un portique tridimensionnel dont le radier repose sur un substratum argileux non-homogène, afin de tenir compte de l'influence de la rigidité de la structure sur la redistribution des efforts et des tassements. Yao (1991) a proposé une formulation en éléments finis tridimensionnels complète pour le système portique-radier-sol. Le demi-espace semi-infini a été discrétisé en utilisant une combinaison d'éléments finis et infinis.

La revue des travaux précédents montre que très peu d'efforts ont été consacrés à modéliser l'effet de la rigidité de la structure sur l'évolution au cours du temps du tassement (la structure était supposée en général parfaitement flexible). Dans la réalité, les structures ont une flexibilité finie, intermédiaire entre une parfaite rigidité et une flexibilité totale, et il serait certainement souhaitable, comme l'a suggéré Habib (1981), de tenir compte de la rigidité relative du sol et de la structure. Il est d'autre part intéressant d'étudier si les valeurs finales des efforts (forces et moments) dans les éléments de la structure, poutres ou colonnes, sont dépassées pendant la consolidation. La modélisation simultanée et complète d'une structure et de son massif d'argile de fondation, décrite dans le présent article, montre que cela se produit effectivement.

Équation de la consolidation en éléments finis

La formulation variationnelle des problèmes de consolidation est obtenue par intégration des équations locales de Biot. La minimisation des deux fonctionnelles relatives aux déformations du squelette du sol et à l'écoulement du fluide interstitiel, après discrétisation sur l'espace idéalisé en éléments finis, permet d'obtenir la formulation matricielle suivante :

$$\begin{aligned} R_G U(t) - C_G H(t) &= F(t) \\ C_G^T \dot{U}(t) + K_G H(t) + E_G \dot{H}(t) &= Q(t) \end{aligned} \quad (1)$$

avec :

- U vecteur des déplacements nodaux,
- H vecteur des charges hydrauliques nodales,
- R_G matrice de rigidité du squelette du sol,
- C_G matrice de couplage,
- K_G matrice de perméabilité,
- E_G matrice de compressibilité du fluide interstitiel,
- F vecteur des forces nodales imposées,
- Q vecteur des débits nodaux imposés.

En utilisant ensuite la méthode de Galerkin, qui établit un schéma semi-implicite basé sur une interpolation linéaire dans le temps, on obtient la relation de récurrence suivante :

$$\begin{bmatrix} R_G & -\alpha C_G \\ -\alpha C_G^T & -\alpha^2 \left(\frac{2}{3} \Delta t K_G + E_G \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U(t+\Delta t) \\ H(t+\Delta t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} R_G & \frac{3}{2} \alpha C_G \\ 0 & \alpha^2 \Delta t K_G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U(t) \\ H(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} F(t) \\ -\frac{\alpha}{3} \Delta t Q(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F(t+\Delta t) \\ -\frac{2}{3} \alpha \Delta t Q(t+\Delta t) \end{bmatrix} \quad (2)$$

Le facteur d'échelle α est appliqué aux charges hydrauliques pour réduire les difficultés numériques dues au mauvais conditionnement de la matrice du premier membre (ordres de grandeur très différents des modules de R_c et des coefficients de perméabilité de K_c).

4

Modélisation du système portique-sol

4.1

Choix des éléments et du maillage

Pour les calculs bidimensionnels en déformations planes, le sol est représenté par un maillage composé d'éléments finis isoparamétriques de consolidation à huit nœuds. Les parties de la structure (poutres, colonnes et fondation) sont modélisées en utilisant un élément de poutre plan isoparamétrique à trois nœuds. Dans le cas tridimensionnel, le sol est modélisé en utilisant un maillage constitué d'éléments finis isoparamétriques tridimensionnels à vingt nœuds. Dans la formulation de ces éléments composites de consolidation, afin d'avoir le même degré de développement pour la contrainte effective et la pression interstitielle, on utilise des fonctions d'interpolation quadratiques pour les déplacements et linéaires pour la pression interstitielle. Les dalles et les fondations sont discrétisées en utilisant l'élément de coque épaisse isoparamétrique à huit nœuds avec six degrés de liberté par nœud. Cet élément quadrangulaire de type surface moyenne est basé sur les hypothèses cinématiques de Mindlin (toute normale à la surface moyenne reste droite après déformation mais n'est plus forcément normale à la surface moyenne déformée) et prend en compte les effets du cisaillement transversal. Une intégration réduite est utilisée pour le calcul de la matrice de rigidité élémentaire. Cette intégration améliore notablement les performances de cet élément et autorise son utilisation pour le calcul de structures relativement minces (Zienkiewicz, 1991). La modélisation des colonnes et des poutres est effectuée avec des éléments de poutre tridimensionnels isoparamétriques à trois nœuds avec six degrés de liberté par nœud. Cet élément de poutre est une généralisation de l'élément de poutre de Timoshenko (Hinton et Owen, 1977), qui permet de tenir compte de la déformation due au cisaillement transversal.

4.2

Modélisation des conditions d'interface (sol-structure)

Afin de définir complètement le problème d'interaction, il est nécessaire de préciser les conditions relatives au comportement mécanique de l'interface sol-fondation. D'un point de vue théorique, plusieurs hypothèses peuvent être envisagées concernant la condition d'interface entre les fondations et le massif de sol sous-jacent. Elles varient d'une interface parfaitement glissante à une interface totalement adhérente, en passant par le frottement de Coulomb. Le décollement de la fondation et du sol peut être également envisagé. Toutefois, pour

la plupart des fondations de structures, en l'absence de chargements latéraux, les charges permanentes verticales sur la fondation sont suffisantes pour empêcher toute perte de contact entre la semelle et le sol. Une méthode de modélisation de l'interface consiste à utiliser une couche mince d'un milieu continu élasto-plastique dont la loi de comportement est le critère orienté. Il s'agit de donner à une bande fine sous le radier une direction de déformation plastique tangente à la fondation simulant le glissement dû au cisaillement. Ce modèle a été proposé par Cramer *et al.* (1979) pour modéliser une interface entre le sol et le radier ou une discontinuité dans le massif de sol. Il a été introduit dès cette époque dans le programme de calcul par éléments finis du LCPC (Frank *et al.*, 1980). Le coefficient de frottement entre la fondation et le sol peut être choisi, selon Bowles (1988), entre $\tan \varphi$ et $2/3 \tan \varphi$ (φ est l'angle de frottement interne du sol). Pour l'exemple présenté ci-après, le coefficient de frottement entre le sol et le radier a été fixé à $2/3 \tan \varphi$, tandis que la cohésion et l'angle de dilataance de l'interface sont supposés nuls. Le module d'Young de l'élément d'interface est pris égal à celui du sol.

4.3

Particularités des éléments de massif

Les éléments de consolidation bi- et tridimensionnels sont respectivement des éléments à trois et quatre degrés de liberté par nœud. Dans les deux cas, le dernier degré de liberté correspond à la charge hydraulique. Comme on l'a dit précédemment, dans les problèmes d'interaction bidimensionnelle plane entre sols et structures, on utilise, pour modéliser la structure, des éléments de poutre à trois nœuds avec trois degrés de liberté par nœud pour représenter les poutres, les colonnes et les fondations. Dans les calculs tridimensionnels, on utilise des éléments de poutre à trois nœuds avec six degrés de liberté par nœud pour représenter les poutres et les colonnes et des éléments de coque à huit nœuds avec six degrés de liberté par nœud pour les dalles et les fondations. Comme on peut le constater par exemple dans le cas bidimensionnel, le troisième degré de liberté correspond à la pression interstitielle pour l'élément de massif et à la rotation pour l'élément de poutre, ce qui pourrait entraîner une confusion de degrés de liberté de nature différente au niveau de l'assemblage des matrices élémentaires. Afin d'empêcher cette confusion, nous avons placé le degré de liberté de la pression interstitielle de l'élément de massif en quatrième position pour le calcul bidimensionnel (décalage d'un degré de liberté) et à la septième place pour l'analyse tridimensionnelle (décalage de trois degrés de liberté). Tous les sous-programmes de dimensionnement et de calcul des matrices de rigidité, de perméabilité et de compressibilité ainsi que les vecteurs de force et de débit ont été adaptés afin de permettre ce décalage de degré de liberté de la pression interstitielle. Les équations ajoutées sont éliminées au niveau du sous-programme de pénalisation avant la résolution du problème. En même temps, il faut effectuer un décalage d'un degré de liberté au niveau de la quatrième position pour l'élément de poutre plan et au niveau de la septième place pour les éléments de poutre tridimensionnelle et les éléments de coque. De plus, comme on peut l'observer dans l'équation matricielle à résoudre [2], le vecteur des forces nodales du

pas de temps précédent intervient dans le second membre. Il faut donc calculer ce vecteur pour les éléments de poutre et de coque à chaque pas de temps.

4.4

Incrémentation automatique du temps

La consolidation est un processus typique de diffusion. Initialement, les variables évoluent rapidement en fonction du temps, puis les variations de la contrainte et de la pression interstitielle deviennent plus lentes. Par conséquent, un schéma d'incrément automatique du temps est utile pour toutes les applications pratiques, puisque la durée d'étude du phénomène est en général beaucoup plus grande que les incréments de temps qui doivent être utilisés pour obtenir des solutions raisonnables pendant le début de la consolidation. Un algorithme de gestion de l'incrément automatique du temps a été utilisé. Avec cette méthode, le début de la consolidation peut être décrit avec précision et les étapes ultérieures sont analysées avec des pas de temps beaucoup plus grands, permettant une résolution convenable du problème.

5

Exemple : analyse d'un portique tridimensionnel sur sol argileux en considérant l'effet de la consolidation

L'exemple développé dans cet article concerne l'influence de la consolidation du sol support sur le comportement d'un portique tridimensionnel. La structure étudiée est composée d'un portique tridimensionnel à un étage, de deux travées dans les sens longitudinal et transversal, de fondations sur semelles isolées (Fig. 1). Le massif de sol est stratifié avec un substratum rigide et imperméable, une couche d'argile molle de 8 m d'épaisseur et une couche de sable dense à la surface (Fig. 2). Les fondations reposent sur la couche d'argile. La discrétisation multi-éléments du système portique-sol est représentée sur la figure 3. En raison de la symétrie, seul un quart du problème est modélisé et les degrés de liberté des déplacements normaux dans les plans de symétrie ainsi que les degrés de liberté adéquats des rotations des poutres dans ces

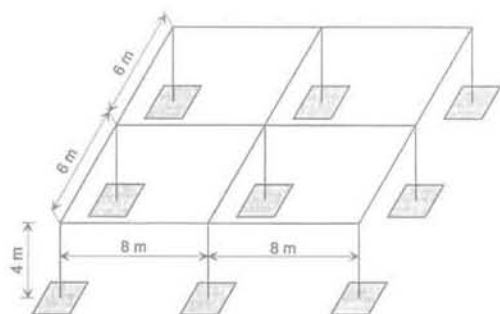


FIG. 1 Schéma du portique tridimensionnel et de ses fondations superficielles.
Sketch of the space frame and its spread footings.

plans sont bloqués. Le drainage se fait en surface mais on suppose que les fondations sont imperméables. Le tableau I donne les détails géométriques, les propriétés des matériaux ainsi que le mode de chargement.

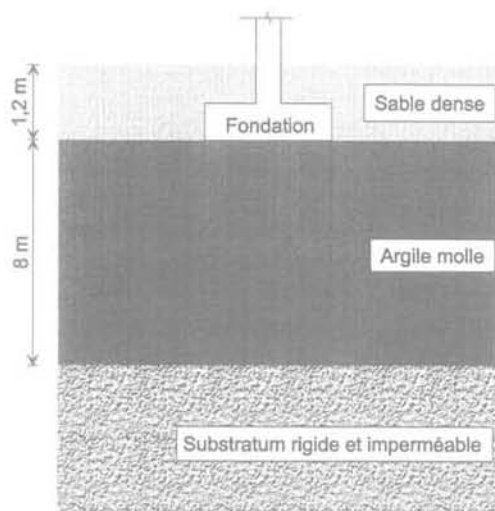


FIG. 2 Profil du sol.
Soil profile.

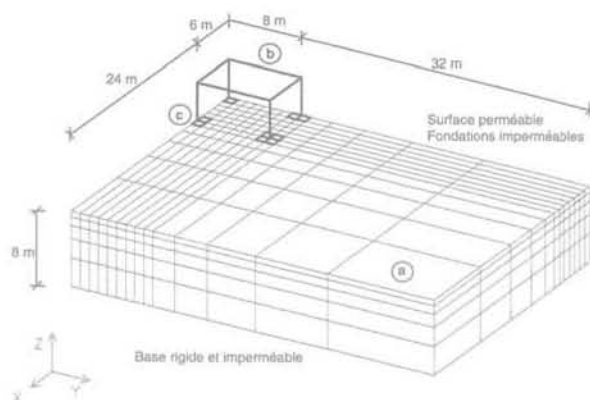


FIG. 3 Discrétisation multi-élément du système sol-structure.
Multi-element discretisation of soil-structure system.

On admet, dans cet exemple, que le chargement est appliqué instantanément. Par conséquent, le problème est traité en deux phases. La première phase est une analyse non drainée d'un seul incrément avec un pas de temps arbitraire, qui établit la solution initiale. Dans la seconde phase, la véritable consolidation est calculée en utilisant l'incrément automatique du temps. Un point important dans un tel problème de consolidation est le choix du pas de temps initial. Comme les équations sont paraboliques, la solution initiale (immédiatement après le changement instantané) est une solution d'« effet de

TABEAU I Détails géométriques et propriétés des matériaux du système portique-sol.

Portique		Sol		Chargement	
Section des poutres (m x m)	(0,4 x 0,8)	Module d'Young (kPa)	15 000	Poutres dans la direction X (kN/m)	80
Section des colonnes (m x m)	(0,4 x 0,4)	Coefficient de Poisson	0,3	Poutres dans la direction Y (kN/m)	60
Section des fondations (m x m x m)	(2 x 2 x 0,6)	Coefficient de perméabilité (m/s)	10^{-10}		
Module d'Young (kPa)	$2,10^7$	Compressibilité du fluide (kPa^{-1})	10^{-5}		
Coefficient de Poisson	0,2	Porosité	0,5		
		Angle de frottement interne (degrés)	20		

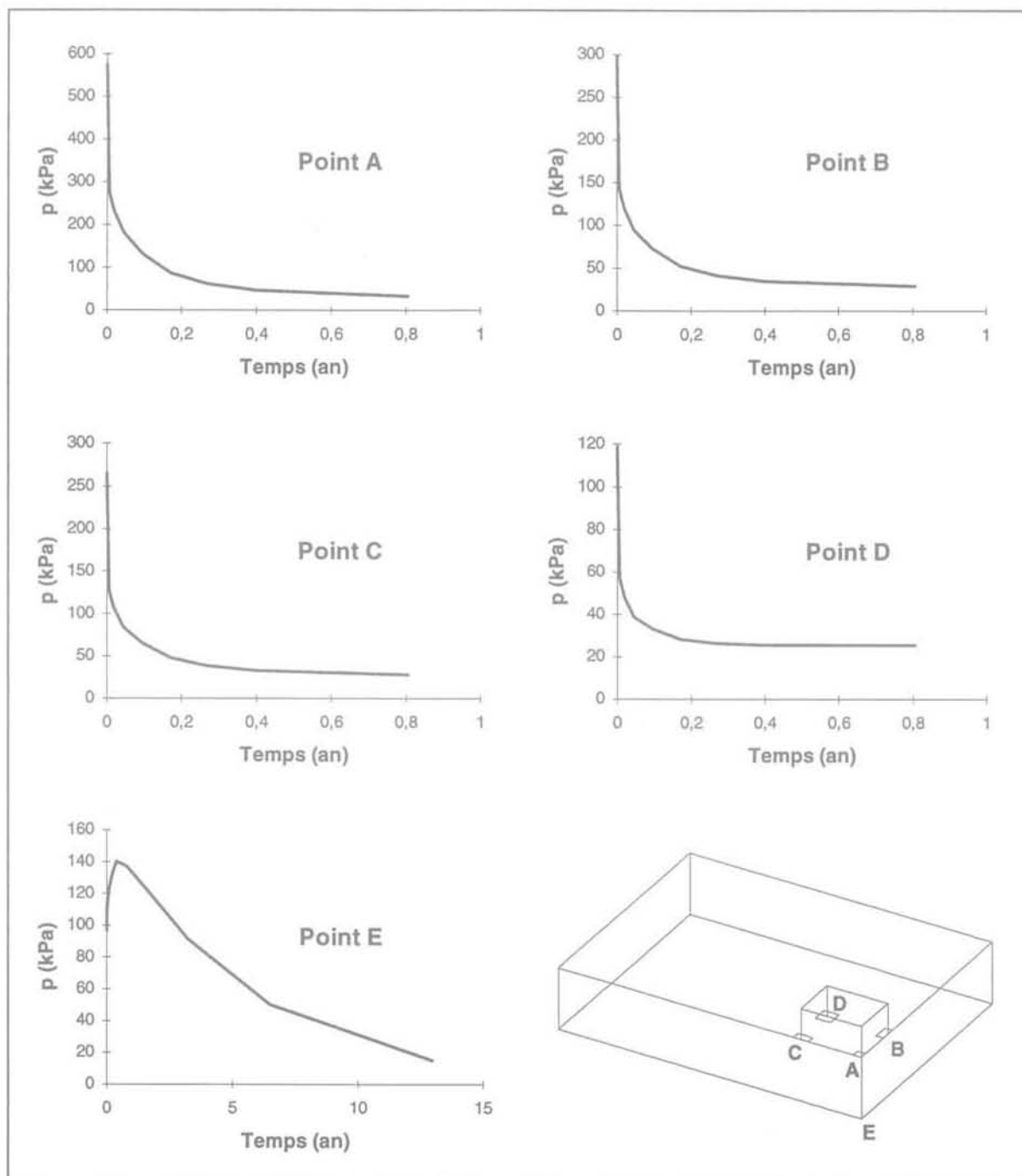


FIG. 4 Variation au cours du temps des surpressions interstitielles sous le centre des fondations. Excess pore water pressure variation with time beneath the centre of the footings.

peau local ». Si l'on choisit un maillage d'éléments finis de taille raisonnable pour modéliser la solution lorsque les variations de la pression interstitielle se sont propagées dans les pores du massif de sol, cette solution initiale sera modélisée de façon médiocre. Avec des pas de temps plus petits, la difficulté s'accroît. En effet, dans tous les problèmes transitoires, la taille de l'élément et le pas de temps sont liés, à tel point que les pas de temps inférieurs à une certaine valeur ne donnent pas d'informations utiles

(Nasri et Magnan, 1997). Le couplage des discrétisations spatiale et temporelle est toujours plus visible au début des problèmes de diffusion, immédiatement après les changements imposés aux valeurs aux limites. Afin de calculer le premier pas de temps, on a utilisé la formule $\Delta t_0 \geq \gamma_w (\Delta h)^2 / 6Ek$ donnée par Vermeer et Verruijt (1981), dans laquelle γ_w est le poids volumique de l'eau, Δh la plus petite taille d'élément sur la surface drainée, E le module d'Young du sol et k le coefficient de perméabilité du sol.

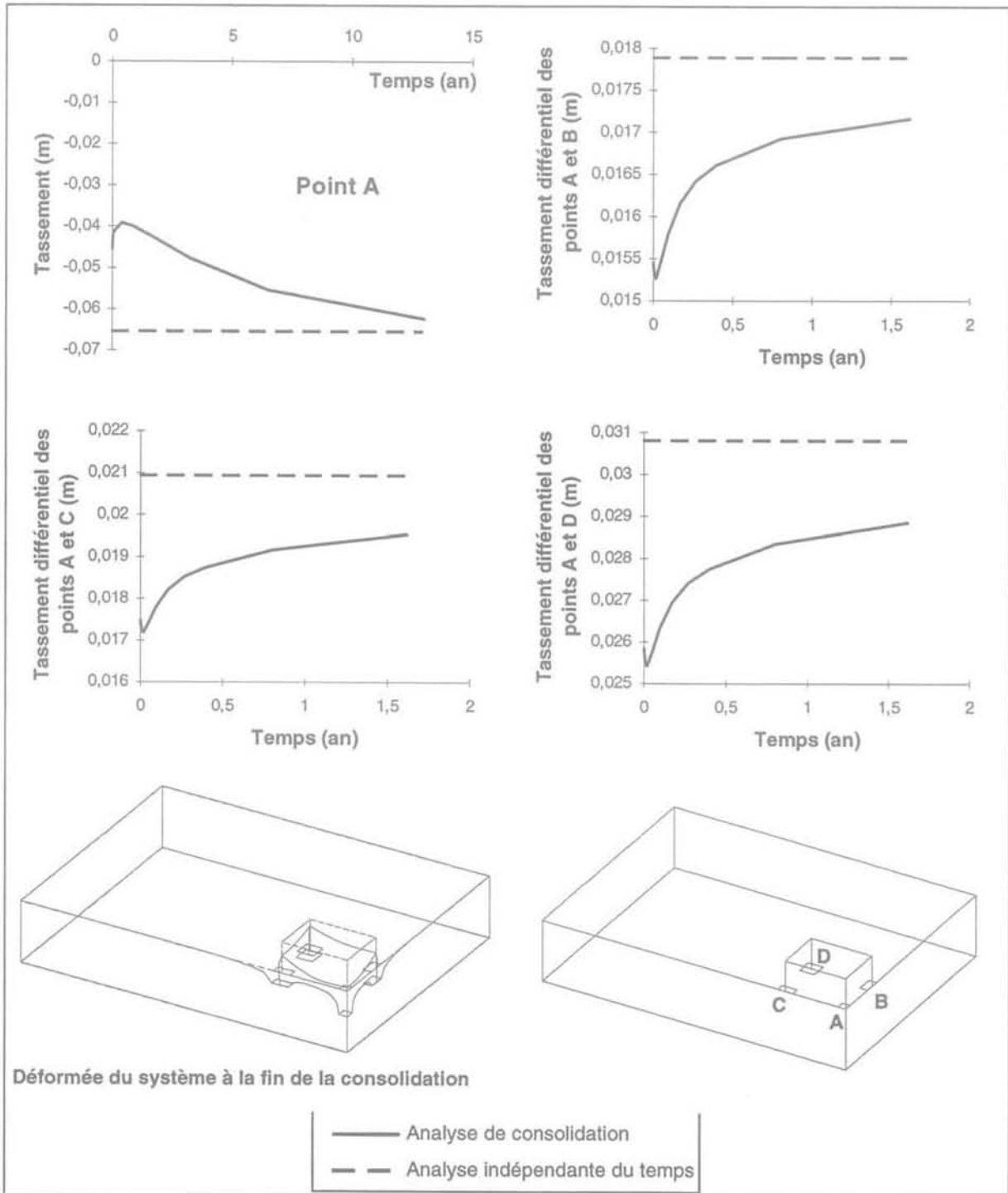


FIG. 5 Variations en fonction du temps du tassement du milieu de la fondation centrale et des tassements différentiels entre la fondation centrale et les fondations extérieures.
Variation with time of settlement of the center footing and of the differential settlement between the center footing and the exterior footings.

Analyse des résultats et interprétation

La variation au cours du temps des surpressions interstitielles sous le centre des fondations ainsi que sur l'axe vertical central du portique à la limite du substratum imperméable (point E) est présentée sur la figure 4. Comme on peut l'observer, la surpression interstitielle au point E augmente d'environ 45 % au début de la consolidation avant de diminuer.

La figure 5 montre les variations en fonction du temps du tassement au milieu de la fondation centrale et des tassements différentiels entre la fondation centrale et les fondations extérieures. On peut constater qu'aux temps intermédiaires les tassements différentiels sont inférieurs à leurs valeurs initiales. Cela est dû

au fait que les surpressions interstitielles engendrées sous les fondations extérieures baissent plus rapidement au début de la consolidation, provoquant un tassement plus rapide sous les fondations extérieures que sous la fondation centrale.

La variation en fonction du temps des efforts normaux dans les colonnes au niveau de la fondation pour les différents types d'analyses est représentée sur la figure 6. Cette figure montre que, pendant la consolidation, les valeurs de l'effort normal dans la colonne centrale (colonne C1) et les colonnes situées sur les axes X et Y (colonnes C2 et C3) dépassent respectivement d'environ 5,4 %, 1,3 % et 1,7 % leurs valeurs finales. Cela provient de la redistribution de la pression de contact dans le massif de sol sous les fondations. L'augmentation de la pression de contact au-dessous de ces colonnes indique que le chargement est trans-

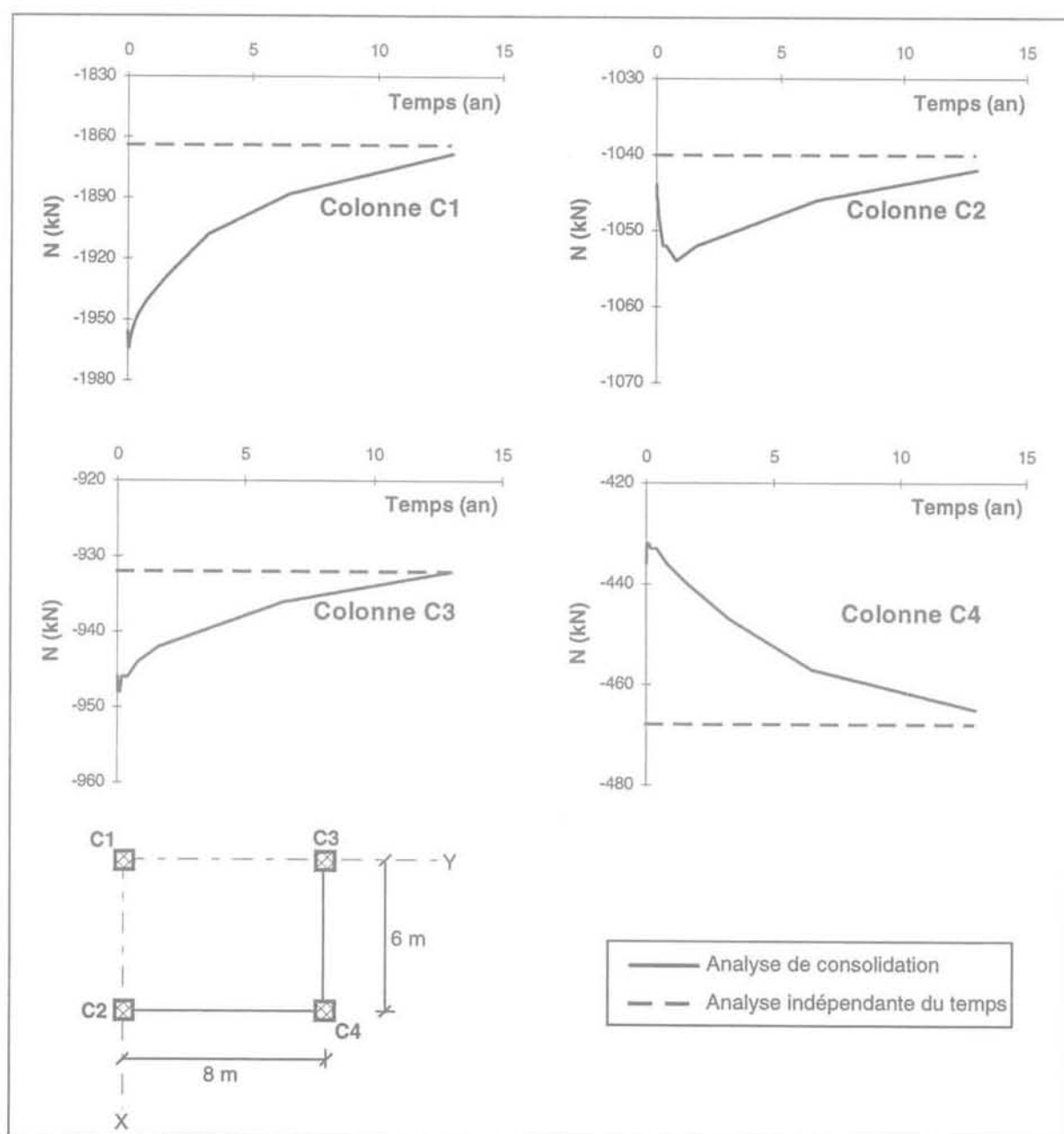


FIG. 6 Variations en fonction du temps des efforts normaux dans les colonnes.
Axial force in columns against time.

fééré vers les colonnes intérieures alors que la colonne extérieure est déchargée à cause de la consolidation du sol.

L'évolution au cours du temps des moments fléchissants au centre et aux deux extrémités des poutres intérieures (poutres B1 et B2) est représentée sur la figure 7 et celle des poutres extérieures (poutres B3 et B4) sur la figure 8. Comme on peut le constater, à cause de la consolidation du sol, les moments fléchissants négatifs

dans les poutres intérieures B1 et B2 à la jonction avec la colonne centrale (point a) sont augmentés respectivement d'à peu près 22 % et 442 % par rapport à l'analyse indépendante du temps. Cela peut s'expliquer à l'aide des courbes de variation des tassements différentiels entre les colonnes des deux extrémités de ces poutres. Au début de la consolidation, le tassement des fondations sous les colonnes extérieures (colonnes C2 et C3) augmente plus rapidement que celui de la fon-

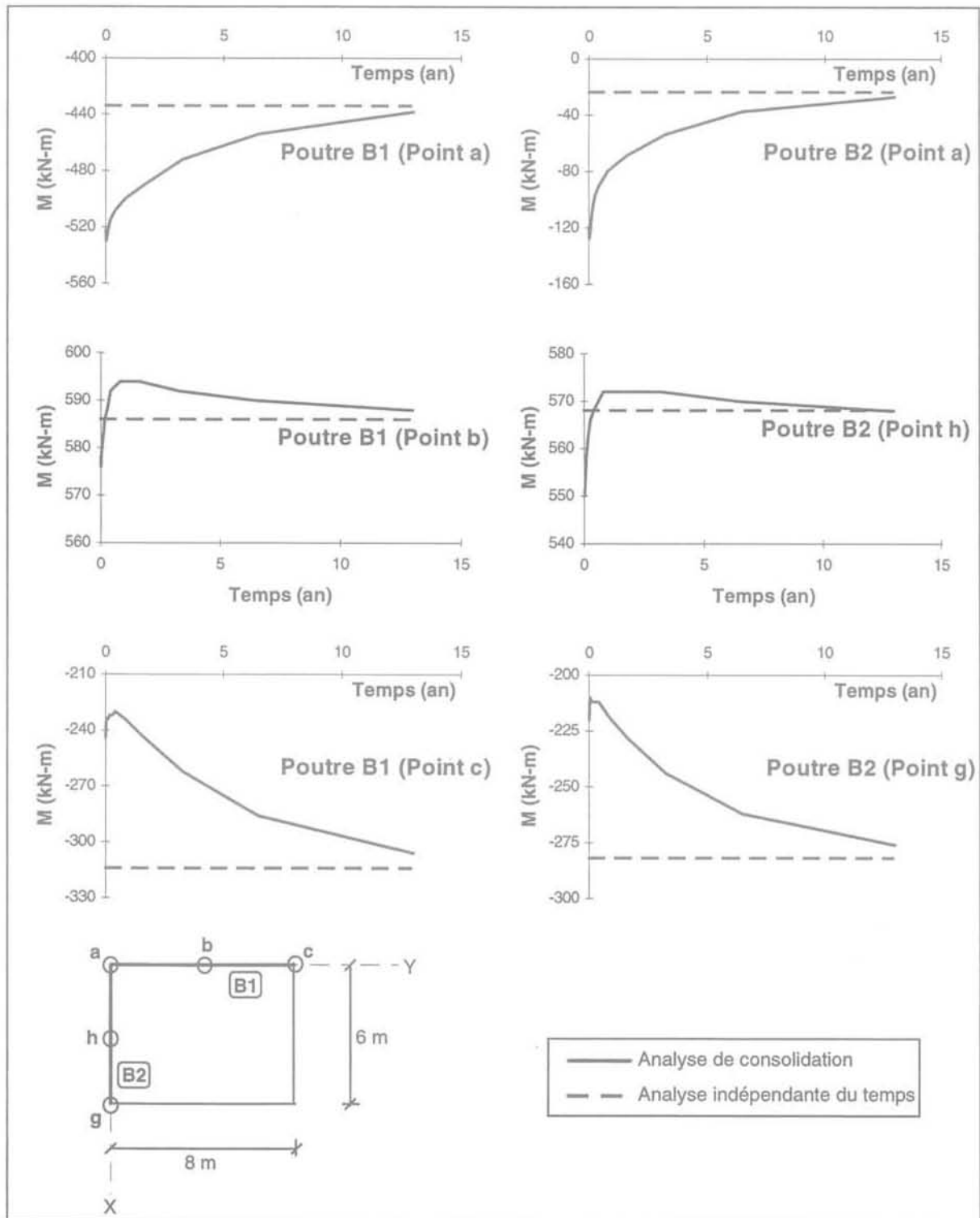


FIG. 7 Variations en fonction du temps des moments fléchissants dans les poutres intérieures.
Time variation of bending moment in interior beams.

Conclusion

Dans cet article, nous avons étudié le comportement en fonction du temps d'un portique tridimensionnel fondé sur une couche d'argile saturée.

Les résultats indiquent que les tassements différentiels entre la fondation centrale et les fondations exté-

riores, ce qui provoque une augmentation de la rigidité globale du système dans la zone centrale et, par conséquent, un transfert du moment vers le point a. Sur la figure 8 on peut observer le même phénomène en ce qui concerne les poutres extérieures B3 et B4, c'est-à-dire un transfert du moment vers les jonctions avec les colonnes C2 et C3 (points g et c) et donc une augmentation des moments négatifs dans les poutres B3 et B4 d'environ 34 % et 297 % respectivement pendant la consolidation.

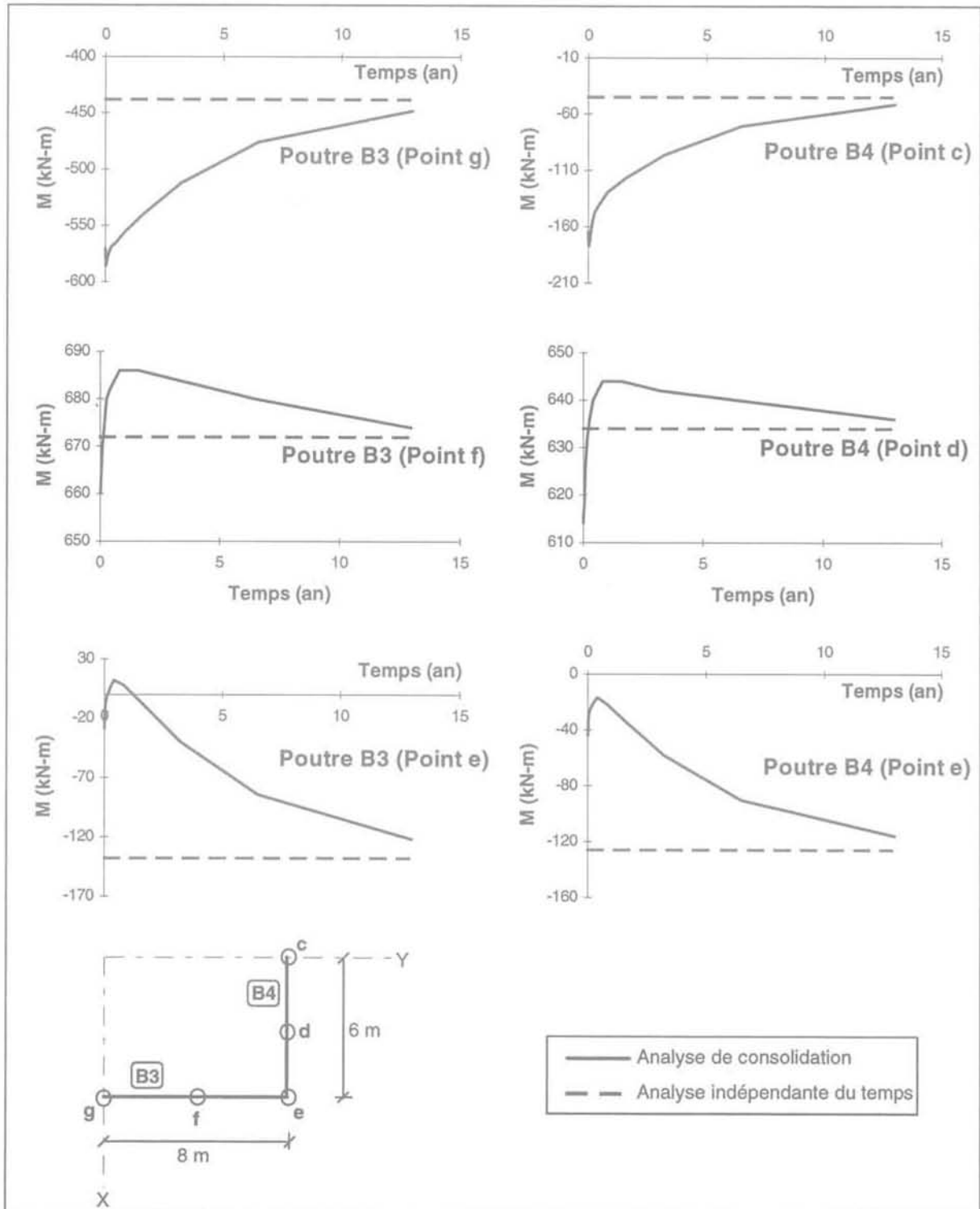


FIG. 8 Variation en fonction du temps des moments fléchissants dans les poutres extérieures.
Time variation of bending moment in exterior beams.

rieures sont maximaux une fois la consolidation achevée et qu'ils ne prennent pas de valeurs plus grandes pendant la consolidation. En fait, les résultats montrent que les tassements différentiels entre la fondation centrale et les fondations extérieures diminuent avant d'augmenter jusqu'à leurs valeurs finales.

Le calcul effectué montre d'autre part que les valeurs de l'effort normal et du moment fléchissant dans les éléments du portique, qui sont obtenues

par une analyse de consolidation, peuvent être plus grandes que celles de l'analyse indépendante du temps. Cela est dû à la redistribution de la pression de contact dans le sol sous les fondations. Il est par conséquent suggéré, quand l'importance de la structure le justifie, de prendre en compte l'effet de la consolidation du massif de sol dans l'étude de l'interaction entre la structure et son sol de fondation.

Bibliographie

- Bowles J. E. – *Foundation analysis and design*. McGraw-Hill Book Company, New York, 1988.
- Brown P.T. – Load sequence and structure-foundation interaction. *Journal of the structural division*, ASCE, vol. 112, p. 481-488, 1986.
- Cramer H., Wunderlich W., Kutter H.K., Rahn W. – Finite element analysis of stress distribution, induced fracture and post-failure behaviour along a shear zone in rock. Proc. of the 3rd international conference on numerical methods in geomechanics, Aachen, p. 505-513, 1979.
- Frank R., Guénot A., Humbert P. – Étude par éléments finis de quelques critères de plasticité orientés. Proc. 2nd International Congress Numerical Methods in Engineering (GAMNI2), Dunod, Paris, vol. 2, p. 765-775, 1980.
- Habib P. – Interaction sol-structure : introduction. Comptes rendus, 10^e Congrès international de mécanique des sols et des travaux de fondations, Stockholm, vol. 4, p. 695-696, 1981.
- Haddadin M.J. – Mats and combined footing analysis by finite element method. *Journal of the American Concrete Institute*, vol. 68, p. 945-949, 1971.
- Hain S.J., Lee I.K. – Rational analysis of raft foundation. *Journal of the geotechnical engineering division*, ASCE, vol. 100, p. 843-860, 1974.
- Hinton E., Owen D.R.J. – *Finite element programming*. Academic Press, London, 1977.
- Humbert P. – CESAR-LCPC : un code général de calcul par éléments finis. *Bulletin de liaison des LPC*, n° 160, p. 112-114, 1989.
- King G.J.W., Chandrasekaran V.S. – Interactive analysis of rafted multistoreyed space frame resting on an inhomogeneous clay stratum. Proc. of the international conference on FEM in Engineering, University of New South Wales, p. 493-509, 1974.
- King G.J.W., Chandrasekaran V.S. – Interactive analysis using a simplified soil model. Proc. of the international symposium on Soil-Structure Interaction, Roorkee, vol. I, p. 93-100, 1977.
- Lee I.K., Brown P.T. – Structure foundation interaction analysis. *Journal of the structural division*, ASCE, vol. 98 (ST11), p. 1413-1431, 1972.
- Lee I.K., Harrison H.B. – Structure foundation interaction theory. *Journal of the structural division*, ASCE, vol. 96 (ST2), p. 177-198, 1970.
- Magnan J.P. – Interaction sols-structures : remblais et fondations superficielles. Rapport général. Colloque international « Interactions sols-structures », Paris, Presses des Ponts et Chaussées, 1987.
- Nasri V. – Analyse de l'interaction sol-structure en tenant compte de la consolidation du sol. Thèse de doctorat, École Centrale de Paris, Chatenay-Malabry, 185 p., 1996.
- Nasri V., Magnan J.P. – Comportement numérique des éléments finis dans l'analyse des problèmes de consolidation des sols. *Bulletin des LPC*, n° 210, 1997, p. 41-53.
- Vermeer P.A., Verruijt A. – An accuracy condition for consolidation by finite elements. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, vol. 5, p. 1-14, 1981.
- Yao Z.E. – Simplified interactive analysis of rafted space frames founded on inhomogeneous soil media. *Computer Methods and Advances in Geomechanics*, Beer, Booker, Carter (eds), Rotterdam, Balkema, 1991.
- Zienkiewicz O.C. – *The finite element method in engineering and science*. McGraw-Hill Book Company, New York, 1991.