Publicacions Matemàtiques, Vol **41** (1997), 545–561.

CARACTÉRISATION DES ANNEAUX NOETHÉRIENS DE SÉRIES FORMELLES À CROISSANCE CONTROLÉE. APPLICATION À LA SYNTHÈSE SPECTRALE

Jacques Chaumat et Anne-Marie Chollet

Abstract

Given a subring of the ring of formal power series defined by the growth of the coefficients, we prove a necessary and sufficient condition for it to be a noetherian ring. As a particular case, we show that the ring of Gevrey power series is a noetherian ring. Then, we get a spectral synthesis theorem for some classes of ultradifferentiable functions.

Introduction

Soit $M = \{M_p\}_{p\geq 0}$ une suite de réels strictement positifs vérifiant les propriétés suivantes:

(H_1) $M_0 = 1$ et $\{M_p\}_{p\geq 0}$ est logarithmiquement convexe,

(H_2) $M_p^{1/p}$ tend vers l'infini avec p.

On désigne par $\mathcal{F}(n)$ l'anneau des séries formelles en n variables. Soit C une constante strictement positive. On note

$$M(n,C) = \left\{ \mathcal{A} \in \mathcal{F}(n);\ \mathcal{A} = \sum_{J\in\mathbb{N}^n} a_J x^J;\ \sup_{J\in\mathbb{N}^n} \frac{|a_J|}{C^j M_j} < \infty \right\}$$

Keywords. Noetherian rings, spectral synthesis, ultradifferentiable classes.
1991 *Mathematics subject classifications*: 16P40, 26E10, 46J20.

où j désigne la longueur du multi-indice J. On pose

$$BM(n) = \bigcap_{C>0} M(n,C) \text{ et } CM(n) = \bigcup_{C>0} M(n,C).$$

On caractérise ici les suites $\{M_p\}_{p\geq 0}$ telles que les anneaux $BM(n)$ ou $CM(n)$ soient noethériens. Ce sont les suites qui vérifient, de plus,

(H_3) il existe $A \geq 1$ tel que, pour tout $p \geq 0$, $M_{p+1} \leq A^{p+1} M_p$.

En effet, dans une première partie, lorsque (H_1), (H_2) et (H_3) sont vérifiées, on établit un théorème de division sans perte de régularité dans $BM(n)$ dont on déduit naturellement le caractère noethérien de l'anneau. La réciproque fait l'objet de la deuxième partie.

On donne, comme application, un théorème de synthèse spectrale de Whitney pour des classes ultra-différentiables.

Les résultats concernant $CM(n)$ font l'objet du paragraphe 17.

On peut comparer le théorème de division 9 établi ici avec le Théorème 20 de [**4**] où la division par un polynôme générique dans des classes de jets sur des compacts de $\mathbb{C}$ fait apparaître une perte de régularité optimale sur la classe. Dans un cadre un peu différent, on peut consulter [**5**].

Première partie

Dans toute cette partie, on suppose que la suite $M = \{M_p\}_{p\geq 0}$ vérifie les hypothèses (H_1), (H_2) et (H_3) ci-dessus.

1. Définitions et notations.

Soient $\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)$, $\psi_j > 0$, $1 \leq j \leq n$, et $J = (j_1, \dots, j_n)$ deux n-uples d'entiers. On note

$$\Psi.J = \sum_{k=1}^{n} \psi_k j_k. \tag{1.1}$$

En particulier, pour $\mathbb{1} = (1, \dots, 1)$, on a, si on note j la longueur de J,

$$\mathbb{1}.J = \sum_{k=1}^{n} j_k = j. \tag{1.2}$$

On note $\mathcal{F}(n)$ l'anneau des séries formelles en n variables et $\mathcal{O}(n)$ l'anneau des germes en 0 de fonctions analytiques au voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^n$.

Soit C une constante strictement positive. On note

$$M(n, C, \Psi) = \left\{ \mathcal{A} \in \mathcal{F}(n);\, \mathcal{A} = \sum_{J \in \mathbb{N}^n} a_J x^J;\, \sup_{J \in \mathbb{N}^n} \frac{|a_J|}{C^j M_{\Psi . J}} < \infty \right\}$$

et

$$BM(n, \Psi) = \bigcap_{C>0} M(n, C, \Psi).$$

Lorsque $\Psi = \mathbb{1}$, on écrit $BM(n, \mathbb{1}) = BM(n)$.

Clairement, $BM(n, \Psi)$ est un sous-anneau de $\mathcal{F}(n)$ qui contient $\mathcal{O}(n)$. C'est aussi une algèbre de Fréchet avec pour famille de normes:

$$\|\mathcal{A}\|_{M,C,\Psi} = \sup_{J \in \mathbb{N}^n} \frac{|a_J|}{C^j M_{\Psi . J}}.$$

Lorsque $\Psi = \mathbb{1}$, on écrit $\|\mathcal{A}\|_{M,C,\mathbb{1}} = \|\mathcal{A}\|_{M,C}$.

On note de même

$$CM(n, \Psi) = \bigcup_{C>0} M(n, C, \Psi).$$

Lorsque $\Psi = \mathbb{1}$, on écrit $CM(n, \mathbb{1}) = CM(n)$. Bien sûr, $CM(n, \Psi)$ est un sous-anneau de $\mathcal{F}(n)$ qui contient $\mathcal{O}(n)$; mais ce n'est plus une algèbre de Fréchet. C'est une limite inductive d'espaces de Banach. En effet, $M(n, C, \Psi)$ est un espace de Banach pour la norme $\|\cdot\|_{M,C,\Psi}$ et, pour $C_1 > C_2 > 0$, l'injection canonique de $M(n, C_2, \Psi)$ dans $M(n, C_1, \Psi)$ est continue.

2. Propriétés élémentaires de $CM(n)$ et $BM(n)$.

On sait [**6**] que, sous les hypothèses (H_1), (H_2) et (H_3), $CM(n)$ vérifie les propriétés suivantes:

(2.1) Si $\mathcal{A} = \sum_{J \in \mathbb{N}^n} a_J x^J$ appartient à $CM(n)$ et si $a_{(0,\dots,0)}$ n'est pas nul, alors $\mathcal{A}$ a un inverse dans $CM(n)$.

(2.2) Plus généralement, $CM(n)$ est stable par composition.

(2.3) Le théorème des fonctions implicites est vrai dans $CM(n)$.

On déduit de (2.1) que $CM(n)$ est un anneau local. De plus, si on note $(CM(n))_0$ l'idéal maximal de $CM(n)$ constitué des éléments qui s'annulent à l'origine, la propriété (H_3) montre que $(CM(n))_0$ est engendré par $(x_1, \dots, x_n)$.

On montre également que tout idéal $I \neq 0$ de $CM(1)$ est engendré par x^ν pour un entier ν convenable. Ceci prouve que $CM(1)$ est un anneau noethérien.

Les mêmes propriétés sont vraies pour $BM(n)$. On peut s'en convaincre aisément en utilisant le lemme élémentaire suivant. On trouvera une version plus élaborée de ce lemme dans [**3**].

Lemme. *Soit une suite* $M = \{M_p\}_{p\geq 0}$ *satisfaisant les propriétés* (H_1), (H_2) *et* (H_3) *et* $(\mathcal{A}_j)_{1\leq j\leq k}$, *une famille finie d'éléments de* $BM(n)$. *Alors, il existe une suite* $N = \{N_p\}_{p\geq 0}$ *satisfaisant les propriétés* (H_1), (H_2) *et* (H_3) *telle que l'on ait*

$$(2.4) \qquad (\mathcal{A}_j)_{1\leq j\leq k} \text{ est incluse dans } CN(n)$$

et

$$(2.5) \qquad \lim_{p\to\infty} \left(\frac{N_p}{M_p}\right)^{1/p} = 0.$$

On peut remarquer que la propriété (2.5) implique que $CN(n)$ est inclus dans $BM(n)$.

Dans la suite de ce travail, on traitera le cas de $BM(n)$ de manière détaillée et on reviendra dans le paragraphe 17 sur le cas de $CM(n)$.

Soit m un entier, $m \geq 1$. On note, pour tout λ de $\mathbb{C}^m$, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$, et tout x de $\mathbb{C}$,

$$P_m(x,\lambda) = x^m + \lambda_1 x^{m-1} + \cdots + \lambda_m.$$

Si on note $\Psi_k = (\underbrace{1, \dots, 1}_{k \text{ fois}}, 1, 2, \dots, m-1, m)$, alors, pour tout multi-indice (I,J) de $\mathbb{N}^k \times \mathbb{N}^m$, on a d'après (1.1)

$$\Psi_k \cdot (I,J) = i + j_1 + \cdots + m j_m$$

où i désigne la longueur de I.

3. Formules de division dans $\mathcal{F}(n)$ par un polynôme générique P_m.

Soit $\mathcal{A} = \sum_{J\in\mathbb{N}^n} a_J x^J$ *un élément de* $\mathcal{F}(n)$. *On note* $x = (x_1, \dots, x_n) = (x_1, x')$. *Alors, on peut écrire, au sens des séries formelles en* (x,λ),

$$(3.1) \qquad \mathcal{A}(x) = \mathcal{Q}^m(\mathcal{A})(x,\lambda) P_m(x_1,\lambda) + \sum_{t=0}^{m-1} \mathcal{R}_t^m(\mathcal{A})(x',\lambda) x_1^t$$

avec

$$(3.2) \quad \mathcal{Q}^m(\mathcal{A})(x,\lambda) = \sum_{K\in\mathbb{N}^{n-1}} \sum_{\beta\in\mathbb{N}} \sum_{B\in\mathbb{N}^m} a_{\Psi_1.(\beta,B)+m,K} (-1)^b \frac{b!}{B!} x_1^\beta \lambda^B x'^K$$

si on note b la longueur de B et

$$\mathcal{R}_t^m(\mathcal{A})(x',\lambda) = \sum_{K\in\mathbb{N}^{n-1}} \sum_{B\in\mathbb{N}^m} a_{\Psi_0.B+t,K}(-1)^b \frac{b_t(b-1)!}{B!}\lambda^B x'^K \tag{3.3}$$

si, on note $B = (b_1,\dots,b_m)$ et, pour tout $t, 0 \leq t \leq m-1$, $b_t = \sum_{i=m-t}^m b_i$.

Preuve: On a

(3.4)

$$\begin{aligned} P_m(x,\lambda)-P_m(\xi,\lambda) &= (x-\xi)\left(\sum_{t=0}^{m-1} x^t\xi^{m-1-t} + \sum_{k=1}^{m-1}\lambda_k \sum_{t=0}^{m-k-1} x^t\xi^{m-k-1-t}\right) \\ &= (x-\xi)\sum_{t=0}^{m-1} x^t\left(\xi^{m-1-t} + \sum_{k=1}^{m-1-t}\lambda_k\xi^{m-k-1-t}\right) \\ &= (x-\xi)\sum_{t=0}^{m-1} x^t\xi^{-1-t}\left(\xi^m + \sum_{k=1}^{m-1-t}\lambda_k\xi^{m-k}\right) \\ &= (x-\xi)\sum_{t=0}^{m-1} x^t\xi^{-1-t}S_t^m(\xi,\lambda). \end{aligned}$$

On tire de (3.4)

$$\frac{1}{\xi-x} = \frac{P_m(x,\lambda)}{(x-\xi)P_m(\xi,\lambda)} + \sum_{t=0}^{m-1} x^t\xi^{-1-t}\frac{S_t^m(\xi,\lambda)}{P_m(\xi,\lambda)}. \tag{3.5}$$

Soit x^α un monôme. On peut écrire, pour $|\lambda| = \left(\sum_{k=1}^m |\lambda_k|^2\right)^{1/2}$ assez petit et pour $|x|<1$,

$$\begin{aligned} x^\alpha &= \frac{1}{2i\pi}\int_{|\xi|=1}\frac{\xi^\alpha}{\xi-x}\,d\xi \\ &= P_m(x,\lambda)\frac{1}{2i\pi}\int_{|\xi|=1}\frac{\xi^\alpha}{(\xi-x)P_m(\xi,\lambda)}\,d\xi \\ &\quad + \sum_{t=0}^{m-1} x^t\frac{1}{2i\pi}\int_{|\xi|=1}\frac{S_t^m(\xi,\lambda)\xi^{\alpha-1-t}}{P_m(\xi,\lambda)}\,d\xi \\ &= Q_\alpha^m(x,\lambda)P_m(x,\lambda) + \sum_{t=0}^{m-1} x^t R_{t,\alpha}^m(\lambda). \end{aligned} \tag{3.6}$$

La fonction $Q^m_\alpha(x,\lambda)$ est holomorphe au voisinage de $(0,0)$ dans $\mathbb{C}\times\mathbb{C}^m$ et les fonctions $R^m_{t,\alpha}(\lambda)$, $t=0,\dots,m-1$, sont holomorphes au voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^m$.

On remarque que, pour tout entier β et tout multi-indice B de $\mathbb{N}^m$ de longueur b, $B=(b_1,\dots,b_m)$, on a

$$D^{\beta,B}_{x,\lambda}Q^m_\alpha(0,0)=\frac{(-1)^b}{2i\pi}\beta!b!\int_{|\xi|=1}\frac{\xi^{\alpha+\sum_{i=1}^{m-1}(m-i)b_i}}{\xi^{\beta+1+(b+1)m}}\,d\xi \tag{3.7}$$

et donc, en calculant l'intégrale figurant dans (3.7), avec $B!=b_1!\dots b_m!$ et $\lambda^B=\lambda_1^{b_1}\dots\lambda_m^{b_m}$,

$$Q^m_\alpha(x,\lambda)=\sum_{\beta\in\mathbb{N},B\in\mathbb{N}^m}(-1)^b\frac{b!}{B!}x^\beta\lambda^B \text{ avec } m+\beta+\sum_{k=1}^m kb_k=\alpha. \tag{3.8}$$

Alors, en utilisant la définition de Ψ_1, on peut écrire

$$Q^m_\alpha(x,\lambda)=\sum_{(\beta,B)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^m;\Psi_1.(\beta,B)+m=\alpha}(-1)^b\frac{b!}{B!}x^\beta\lambda^B. \tag{3.9}$$

Pour t entier, $0\le t\le m-1$, on pose $\lambda=(\lambda',\lambda'')$ avec $\lambda'=(\lambda_1,\dots,\lambda_{m-1-t})$ et $\lambda''=(\lambda_{m-t},\dots,\lambda_m)$. De même, pour $B\in\mathbb{N}^m$, on écrit $B=(B',B'')$ avec $B'=(b_1,\dots,b_{m-1-t})$ et $B''=(b_{m-t},\dots,b_m)$.

On a alors, en reprenant l'expression de $R^m_{t,\alpha}(\lambda)$ dans (3.3) et en prenant en compte le fait que $S^m_t(\xi,\lambda)$ ne fait intervenir que λ_k, $1\le k\le m-1-t$,

$$D^B_\lambda R^m_{t,\alpha}(0)=\frac{1}{2i\pi}\int_{|\xi|=1}\xi^{\alpha-(1+t)}D^B_\lambda\left.\frac{S^m_t(\xi,\lambda)}{P_m(\xi,\lambda)}\right|_{\lambda=0}d\xi \tag{3.10}$$

$$=\frac{1}{2i\pi}\int_{|\xi|=1}\xi^{\alpha-(t+1)}D^{B'}_{\lambda'}\left.\left(\left(\xi^m+\sum_{k=1}^{m-1-t}\lambda_k\xi^{m-k}\right)D^{B''}_{\lambda''}\frac{1}{P_m(\xi,\lambda)}\right)\right|_{\lambda=0}.$$

On remarque que l'on a

$$\left.\left(\left(\xi^m+\sum_{k=1}^{m-1-t}\lambda_k\xi^{m-k}\right)D^{B''}_{\lambda''}\frac{1}{P_m(\xi,\lambda)}\right)\right|_{\lambda''=0}$$
$$=(-1)^{b''}b''!\frac{\xi^{\sum_{i=m-t}^{m-1}(m-i)b_i}}{\left(\xi^m+\sum_{k=1}^{m-1-t}\lambda_k\xi^{m-k}\right)^{b''}}$$

et donc

$$
\begin{aligned}
&D_\lambda^B R_{t,\alpha}^m(0)\\
&= \frac{(-1)^{b'}}{2i\pi} b''! \int_{|\xi|=1} \xi^{\alpha-t-1+\sum_{i=m-t}^{m-1}(m-i)b_i} D_{\lambda'}^{B'} \frac{1}{\left(\xi^m + \sum_{k=1}^{m-1-t} \lambda_k \xi^{m-k}\right)^{b''}}\Bigg|_{\lambda'=0} d\xi\\
&= \frac{(-1)^b}{2i\pi} b''(b-1)! \int_{|\xi|=1} \frac{\xi^{\alpha-t-1+\sum_{i=1}^{m-1}(m-i)b_i}}{\xi^{mb}}\, d\xi.
\end{aligned}
$$

On a donc

$$
R_{t,\alpha}^m(\lambda) = \sum_{B\in\mathbb{N}^m;\, t+\Psi_0.B=\alpha} (-1)^b \frac{b''(b-1)!}{B!} \lambda^B. \tag{3.11}
$$

Soit $\mathcal{A} = \sum_{J\in\mathbb{N}^n} a_J x^J$ un élément de $\mathcal{F}(n)$ avec $x = (x_1, \ldots, x_n) = (x_1, x')$. Alors, au sens des séries formelles en (x, λ), on a

$$
\mathcal{A}(x) = \mathcal{Q}^m(\mathcal{A})(x,\lambda) P_m(x_1,\lambda) + \sum_{t=0}^{m-1} \mathcal{R}_t^m(\mathcal{A})(x',\lambda) x_1^t \tag{3.12}
$$

avec

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Q}^m(\mathcal{A})(x,\lambda) &= \sum_{K\in\mathbb{N}^{n-1}} \sum_{\alpha\in\mathbb{N}} a_{\alpha,K} Q_\alpha^m(x_1,\lambda) x'^K \quad \text{et}\\
\mathcal{R}_t^m(\mathcal{A})(x',\lambda) &= \sum_{K\in\mathbb{N}^{n-1}} \sum_{\alpha\in\mathbb{N}} a_{\alpha,K} R_{t,\alpha}^m(\lambda) x'^K.
\end{aligned} \tag{3.13}
$$

On a

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{Q}^m(\mathcal{A})(x,\lambda)\\
&= \sum_{K\in\mathbb{N}^{n-1}} \left(\sum_{\alpha\in\mathbb{N}} a_{\alpha,K} \sum_{(\beta,B)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^m;\, \Psi_1.(\beta,B)+m=\alpha} (-1)^b \frac{b!}{B!} x_1^\beta \lambda^B \right) x'^K.
\end{aligned} \tag{3.14}
$$

De là, en sommant par tranches dans la formule (3.14), on obtient (3.2). Un calcul analogue conduit à (3.3) à partir de (3.13). ■

4. Théorème de division dans $BM(n)$ par un polynôme générique P_m. *Soit $\{M_p\}_{p\geq 0}$ vérifiant les hypothèses (H_1), (H_2) et (H_3). Quel que soit $\mathcal{A}$ dans $BM(n)$, on a*

$$
\mathcal{A}(x) = \mathcal{Q}^m(\mathcal{A})(x,\lambda) P_m(x_1,\lambda) + \sum_{t=0}^{m-1} \mathcal{R}_t^m(\mathcal{A})(x',\lambda) x_1^t \tag{4.1}
$$

avec $\mathcal{Q}^m(\mathcal{A})$ dans $BM(n+m, \Psi_n)$ et $\mathcal{R}_t^m(\mathcal{A})$ dans $BM(n-1+m, \Psi_{n-1})$.

Preuve: Il s'agit là d'une conséquence immédiate de (H_3), (3.1), (3.2) et (3.3). ■

5. Notation. On note $P_m^h(x) = x_1^m + H_{m-1}(x)$ où H_{m-1} est le polynôme homogène générique de degré $m-1$ en $x = (x_1, \dots, x_n) = (x_1, x')$. On peut encore écrire

$$P_m^h(x_1, x', \mu) = x_1^m + \sum_{t=0}^{m-1} x_1^t \left(\sum_{L \in N^{n-1}, \ell = m-1-t} \mu_L x'^L \right) \tag{5.1}$$

où ℓ désigne la longueur de L et $\mu = \{\mu_L; L \in \mathbb{N}^{n-1}, \ell \leq m-1\}$ appartient à $\mathbb{C}^{N(n,m)}$ si $N(n,m)$ désigne le nombre de monômes homogènes de $n-1$ variables et de degré inférieur ou égal à $m-1$.

On peut réécrire (5.1) sous la forme

$$P_m^h(x_1, x', \mu) = \sum_{t=0}^{m-1} x_1^t \lambda_{m-t}(x', \mu) = P_m(x_1, \lambda(x', \mu)) \tag{5.2}$$

où $\lambda(x', \mu) = (\lambda_t(x', \mu), 1 \leq t \leq m)$. Chaque λ_t est le polynôme homogène générique de degré $t-1$ en $x' = (x_2, \dots, x_n)$. Il est de plus de degré 1 en μ.

6. Proposition. *Soit $\mathcal{A} = \sum_{J \in \mathbb{N}^n} a_J x^J$ un élément de $\mathcal{F}(n)$. Alors, au sens des séries formelles en (x, μ), on a*

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x) = {} & \mathcal{Q}^m(\mathcal{A})(x, \lambda(x', \mu)) P_m^h(x_1, x', \mu) \\ & + \sum_{t=0}^{m-1} \mathcal{R}_t^m(\mathcal{A})(x', \lambda(x', \mu)) x_1^t. \end{aligned} \tag{6.1}$$

De plus, si $\mathcal{A}$ appartient à $BM(n)$, alors $\mathcal{Q}^m(\mathcal{A})(x, \lambda(x', \mu))$ appartient à $BM(n + N(n,m))$ et, pour t, $0 \leq t \leq m-1$, $\mathcal{R}_t^m(\mathcal{A})(x', \lambda(x', \mu))$ appartient à $BM(n - 1 + N(n,m))$.

Preuve: Il s'agit là d'une conséquence des formules 3 et du Théorème 4, après substitution de λ par $\lambda(x', \mu)$ dans (3.1), (3.2) et (3.3). En effet, on a

$$\begin{aligned} \lambda^B(x', \mu) &= \lambda_1^{b_1}(x', \mu) \dots \lambda_n^{b_n}(x', \mu) \\ &= \sum_{\{S \in \mathbb{N}^{n-1}, V \in \mathbb{N}^{N(n,m)}; s + v = \Psi_0 \cdot B\}} C(B, S, V) x'^S \mu^V \end{aligned} \tag{6.2}$$

où s et v désignent respectivement la longueur de S et la longueur de V. Il est crucial de remarquer que l'on a

$$|C(B, S, V)| \leq N(n,m)^b \tag{6.3}$$

et

(6.4) $B_1 \neq B_2$ implique
$$\{(S,V); C(B_1,S,V) \neq 0\} \cap \{(S,V); C(B_2,S,V) \neq 0\} = \emptyset.$$

On remplace dans (3.2) λ par $\lambda(x',\mu)$; après développement, on obtient

(6.5) $\mathcal{Q}^m(\mathcal{A})(x,\lambda(x',\mu))$
$$= \sum_{K\in\mathbb{N}^{n-1}} \sum_{\beta\in\mathbb{N}} \sum_{B\in\mathbb{N}^m} a_{\Psi_1\cdot(\beta,B)+m,K}(-1)^b \frac{b!}{B!} x_1^\beta \sum_{\substack{S\in\mathbb{N}^{n-1},V\in\mathbb{N}^{N(n,m)}\\ s+v=\Psi_0\cdot B}} C(B,S,V)x'^{K+S}\mu^V.$$

La propriété (H_3) appliquée m fois permet de conclure. ■

Un calcul analogue donne le résultat correspondant pour $\mathcal{R}_t^m(\mathcal{A})(x',\lambda(x',\mu))$.

7. Définition. Soit $\mathcal{A}$ un élément de $\mathcal{F}(n)$ et m un entier. On dit que $\mathcal{A}$ est m-régulier par rapport à la variable x_1 si

(7.1) $$a_J = 0, \text{ pour } j < m$$

et

(7.2) $$a_{(m,\underbrace{0,\dots,0}_{n-1 \text{ fois}})} \neq 0.$$

Soit $\mathcal{A}$ un élément de $\mathcal{F}(n)$ non identiquement nul. Il existe m tel que, éventuellement après changement de variables linéaire, $\mathcal{A}$ puisse être considéré comme m-régulier par rapport à la variable x_1.

8. Lemme de préparation. *Soit $\mathcal{A}$ un élément de $\mathcal{F}(n)$ et m un entier. On suppose que $\mathcal{A}$ est m-régulier par rapport à la variable x_1; alors on a, au sens des séries formelles,*

(8.1) $$\mathcal{A}(x) = \mathcal{Q}^m(\mathcal{A})(x,\lambda(x',\mu(\mathcal{A})(x')))P_m^h(x_1,x',\mu(\mathcal{A})(x'))$$

où $\mu(\mathcal{A})(x') = \{\mu_J(\mathcal{A})((x'), j \leq m-1\}$ est une famille de séries formelles de $\mathcal{F}(n-1)$ dépendant de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{Q}^m(\mathcal{A})(0,0) \neq 0$.

De plus, si $\mathcal{A}$ appartient à $BM(n)$, pour tout J, $\mu_J(\mathcal{A})(x')$ appartient à $BM(n-1)$ et $\mathcal{Q}^m(\mathcal{A})(x,\lambda(x',\mu(\mathcal{A})(x')))$ appartient à $BM(n)$.

Preuve: On écrit la division de $\mathcal{A}$ par $P_m(x_1,\lambda)$ et on remplace λ par $\lambda(x',\mu)$. On obtient

(8.2) $$\mathcal{A}(x) = \mathcal{Q}^m(\mathcal{A})(x,\lambda(x',\mu))P_m^h(x_1,x',\mu) + \sum_{t=0}^{m-1} \mathcal{R}_t^m(\mathcal{A})(x',\lambda(x',\mu))x_1^t$$

avec bien sûr $\mathcal{Q}^m(\mathcal{A})(0,0) \neq 0$ et, pour tout t, $0 \leq t \leq m-1$, $\mathcal{R}_t^m(\mathcal{A})(0,0) = 0$. Puisque $\mathcal{A}$ est m-régulier par rapport à x_1 et que P_m^h est la somme de x_1^m et du polynôme générique homogène de degré $m-1$ en x, une simple considération de degré permet de s'assurer que le polynôme $\sum_{t=0}^{m-1} \mathcal{R}_t^m(\mathcal{A})(x', \lambda(x',\mu))x_1^t$ s'annule en x à un ordre supérieur ou égal à $m-1$.

On peut donc écrire

$$\sum_{t=0}^{m-1} \mathcal{R}_t^m(\mathcal{A})(x', \lambda(x',\mu))x_1^t = \sum_{t=0}^{m-1} x_1^t \sum_{I\in\mathbb{N}^{n-1};i=m-1-t} x'^I R_I(x'\mu). \tag{8.3}$$

On vérifie à l'aide de considération de degré en x dans (8.2) avec $\mu = 0$ que $R_I(x', 0)$ est nul pour $x' = 0$, c'est à dire $R_I(0,0) = 0$.

On remarque maintenant que le système

$$R_I(x',\mu) = 0 \tag{8.4}$$

est un système de $N(n,m)$ équations formelles à $N(n,m)$ inconnues. On va montrer qu'il a formellement une solution. En effet, l'identification dans (8.2) et (8.3) des termes de la forme $x^K\mu^L$, avec longueur de K égale à $m-1$ et longueur de L égale à 1, montre que la matrice

$$(D_{\mu_J} R_I(0,0))_{I,J\in\mathbb{N}^{N(n,m)},i\leq m-1,j\leq m-1}$$

est inversible. C'est, en effet, la matrice identité multipliée par $\mathcal{Q}^m(\mathcal{A})(0,0) \neq 0$.

On achève la preuve formelle du Lemme de Préparation en appliquant le théorème des fonctions implicites formel. On note $\mu(\mathcal{A})(x')$ la solution de (8.4).

On obtient les estimations annoncées en utilisant (2.3). ■

9. Théorème de division dans $BM(n)$**.** *Soit $\mathcal{A}$ un élément de $\mathcal{F}(n)$, m-régulier par rapport à la variable x_1. Pour tout $\mathcal{B}$ de $\mathcal{F}(n)$, on a*

$$\mathcal{B}(x) = \mathcal{Q}(x)\mathcal{A}(x) + \sum_{t=0}^{m-1} x_1^t R_t(x') \tag{9.1}$$

au sens des séries formelles.

De plus, si $\mathcal{A}$ appartient à $BM(n)$ et $\mathcal{B}$ à $BM(n)$, alors $\mathcal{Q}$ et R_t, $0 \leq t \leq m-1$, appartiennent respectivement à $BM(n)$ et à $BM(n-1)$.

Preuve: Il s'agit là d'une conséquence immédiate du Lemme de Préparation 8 et de la Proposition 6 et, bien sûr, l'écriture est unique. En effet, on remplace dans (6.1) appliqué à $\mathcal{B}$, μ par $\mu(\mathcal{A})(x')$ obtenue à l'aide de (8.1). On utilise ensuite (2.1) et (2.2). ■

10. Théorème. *Soit $\{M_p\}_{p\geq 0}$ vérifiant les hypothèses (H_1), (H_2) et (H_3). Alors, $BM(n)$ est un anneau noethérien.*

Preuve: Elle se déduit du Théorème de division 9 en suivant un schéma classique. On pourra consulter par exemple [**7**, chapitre III, Théorème 5.5] et [**9**, chapitre III, Théorème 3.8]. ■

11. Remarque. Les propriétés établies ici sont classiques pour $\mathcal{F}(n)$ et $\mathcal{O}(n)$.

Deuxième partie

On suppose que $M = \{M_p\}_{p\geq 0}$ vérifie seulement (H_1) et (H_2).

12. Notations. On pose

$$\mathcal{I} = (BM(1))_0 \tag{12.1}$$

l'idéal maximal de $BM(1)$ constitué des éléments $\mathcal{A}$ qui s'annulent à l'origine. C'est un idéal fermé de $BM(1)$.

13. Proposition. *Soit $\{M_p\}_{p\geq 0}$ une suite vérifiant (H_1) et (H_2). Alors, $\mathcal{I}$ est engendré par un nombre fini d'éléments comme idéal de $BM(1)$ si et seulement si la propriété (H_3) est vérifiée par la suite $\{M_p\}_{p\geq 0}$*

(H_3) *il existe $A \geq 1$ tel que, pour tout $p \geq 0$, $M_{p+1} \leq A^{p+1} M_p$.*

Preuve: La condition (H_3) est clairement suffisante. En effet, la fonction e_1 définie par $e_1(x) = x$ engendre l'idéal $\mathcal{I}$, par définition de $\mathcal{I}$.

On se propose donc de démontrer la réciproque.

Soient donc $\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_k$, k éléments de $\mathcal{I}$ tels que, pour tout $\mathcal{B}$ de $\mathcal{I}$, on ait

$$\mathcal{B} = \sum_{i=1}^{k} \mathcal{A}_i \mathcal{G}_i \text{ avec } \mathcal{A}_i \text{ dans } BM(1), \quad 1 \leq i \leq k. \tag{13.1}$$

L'hypothèse se traduit par

(13.2) l'application de $(BM(1))^k$ dans $\mathcal{I}$ définie par

$$(\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_k) \to \sum_{i=1}^{k} \mathcal{A}_i \mathcal{G}_i \text{ est surjective.}$$

Du théorème de l'application ouverte entre espaces de Fréchet, on déduit donc que, pour tout $C_1 > 0$, il existe donc $C_2 > 0$ et $C_3 > 0$ telles que, pour tout $\mathcal{B}$ de $\mathcal{I}$, l'on ait

$$\mathcal{B} = \sum_{i=1}^{k} \mathcal{A}_i \mathcal{G}_i \text{ avec } \mathcal{A}_i \text{ dans } BM(1), \quad 1 \leq i \leq k \quad \text{et} \tag{13.3}$$
$$\|\mathcal{A}_i\|_{M,C_2} \leq C_3 \|\mathcal{B}\|_{M,C_1}.$$

Bien évidemment, l'écriture de $\mathcal{B}$ n'est pas unique. On choisit dans la suite

$$C_1 = 1. \tag{13.4}$$

Soit p un entier, $p \geq 1$. On note

$$E_p = \left\{ \mathcal{B} \in \mathcal{F}(1); \mathcal{B} = \sum_{r=p(k+1)}^{p(k+1)+k} b_r x^r \right\}$$

et on considère sur cet espace vectoriel la norme euclidienne définie par

$$\|\mathcal{B}\|_p == \left(\sum_{r=p(k+1)}^{p(k+1)+k} \left| \frac{b_r}{M_r} \right|^2 \right)^{1/2}. \tag{13.5}$$

Soit G_p le sous-espace vectoriel de E_p engendré par les fonctions

$$T\mathcal{G}_i = \sum_{r=p(k+1)}^{p(k+1)+k} g_{i,r} x^r, \quad 1 \leq i \leq k.$$

Les $T\mathcal{G}_i$ sont des "tronqués" des $\mathcal{G}_i = \sum_{r=1}^{\infty} g_{i,r} x^r$ intervenant dans (13.1). Clairement, G_p est un sous-espace vectoriel de dimension au plus k d'un espace vectoriel de dimension $k+1$. Il existe donc $\mathcal{B}_p$, vecteur unitaire dans E_p orthogonal à G_p, c'est à dire, vérifiant

$$\|\mathcal{B}_p\|_p = 1 \text{ et } \inf_{\mathcal{G} \in G_p} \|\mathcal{B}_p - \mathcal{G}\|_p = 1. \tag{13.6}$$

De là, on déduit

$$\|\mathcal{B}_p\|_{M,1} = \sup_{r \in \mathbb{N}} \left| \frac{b_r}{M_r} \right| \leq \|\mathcal{B}_p\|_p = 1 \tag{13.7}$$

et

$$(13.8) \qquad \inf_{(\alpha_1,\dots,\alpha_k)\in\mathbb{C}^k} \sup_{p(k+1)\le r\le p(k+1)+k} \left| \frac{b_{p,r} - \sum_{i=1}^k \alpha_i g_{i,r}}{M_r} \right| \ge \frac{1}{\sqrt{k+1}} \inf_{\mathcal{G}\in G_p} \|\mathcal{B}_p - \mathcal{G}\|_p \ge \frac{1}{\sqrt{k+1}}.$$

Par hypothèse, on a $p \ge 1$ et donc $\mathcal{B}_p$ appartient à $\mathcal{I}$. On a donc, d'après (13.3) et (13.6),

$$(13.9) \qquad \begin{aligned} &\mathcal{B}_p = \sum_{i=1}^k \mathcal{A}_{i,p}\mathcal{G}_i, \quad \mathcal{A}_{i,p} \in BM(1), \quad 1 \le i \le k \\ &\|\mathcal{A}_{i,p}\|_{M,C_2} \le C_3 \|\mathcal{B}_p\|_{M,1} \le C_3. \end{aligned}$$

Pour $p(k+1) \le r \le p(k+1)+k$, si on note

$$\mathcal{A}_{i,p} = \sum_s a_{i,p,s} x^s \text{ et } \mathcal{B}_p = \sum_r b_{p,r} x^r,$$

on a

$$(13.10) \qquad \begin{aligned} b_{p,r} &= \sum_{i=1}^k \sum_{(s,t);s+t=r} a_{i,p,s} g_{i,t} \\ &= \sum_{i=1}^k a_{i,p,0} g_{i,r} + \sum_{i=1}^k \sum_{(s,t);s>0,s+t=r} a_{i,p,s} g_{i,t} \\ &= \Sigma_1 + \Sigma_2. \end{aligned}$$

On notera que, dans Σ_2, t est strictement positif car $\mathcal{G}_i$ appartient à $\mathcal{I}$, $1 \le i \le k$. On a donc, d'après (13.9), puisque $\mathcal{G}_j$ appartient à $BM(1)$,

$$|\Sigma_2| \le \sum_{(s,t);s>0,t>0,s+t=r} C_3 C_4 C_2^{s+t} M_s M_t.$$

On remarque maintenant que, si on note $\frac{M_p}{M_{p-1}} = m_p$, $p \ge 1$, on a, puisque la suite $(m_p)_{p\ge 0}$ est croissante d'après (H_1),

$$M_s M_t \le m_1(m_1 m_2 \dots m_{s+t-1}) \le M_1 M_{r-1}.$$

On déduit de là

$$(13.11) \qquad |\Sigma_2| \le (r+1) C_3 C_4 C_2^r M_1 M_{r-1} \le C_5^{r+1} M_{r-1}$$

avec C_5 une constante positive suffisamment grande.

D'autre part, d'après (13.8), il existe r_p vérifiant $p(k+1) \leq r_p \leq p(k+1)+k$ tel que l'on ait

$$\left| b_{p,r_p} - \sum_{i=1}^{k} a_{i,p,0} g_{i,r_p} \right| \geq \frac{M_{r_p}}{\sqrt{k+1}}. \tag{13.12}$$

On a donc, d'après (13.10), (13.11) et (13.12),

$$\frac{M_{r_p}}{\sqrt{k+1}} \leq C_5^{r+1} M_{r_p-1} \text{ ou encore } M_{r_p} \leq C_6^{r+1} M_{r_p-1} \tag{13.13}$$

pour C_6 constante positive convenable.

Soit r un entier $r \geq 2(k+1)$, il existe alors $p \geq 1$ tel que l'on ait $r_p \leq r < r_{p+2}$. On a alors, clairement, $r_{p+2} - r_p \leq 3(k+1)$ et donc en utilisant à nouveau que la suite $(m_p)_{p\geq 1}$ est croissante

$$m_r \leq m_{r_{p+2}} \leq C_6^{r_{p+2}+1} \leq C_6^{r+3(k+1)+1}.$$

Ceci établit donc qu'il existe une constante $C_7 \geq 0$ convenable telle que l'on ait

$$m_r \leq C_7^r.$$

Ceci établit (H_3), d'après la définition de m_p. ■

Tout ce qui précède conduit donc au théorème suivant:

14. Théorème. *Soit $\{M_p\}_{p\geq 0}$ une suite vérifiant*

(H_1) $M_0 = 1$ *et* $\{M_p\}_{p\geq 0}$ *est logarithmiquement convexe,*

(H_2) $M_p^{1/p}$ *tend vers l'infini avec* p.

Alors, pour tout entier n, $BM(n)$ est noethérien si et seulement si la suite $\{M_p\}_{p\geq 0}$ vérifie

(H_3) *il existe $A \geq 1$ tel que, pour tout $p \geq 0$, $M_{p+1} \leq A^{p+1} M_p$.*

Application

15. Définitions. On s'intéresse maintenant à des suites $M = \{M_p\}_{p\geq 0}$ telles que les propriétés (H_4) et (H_5) suivantes soient satisfaites: il existe une constante A, $A \geq 1$, telle que l'on ait

$$(H_4) \qquad \sum_{p\geq k} \frac{M_{p-1}}{p\, M_p} \leq A \frac{M_{k-1}}{M_k} \quad k \geq 1,$$

$$(H_5) \qquad M_p \leq A^p M_j M_{p-j}\; 0 \leq j \leq p \text{ et } M_{p+1}^p \leq A^p M_p^{p+1}, \quad p \geq 0.$$

On vérifie que (H_4) implique (H_2). Clairement (H_5) entraine (H_3).

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit $C > 0$, on note $(p!M_p; C)_\Omega$ la classe des fonctions f indéfiniment dérivables dans Ω vérifiant

$$\sup_{x\in\Omega,|P|=p} \frac{|D^P f(x)|}{C^p p! M_p} = \|f\|_{(p!M_p;C)_\Omega} < \infty. \tag{15.1}$$

Clairement, $(p!M_p; C)_\Omega$ est un espace de Banach et l'espace de Beurling usuel BM_Ω est défini comme

$$BM_\Omega = \bigcap_C (p!M_p; C)_\Omega. \tag{15.2}$$

On suppose que Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ à frontière Lip 1. On note K son adhérence. Alors, toute fonction de $(p!M_p; C)_\Omega$ s'étend naturellement de manière C^∞ à K et l'inégalité (15.1) est encore valable sur K. L'espace correspondant est noté $(p!M_p; C)_K$ et on definit de même BM_K.

Pour chaque x de K, on note $I_x^\infty(BM_K)$ l'idéal de BM_K formé des fonctions plates en x.

16. Théorème spectral de Whitney dans BM_K. *Soit $\{M_p\}_{p\geq 0}$ une suite vérifiant les conditions (H_1), (H_4) et (H_5). Soit Ω un ouvert à frontière* Lip 1 *dans $\mathbb{R}^n$ et K son adhérence. Soit I un idéal de BM_K et $\bar{I}$ son adhérence dans BM_K. Alors on a*

$$\bar{I} = \bigcap_{x\in K} I + I_x^\infty(BM_K). \tag{16.1}$$

Preuve: On montre tout d'abord que tout idéal de $BM(n)$ est fermé. Ceci est une conséquence de son caractère noethérien. A ce propos, on pourra adapter les preuves figurant dans [**9**, Théorème III.3.12 et Corollaire 3.12] ou bien dans [**10**, Lemme I.8.1 et Corollaire V.1.6]. On déduit de là que $I + I_x^\infty(BM_K)$ est fermé, pour tout x de K. On établit ensuite que I est dense dans $\bigcap_{x\in K} I + I_x^\infty(BM_K)$; ce résultat est développé dans [**1**] lorsque la dimension n est égale à 1. On pourra également consulter [**5**] pour un autre théorème spectral. ■

17. Remarque. Les résultats établis dans ce travail pour les classes de Beurling $BM(n)$ et BM_K sont vrais également pour les classes de Carleman $CM(n) = \bigcup_{C>0} M(n, C, \mathbb{1})$ et $CM_\Omega = \bigcup_{C>0}(p!M_p; C)_\Omega$. On rappelle que ces espaces ne sont pas des espaces de Fréchet.

La démonstration du Théorème 14 pour $CM(n)$ se présente de manière analogue à celle de $BM(n)$.

Par contre, pour établir le Théorème 16 pour CM_K, il importe d'utiliser le fait que, sous les hypothèses (H_1), (H_4), (H_5), le théorème d'extension de Whitney est vrai pour ces classes. Plus précisément, si on note

$$C_cM_{\mathbb{R}^n} = \{f \in CM_{\mathbb{R}^n} \text{à support compact}\}$$

et $\mathcal{R}$ l'application restriction de $CM_{\mathbb{R}^n}$ dans CM_K, cette application est surjective [**2**], [**3**].

De là, on vérifie aisément que démontrer le Théorème 16 revient à démontrer que le théorème de synthèse spectral de Whitney est vrai dans $CM_{\mathbb{R}^n}$, c'est à dire que l'on a (16.1) pour tout idéal fermé $\mathcal{I}$ de $CM_{\mathbb{R}^n}$.

Pour cela, on montre que, pour tout suite $N = \{N_p\}_{p\geq 0}$ vérifiant (H_1), (H_4), (H_5), et de plus, $\lim\limits_{p\to\infty} \left(\frac{N_p}{M_p}\right)^{1/p} = \infty$, toute f de $\mathcal{J} = \bigcap_{x\in\mathbb{R}^n} \mathcal{I} + I_x^\infty(C_cM_{\mathbb{R}^n})$ et tout $\eta > 0$, il existe une fonction g_η appartenant à $\mathcal{I}$ telle que l'on ait

$$\|f - g_\eta\|_{(p!N_p;1)_{\mathbb{R}^n}} < \eta. \tag{17.1}$$

Ce résultat s'obtient en remarquant que l'on a $C_cM_{\mathbb{R}^n} \subset BN_{\mathbb{R}^n}$ et en modifiant la construction détaillée dans [**1**]. On régularise les partitions de l'unité qui interviennent dans [**1**] pour qu'elles appartiennent à $C_cM_{\mathbb{R}^n}$ et conservent leur bon contrôle dans $(p!N_p;1)_{\mathbb{R}^n}$.

On raisonne maintenant par l'absurde. Soit donc f appartenant à $\mathcal{J}$ et n'appartenant pas à $\mathcal{I}$. A l'aide du théorème de Hahn-Banach, on trouve une forme linéaire ℓ appartenant au dual de $C_cM_{\mathbb{R}^n}$ vérifiant

$$\ell(f) = 1 \text{ et } \operatorname{Re}\ell(g) \leq 0 \text{ pour tout } g \in \mathcal{I}.$$

Soit Ω un ouvert borné contenant le support de f. On remarque que les fonctions g_η qui approchent f dans (17.1) peuvent être construites à support dans Ω. On utilise alors la caractérisation du dual de $C_cM_{\mathbb{R}^n}$ donnée dans [**8**, Proposition 8.6] pour construire une suite N vérifiant les propriétés ci-dessus et telle que ℓ se prolonge continûment à $(p!N_p;1)_\Omega$. Le calcul de $\ell(g_\eta)$ apporte alors la contradiction.

Références

1. J. BRUNA, Spectral synthesis in non quasi-analytic classes of infinitely differentiable functions, *Bull. Sci. Math.* **104** (1980), 65–78.

2. J. Bruna, An extension theorem of Whitney type for non quasi-analytic classes of functions, *J. London Math. Soc. (2)* **22** (1980), 495–505.
3. J. Chaumat et A. M. Chollet, Théorème de Whitney dans les classes ultradifférentiables, *Publ. IRMA Lille* **28** (1992).
4. J. Chaumat et A. M. Chollet, Sur le théorème de division de Weierstrass, *Studia Math.* **116** (1995), 59–84.
5. J. Chaumat et A. M. Chollet, Propriétés de l'intersection des classes de Gevrey et de certaines autres classes, (à paraître).
6. E. M. Dynkin, Pseudoanalytic extension of smooth functions. The uniform scale, *Amer. Math. Soc. Transl.* **115** (1980), 33–58.
7. H. Grauert et K. Fritzsche, "*Several complex variables*," G. T. M., Springer-Verlag, 1976.
8. H. Komatsu, Ultradistributions, *Internat. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sec. I A* **20** (1973), 25–105.
9. B. Malgrange, Ideals of Differentiable Functions, Oxford University (1966).
10. J. C. Tougeron, "*Idéaux de fonctions différentiables*," Springer Verlag, 1972.

Jacques Chaumat:
URA CNRS 757
Université Paris-Sud
Mathématiques - Bât. 425
91405 Orsay cedex
FRANCE

e-mail: jacques.chaumat@math.u-psud.fr

Anne-Marie Chollet:
URA CNRS 751
Université de Lille
U.F.R. de Mathématique - Bât. M2
59655 Villeneuve d'Ascq cedex
FRANCE

e-mail: chollet@gat.univ-lille1.fr

Primera versió rebuda el 22 de Juliol de 1996,
darrera versió rebuda el 5 de Novembre de 1996