RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

EMILIO GAGLIARDO

Caratterizzazioni delle tracce sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in n variabili

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 27 (1957), p. 284-305

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1957__27__284_0>

CARATTERIZZAZIONI DELLE TRACCE SULLA FRONTIERA RELATIVE AD ALCUNE CLASSI DI FUNZIONI IN n VARIABILI

Nota (*) *di* EMILIO GAGLIARDO (*a Genova*)

Sia Ω un insieme aperto limitato dello spazio euclideo ad n dimensioni, e Γ la sua frontiera.

Indicheremo con $W_p(\Omega)$ la classe delle funzioni $u(x_1, \ldots, x_n)$ definite in Ω ed ivi dotate (in un senso che preciseremo) di derivate prime sommabili con esponente $p \geq 1$.

Un problema che si presenta nello studio di questa classe di funzioni consiste nel caratterizzare le funzioni, definite sulla frontiera Γ di Ω, le quali sono tracce di funzioni di $W_p(\Omega)$.

A quanto mi risulta questo problema è stato finora risolto, in più modi, solamente per $p = 2$ (cfr. N. Aronszajn [1], L. N. Slobodetskij e V. M. Babich [3] [1]), G. Prodi [13]). Per le tracce delle funzioni di $W_p(\Omega)$, con $p > 1$, sono state date invece condizioni sufficienti e condizioni necessarie (C. Miranda [9], S. M. Nikol'skij [11] [12]) ma non condizioni necessarie e sufficienti. È pure noto che le tracce delle funzioni di $W_p(\Omega)$, per ogni $p \geq 1$, risultano funzioni sommabili su Γ (G. Stampacchia [18]; cfr. anche G. Fichera [5]).

(*) Pervenuta in Redazione il 10 luglio 1957.
Indirizzo dell'A.: Istituto matematico, Università, Genova.

1) Nel lavoro di L. N. SLOBODETSKIJ e V. M. BABICH si trova anche enunciata una analoga caratterizzazione per le tracce delle funzioni dotate di derivate d'ordine arbitrario di quadrato sommabile.

Nel presente lavoro do anzitutto una caratterizzazione delle tracce delle funzioni di $W_p(\Omega)$ che estende per ogni $p > 1$ il risultato noto di N. Aronszajn. L. N. Slobodetskij e V. M. Babich relativo alla classe $W_2(\Omega)$. Dimostro poi che la condizione di sommabilità su Γ, nel caso $p = 1$, è non solo necessaria ma anche sufficiente.

1. - Sia Ω un insieme aperto limitato dello spazio euclideo E_n ad n dimensioni, tale che la sua frontiera Γ, nell'intorno di ogni suo punto, ammetta, con una opportuna scelta del riferimento, una rappresentazione cartesiana del tipo:

$$\xi_n = \gamma(\xi_1 , \dots , \xi_{n-1})$$

dove γ è lipschitziana e i punti di Ω che si trovano nel detto intorno soddisfano alla relazione: $\xi_n > \gamma(\xi_1 , \dots , \xi_{n-1})$.

È allora possibile determinare in E_n un numero finito di domini R_k, $(k = 1, \dots, K)$, in modo che ogni punto di Γ risulti *interno* ad almeno uno di essi, e ciascun dominio R_k sia trasformabile nel rettangolo:

$$R \equiv \{ 0 \leq x_i \leq 1, \ (i = 1, \dots , n-1), \ -1 \leq x_n \leq 1 \}$$

con una trasformazione T_n biunivoca, uniformemente bilipschitziana, in modo che le intersezioni di R_k con Ω e con Γ :

$$Q_k = \Omega \cdot R_k$$
$$S_k = \Gamma \cdot R_k$$

abbiamo per immagine, rispettivamente, i sottoinsiemi di R:

$$Q \equiv \{ 0 \leq x_i \leq 1, \ (i = 1, \dots , n-1), \ 0 < x_n \leq 1 \}$$
$$S \equiv \{ 0 \leq x_i \leq 1, \ (i = 1, \dots , n-1), \ x_n = 0 \}.$$

Indichiamo con $A_p(\Omega)$, $p \geq 1$, la classe delle funzioni $u(x_1 , \dots , x_n)$ definite in Ω ed ivi soddisfacenti alle seguenti proprietà:

i) La funzione u, per quasi tutte le rette r parallele all'asse x_i, è assolutamente continua su ogni segmento chiuso di r contenuto in Ω, $(i = 1, \dots , n)$.

ii) Le derivate parziali prime della funzione u, che esistono (nel senso ordinario) quasi ovunque in Ω, sono sommabili in Ω con esponente p.

Ciò posto indichiamo con $W_p(\Omega)$, $p \geq 1$, lo spazio delle funzioni $u(x_1, \ldots, x_n)$ definite in Ω ed ivi coincidenti quasi ovunque con funzioni della classe $A_p(\Omega)$, intendendo di identificare due funzioni se esse sono eguali quasi ovunque. Le derivate parziali prime di una funzione $u \in W_p(\Omega)$ sono per definizione quelle di una funzione $v \in A_p(\Omega)$ quasi ovunque eguale ad u [2]).

Una funzione $u \in W_p(\Omega)$ risulta sommabile in Ω con esponente p, [3]); si può allora assumere nello spazio $W_p(\Omega)$ la norma:

$$(1.1) \qquad \| u \|_{W_p(\Omega)} = \left[\int_\Omega | u |^p \, d\Omega \right]^{\frac{1}{p}} + \sum_i^{1 \ldots n} \left[\int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^p d\Omega \right]^{\frac{1}{p}}, \quad ^{4}).$$

---

[2]) Le derivate così definite coincidono con le derivate nel senso di S. L. SOBOLEV ([15] p. 483). Cfr. anche la nozione di derivata nel senso di L. SCHWARTZ [14]. L'ordine di idee in cui ci siamo posti è invece quello di C. B. MORREY [10] e G. STAMPACCHIA [17].

[3])Una funzione $u \in W_p(\Omega)$, anche in ipotesi più generali di quelle fatte all'inizio per l'insieme Ω, risulta anzi per $p < n$, sommabile con esponente $mp/(n-p)$ sulle varietà sufficientemente regolari ad m dimensioni, con $n - p < m \leq n$; per $p = n$ risulta sommabile con ogni esponente sulle dette varietà; e per $p > n$ coincide quasi ovunque con una funzione continua. Cfr. S. L. SOBOLEV [15] e V. P. IL'IN [8].

[4]) La norma (1.1) è equivalente a ciascuna di quelle che si ottengono sostituendo al primo termine uno qualunque dei seguenti (cfr. [3])):

$$\left[\int_{\Omega_0} | u |^q \, d\Omega \right]^{\frac{1}{q}}, \qquad \begin{cases} 1 \leq q \leq \dfrac{np}{n-p} & \text{per } p < n \\ q \geq 1 \text{ per } p \geq n \end{cases}$$

$$\left[\int_{\Gamma_0} | u |^q d\,\Gamma \right]^{\frac{1}{q}}, \qquad \begin{cases} 1 \leq q \leq \dfrac{np-p}{n-p} & \text{per } p < n \\ q \geq 1 \text{ per } p \geq n \end{cases}$$

dove Ω_0 e Γ_0 sono arbitrarie porzioni di Ω, Γ (anche coincidenti con Ω, Γ), o anche, per $p > n$:

$$\sup_{\Omega_0}{}^* | u |, \qquad \sup_{\Gamma_0}{}^* | u |$$

dove sup* indica l'effettivo estremo superiore, e cioè l'estremo inferiore dei numeri superati solo su sottoinsiemi di misura nulla.

È noto che una trasformazione biunivoca tra due insiemi E, E' esprimibile con funzioni uniformemente lipschitziane, con Jacobiani uniformemente limitati, stabilisce una corrispondenza tra gli spazi $W_p(E)$, $W_p(E')$ con equivalenza per le norme [5]).

Per assegnare una funzione φ su Γ assegneremo K funzioni $\varphi_k(x_1, \dots, x_{n-1})$, $(k = 1, \dots, K)$, definite su S e soddisfacenti naturalmente alle condizioni $\varphi_{k'}(x'_1, \dots, x'_{n-1}) = \varphi_{k''}(x''_1, \dots, x''_{n-1})$ tutte le volte che i punti $(x'_1, \dots, x'_{n-1})$, $(x''_1, \dots, x''_{n-1})$ hanno per immagine, mediante $T_{k'}^{-1}$, $T_{k''}^{-1}$ rispettivamente, lo stesso punto di Γ.

Indichiamo con $L_p(\Gamma)$, $p \geq 1$, lo spazio delle funzioni φ definite su Γ ed ivi di potenza p-esima sommabile, ed assumiamo in questo spazio la norma:

$$\| \varphi \|_{L_p(\Gamma)} = \sum_k^{1 \dots K} \left[\int_S | \varphi_k |^p \, dS \right]^{\frac{1}{p}} \tag{1.2}$$

È noto come per una funzione $u \in W_p(\Omega)$, $p \geq 1$, si possa parlare di «traccia» su Γ, essendo questa una funzione $\varphi \in L_p(\Gamma)$ definita o come limite (quasi ovunque) lungo un opportuno sistema di assi uscenti dai punti di Γ e penetranti nell'interno di Ω [6]) (limite calcolato dopo aver modificato i valori della funzione u su di un sottoinsieme di Ω avente misura nulla) o anche come risultato della trasformazione lineare continua tra $W_p(\Omega)$ e $L_p(\Gamma)$ coincidente con l'ordinario significato di valori al contorno se u è continua

---

[5]) E dunque la (1.1) non dipende in particolare dal sistema di riferimento nel senso che due riferimenti diversi danno origine a norme equivalenti.

[6]) Occorrerà precisamente che per ogni punto P di Γ la porzione di Ω contenuta in un opportuno intorno di P sia solcata univocamente da questi assi, in modo tale che assumendo per essa come nuove coordinate dello spazio ambiente i parametri locali di Γ e l'ascissa curvilinea sugli assi del sistema considerato, le formule di trasformazione siano uniformemente bilipschitziane e a jacobiani limitati.

in $\Omega + \Gamma$. Cfr. C. B. Morrey [10], G. Stampacchia [17], [18], J. Deny e J. L. Lions [4], G. Prodi [13] [7]).

Volendo caratterizzare le funzioni φ che sono tracce di funzioni $u \in W_p(\Omega)$ saremo condotti a considerare il sottospazio $\Lambda_p(\Gamma)$ di $L_p(\Gamma)$ costituito dalle funzioni φ che godono ulteriormente della proprietà seguente:

I rapporti incrementali delle funzioni φ_k:

$$\frac{\varphi_k(x_1, \dots, x_j + h, \dots, x_{n-1}) - \varphi_k(x_1, \dots, x_{n-1})}{h}, \quad (j = 1, \dots, n-1)$$

dove h varia in un intorno di $h = 0$, risultano di potenza p-esima sommabile nel complesso delle variabili $x_1, \dots, x_{n-1}, h$.

Nello spazio $\Lambda_p(\Gamma)$ potremo assumere come norma:

$$(1.3) \qquad \| \varphi \|_{\Lambda_p(\Gamma)} = \sum_k^{1\dots K} \left\{ \left[\int_S | \varphi_k |^p \, dS \right]^{\frac{1}{p}} + \right.$$

$$\left. + \sum_j^{1\dots n-1} \left[\int_0^1 dh \int_{S_j^h} \left| \frac{\varphi_k(x_1, \dots, x_j + h, \dots, x_{n-1}) - \varphi_k(x_1, \dots, x_{n-1})}{h} \right|^p dS \right]^{\frac{1}{p}} \right\}.$$

$(S_j^h \equiv \{ 0 \le x_i \le 1 \text{ per } i \neq j, \; 0 \le x_j \le 1 - h, \; (i = 1, \dots, n-1), \; x_n = 0 \})$.

È evidente che le norme (1.2), (1.3) non dipendono sostan-

---

[7]) Si tenga conto della seguente osservazione:
Indicando con u una funzione della classe $A_p(Q)$ si ha:

$$| u(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) |^p \le \int_0^1 | u(x_1, \dots, x_n) |^p \, dx_n +$$

$$+ p \int_0^1 | u(x_1, \dots, x_n) |^{p-1} \left| \frac{\partial u(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_n} \right| dx_n$$

per quasi tutte le $(n-1)$-*ple* $(x_1, \dots, x_{n-1})$, e di qui, integrando rispetto a $x_1, \dots, x_{n-1}$ si ha, per la disuguaglianza di SCHWARZ-HÖLDER:

$$\int_S | u |^p \, dS \le \int_Q | u |^p \, dQ + p \left[\int_Q | u |^p \, dQ \right]^{\frac{p-1}{p}} \left[\int_Q \left| \frac{\partial u}{\partial x_n} \right|^p dQ \right]^{\frac{1}{p}}.$$

zialmente dal numero e dalla scelta dei domini R_k nel senso che due scelte diverse danno origine a norme equivalenti. Per quanto riguarda la (1.3) si può anzi osservare che una qualunque norma di tale tipo è equivalente alla seguente:

$$\|\varphi\|^*_{\Lambda_p(\Gamma)} = \left[\int_\Gamma |\varphi|^p d\Gamma\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\int_{\Gamma\times\Gamma} \frac{|\varphi(P_1)-\varphi(P_2)|^p}{(\overline{P_1P_2})^{p+n-2}} d\Gamma_{P_1} d\Gamma_{P_2}\right]^{\frac{1}{p}}, \quad [8])$$

nella quale non intervengono le rappresentazioni locali di Γ.

Sussiste, per $p > 1$, il seguente teorema:

[1. I] - TEOREMA. *Condizione necessaria e sufficiente perchè una funzione φ definita su Γ sia traccia di una funzione $u \in W_p(\Omega)$, $p > 1$, è che φ appartenga allo spazio $\Lambda_p(\Gamma)$.*

***Più precisamente**, per ogni $p > 1$, tra la norma* (1.1) *di una funzione u e la norma* (1.3) *della sua traccia φ su Γ sussiste la limitazione:*

$$(1.4) \qquad \|\varphi\|_{\Lambda_p(\Gamma)} \leq c_1 \|u\|_{W_p(\Omega)}, \quad [9]).$$

e viceversa assegnata su Γ una funzione φ tale che la (1.3) *sia finita è possibile costruire in Ω una funzione u che am-*

---

8) Per dimostrare l'equivalenza tra questa norma e la (1.3) basta evidentemente osservare che sono equivalenti, per una funzione $\varphi(x_1, \dots x_{n-1})$ definita in S, le norme:

$$\left[\int_S |\varphi|^p dS\right]^{\frac{1}{p}} + \sum_j^{1\dots n-1} \left[\int_0 dh \int_{S_j^h} \left|\frac{\varphi(x_1,\dots,x_j+h,\dots,x_{n-1})-\varphi(x_1,\dots,x_{n-1})}{h}\right|^p dS\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$\left[\int_S |\varphi|^p dS\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\int_{S\times S} \frac{|\varphi(x_1,\dots,x_{n-1})-\varphi(y_1,\dots,y_{n-1})|^p}{([\Sigma(x_i-y_i)^2]^{1/2})^{p+n-2}} dS_x dS_y\right]^{\frac{1}{p}}$$

come risulta da una elementare verifica.

La norma $\|\varphi\|^*_{\Lambda_p(\Gamma)}$ si riduce, per $p=2$, a quella considerata da N. ARONSZAJN [1].

9) In questo lavoro indicheremo con $c_1, c_2, c_3, \dots$ costanti dipendenti solo da p, n e dagli enti geometrici, ma non dalle funzioni u e dalle loro tracce.

mette φ *come traccia e tale che:*

$$\| u \|_{W_p(\Omega)} \leq c_2 \| \varphi \|_{\Lambda_p(\Gamma)} . \tag{1.5}$$

In altre parole se indichiamo con $W_p^*(\Omega)$ *lo spazio ottenuto da* $W_p(\Omega)$ *identificando funzioni aventi la stessa traccia su* Γ, *ed assumiamo in questo spazio la norma*

$$\| u \|_{W_p^*(\Omega)} = \inf_v \| u + v \|_{W_p(\Omega)} , \quad v = 0 \text{ su } \Gamma, \ (v \in W_p(\Omega))$$

si può affermare che l'operazione di traccia stabilisce una equivalenza tra $W_p^*(\Omega)$ *e* $\Lambda_p(\Gamma)$, *per ogni* $p > 1$.

Il teorema [1.I] vale, come si è detto, per ogni $p > 1$ [10]), mentre per $p = 1$ sussiste il seguente:

[1.II] - TEOREMA. *Condizione necessaria e sufficiente perchè una funzione* φ *definita su* Γ *sia traccia di una funzione* $u \in W_1(\Omega)$ *è che* φ *appartenga allo spazio* $L_1(\Gamma)$ *delle funzioni sommabili su* Γ.

Si ha più precisamente:

$$\| \varphi \|_{L_1(\Gamma)} \leq c_3 \| u \|_{W_1(\Omega)} \tag{1.6}$$

e viceversa assegnata su Γ *una funzione* φ *sommabile è possibile costruire una funzione* $u \in W_1(\Omega)$ *che ammette* φ *come traccia e tale che:*

$$\| u \|_{W_1(\Omega)} \leq c_4 \| \varphi \|_{L_1(\Gamma)} \tag{1.7}$$

In altre parole l'operazione di traccia stabilisce una equivalenza tra $W_1^*(\Omega)$ (definito nell'enunciato del teorema [1.I]) *e* $L_1(\Gamma)$.

2. - Diamo in questo numero la dimostrazione del teorema [1. I].

La traccia sulla frontiera di una funzione u della classe $W_p(\Omega)$ può essere intesa nel senso puntuale già richiamato al n. 1, e cioè come limite, quasi ovunque, (dopo aver modificato i valori della funzione u su di un insieme di misura

---

10) Dalle considerazioni che faremo nel n. 4 risulta che il teorema [1.I] *non* vale per $p = 1$.

nulla), lungo un opportuno sistema di assi penetranti nell'interno del dominio [6]). (Questi assi, localmente, possono essere scelti tutti paralleli).

Nel corso della dimostrazione *sottintenderemo sempre* di riferirci alla classe delle funzioni per cui esistono e sono sommabili con l'esponente che occorre le derivate che scriveremo, intese nel senso esposto al n. 1, e *sottintenderemo sempre,* nel fissare alcune variabili, di porci fuori di un insieme di misura nulla [11]).

Per dimostrare il teorema [1. I] faremo costantemente uso della seguente disuguaglianza di G. G. Hardy ([7] p. 240):

$$\int_a^b dx \left| \frac{1}{x-a} \int_a^x f(\xi) d\xi \right|^p \leq c_5 \int_a^b |f(x)|^p \, dx \tag{2.1}$$

$$\left(p > 1, \; c_5 = \left(\frac{p}{p-1}\right)^p\right), \quad {}^{12})$$

che scriveremo anche nella forma:

$$\int_a^b dx \left| \frac{1}{b-x} \int_x^b f(\xi) d\xi \right|^p \leq c_5 \int_a^b |f(x)|^p \, dx. \tag{2.2}$$

Queste disuguaglianze ci permettono intanto di stabilire il seguente lemma:

[2. I] - LEMMA. *Per una funzione di due variabili $U(x, y)$*

---

11) Se invece la traccia è intesa come prolungamento della trasformazione lineare continua che in ipotesi di regolarità conduce alla traccia ordinaria, basterà dimostrare le disuguaglianze (1.4) (1.5) (1.6) (1.7) supponendo continue tutte le funzioni e le derivate che in esse compaiono, e osservare poi che lo spazio delle funzioni continue con le derivate di un dato ordine è denso in tutti gli spazi considerati.

12) La funzione $f(x) = (x-a)^{-1} (\log (x-a))^{-2}$ mostra che una limitazione di questo tipo *non* può sussistere per $p = 1$.

definita nel triangolo T di vertici (0,0), (1,0), (1,1) *si ha:*

$$(2.3)\qquad \int_0^1\!\!\int_0^1 \left|\frac{\Phi(t)-\Phi(\tau)}{t-\tau}\right|^p dt\,d\tau \le c_6 \iint_T \left(\left|\frac{\partial U}{\partial x}\right|^p + \left|\frac{\partial U}{\partial y}\right|^p\right) dx\,dy,\ (p>1)$$

dove $\Phi(t) = U(t,\ t)$ *è la traccia di* U *sul lato* $x = y$ *del triangolo* T.

Si ha infatti, con $0 \le \tau < t \le 1$:

$$\frac{|\Phi(t)-\Phi(\tau)|}{t-\tau} \le \frac{1}{t-\tau}\int_\tau^t \left|\frac{\partial U(x,\ \tau)}{\partial x}\right| dx + \frac{1}{t-\tau}\int_\tau^t \left|\frac{\partial U(t,\ y)}{\partial y}\right| dy$$

e quindi:

$$(2.4)\qquad \left|\frac{\Phi(t)-\Phi(\tau)}{t-\tau}\right|^p \le 2^{p-1}\left|\frac{1}{t-\tau}\int_\tau^t \left|\frac{\partial U(x,\ \tau)}{\partial x}\right| dx\right]^p +$$

$$+\ 2^{p-1}\left[\frac{1}{t-\tau}\int_\tau^t \left|\frac{\partial U(t,\ y)}{\partial y}\right| dy\right]^p$$

Consideriamo separatamente i due termini del secondo membro: per il primo di essi, integrando rispetto a t nell'intervallo $\tau < t < 1$, si ha per la (2.1):

$$2^{p-1}\int_\tau^1 dt\left[\frac{1}{t-\tau}\int_\tau^t \left|\frac{\partial U(x,\ \tau)}{\partial x}\right| dx\right]^p \le 2^{p-1}\, c_5 \int_\tau^1 \left|\frac{\partial U(x,\ \tau)}{\partial x}\right|^p dx$$

e integrando anche rispetto ad τ nell'intervallo $0 < \tau < 1$:

$$(2.5)\qquad 2^{p-1}\int_0^1 d\tau \int_\tau^1 dt\left[\frac{1}{t-\tau}\int_\tau^t \left|\frac{\partial U(x,\ \tau)}{\partial x}\right| dx\right]^p \le$$

$$\le 2^{p-1} c_5 \iint_T \left|\frac{\partial U(x,\ y)}{\partial x}\right|^p dx\,dy.$$

Procedendo analogamente per l'ultimo termine della (2.4), integrando prima rispetto a τ e poi rispetto a t e ricorrendo alla (2.2) invece che alla (2.1), si ha:

$$2^{p-1}\int_0^1 dt\int_0^t d\tau\left[\frac{1}{t-\tau}\int_\tau^t\left|\frac{\partial U(t,\,y)}{\partial y}\right|dy\right]^p\leq \tag{2.6}$$

$$\leq 2^{p-1}c_5\iint_T\left|\frac{\partial U(x,\,y)}{\partial y}\right|^p dxdy.$$

Dalle (2.4), (2.5), (2.6) segue la (2.3), [13]).

Ci sarà utile formulare la seguente immediata conseguenza del lemma [2. I]:

[2. II] - LEMMA. *Per una funzione di due variabili $U(x, y)$ definita nel quadrato $I\equiv\{0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq 1\}$, si ha, detta $\Phi(y)$ la sua traccia sul lato $x=0$:*

$$\int_0^1 dh\int_{Y_h}\left|\frac{\Phi(y+h)-\Phi(y)}{h}\right|^p dy\leq \tag{2.7}$$

$$\leq c_6\iint_I\left(\left|\frac{\partial U}{\partial x}\right|^p+\left|\frac{\partial U}{\partial y}\right|^p\right)dxdx,\ (p>1)$$

dove $Y_h\equiv\{0\leq y\leq 1-h\}$.

Siamo ora in grado di dimostrare che la condizione enunciata nel teorema [1. I] è necessaria, e più precisamente sussiste la (1.4).

Per maggiorare il secondo membro della (1.3) con la (1.1) riferiamoci ad un fissato valore di k, e consideriamo il corrispondente dominio R_k ed il rettangolo R su cui esso è rappresentato. La funzione u, considerata in Q_k, può essere pensata definita in Q, e la indicheremo allora con u_k [14]); essa

---

13) Il primo membro della (2.3) si può infatti anche scrivere:

$$2\iint_{0\leq\tau<t\leq 1}\left|\frac{\Phi(t)-\Phi(\tau)}{t-\tau}\right|^p dtd\tau.$$

14) Si tenga presente che la trasformazione tra Q_k e Q induce un isomorfismo tra $W_p(Q_k)$ e $W_p(Q)$.

ammette come traccia su S la funzione φ_k che risulta evidentemente [7]) di potenza p-esima sommabile.

Per il primo integrale a secondo membro della (1.3) si ha evidentemente:

$$\int_S |\varphi_k|^p \, dS \leq \int_Q |u_k|^p \, dQ + p \left[\int_Q |u_k|^p dQ \right]^{\frac{p-1}{p}} \left[\int_Q \left| \frac{\partial u_k}{\partial x_n} \right|^p dQ \right]^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq p + 1) \int_Q |u_k|^p \, dQ + p \int_Q \left| \frac{\partial u_k}{\partial x_n} \right|^p dQ$$

e quindi anche:

$$\left[\int_S |\varphi_k|^p \, dS \right]^{\frac{1}{p}} \leq c_7 \, \| u_k \|_{W_p(Q)} \leq c_8 \, \| u \|_{W_p(\Omega)} \, .$$

Per maggiorare analogamente gli altri termini a secondo membro della (1.3) basterà solcare il cubo Q con piani (a *due* dimensioni) paralleli agli assi x_j e x_n, applicare sul generico di essi la (2.7) assumendo: $x = x_n$, $y = x_j$, $U = u$, e infine integrare rispetto alle rimanenti $n - 2$ variabili.

Resta da dimostrare che la condizione enunciata nel teorema [1. I] è anche sufficiente, e sussiste la (1.5).

A tale scopo teniamo presente la seguente osservazione contenuta nei risultati di C. B. Morrey [10]:

[2.III] - LEMMA. *Per una funzione di una variabile $f(x)$ definita nell'intervallo $I \equiv \{0 \leq x \leq 1\}$ si ha:*

$$\text{(2.8)} \qquad \int_{I_h} \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(\xi) d\xi \right|^p dx \leq \int_I |f(x)|^p \, dx,$$

$$(I_h \equiv \{ 0 \leq x \leq 1 - h \}, \; 0 < h < 1, \; p \geq 1).$$

Il primo membro, moltplicato per h, si maggiora infatti con l'integrale della funzione $F(x, y) = |f(x + y)|^p$ esteso al rettangolo $\{0 \leq x \leq 1 - h, \; 0 \leq y \leq h\}$, mentre il secondo membro, pure moltiplicato per h, risulta eguale all'integrale della stessa funzione $F(x, y)$ esteso al parallelogrammo $\{0 \leq y \leq h, \; -y \leq \leq x \leq 1 - y\}$ che contiene il rettangolo ora considerato.

Per costruire una funzione $u \in W_p(\Omega)$ che assume una traccia assegnata $\varphi \in \Lambda_p(\Gamma)$ e verifica la (1.5), è sufficiente, in base ad un noto procedimento [15]), risolvere questo problema localmente, ossia in ciascun Q_k, e quindi anche con Q, S in luogo di Ω, Γ. Ci permetteremo anzi, assegnata una traccia φ su S, di costruire una funzione u non in tutto Q ma solo nella piramide Π che proietta S dal vertice $x_1 = ... = x_{n-1} = 0$, $x_n = 1$; è infatti evidente che anche le immagini di $\Pi + (R - Q)$ nei domini R_k costituiscono un insieme di domini tali che ogni punto di Γ risulta *interno* ad almeno uno di essi, ed è quindi ancora applicabile il procedimento richiamato.

La funzione u che vogliamo definire nella piramide

$$\Pi \equiv \{ 0 \leq x_i \leq 1 - x_n, \ (i = 1, ..., n-1), \ 0 < x_n \leq 1 \}$$

è la seguente:

$$(2.9) \quad u(x_1, ..., x_n) = \frac{1}{x_n^{n-1}} \int_{x_1}^{x_1+x_n} d\xi_1 ... \int_{x_{n-1}}^{x_{n-1}+x_n} \varphi(\xi_1, .., \xi_{n-1}) d\xi_{n-1}, \quad ^{16})$$

È evidente che questa funzione assume su S la traccia φ. Resta da dimostrare che u soddisfa in Π ad una limitazione

---

15) Siano p_k, $(k = 1, ..., K)$, funzioni definite in Q_k, appartenenti a $W_p(Q_k)$, e che assumono come traccia su S_k i valori della funzione assegnata φ su Γ. Indichiamo con R_0 un insieme aperto la cui chiusura sia contenuta in Ω e tale che gli insiemi $R_0, R_1, ..., R_K$ costituiscano una copertura di Ω. Consideriamo un sistema di $K+1$ funzioni continue con le derivate prime: $\alpha_0(x), \alpha_1(x), ..., \alpha_K(x)$, tali che sia: $\alpha_k(x) \geq 0$, il supporto di α_k sia contenuto in R_k, e sia $\sum_k^{0...K} \alpha_k(x) = 1$ per $x \in \Omega$. Prolunghiamo poi la definizione delle funzioni u_k a tutto lo spazio con valori nulli e poniamo $u_0 \equiv 0$. La funzione $u = \sum_k^{0...K} \alpha_k(x) u_k(x)$ è la funzione cercata (Cfr. [13], p. 41).

16) Questo integrale si potrebbe chiamare una «schematizzazione» del classico integrale di Poisson relativo al problema di Dirichlet nel semispazio. È allora naturale presumere (cfr. le osservazioni che faremo al n. 4) che questo procedimento *non* sia applicabile per $p = 1$, come di fatti avviene poichè la (2.2), di cui faremo uso, vale solo per $p > 1$.

del tipo (1.5), e cioè, nel caso attuale:

$$\int_{\Pi} |u|^p dQ + \sum_i^{1\dots n} \int_{\Pi} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^p dQ \le c_9 \left\{ \int_S |\varphi|^p dS + \right. \tag{2.10}$$

$$\left. + \sum_j^{1\dots n-1} \int_0^1 dh \int_{S_j^h} \left| \frac{\varphi(x_1, \dots, x_j + h, \dots, x_{n-1}) - \varphi(x_1, \dots, x_{n-1})}{h} \right|^p dS \right\}$$

dove S_j^h è stato definito nella (1.3).

Per dimostrare la (2.10) è evidentemente sufficiente [17]) stabilire la:

$$\sum_i^{1\dots n} \int_{\Pi} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^p dQ \le \tag{2.11}$$

$$\le c_{10} \sum_j^{1\dots n-1} \int_0^1 dh \int_{S_j^h} \left| \frac{\varphi(x_1, \dots, x_j + h, \dots, x_{n-1}) - \varphi(x_1, \dots, x_{n-1})}{h} \right|^p dS$$

Consideriamo a tale scopo le derivate prime della funzione (2.9).

Derivando la funzione u rispetto ad una delle prime $n-1$ variabili si ottiene:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{1}{x_n^{n-1}} \int_{x_1}^{x_1+x_n} d\xi_1 \dots \int_{x_{i-1}}^{x_{i-1}+x_n} d\xi_{i-1} \int_{x_{i+1}}^{x_{i+1}+x_n} d\xi_{i+1} \dots \tag{2.12}$$

$$\dots \int_{x_{n-1}}^{x_{n-1}+x_n} [\varphi(\xi_1, \dots, x_i + x_n, \dots, \xi_{n-1}) - \varphi(\xi_1, \dots x_i \dots \xi_{n-1})] d\xi_{n-1}$$

$$(i = 1, \dots, n-1).$$

Per ottenere invece la derivata di u rispetto alla variabile

---

17) L'integrale $\int_{\Pi} |u|^p dQ$, (dove u è la funzione (2.9)), applicando per ogni fissato x_n la (2.8), si maggiora evidentemente con l'integrale $\int_S |\varphi|^p dS$.

x_n conviene valersi del cambiamento di variabili:

$$\eta_i = \frac{\xi_i - x_i}{x_n}, \qquad (i = 1, \dots, n-1)$$

e si ha:

$$(2.13) \qquad \frac{\partial u}{\partial x_n} = \sum_j^{1\dots n-1} \frac{1}{x_n^n} \int_{x_1}^{x_1+x_n} d\xi_1 \dots \int_{x_{n-1}}^{x_{n-1}+x_n} (\xi_j - x_j) \frac{\partial \varphi(\xi_1, \dots, \xi_{n-1})}{\partial \xi_j} d\xi_{n-1}.$$

Dalla (2.12) segue:

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| \leq \frac{1}{x_n} \int_{x_1}^{x_1+x_n} d\xi_1 \dots \frac{1}{x_n} \int_{x_{i-1}}^{x_{i-1}+x_n} d\xi_{i-1} \frac{1}{x_n} \int_{x_{i+1}}^{x_{i+1}+x_n} d\xi_{i+1} \dots$$

$$\dots \frac{1}{x_n} \int_{x_{n-1}}^{x_{n-1}+x_n} \left| \frac{\varphi(\xi_1, \dots, x_i + x_n, \dots, \xi_{n-1}) - \varphi(\xi_1, \dots x_i \dots, \xi_{n-1})}{x_n} \right| d\xi_{n-1}.$$

$$(i = 1, \dots, n-1)$$

e di qui, applicando $n-2$ volte successivamente la (2.8):

$$(2.14) \qquad \int_\Pi \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^p dQ \leq$$

$$\leq c_{11} \int_0^1 dh \int_{S_i^h} \left| \frac{\varphi(x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_{n-1}) - \varphi(x_1, \dots, x_{n-1})}{h} \right|^p dS,$$

$$(i = 1, \dots, n-1).$$

Per maggiorare analogamente la derivata $\dfrac{\partial u}{\partial x_n}$ riferiamoci ad un solo dei termini della sommatoria (2.13), e sia per fissare le idee il termine con $j = 1$. Si ha allora, indicando con $\left|\dfrac{\partial u}{\partial x_n}\right|_1$ il valore assoluto del termine preso in considerazione:

$$(2.15) \qquad \left|\frac{\partial u}{\partial x_n}\right|_1 = \left| \frac{1}{x_n^n} \int_{x_2}^{x_2+x_n} d\xi_2 \dots \right.$$

$$\ldots \int_{x_{n-1}}^{x_{n-1}+x_n} d\xi_{n-1} \int_{x_1}^{x_1+x_n} (\xi_1 - x_1) \frac{\partial\varphi(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})}{\partial\xi_1} d\xi_1 \Bigg| =$$

$$= \Bigg| \frac{1}{x_n^n} \int_{x_2}^{x_2+x_n} d\xi_2 \ldots \int_{x_{n-1}}^{x_{n-1}+x_n} d\xi_{n-1} \int_{x_1}^{x_1+x_n} [\varphi(x_1 + x_n, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}) -$$

$$- \varphi(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})] d\xi_1 \Bigg| \leq \frac{1}{x_n} \int_{x_2}^{x_2+x_n} d\xi_2 \ldots$$

$$\ldots \frac{1}{x_n} \int_{x_{n-1}}^{x_{n-1}+x_n} d\xi_{n-1} \frac{1}{x_n} \int_{x_1}^{x_1+x_n} \left| \frac{\varphi(x_1+x_n, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}) - \varphi(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})}{x_1 + x_n - \xi_1} \right| d\xi_1 .$$

Importa ora osservare che, in conseguenza della maggiorazione (2.2) si ha:

$$(2.16) \quad \int_H \left[\frac{1}{x_n} \int_{x_1}^{x_1+x_n} \left| \frac{\varphi(x_1+x_n, x_2, \ldots, x_{n-1}) - \varphi(\xi_1, x_2, \ldots, x_{n-1})}{x_1 + x_n - \xi_1} \right| d\xi_1 \right]^p dx_1 \ldots dx_n \leq$$

$$\leq c_{12} \int_H \left| \frac{\varphi(x_1 + x_n, x_2, \ldots, x_{n-1}) - \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1})}{x_n} \right|^p dx_1 \ldots dx_n$$

dove H è il prisma:

$$H \equiv \begin{cases} 0 \leq x_1 \leq 1 - x_n \\ 0 \leq x_2 \leq 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 \leq x_n \leq 1. \end{cases}$$

Per mostrare ciò effettuiamo il cambiamento di variabili:

$$\begin{cases} x_1 = x_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-1} = x_{n-1} \\ y = x_1 + x_n . \end{cases}$$

Si tratta allora di provare la disuguaglianza:

$$\int_{H'}\left[\frac{1}{y-x_1}\int_{x_1}^{y}\left|\frac{\varphi(y,x_2,\dots,x_{n-1})-\varphi(\xi_1,x_2,\dots,x_{n-1})}{y-\xi_1}\right|d\xi_1\right]^p dx_1\dots dx_{n-1}dy\leq$$

$$\leq c_{13}\int_{H'}\left|\frac{\varphi(y,\ x_2,\dots,\ x_{n-1})-\varphi(x_1,\dots,\ x_{n-1})}{y-x_1}\right|^p dx_1\dots dx_{n-1}dy$$

dove H' è il prisma:

$$H'\equiv\begin{cases}0\leq x_1\leq y\\ 0\leq x_2\leq 1\\ \dots\dots\dots\\ 0\leq x_{n-1}\leq 1\\ 0\leq y\leq 1\end{cases}$$

Ora ciò risulta evidente intersecando H' con rette parallele all'asse x_1 e applicando sulla generica di esse la (2.2).

In base alla (2.16), e applicando ancora la (2.8), si ottiene dalla (2.15):

$$\int_{\Pi}\left|\frac{\partial u}{\partial x_n}\right|_1^p dQ\leq c_{14}\int_0^1 dh\int_{S_1^h}\left|\frac{\varphi(x_1+h,\ x_2,\dots,\ x_{n-1})-\varphi(x_1,\dots,\ x_{n-1})}{h}\right|^p dS.$$

Procedendo analogamente per gli altri termini della sommatoria a secondo membro della (2.13), e tenendo presente la (2.14) si ottiene la (2.11).

Il teorema [1. I] è così completamente dimostrato.

3. - La parte diretta del teorema [1. II], e cioè la maggiorazione (1.6), è immediata [7]).

La dimostrazione della parte inversa, e cioè della (1.7) si ottiene nel modo seguente:

Come già si è fatto nel n. precedente ci riferiamo al cubo

$$Q\equiv\{\,0\leq x_i\leq 1,\ (i=1,\dots,\ n-1),\ 0<x_n\leq 1\,\},$$

e supponiamo assegnata sulla sua faccia

$$S \equiv \{ 0 \leq x_i \leq 1, \ (i = 1, \dots, n-1), \ x_n = 0 \}$$

la funzione sommabile $\varphi(x_1, \dots, x_{n-1})$.

Sia $\{\varphi_\nu(x_1, \dots, x_{n-1})\}$ una successione di funzioni, regolari a piacere, definite su S, convergenti in media del primo ordine, e quasi ovunque, alla funzione φ. Da una qualunque siffatta successione è evidentemente possibile estrarre una successione parziale, che indicheremo ancora con $\{\varphi_\nu\}$, tale che la serie

$$\sum_\nu^{0..\infty} \int_S |\varphi_\nu - \varphi_{\nu+1}| \, dS$$

risulti convergente, ed anzi (sopprimendo un numero finito di termini) la sua somma risulti arbitrariamente piccola; se però si richiede, come noi vogliamo, che la prima funzione sia identicamente nulla:

$$\varphi_0(x_1, \dots, x_{n-1}) \equiv 0$$

si potrà al più imporre una limitazione del tipo:

$$\sum_\nu^{0...\infty} \int_S |\varphi_\nu - \varphi_{\nu+1}| \, dS \leq c_{15} \int_S |\varphi| \, dS, \qquad (c_{15} > 1). \tag{3.1}$$

Ciò posto indichiamo con $\{t_\nu\}$, $(\nu = 0, 1, \dots)$, una successione decrescente infinitesima di numeri compresi tra 0 e 1, e consideriamo la funzione $u(x_1, \dots, x_n)$ lineare a tratti rispetto a x così definita in Q:

$$u(x_1, \dots, x_n) \equiv 0 \quad \text{per} \quad t_0 \leq x_n \leq 1 \, ;$$

$$u(x_1, \dots, x_{n-1}, t_\nu) = \varphi_\nu(x_1, \dots, x_{n-1}), \ (\nu = 0, 1, \dots) \, ;$$

$$u(x_1, \dots, x_{n-1}, \lambda t_{\nu+1} + (1-\lambda) t_\nu) = \lambda \varphi_{\nu+1}(x_1, \dots, x_{n-1}) +$$
$$+ (1-\lambda) \varphi_\nu(x_1, \dots, x_{n-1}),$$
$$(0 \leq \lambda \leq 1, \ \nu = 0, 1, \dots).$$

Vogliamo dimostrare che, con una opportuna scelta della successione $\{t_\nu\}$, la funzione u così costruita risolve il problema.

È intanto evidente che la funzione u ammette su S come traccia la funzione assegnata φ (come limite su quasi tutte le rette parallele all'asse x_n).

È pure evidente che la derivata $\dfrac{\partial u}{\partial x_n}$, che esiste salvo al più per i valori $x_n = t_\nu$, $(\nu = 0, 1, \ldots)$, soddisfa per la (3.1) alla limitazione:

$$\int_Q \left| \frac{\partial u}{\partial x_n} \right| dQ \leq c_{15} \int_S |\varphi| \, dS.$$

indipendentemente dalla successione $\{t_\nu\}$.

Si tratta ora di stabilire, con una opportuna scelta della successione $\{t_\nu\}$, analoghe limitazioni per tutte le altre derivate.

A tale scopo osserviamo che in ogni rettangolo:

$$Q_\nu \equiv \{ 0 \leq x_i \leq 1, \ (i = 1, \ldots, n-1), \ t_{\nu+1} \leq x_n \leq t_\nu \}$$

la funzione u è regolare (quanto le funzioni φ_ν, $\varphi_{\nu+1}$), e dunque esiste finito l'integrale

$$\int_{Q_\nu} \sum_i^{1 \ldots n-1} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| dQ.$$

Esso anzi dipende unicamente dalle funzioni φ_ν, $\varphi_{\nu+1}$, e dalla differenza $t_\nu - t_{\nu+1}$ e tende a zero con questa; ma d'altra parte le differenze $t_\nu - t_{\nu+1}$ si possono scegliere arbitrariamente piccole, precisando così la successione $\{t_\nu\}$ in modo che la serie

$$\sum_\nu^{0 \ldots \infty} \int_{Q_\nu} \sum_i^{1 \ldots n-1} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| dQ$$

risulti convergente verso un numero fissato a piacere.

Le derivate della funzione u sono dunque sommabili non solo in ogni Q_ν ma in tutto Q; si può dunque affermare che la funzione u che abbiamo costruito in Q è assolutamente continua rispetto alle variabili separatamente ed ha derivate prime sommabili in Q. Essa soddisfa inoltre ad una limitazione del tipo:

$$\int_Q \sum_i^{1\dots n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| dQ \leq c_{16} \int_S |\varphi| \, dS, \qquad (c_{16} > 1)$$

e quindi anche, evidentemente [18]), alla limitazione:

$$\int_Q \left(|u| + \sum_i^{1\dots n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| \right) dQ \leq c_{17} \int_S |\varphi| \, dS, \quad (c_{17} = 2c_{16} + 1).$$

Anche il teorema [1. II] è così dimostrato.

4. - Concludiamo con alcune osservazioni complementari. Va notato, per meglio chiarire la differenza tra il teorema [1. I] valido per $p > 1$ e il teorema [1. II] valido per $p = 1$, che *la condizione di appartenere allo spazio* $\Lambda_p(\Gamma)$. *è* effettivamente *più restrittiva, per ogni* $p \geq 1$, *della condizione di appartenere a* $L_p(\Gamma)$, come risulta da semplici esempi. Si consideri ad es. la funzione sommabile $\varphi(x) = \dfrac{1}{x(\log |x|)^2}$ i cui rapporti incrementali $\dfrac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}$, come funzioni delle due variabili x, h, *non* sono sommabili.

Dal confronto col teorema [1. II] risulta allora che il teorema [1. I] *non* vale per $p = 1$.

Osserviamo ancora che una successione $\{\varphi^{(\nu)}\}$ di funzioni (definite su Γ) aventi la norma (1.3) equilimitata è compatta, per un teorema dimostrato in un precedente lavoro [6] [19]),

---

[18]) Osservando che:

$$\int_{S(\bar{x}_n)} |u| \, dx_1 \dots dx_{n-1} \leq \int_S |u| \, dx_1 \dots dx_{n-1} + \int_Q \left| \frac{\partial u}{\partial x_n} \right| dx_1 \dots dx_n$$

$$(S(\bar{x}_n) \equiv \{ 0 \leq x_i \leq 1, \ (i = 1, \dots, n-1), \ x_n = \bar{x}_n \})$$

e integrando rispetto a $\bar{x}_n$ in $0 \leq \bar{x}_n \leq 1$.

[19]) Riportiamo l'enunciato del teorema di compattezza stabilito in [6] nella forma che qui interessa:

Una successione $\{ f_\nu(x_1, \dots, x_n) \}$ *di funzioni definite in* $I \equiv \{ 0 \leq$

rispetto alla convergenza relativa alla norma (1.2). In altre parole *l'immersione dello spazio* $\Lambda_p(\Gamma)$ *nello spazio* $L_p(\Gamma)$, *per ogni* $p \geq 1$, *è completamente continua.*

Per $p > 1$ ciò si può anche dimostrare una volta stabilito il teorema [1. I]. Basta infatti costruire le funzioni $u^{(\nu)}$ che ammettono come tracce $\varphi^{(\nu)}$ in modo che le norme $\| u^{(\nu)} \|_{W_p(\Omega)}$ risultino equilimitate (per le ipotesi fatte sulla successione $\{\varphi^{(\nu)}\}$ e per il teorema [1. I]), indi, per un noto teorema di C. B. Morrey [10] estrarre dalla successione $\{u^{(\nu)}\}$ una successione, che indicheremo ancora con $\{u^{(\nu)}\}$, convergente in Ω in media di ordine p, e infine applicare alle differenze $u^{(\nu)} - u^{(\mu)}$ la disuguaglianza:

$$\| \varphi \|^p_{\mathcal{L}_p(\Gamma)} \leq c_{18} \| u \|^p_{\mathcal{L}_p(\Omega)} + c_{19} \| u \|^{p-1}_{\mathcal{L}_p(\Omega)} \| u \|_{W_p(\Omega)}, \quad \text{(cfr. [7])}.$$

A proposito del teorema [1.II] va notato che, a differenza di quanto avviene per la (1.5) nel caso $p = 2$, la (1.7) *non* può essere stabilita cercando la funzione u, che assume una traccia assegnata φ, nella classe delle funzioni armoniche: basta infatti considerare la successione di funzioni armoniche:

$$u_\nu(x, y) = \frac{x + \frac{1}{\nu}}{\left(x + \frac{1}{\nu}\right)^2 + y^2}$$

nel rettangolo $\{0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$, per la quale l'integrale a secondo membro della (1.7) resta limitato mentre il primo membro diverge per $\nu \to \infty$.

Vogliamo ora dedurre dal teorema [1. II] una caratterizzazione per le tracce delle funzioni assolutamente continue secondo L. TONELLI.

$\leq x_i \leq 1, (i = 1, \dots, n)\}$ *tali che:*

$$\int_I | f_\nu |^p \, dI \leq c, \quad \sum_j^{1 \dots n} \int_0^1 dh \int_{I_j^h} \frac{| f_\nu(x_1, \dots, x_j + h, \dots, x_n) - f_\nu(x_1, \dots, x_n) |^p}{h} \, dI \leq c$$

$(I_j^h \equiv \{0 \leq x_i \leq 1$ per $i \neq j$, $0 \leq x_j \leq 1 - h$, $(i = 1, \dots, n)\}$, $p \geq 1$, c costante *è compatta in* I *rispetto alla convergenza in media di ordine* p.

Una funzione $u(x_1, \ldots, x_n)$ è assolutamente continua secondo Tonelli in un insieme I se essa appartiene alla classe $A_1(I)$, (vedi n. 1), ed è inoltre continua in I.

Sussiste allora il seguente teorema:

[4.I] *Condizione necessaria e sufficiente perchè una funzione φ definita su Γ sia traccia di una funzione assolutamente continua secondo Tonelli nell'insieme aperto Ω [in $\Omega + \Gamma$] è che φ sia sommabile [continua].*

Per ottenere questo risultato basterà ripetere la dimostrazione svolta al n. 3 osservando che, in ogni caso, le funzioni φ_ν possono essere supposte continue (e allora la funzione u che si viene a costruire risulta continua nell'interno di Ω), e inoltre, se φ è continua, la successione $\{\varphi_\nu\}$ si può supporre uniformemente convergente (e allora la funzione u risulta continua anche nei punti di Γ).

BIBLIOGRAFIA

[1] N. ARONSZAJN, *Boundary values of functions with finite Dirichlet integral.* Conference on partial differential equations. Studies in eigenvalue problems, N. 14. (Univ. of Kansas 1955).

[2] V. M. BABICH, *Sul problema del prolungamento delle funzioni* (in russo). Uspekhi Matematicheskikh Nauk, 8, 2 (54), 111-3 (1953).

[3] V. M. BABICH e L. N. SLOBODETSKIJ, *Sulla limitatezza dell'integrale di Dirichlet* (in russo). Doklady Akademii Nauk S.S.S.R., 106, 604-8 (1956).

[4] J. DENY e J. L. LIONS, *Les espaces du type de Beppo Levi.* Annales de l'Institut Fourier, 5, 305-70 (1955).

[5] G. FICHERA, *Sull'esistenza e sul calcolo della soluzione dei problemi al contorno relativi all'equilibrio di un corpo elastico.* Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, (3), 4, 35-99 (1950), p. 78.

[6] E. GAGLIARDO, *Un criterio di compattezza rispetto alla convergenza in media.* Ricerche di Matematica, 6, 34-48 (1957).

[7] G. G. HARDY, D. E. LITTLEWOOD, G. POLYA, *Inequalities.* (Univ. of Cambridge 1952).

[8] V. P. IL'IN, *Un teorema di immersione con l'esponente limite* (in russo). Dokladi Akademii Nauk S.S.S.R., 96, 905-8 (1954).

[9] C. MIRANDA, *Sulla sommabilità delle derivate di una funzione armonica hölderiana*. Rend. Acc. Scienze Fis. e Mat. di Napoli, (4), 18 (1951).

[10] C. B. MORREY, *Functions of several variables and absolute continuity*. Duke Math. J., 6, 187-215 (1940).

[11] S. M. NIKOL'SKIJ, *Sul problema di Dirichlet per il cerchio e per il semispazio* (in russo). Matematicheskij Sbornik, 35 (77), 247-66 (1954).

[12] — — *Proprieta sulla frontiera delle funzioni definite in una regione con punti angolosi* (in russo). Matematicheskij Sbornik, 40 (82), 303-18 (1956).

[13] G. PRODI, *Tracce sulla frontiera delle funzioni di Beppo Levi*. Rend. Sem. Mat. di Padova, 26, 36-60 (1956).

[14] L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions*. (Parigi 1950).

[15] S. L. SOBOLEV, *Su un teorema di analisi funzionale* (in russo). Matematicheskij Sbornik, 4 (46), 471-97 (1938).

[16] — — *Alcune applicazioni dell'analisi funzionale alla fisica matematica* (in russo). (Leningrado 1950).

[17] G. STAMPACCHIA, *Sopra una classe di funzioni in n variabili*. Ricerche di Matematica, 1, 27-54 (1951).

[18] — — *Problemi al contorno per equazioni di tipo ellittico a derivate parziali e questioni di calcolo delle variazioni connesse*. Annali di Matematica, (4), 33, 211-38 (1952).