

Ekkehard Krätzel

Mittlere Darstellungen natürlicher Zahlen als Summe von n k -ten Potenzen

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 23 (1973), No. 1, 57–73

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/101146>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1973

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

MITTLERE DARSTELLUNGEN NATÜRLICHER ZAHLEN
ALS SUMME VON n k -TEN POTENZEN

EKKEHARD KRÄTZEL, Jena
(Eingelangt am 10. Januar 1972)

1. PROBLEMSTELLUNG

Anliegen dieser Arbeit ist die Untersuchung des asymptotischen Verhaltens von

$$R_{k,n}(x) = 2^n \sum_{a_1^k + \dots + a_n^k \leq x} 1$$

für große x , wobei $k \geq 2$, $n \geq 3$ natürliche Zahlen bedeuten. Summiert wird über alle nicht-negativen ganzen Zahlen a_i , und der Strich am Summenzeichen bedeutet, daß jedes Glied mit $a_i = 0$ mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ belegt wird. VON RANDOL [3] wurde unter der Einschränkung $k \equiv 0 \pmod{2}$

$$R_{k,n}(x) = V_{k,n} x^{n/k} + \begin{cases} O(x^{(n-1)(k-1)/k^2}) & \text{für } k \geq n + 1 \\ O(x^{n(n-1)/k(n+1)}) & \text{für } k \leq n, \end{cases}$$

$$(1) \quad V_{k,n} = \frac{2^n \Gamma^n\left(\frac{1}{k}\right)}{k^n \Gamma\left(\frac{n}{k} + 1\right)}$$

bewiesen. In dieser Arbeit wird sich zeigen, daß dieses Ergebnis für alle $k \geq 2$ richtig ist, wobei allerdings die Abschätzung für $k \leq n$ um einen logarithmischen Faktor schwächer ist. Randol stellte fernerhin fest, daß die Abschätzung im Falle $k > n + 1$ nicht mehr zu verbessern ist. Ich werde zeigen, daß dann der Rest in erster Näherung durch eine Funktion von genau der genannten Größenordnung dargestellt werden kann. Diese Funktion ist gegeben durch eine unendliche Reihe über verallgemeinerte Bessel-Funktionen, welche für $k = 1, 2, \dots$; $\text{Re}(v) > 1/k - 1$ durch

$$J_v^{(k)}(x) = \frac{2}{\sqrt{(\pi)} \Gamma\left(v + 1 - \frac{1}{k}\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^{kv/2} \int_0^1 (1-t^k)^{v-1/k} \cos xt \, dt$$

definiert sind. Bildet man für $\operatorname{Re}(v) > 1/k - 1$

$$(2) \quad \psi_v^{(k)}(x) = 2\sqrt{(\pi)} \Gamma\left(v + 1 - \frac{1}{k}\right) \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{x}{\pi m}\right)^{kv/2} J_v^{(k)}(2\pi mx),$$

so ist nach [1]

$$(3) \quad \psi_{n/k}^{(k)}(x^{1/k}) = O(x^{(n-1)(k-1)/k^2}).$$

Hier soll nun der folgende Satz bewiesen werden:

Satz. *Mit den Bezeichnungen (1) und (2) und mit natürlichen Zahlen $n \geq 3$, $k \geq 2$ ist*

$$(4) \quad R_{k,n}(x) = V_{k,n} x^{n/k} + nV_{k,n-1} \psi_{n/k}^{(k)}(x^{1/k}) + O(x^{(3n-4)k-5n+8]/3k(k-1)} \log^2 x)$$

für $k \geq n + 2$ und

$$(5) \quad R_{k,n}(x) = V_{k,n} x^{n/k} + O(x^{n(n-1)/k(n+1)} \log x)$$

für $k \leq n + 1$.

Bemerkungen: 1. Die Entwicklungen (4) und (5) sind auch für $n = 2$ richtig. Dieser Fall wurde schon in [2] mit einem etwas besseren Restglied erledigt.

2. Für $k = 2$ ist (5) wohlbekannt und schwächer als die bereits vorliegenden Abschätzungen. Viele der umfangreichen folgenden Rechnungen könnten eingespart werden, wollte man für $k = 2$ nur (5) beweisen. Daher sind die nachstehenden Untersuchungen auf $k \geq 3$ zugeschnitten, wobei aber der Fall $k = 2$ nicht ausgeschlossen werden muß.

3. Wegen der voluminösen Formeln benutze ich ständig die folgenden abkürzenden Bezeichnungen:

$$\begin{aligned} A_v &= a_1^k + a_2^k + \dots + a_v^k, \\ B_v &= b_1^{k/(k-1)} + b_2^{k/(k-1)} + \dots + b_v^{k/(k-1)}, \\ e(z) &= e^{2\pi iz}. \end{aligned}$$

Mit $\text{SB}(\sum_i)$ sollen die Summationsbedingungen der Summe \sum_i angegeben werden. So wird zum Beispiel statt

$$F(x) = \sum_{a \leq n \leq x} f(n)$$

stets

$$F(x) = \sum f(n), \quad \text{SB}(\sum) : a \leq n \leq x$$

und analog bei mehrfachen Summen geschrieben. Ganz entsprechend werden mit $\text{IB}(\int_i)$ die Integrationsbedingungen des Integrals \int_i bezeichnet. Es kommen auch mehrfache Integrale über mehrfache Summen vor. Dabei werden die Integrationsbedingungen nicht gesondert angegeben, da sie aus den Summationsbedingungen ersichtlich sein werden. Ein Strich am Summenzeichen bedeutet, daß die

Glieder, bei denen ein Summationsbuchstabe gleich 0 wird, mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ belegt werden. Ein zweiter Strich am Summenzeichen bedeutet, daß die Glieder, bei denen zwei Summationsbuchstaben einander gleich werden, ebenfalls mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ belegt werden.

2. VORBEREITUNG DER ABSCHÄTZUNG

Hilfssatz 1. Mit den Bezeichnungen von §1 und mit $\psi(x) = x - [x] - \frac{1}{2}$ gilt für $n \geq 3, k \geq 2$

$$(6) \quad R_{k,n}(x) = V_{k,n}x^{n/k} + A_{k,n}(x) + O(x^{(n-2)/k}),$$

$$(7) \quad A_{k,n}(x) = -2^n n! \sum \psi((x - A_{n-1})^{1/k}),$$

$$\text{SB}(\sum) : 0 \leq a_1^k \leq a_2^k \leq \dots \leq a_{n-1}^k \leq \frac{x - A_{n-2}}{2}.$$

Beweis. Mit den in §1 getroffenen Vereinbarungen ist

$$R_{k,n}(x) = 2^n \sum'_{A_n \leq x} 1 = 2^n n! \sum_1' 1 + O(x^{(n-2)/k}),$$

$$\text{SB}(\sum_1) : A_n \leq x, \quad 0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n.$$

Führt man die Summation über a_n aus, so wird

$$R_{k,n}(x) = 2^n n! \sum_2' \{ [(x - A_{n-1})^{1/k}] + \frac{1}{2} - a_{n-1} \} + O(x^{(n-2)/k}),$$

$$\text{SB}(\sum_2) : 0 \leq a_1^k \leq a_2^k \leq \dots \leq a_{n-1}^k \leq \frac{x - A_{n-2}}{2}$$

und mit der Bezeichnung (7)

$$R_{k,n}(x) = 2^n n! \int \sum_3' 1 dt_n + A_{k,n}(x) + O(x^{(n-2)/k}),$$

$$\text{SB}(\sum_3) : A_{n-1} + t_n^k \leq x, \quad 0 \leq a_1^k \leq a_2^k \leq \dots \leq a_{n-1}^k \leq t_n^k.$$

Bei Ausführung der Summation über a_{n-1} erhält man

$$R_{k,n}(x) = 2^n n! \int \sum_4' \{ [(x - A_{n-2} - t_n^k)^{1/k}] + \frac{1}{2} - a_{n-2} \} dt_n + \\ + 2^n n! \int \sum_5' \{ [t_n] + \frac{1}{2} - a_{n-2} \} dt_n + A_{k,n}(x) + O(x^{(n-2)/k}),$$

$$\text{SB}(\sum_4) : 0 \leq a_1^k \leq a_2^k \leq \dots \leq a_{n-2}^k, \quad \frac{x - A_{n-2}}{2} < t_n^k \leq x - A_{n-2} - a_{n-2}^k,$$

$$\text{SB}(\sum_5) : 0 \leq a_1^k \leq a_2^k \leq \dots \leq a_{n-2}^k \leq t_n^k \leq \frac{x - A_{n-2}}{2}.$$

Führt man wieder die Funktion $\psi(y)$ an Stelle von $[y]$ ein, so ergibt sich

$$R_{k,n}(x) = 2^n n! \iint \sum_6'' 1 dt_{n-1} dt_n - 2^n n! \int \sum_4'' \psi((x - A_{n-2} - t_n^k)^{1/k}) - \\ - 2^n n! \int \sum_5'' \psi(t_n) dt_n + \Delta_{k,n}(x) + O(x^{(n-2)/k}),$$

$$\text{SB}(\sum_6) : A_{n-2} + t_{n-1}^k + t_n^k \leq x, \quad 0 \leq a_1^k \leq a_2^k \leq \dots \leq a_{n-2}^k \leq t_{n-1}^k \leq t_n^k.$$

Das Integral über $\psi(y)$ liefert die Fourier-Entwicklung des zweiten Bernoullischen Polynoms und somit eine bezüglich x beschränkte Funktion. Führt man das Integral über \sum_5 aus bzw. integriert man über \sum_4 partiell, so verbleibt eine Summe über a_1, a_2, \dots, a_{n-2} , die folglich einen Größenordnungsanteil von $x^{(n-2)/k}$ liefert. Daher ist

$$R_{k,n}(x) = 2^n n! \iint \sum_6'' 1 dt_{n-1} dt_n + \Delta_{k,n}(x) + O(x^{(n-2)/k}).$$

Analog wird weiter verfahren, so daß man vor dem letzten Schritt

$$R_{k,n}(x) = 2^n n! \int \dots \int \sum_7' 1 dt_2 dt_3 \dots dt_n + \Delta_{k,n}(x) + O(x^{(n-2)/k}),$$

$$\text{SB}(\sum_7) : a_1^k + t_2^k + t_3^k + \dots + t_n^k \leq x, \quad 0 \leq a_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq \dots \leq t_n$$

erhält. Nach Summation über a_1 ergibt sich

$$R_{k,n}(x) = 2^n n! \int \dots \int_1 [(x - t_2^k - t_3^k - \dots - t_n^k)^{1/k}] dt_2 dt_3 \dots dt_n + \\ + 2^n n! \int \dots \int_2 [t_2] dt_2 dt_3 \dots dt_n + \Delta_{k,n}(x) + O(x^{(n-2)/k}),$$

$$\text{IB} \left(\int \dots \int_1 \right) : t_2^k + t_3^k + \dots + t_n^k \leq x, \quad \frac{x - t_3^k - t_4^k - \dots - t_n^k}{2} < t_2^k \leq t_3^k \leq \dots \leq t_n^k,$$

$$\text{IB} \left(\int \dots \int_2 \right) : t_2^k \leq \frac{x - t_3^k - t_4^k - \dots - t_n^k}{2}, \quad 0 \leq t_2 \leq t_3 \leq \dots \leq t_n;$$

$$R_{k,n}(x) = 2^n n! \int \dots \int_3 dt_1 dt_2 \dots dt_n + \Delta_{k,n}(x) + O(x^{(n-2)/k}),$$

$$\text{IB} \left(\int \dots \int_3 \right) : t_1^k + t_2^k + \dots + t_n^k \leq x, \quad 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n;$$

$$R_{k,n}(x) = V_{k,n} x^{n/k} + \Delta_{k,n}(x) + O(x^{(n-2)/k}).$$

Zur Abschätzung des Restgliedes (7) wird es erforderlich, die auftretende Summe zu zerlegen. Mit $x^{1-1/k} \leq y < x/n$ wird gesetzt:

$$\begin{aligned} \Delta_{k,n}(x) &= \Delta_{k,n}^{(1)}(x, y) + \Delta_{k,n}^{(2)}(x, y), \\ (8) \quad \Delta_{k,n}^{(1)}(x, y) &= -2^n n! \sum_1 \psi((x - A_{n-1})^{1/k}), \\ \text{SB}(\sum_1) : y < a_1^k &\leq a_2^k \leq \dots \leq a_{n-1}^k \leq \frac{x - A_{n-2}}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (9) \quad \Delta_{k,n}^{(2)}(x, y) &= -2^n n! \sum_2 \psi((x - A_{n-1})^{1/k}), \\ \text{SB}(\sum_2) : 0 \leq a_1^k &\leq a_2^k \leq \dots \leq a_{n-1}^k \leq \frac{x - A_{n-2}}{2}, \quad a_1^k \leq y. \end{aligned}$$

3. ABSCHÄTZUNG VON $\Delta_{k,n}^{(1)}(x, y)$

Die Abschätzung wird mit der van der Corput-Vinogradovschen Methode vorgenommen. Dazu benötige ich die folgenden Lemmata von VINOGRADOV [4]:

Lemma 1. *Es durchlaufe n eine Menge G von natürlichen Zahlen unter der Voraussetzung*

$$\sum_{n \in G} 1 < \infty.$$

Es sei $\psi(x) = x - [x] - \frac{1}{2}$. Dann gilt mit geeignetem $s > s_0$

$$\sum_{n \in G} \psi(f(n)) = O(\xi^{-1} \sum_{n \in G} 1) + O\left(\sum_{v=1}^{\infty} \min\left(\frac{1}{v}, \frac{\xi^s}{v^{s+1}}\right) \left| \sum_{n \in G} e^{2\pi i v f(n)} \right|\right).$$

Lemma 2. *Es werde vorausgesetzt:*

(A) $0 < b - a \ll U$, $1/A \ll f''(x) \ll 1/A(a < x \leq b)$, $1 \ll A \ll U^2$, $H > 0$,

(B) $\varphi(x) \ll H$, $\varphi(x)$ stückweise monoton.

Dann gilt

$$\sum_{a < n \leq b} \varphi(n) e^{\pi i f(n)} = O\left(\frac{HU}{\sqrt{A}}\right) + O(H\sqrt{A}) + O(H \log(U+1)).$$

Lemma 3. *Es sei die Voraussetzung (A) von Lemma 2 erfüllt. Ferner gelte:*

(C) $f'''(x) \ll 1/AU$ für $a < x \leq b$,

(D) $H \ll \varphi(x) \ll H$, $\varphi'(x) \ll H/U$, $\varphi''(x) \ll H/U$ für $a < x \leq b$.

Mit den Bezeichnungen

$$f'(t_n) = n,$$

$$T_q = \begin{cases} 0 & \text{für } f'(q) \equiv 0 \quad (1) \\ \min \left(\sqrt{A}, \frac{1}{|f'(q) - [f'(q)]|} \right) & \text{für } f'(q) \not\equiv 0 \quad (1) \end{cases}$$

gilt dann

$$\sum_{a < n \leq b} \varphi(n) e^{2\pi i f(n)} = e^{\pi i/4} \sum'_{f'(a) \leq n \leq f'(b)} \frac{\varphi(t_n)}{\sqrt{|f''(t_n)|}} e^{2\pi i (f(t_n) - n t_n)} +$$

$$+ O(HT_a) + O(HT_b) + O(H \log(U + 1)),$$

wobei die möglichen Glieder $n = f'(a), f'(b)$ in der Summe den Faktor $\frac{1}{2}$ erhalten.

Hilfssatz 2. Mit $x^{1-1/k} \leq y < x/n$ ist

$$(10) \quad \Delta_{k,n}^{(1)}(x, y) = \begin{cases} O(x^{n(n-1)/k(n+1)} \log x) + O(y^{(n-1)/k-1} x^{1-1/k} \log^2 x) & \text{für } k \geq n \\ O(x^{n(n-1)/k(n+1)} \log x) & \text{für } k < n. \end{cases}$$

Beweis. Nach (8) und Lemma 1 ist

$$(11) \quad \Delta_{k,n}^{(1)}(x, y) = O(x^{(n-1)/k \xi^{-1}}) + O\left(\sum_{b_1=1}^{\infty} \min\left(\frac{1}{b_1}, \frac{\xi^s}{b_1^{s+1}}\right) |S_{k,n}(x, y)|\right),$$

$$S_{k,n}(x, y) = \sum_1 e(-b_1(x - A_{n-1})^{1/k}),$$

$$SB(\sum_1) : y < a_1^k \leq a_2^k \leq \dots \leq a_{n-1}^k \leq \frac{x - A_{n-2}}{2}.$$

Für $\xi^k \leq x < b_1^k$ wird $S_{k,n}(x, y)$ trivial zu

$$S_{k,n}(x, y) = O(x^{(n-1)/k})$$

abgeschätzt. Dann ist mit $s > 0$ und $\xi^k \leq x$

$$(12) \quad \Delta_{k,n}^{(1)}(x, y) = O(x^{(n-1)/k \xi^{-1}}) + O(x^{(n-1)/k} (\xi x^{-1/k})^s) +$$

$$+ O\left(\sum_{b_1^k \leq x} \min\left(\frac{1}{b_1}, \frac{\xi^s}{b_1^{s+1}}\right) |S_{k,n}(x, y)|\right).$$

Die Abschätzung der Summe (11) und damit von (12) erfolgt in zwei Hauptschritten. Der erste Hauptschritt wird mit Hilfe von Lemma 3 durchgeführt, der zweite Hauptschritt zerfällt in $n - 2$ gleichartige Teilschritte in einer vereinfachten Anwendung von Lemma 3.

1. Hauptschritt:

$$S_{k,n}(x, y) = \sum_2 \sum_3 e(-b_1(x - A_{n-2} - a_{n-1}^k)^{1/k}) + O(x^{(n-2)/k}),$$

$$\text{SB}(\sum_2) : y < a_1^k \leq a_2^k \leq \dots \leq a_{n-2}^k \leq \frac{x - A_{n-3}}{3},$$

$$\text{SB}(\sum_3) : a_{n-2}^k < a_{n-1}^k \leq \frac{x - A_{n-2}}{2}.$$

$$(13) S_{k,n}(x, y) = \sum_2 \{ \sum_4 \sum_5 + \sum_6 \} e(-b_1(x - A_{n-2} - a_{n-1}^k)^{1/k}) + O(x^{(n-2)/k}),$$

$$\text{SB}(\sum_4) : 2^k \leq 2^{vk} \leq \frac{x - A_{n-2}}{2a_{n-2}^k},$$

$$\text{SB}(\sum_5) : 2^{v-1}a_{n-2} < a_{n-1} \leq 2^v a_{n-2},$$

$$\text{SB}(\sum_6) : 2^N a_{n-2} < a_{n-1} \leq \left(\frac{x - A_{n-2}}{2} \right)^{1/k},$$

$$N = \left[\frac{1}{\log 2} \log \frac{\left(\frac{x - A_{n-2}}{2} \right)^{1/k}}{a_{n-2}} \right].$$

Die Summen \sum_5 und \sum_6 werden jetzt unter Benutzung von Lemma 3 abgeschätzt. Das kann in der gleichen Rechnung geschehen. Mit den Bezeichnungen von Lemma 3 werden die Voraussetzungen (A) und (C) zunächst überprüft: In \sum_5 ist

$$b - a = 2^{v-1}a_{n-2}$$

und in \sum_6

$$b - a \leq 2^N a_{n-2},$$

so daß man mit $v \leq N + 1$

$$2^{v-1}a_{n-2} = U$$

setzen kann. Ferner ist

$$f(t) = -b_1(x - A_{n-2} - t^k)^{1/k},$$

$$f'(t) = b_1 t^{k-1} (x - A_{n-2} - t^k)^{1/k-2},$$

$$f''(t) = b_1(k-1)(x - A_{n-2}) t^{k-2} (x - A_{n-2} - t^k)^{1/k-2},$$

$$f'''(t) = b_1(k-1)(x - A_{n-2}) t^{k-3} (x - A_{n-2} - t^k)^{1/k-3} \cdot \{(k-2)(x - A_{n-2}) + (k+1)t^k\}.$$

Aus

$$f''(t) = O(b_1 x^{1/k-1} (2^v a_{n-2})^{k-2})$$

folgt, daß man

$$A = \frac{1}{b_1} x^{1-1/k} (2^v a_{n-2})^{2-k}$$

setzen kann. Wegen $b_1^k \leq x$ ist $A \gg 1$, und wegen $2^{vk} a_{n-2}^k \geq a_1^k > y \geq x^{1-1/k}$ ist $A \ll U^2$. Damit ist die Voraussetzung (A) erfüllt. Auch die Voraussetzung (C) ist erfüllt, da

$$f'''(t) \ll b_1 x^{1/k-1} (2^v a_{n-2})^{k-3} = \frac{1}{AU}.$$

In Lemma 3 ist $\varphi(t) \equiv 1$, $H = 1$. Aus $f'(t_{b_2}) = b_2$ errechnet sich t_{b_2} zu

$$t_{b_2} = b_2^{1/(k-1)} B_2^{-1/k} (x - A_{n-2})^{1/k}.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} f(t_{b_2}) - b_2 t_{b_2} &= -B_2^{1-1/k} (x - A_{n-2})^{1/k}, \\ f''(t_{b_2}) &= (k-1) b_1^{-2} (b_1 b_2)^{(k-2)/(k-1)} B_2^{1+1/k} (x - A_{n-2})^{-1/k}. \end{aligned}$$

Für die Summationsgrenzen benötigt man

$$f'(2^v a_{n-2}) = b_1 (2^v a_{n-2})^{k-1} (x - A_{n-2} - 2^{vk} a_{n-2}^k)^{1/k-1}.$$

Die in Lemma 3 vorkommende Größe T_q mit $q = 2^v a_{n-2}$ ist durch

$$(14) \quad T_q = R_v = \min \left\{ \frac{1}{\sqrt{b_1}} x^{1/2-1/2k} (2^v a_{n-2})^{1-k/2}, \frac{1}{|f'(2^v a_{n-2}) - [f'(2^v a_{n-2})]|} \right\}$$

gegeben.

In Anwendung von Lemma 3 stellt sich schließlich (13) in folgender Gestalt dar:

$$(15) \quad S_{k,n}(x, y) = \frac{e^{\pi i/4} b_1}{\sqrt{(k-1)}} \sum_2 \sum_7 (b_1 b_2)^{(2-k)/2(k-1)} B_2^{-1/2-1/2k} (x - A_{n-2})^{1/2k}.$$

$$\cdot e^{-B_2^{1-1/k} (x - A_{n-2})^{1/k}} + \sum_8 \sum_9 O(R_v) + O(x^{(n-2)/k} \log^2 x),$$

$$\text{SB}(\sum_7) : b_1 a_{n-2}^{k-1} (x - A_{n-2} - a_{n-2}^k)^{1/k-1} \leq b_2 \leq b_1,$$

$$\text{SB}(\sum_8) : 2 \leq 2^v \ll \left(\frac{x}{y}\right)^{1/k},$$

$$\text{SB}(\sum_9) : y < a_1^k < a_2^k < \dots < a_{n-2}^k \leq \frac{x - A_{n-3}}{2^{(v+1)k} + 1}.$$

Zur Abschätzung der noch verbleibenden Summe über $O(R_v)$ kann man zunächst die Summe

$$\sum_{10} O(R_v), \quad \text{SB}(\sum_{10}) : a_{n-3}^k < a_{n-2}^k \leq \frac{x - A_{n-3}}{2^{(v+1)k} + 1}$$

in $O(b_1)$ Teilsommen zerlegen, wobei in jeder Teilsomme

$$a_{n-3} \leq m < g(t) \leq m + 1,$$

$$g(t) = b_1(2^v t)^{k-1} (x - A_{n-3} - (2^{vk} + 1) t^k)^{1/k-1}$$

ist. Jede derartige Teilsomme ist nach (14)

$$O\left(\frac{1}{\sqrt{b_1}} x^{1/2-1/2k} (2^v a_{n-3})^{1-k/2}\right) + O\left(\frac{1}{b_1} \sum y^{-1} g'^{-1}(a_{n-3})\right),$$

wobei in der Summe y von 1 bis $O(g'^{-1}(a_{n-3}))$ läuft, und daher

$$O\left(\frac{1}{\sqrt{b_1}} x^{1/2-1/2k} (2^v a_{n-3})^{1-k/2}\right) + O\left(\frac{1}{b_1} \left(\frac{x}{2^{vk}}\right)^{1-1/k} a_{n-3}^{2-k} \log x\right).$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} & \sum_8 \sum_9 O(R_v) = \\ & = \sum_8 \sum_{11} \left\{ O(\sqrt{b_1} x^{1/2-1/2k} (2^v a_{n-3})^{1-k/2}) + O\left(\left(\frac{x}{2^{vk}}\right)^{1-1/k} a_{n-3}^{2-k} \log x\right) \right\}, \end{aligned}$$

$$SB(\sum_{11}) : y < a_1^k < a_2^k < \dots < a_{n-3}^k \ll x$$

und

$$\sum_8 \sum_9 O(R_v) = \sum_{11} \left\{ O(\sqrt{b_1} x^{1/2-1/2k} a_{n-3}^{1-k/2} \log x) + O(x^{1-1/k} a_{n-3}^{2-k} \log x) \right\}.$$

Wegen $b_1^k \leq x$, $a_{n-3}^k \ll x$ ist

$$\begin{aligned} \sum_8 \sum_9 O(R_v) & = \sum_{11} O(x^{1-1/k} a_{n-3}^{2-k} \log x) = \\ & = \begin{cases} O(y^{(n-1)/k-1} x^{1-1/k} \log x) & \text{für } k \geq n \\ O(x^{(n-2)/k} \log^2 x) & \text{für } k < n. \end{cases} \end{aligned}$$

Hiermit ergibt sich für (15)

$$(16) \quad S_{k,n}(x, y) = \frac{e^{\pi i/4} b_1}{\sqrt{(k-1)}} \sum_2 \sum_7 (b_1 b_2)^{(2-k)/2(k-1)} B_2^{-1/2-1/2k} (x - A_{n-2})^{1/2k} \cdot \\ \cdot e^{-(B_2^{1-1/k} (x - A_{n-2})^{1/k})} + \begin{cases} O(y^{(n-1)/k-1} x^{1-1/k} \log x) & \text{für } k \geq n \\ O(x^{(n-2)/k} \log^2 x) & \text{für } k < n. \end{cases}$$

2. Hauptschritt:

Wie schon erwähnt, zerfällt der zweite Hauptschritt in $n-2$ Teilschritte gleicher Art. Wieder kommt Lemma 3 in Anwendung, aber gegenüber dem ersten Hauptschritt in vereinfachter Form. Es erübrigt sich, die in Rede stehende Summe noch in Teilsommen aufzuspalten, und für T_q wird die einfache Abschätzung $T_q = O(\sqrt{A})$

benutzt. Bei einem solchen Teilschritt hat man von folgender Entwicklung auszugehen:

$$(17) \quad S_{k,n}(x, y) = \frac{e^{\pi i(v-1)/4} b_1}{(k-1)^{(v-1)/2}} \sum_{12} \sum'_{13} (b_1 b_2 \dots b_v)^{(2-k)/2(k-1)} \cdot \\ \cdot B_v^{-1/2-(v-1)/2k} \cdot (x - A_{n-v})^{(v-1)/2k} e(-B_v^{1-1/k}(x - A_{n-v})^{1/k}) + \\ + \begin{cases} O(y^{(n-1)/k-1} x^{1-1/k} \log x) & \text{für } k \geq n \\ O(x^{(n-2)/k} \log^2 x) & \text{für } k < n, \end{cases}$$

$$v = 2, 3, \dots, n-1, n,$$

$$\text{SB}(\sum_{12}) : y < a_1^k < a_2^k < \dots < a_{n-v}^k \leq \frac{x - A_{n-v-1}}{v+1},$$

$$\text{SB}(\sum_{13}) : B_{v-1}^{1-1/k} a_{n-v}^{k-1} (x - A_{n-v} - a_{n-v}^k)^{1/k-1} \leq b_v \leq b_{v-1} \leq \dots \leq b_1.$$

Für $v = n$ entfällt \sum_{12} , und es ist $A_0 = 0$, $a_0^k = y$ zu setzen. Für $v = 2$ ist (16) in (17) enthalten. Nun kann (17) für beliebige v durch Induktion bestätigt werden. Zunächst wird in der Summe \sum_{12} die Summe über a_{n-v} abgespalten und mit der Summe \sum_{13} vertauscht:

$$(18) \quad S_{k,n}(x, y) = \frac{e^{\pi i(v-1)/4} b_1}{(k-1)^{(v-1)/2}} \sum_{14} \sum'_{15} (b_1 b_2 \dots b_v)^{(2-k)/2(k-1)} \cdot B_v^{-1/2-(v-1)/2k} \cdot \\ \cdot \sum_{16} (x - A_{n-v-1} - a_{n-v}^k)^{(v-1)/2k} e(-B_v^{1-1/k}(x - A_{n-v-1} - a_{n-v}^k)^{1/k}) + \\ + \begin{cases} O(y^{(n-1)/k-1} x^{1-1/k} \log x) & \text{für } k \geq n \\ O(x^{(n-2)/k} \log^2 x) & \text{für } k < n, \end{cases}$$

$$\text{SB}(\sum_{14}) : y < a_1^k < a_2^k < \dots < a_{n-v-1}^k < \frac{x - A_{n-v-2}}{v+2},$$

$$\text{SB}(\sum_{15}) : B_{v-1}^{1-1/k} a_{n-v-1}^{k-1} (x - A_{n-v-1} - 2a_{n-v-1}^k)^{1/k-1} \leq b_v \leq b_{v-1} \leq \dots \leq b_1,$$

$$\text{SB}(\sum_{16}) : a_{n-v-1}^k < a_{n-v}^k \leq \frac{b_v^{k/(k-1)} (x - A_{n-v-1})}{B_v + b_v^{k/(k-1)}}.$$

Jetzt wird auf \sum_{16} Lemma 3 angewandt. In der Bezeichnungweise von Lemma 3 ist hier:

$$f(t) = -B_v^{1-1/k} (x - A_{n-v-1} - t^k)^{1/k}, \quad \varphi(t) = (x - A_{n-v-1} - t^k)^{(v-1)/2k}, \\ A = B_v^{1/k-1} (x - A_{n-v-1})^{1/k}, \quad U = (x - A_{n-v-1})^{1/k}, \quad H = (x - A_{n-v-1})^{1/2k}.$$

Aus $f'(t_{b_{v+1}}) = b_{v+1}$ folgt

$$t_{b_{v+1}} = b_{v+1}^{1/(k-1)} B_{v+1}^{-1/k} (x - A_{n-v-1})^{1/k},$$

$$\begin{aligned}
f(t_{b_{v+1}}) - b_{v+1}t_{b_{v+1}} &= -B_{v+1}^{1-1/k}(x - A_{n-v-1})^{1/k}, \\
f''(t_{b_{v+1}}) &= (k-1)b_{v+1}^{(k-2)/(k-1)}B_v^{-1}B_{v+1}^{1+1/k}(x - A_{n-v-1})^{-1/k}, \\
\varphi(t_{b_{v+1}}) &= B_v^{(v-1)/2k}B_{v+1}^{-(v-1)/2k}(x - A_{n-v-1})^{(v-1)/2k}.
\end{aligned}$$

Die Summationsgrenzen bestimmen sich zu

$$\begin{aligned}
f'(a_{n-v-1}) &= B_v^{1-1/k}a_{n-v-1}^{k-1}(x - A_{n-v-1} - a_{n-v-1}^k)^{1/k-1}, \\
f' \left(\frac{b_v^{k/(k-1)}(x - A_{n-v-1})}{B_v + b_v^{k/(k-1)}} \right) &= b_v.
\end{aligned}$$

Lemma 3 liefert jetzt sofort (17) mit $v+1$ statt v .

Abschließend wird die für $v=n$ in (17) noch verbleibende Summe trivial abgeschätzt:

$$S_{k,n}(x, y) = O(x^{(n-1)/2k}b_1^{(n-1)/2}) + \begin{cases} O(y^{(n-1)/k-1}x^{1-1/k} \log x) & \text{für } k \geq n \\ O(x^{(n-2)/k} \log^2 x) & \text{für } k < n. \end{cases}$$

Durch Einsetzen in (12) mit $s = (n-1)/2$ wird

$$\begin{aligned}
A_{k,n}^{(1)}(x, y) &= O(x^{(n-1)/k}\xi^{-1}) + O(x^{(n-1)/k}\xi^{(n-1)/2} \log x) + \\
&+ \begin{cases} O(y^{(n-1)/k-1}x^{1-1/k} \log x) & \text{für } k \geq n \\ O(x^{(n-2)/k} \log^2 x) & \text{für } k < n. \end{cases}
\end{aligned}$$

Mit $\xi = x^{(n-1)/(k(n+1))}$ folgt daraus die Behauptung (10) des Hilfssatzes 2.

4. ABSCHÄTZUNG VON $A_{k,n}^{(2)}(x, y)$

Die Abschätzung von $A_{k,n}^{(2)}(x, y)$ beruht auf Hilfssatz 1, der Formel

$$(19) \quad \int_0^x (x-t)^{\mu-1} \psi_v^{(k)}(t^{1/k}) dt = \frac{\Gamma(\mu)\Gamma\left(v+1-\frac{1}{k}\right)}{\Gamma\left(\mu+v+1-\frac{1}{k}\right)} \psi_{v+\mu}^{(k)}(x^{1/k})$$

für $\operatorname{Re}(\mu) > 0$, $\operatorname{Re}(v) > 1/k - 1$ (Hilfssatz 3 aus [1]) und dem folgenden Lemma.

Lemma 4. Für die Funktion $\psi(x) = x - [x] - \frac{1}{2}$ und die durch (2) definierten Funktionen $\psi_v^{(k)}(x)$ gilt für $y \leq \frac{1}{2}x$

$$(20) \quad \sum'_{n^k \leq y} \psi((x - n^k)^{1/k}) = -\frac{1}{2} \psi_{2/k}^{(k)}(x^{1/k}) + \sum_{x-y < n^k \leq x} \psi((x - n^k)^{1/k}) + O\left(\left(\frac{x}{y}\right)^{1-1/k}\right),$$

$$(21) \quad \sum'_{n^k \leq y} \psi_{v/k}^{(k)}((x - n^k)^{1/k}) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{k}\right) \Gamma\left(\frac{v-1}{k} + 1\right)}{k \Gamma\left(\frac{v}{k} + 1\right)} \psi_{(v+1)/k}^{(k)}(x^{1/k}) + \\ + \sum_{x-y < n^k \leq x} \psi_{v/k}^{(k)}((x - n^k)^{1/k}) + O\left(x^{(v-1)/k} \left(\frac{x}{y}\right)^{1-1/k}\right) (v > 1).$$

Bemerkung. Die Funktion $-\frac{1}{2}\psi_{1/k}^{(k)}(x)$ stellt die Fourier-Entwicklung von $\psi(x)$ dar; so daß für nicht-ganzzahliges x die Entwicklung (20) mit $v = 1$ in (21) enthalten ist.

Folgerung aus Lemma 4. Schätzt man die in (20) und (21) noch rechts vorkommenden Summen mit Hilfe von (3) ab, so gilt für $x^{1-1/k} \leq y \leq \frac{1}{2}x$

$$(22) \quad \sum'_{n^k \leq y} \psi((x - n^k)^{1/k}) = -\frac{1}{2}\psi_{2/k}^{(k)}(x^{1/k}) + O(x^{1/k-1}y) + O\left(\left(\frac{x}{y}\right)^{1-1/k}\right),$$

$$(23) \quad \sum'_{n^k \leq y} \psi_{v/k}^{(k)}((x - n^k)^{1/k}) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{k}\right) \Gamma\left(\frac{v-1}{k} + 1\right)}{k \Gamma\left(\frac{v}{k} + 1\right)} \psi_{(v+1)/k}^{(k)}(x^{1/k}) + \\ + O(x^{(v-1)/k(1-1/k)+1/k-1}y) + O\left(x^{(v-1)/k} \left(\frac{x}{y}\right)^{1-1/k}\right).$$

Beweis von (20). Nach der Euler-Maclaurinschen Summenformel ist

$$\sum'_{n^k \leq y} \psi((x - n^k)^{1/k}) = -\sum'_1 1 + \int_0^{y^{1/k}} (x - t^k)^{1/k} dt - (x - y)^{1/k} \psi(y^{1/k}) - \\ - \int_0^{y^{1/k}} (x - t^k)^{1/k-1} t^{k-1} \psi(t) dt,$$

$$SB(\sum_1) : n^k + m^k \leq x; \quad n, m \geq 0; \quad n^k \leq y.$$

In der Summe \sum_1 wird zunächst die Summation über n ausgeführt und das letzte Integral durch partielle Integration abgeschätzt:

$$\sum'_{n^k \leq y} \psi((x - n^k)^{1/k}) = - \sum'_{m^k \leq x-y} \{y^{1/k} - \psi(y^{1/k})\} - \sum'_{x-y < m^k \leq x} \{(x - m^k) - \\ - \psi((x - m^k)^{1/k})\} + \int_0^{y^{1/k}} (x - t^k)^{1/k} dt + O(1)$$

$$\begin{aligned}
&= -(x-y)^{1/k} y^{1/k} + \int_0^{y^{1/k}} (x-t^k)^{1/k} dt - \int_{(x-y)^{1/k}}^{x^{1/k}} (x-t^k)^{1/k} dt + \\
&\quad + \int_{(x-y)^{1/k}}^{x^{1/k}} (x-t^k)^{1/k-1} t^{k-1} \psi(t) dt + \\
&\quad + \sum_{x-y < m^k \leq x} \psi((x-m^k)^{1/k}) + O(1) \\
&= \frac{1}{k} \int_0^x (x-t)^{1/k-1} \psi(t^{1/k}) dt + \\
&\quad + \sum_{x-y < m^k \leq x} \psi((x-m^k)^{1/k}) + O\left(\left(\frac{x}{y}\right)^{1-1/k}\right).
\end{aligned}$$

Bei Benutzung von (19) folgt daraus (20).

Beweis von (21). Nach (19) ist mit $v > 1$

$$\begin{aligned}
\sum'_{n^k \leq y} \psi_{v/k}^{(k)}((x-n^k)^{1/k}) &= \frac{v-1}{k} \sum'_{n^k \leq y} \int_0^{x-n^k} (x-n^k-t)^{(v-1)/k-1} \psi_{1/k}^{(k)}(t^{1/k}) dt = \\
&= -2(v-1) \int_0^{(x-y)^{1/k}} t^{v-2} \sum'_{n^k \leq y} \psi((x-t^k-n^k)^{1/k}) dt - \\
&\quad - 2(v-1) \sum'_{n^k \leq y} \int_0^{(y-n^k)^{1/k}} (x-n^k-t^k)^{(v-1)/k-1} t^{k-1} \psi(t) dt.
\end{aligned}$$

Für die Summe unter dem ersten Integral wird (20) eingesetzt, und die zweite Summe wird durch partielle Integration des Integrals abgeschätzt.

$$\begin{aligned}
\sum'_{n^k \leq y} \psi_{v/k}^{(k)}((x-n^k)^{1/k}) &= (v-1) \int_0^{(x-y)^{1/k}} t^{v-2} \left\{ \psi_{2/k}^{(k)}((x-t^k)^{1/k}) - \right. \\
&\quad \left. - \sum'_4 \psi((x-t^k-m^k)^{1/k}) + O\left(\left(\frac{x}{y}\right)^{1-1/k}\right) \right\} dt + O(x^{(v-1)/k}),
\end{aligned}$$

$$\text{SB}(\sum_4) : x-y-t^k < m^k \leq x-t^k.$$

Durch Vertausch von Integration und \sum_4 ergibt sich

$$\begin{aligned}
\sum'_{n^k \leq y} \psi_{v/k}^{(k)}((x-n^k)^{1/k}) &= \frac{v-1}{k} \int_y^x (x-t)^{(v-1)/k-1} \psi_{2/k}^{(k)}(t^{1/k}) dt + \\
&+ O\left(x^{(v-1)/k} \left(\frac{x}{y}\right)^{1-1/k}\right) - \frac{2(v-1)}{k} \left\{ \sum_{y < m^k \leq x-y} \int_0^y + \sum_{x-y < m^k \leq x} \int_0^{x-m^k} \right. \\
&\quad \left. + \sum'_{m^k \leq y} \int_{y-m^k}^y \right\} (x-m^k-t)^{(v-1)/k-1} \psi(t^{1/k}) dt.
\end{aligned}$$

Durch Anwendung von (19) und partielle Integration ergibt sich (21).

Hilfssatz 3. Mit $y = x^\alpha$, $\alpha > 1 - 1/k + \varepsilon > 1 - 1/k$ ist

$$(24) \quad \Delta_{k,n}^{(2)}(x, y) = \sum_{v=2}^{n-1} O(x^{v(v-1)/k(v+1)+(n-v)\alpha/k} \log^2 x) + O(x^{(n-1)\alpha/k})$$

für $n > k$,

$$(25) \quad \Delta_{k,n}^{(2)}(x, y) = nV_{k,n-1} \psi_{n/k}^{(k)}(x^{1/k}) + \sum_{v=2}^{n-1} O(x^{v(v-1)/k(v+1)+(n-v)\alpha/k} \log^2 x) + O(x^{(n-1)\alpha/k - \alpha + 1 - 1/k} \log^2 x) + O(x^{(n-2)\alpha/k + \alpha - 1 + 1/k})$$

für $n \leq k$.

Beweis. Nach (9) ist

$$\Delta_{k,n}^{(2)}(x, y) = -2^n n! \sum_5 \psi((x - A_{n-1})^{1/k}),$$

$$\text{SB}(\sum_5) : 0 \leq a_1^k \leq a_2^k \leq \dots \leq a_{n-1}^k \leq \frac{x - A_{n-2}}{2}, \quad a_1^k \leq y = x^\alpha,$$

$$\Delta_{k,n}^{(2)}(x, y) = -2^n n! \{ \sum_6 + \sum_{a_1^k \leq x^\alpha} \sum_7 \} \psi((x - A_{n-1})^{1/k}),$$

$$\text{SB}(\sum_6) : 0 \leq a_1^k \leq a_2^k \leq \dots \leq a_{n-1}^k \leq \frac{x - A_{n-2}}{2}, \quad a_2^k \leq x^\alpha,$$

$$\text{SB}(\sum_7) : x^\alpha < a_2^k \leq a_3^k \leq \dots \leq \frac{x - A_{n-2}}{2},$$

$$\Delta_{k,n}^{(2)}(x, y) = -2^n n! \{ \sum_6 - \sum_{a_1^k \leq x^\alpha} \sum_8 + \sum_{a_1^k \leq x^\alpha} \sum_9 \} \psi((x - A_{n-1})^{1/k}),$$

$$\text{SB}(\sum_8) : (x - a_1^k)^\alpha < a_2^k \leq x^\alpha < a_3^k \leq a_4^k \leq \dots \leq a_{n-1}^k \leq \frac{x - A_{n-2}}{2},$$

$$\text{SB}(\sum_9) : (x - a_1^k)^\alpha < a_2^k \leq a_3^k \leq \dots \leq a_{n-1}^k \leq \frac{x - A_{n-2}}{2}.$$

Die Summe \sum_9 wird mit Hilfssatz 2 abgeschätzt, der hier in der Form

$$(26) \quad \Delta_{k,n}^{(1)}(x, y) = O(x^{n(n-1)/k(n+1)} \log x) + \delta_{k,n}(x, y)$$

mit

$$\delta_{k,n}(x, y) = \begin{cases} O(y^{(n-1)k-1} x^{1-1/k} \log^2 x) & \text{für } k \geq n \\ 0 & \text{für } k < n \end{cases}$$

benutzt wird. Verwendet man (26) mit $n - 1$ statt n und mit $y = (x - a_1^k)^\alpha$, so wird

$$\Delta_{k,n}^{(2)}(x, y) = -2^n n! \{ \sum_6 - \sum_{a_1^k \leq x^\alpha} \sum_8 \} \psi((x - A_{n-1})^{1/k}) + (x^{(n-1)(n-2)/kn + \alpha/k}) + (x^{\alpha/k} \delta_{k,n-1}(x, x^\alpha)).$$

Weiter ist

$$A_{k,n}^{(2)}(x, y) = -2^n n! \left\{ \sum_6 - \sum_{a_1^k \leq x^\alpha} \sum_{10} \sum_{11} + \sum_{a_1^k \leq x^\alpha} \sum_{10} \sum_{12} \right\} \psi((x - A_{n-1})^{1/k}),$$

$$\text{SB}(\sum_{10}) : (x - a_1^k)^\alpha < a_2^k \leq x^\alpha,$$

$$\text{SB}(\sum_{11}) : (x - a_1^k - a_2^k)^\alpha < a_3^k \leq a_4^k \leq \dots \leq a_{n-1}^k \leq \frac{x - A_{n-2}}{2},$$

$$\text{SB}(\sum_{12}) : (x - a_1^k - a_2^k)^\alpha < a_3^k \leq x^\alpha < a_4^k \leq \dots \leq a_{n-1}^k \leq \frac{x - A_{n-2}}{2}.$$

Jetzt wird \sum_{11} mit (26) abgeschätzt, indem man in (26) n durch $n - 2$ ersetzt und $y = (x - a_1^k - a_2^k)^\alpha$ setzt. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} A_{k,n}^{(2)}(x, y) &= -2^n n! \left\{ \sum_6 + \sum_{a_1^k \leq x^\alpha} \sum_{10} \sum_{12} \right\} \psi((x - A_{n-1})^{1/k}) + \\ &+ O(x^{(n-1)(n-2)/kn + \alpha/k}) + O(x^{(n-2)(n-3)/k(n-1) + 2\alpha/k}) + \\ &+ O(x^{\alpha/k} \delta_{k,n-1}(x, x^\alpha)) + O(x^{2\alpha/k} \delta_{k,n-2}(x, x^\alpha)). \end{aligned}$$

Ganz analog werden \sum_{12} und alle weiteren Summen behandelt, so daß man

$$\begin{aligned} A_{k,n}^{(2)}(x, y) &= -2^n n! \sum_6 \psi((x - A_{n-1})^{1/k}) + \\ &+ \sum_{v=2}^{n-1} O(x^{v(v-1)/k(v+1) + (n-v)\alpha/k} \log^2 x) + \sum_{v=2}^{n-1} O(x^{(n-v)\alpha/k} \delta_{k,v}(x, x^\alpha)) \end{aligned}$$

erhält.

Vergleicht man jetzt \sum_6 mit \sum_5 , so sieht man, daß die Bedingung $a^k \leq x^\alpha$ von $v = 1$ auf $v = 2$ verschoben wurde. Also verfährt man mit \sum_6 und mit den entsprechenden folgenden Summen genauso wie mit \sum_5 bis

$$\begin{aligned} (27) \quad A_{k,n}^{(2)}(x, y) &= -2^n n! \sum_{13} \psi((x - A_{n-1})^{1/k}) + \\ &+ \sum_{v=2}^{n-1} O(x^{v(v-1)/k(v+1) + (n-v)\alpha/k} \log^2 x) + O(x^{1-1/k + ((n-1)/k-1)\alpha} \log^2 x), \\ \text{SB}(\sum_{13}) &: a_1^k \leq a_2^k \leq \dots \leq a_{n-1}^k \leq x^\alpha. \end{aligned}$$

Für $n > k$ wird \sum_{13} trivial abgeschätzt, und man erhält (24). Für $n \geq k$ wird \sum_{13} mit Hilfe von Lemma 4 entwickelt:

$$\begin{aligned} -2^n n! \sum_{13} \psi((x - A_{n-1})^{1/k}) &= -2^n n \sum_{a_1^k \leq x^\alpha} \sum_{a_2^k \leq x^\alpha} \dots \sum_{a_{n-1}^k \leq x^\alpha} \psi((x - A_{n-1})^{1/k}) = \\ &= -2^n n \sum_{a_1^k \leq x^\alpha} \dots \sum_{a_{n-2}^k \leq x^\alpha} \sum_{14} \psi((x - A_{n-1})^{1/k}) + O(x^{(n-1)\alpha/k + \alpha - 1}), \\ \text{SB}(\sum_{14}) &: (x - A_{n-2})^\alpha < a_{n-1}^k \leq x^\alpha. \end{aligned}$$

Wendet man auf \sum_{14} (22) an, so folgt

$$\begin{aligned} & -2^n n! \sum_{13} \psi((x - A_{n-1})^{1/k}) = \\ & = 2^{n-1} n \sum_{a_1 k \leq x^\alpha} \dots \sum_{a_{n-2} k \leq x^\alpha} \psi_{2/k}^{(k)}((x - A_{n-2})^{1/k}) + O(x^{(n-k)\alpha/k + \alpha - 1 + 1/k}) + \\ & \quad + O(x^{(n-2)\alpha/k + (1-1/k)(1-\alpha)}). \end{aligned}$$

Durch wiederholte Anwendung derselben Schlußweise und von (23) ergibt sich

$$(28) \quad \begin{aligned} & -2^n n! \sum_{13} \psi((x - A_{n-1})^{1/k}) = nV_{k,n-1} \psi_{n/k}^{(k)}(x^{1/k}) + \\ & \quad + O(x^{(n-2)\alpha/k + \alpha - 1 + 1/k}) + O(x^{(n-2)\alpha/k + (1-1/k)(1-\alpha)}). \end{aligned}$$

(27) und (28) ergeben zusammen (25).

5. BEWEIS DES SATZES

Es ist ein optimales α in der Abschätzung von

$$\Delta_{k,n}(x) = \Delta_{k,n}^{(1)}(x, y) + \Delta_{k,n}^{(2)}(x, y)$$

anzugeben.

I. $n > k$:

Nach (10) und (24) ist

$$\begin{aligned} \Delta_{k,n}(x) & = O(x^{n(n-1)/k(n+1)} \log x) + O(x^{(n-1)\alpha/k}) + \\ & \quad + \sum_{v=2}^{n-1} O(x^{v(v-1)/k(v+1) + (n-v)\alpha/k} \log^2 x). \end{aligned}$$

Mit $\alpha = 1 - 1/n$ folgt daraus

$$\Delta_{k,n}(x) = O(x^{n(n-1)/k(n+1)} \log x).$$

II. $n \leq k$:

Nach (10) und (25) ist

$$\begin{aligned} \Delta_{k,n}(x) & = nV_{k,n-1} \psi_{n/k}^{(k)}(x^{1/k}) + \\ & \quad + \sum_{v=2}^{n-1} O(x^{v(v-1)/k(v+1) + (n-v)\alpha/k} \log^2 x) + \\ & \quad + O(x^{n(n-1)/k(n+1)} \log x) + O(x^{(n-1)\alpha/k - \alpha + 1 - 1/k} \log^2 x) + O(x^{(n-2)\alpha/k + \alpha - 1 + 1/k}). \end{aligned}$$

Bestimmt man α aus

$$\frac{n-1}{k} \alpha - \alpha + 1 - \frac{1}{k} = \frac{2}{3k} + \frac{n-2}{k} \alpha,$$

so wird

$$\alpha = \frac{3k - 5}{3(k - 1)}$$

und

$$\frac{n-1}{k} \alpha - \alpha + 1 - \frac{1}{k} = \frac{(3n-4)k - 5n + 8}{3k(k-1)}.$$

Für $n \leq k$ ist

$$\frac{(3n-4)k - 5n + 8}{3k(k-1)} < \frac{n-1}{k} \left(1 - \frac{1}{k}\right).$$

Es ist

$$\frac{n-2}{k} \alpha + \alpha - 1 + \frac{1}{k} = \frac{(3n-5)k - 5n + 7}{3k(k-1)} < \frac{(3n-4)k - 5n + 8}{3k(k-1)}$$

und

$$\frac{v(v-1)}{k(v+1)} + (n-v) \frac{\alpha}{k} \leq \frac{(3n-4)k - 5n + 8}{3k(k-1)}$$

für $2 \leq v \leq k-2$, daß heißt für $n \leq k-2$. Für $n = k, k-1$ ist

$$\frac{n(n-1)}{k(n+1)} > \frac{(3n-4)k - 5n + 8}{3k(k-1)}.$$

Und daraus folgt die Behauptung des Satzes.

Literatur

- [1] E. Krätzel, Identitäten für die Anzahl der Gitterpunkte in bestimmten Bereichen, Math. Nachr. 36 181–191 (1968).
- [2] E. Krätzel, Bemerkungen zu einem Gitterpunktsproblem, Math. Ann. 179, 90–96 (1969).
- [3] B. Randol, A lattice-point problem II, Trans. Amer. Math. Soc. 177, 102–113 (1967).
- [4] I. M. Vinogradov, Über die Anzahl der Gitterpunkte in einer Kugel (russ.), Izv. Akad. Nauk. SSSR Ser. Mat. 27, 957–968 (1963).

Anschrift des Verfassers: Sektion Mathematik der Friedrich-Schiller-Universität Jena, 69 Jena, Helmholtzweg 1, DDR.