BULLETIN DE LA S. M. F.

JACQUES DIXMIER
ADRIEN DOUADY

Champs continus d'espaces hilbertiens et de C^*-algèbres

Bulletin de la S. M. F., tome 91 (1963), p. 227-284
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1963__91__227_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1963, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Bull. Soc. math. France,
91, 1963, p. 227 à 284.

CHAMPS CONTINUS D'ESPACES HILBERTIENS ET DE C^*-ALGÈBRES

PAR

JACQUES DIXMIER ET ADRIEN DOUADY.

Dans [6], R. GODEMENT a défini la notion de champ continu d'espaces hilbertiens, et posé le problème suivant (qu'il attribue à A. WEIL) : existe-t-il des espaces topologiques sur lesquels tout champ continu est trivial ? C'est principalement ce problème que nous étudions au chapitre II du présent article. Les résultats, aussi bien positifs que négatifs, sont pour la plupart en contraste frappant avec les résultats connus sur les espaces fibrés vectoriels de rang fini. Le résultat le plus inattendu est sans doute le théorème 5, qui repose de façon essentielle sur un théorème de E. MICHAEL [15].

Au chapitre III, nous appliquons les résultats du chapitre II et quelques méthodes cohomologiques à la classification des C^*-algèbres. Nous obtenons notamment des théorèmes assez précis concernant les C^*-algèbres à trace continue introduites par J. M. G. FELL [5].

Au chapitre I sont groupées quelques propositions faciles concernant les champs continus d'espaces de Banach. Certaines de ces propositions sont utiles à la fois aux chapitres II et III. Pour la clarté de l'exposition, on a détaillé les démonstrations de certains résultats connus (prop. 1, 2, 3, 6 et 7).

Notations. — On désigne par **Z** l'ensemble des entiers rationnels, par **R** l'ensemble des nombres réels, par **C** l'ensemble des nombres complexes, par **U** l'ensemble des nombres complexes de module 1.

CHAPITRE I. — Champs continus d'espaces de Banach.

1. Définition. Sous-ensembles totaux. — Soient B un espace topologique, $\mathcal{C}(B)$ l'algèbre des fonctions continues complexes sur B. Soit $(E(z))_{z\in B}$ une famille d'espaces de Banach complexes. On appelle champ de vecteurs tout élément de $\prod_{z \in B} E(z)$, c'est-à-dire toute fonction x définie sur B et telle que $x(z) \in E(z)$ pour tout $z \in B$. Si x est un champ de vecteurs, on note $\| x \|$ la fonction $z \to \| x(z) \|$ définie sur B à valeurs dans $\mathbf{R}$. Plus généralement, si $Y \subset B$, on appelle champ de vecteurs sur Y un élément de $\prod_{z \in Y} E(z)$.

DÉFINITION 1. — *Un champ continu $\mathcal{E}$ d'espaces de Banach sur l'espace topologique B est une famille $(E(z))_{z \in B}$ d'espaces de Banach, munie d'un ensemble $\Gamma \subset \prod_{z \in B} E(z)$ de champs de vecteurs, tel que :*

(CC_{I}) : Γ *est un sous-$\mathcal{C}(B)$-module de* $\prod_{z \in B} E(z)$.

(CC_{II}) : *pour tout $z \in B$ et tout $\zeta \in E(z)$, il existe $x \in \Gamma$ tel que $x(z) = \zeta$.*

(CC_{III}) : *pour tout $x \in \Gamma$, la fonction $\| x \|$ est continue.*

(CC_{IV}) : *soit $x \in \prod_{z \in B} E(z)$ un champ de vecteurs; si, pour tout $z \in B$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $x' \in \Gamma$ tel que $\| x - x' \| \leqq \varepsilon$ sur un voisinage de z, alors $x \in \Gamma$.*

Les éléments de Γ s'appellent les *champs de vecteurs continus* de $\mathcal{E}$.
Considérons les axiomes suivants :

(CC'_{I}) : Γ *est un sous-espace vectoriel complexe de* $\prod_{z \in B} E(z)$.

(CC'_{II}) : *pour tout $z \in B$, l'ensemble des $x(z)$, où $x \in \Gamma$, est partout dense dans $E(z)$.*

(CC'_{IV}) : *soit $x \in \prod_{z \in B} E(z)$ un champ de vecteurs; si, pour tout $x' \in \Gamma$, la fonction $\| x - x' \|$ est continue, alors $x \in \Gamma$.*

On voit facilement que, dans la définition 1, on peut remplacer (CC_{IV}) par (CC'_{IV}). D'autre part, la proposition 3 montrera qu'on peut remplacer (CC_{I}) et (CC_{II}) respectivement par (CC'_{I}) et (CC'_{II}).

Soient $Y \subset B$ et $z_0 \in Y$. Un champ de vecteurs x sur Y est dit continu en z_0 si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $x' \in \Gamma$ tel que $\| x - x' \| \leqq \varepsilon$ au voisinage de z_0. Les champs de vecteurs sur Y continus en z_0 forment un module sur l'anneau des fonctions $f : Y \to \mathbf{C}$ continues en z_0. On voit qu'un champ de vecteurs x sur B est continu si et seulement si x est continu en chaque point de B.

Exemple. — Soient E un espace de Banach et Γ l'ensemble des applications continues de B dans E. Pour tout $z \in B$, posons $E(z) = E$.

Alors, $\mathcal{E} = ((E(z))_{z \in B}, \Gamma)$ est un champ continu d'espaces de Banach sur B, appelé *champ constant* sur B défini par E.

Soit $((E(z)), \Gamma)$ un champ continu d'espaces de Banach sur B. Un sous-ensemble $\Lambda \subset \Gamma$ sera dit total si, pour tout $z \in B$, l'ensemble $\Lambda(z)$ des $x(z)$ $(x \in \Lambda)$ est total dans $E(z)$, c'est-à-dire si l'espace vectoriel qu'il engendre est partout dense dans $E(z)$.

PROPOSITION 1. — *Soit $\mathcal{E} = ((E(z)), \Gamma)$ un champ continu d'espaces de Banach sur B. Soient $\Lambda \subset \Gamma$ un sous-ensemble total et $\overline{\Lambda}$ le sous-espace vectoriel complexe engendré par Λ. Pour un champ de vecteurs $x \in \prod_{z \in B} E(z)$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) $x \in \Gamma$;

(2) *pour tout $z \in B$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $x' \in \Gamma$ tel que $\| x - x' \| \leqq \varepsilon$ au voisinage de z;*

(2′) *pour tout $z \in B$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $x' \in \overline{\Lambda}$ tel que $\| x - x' \| \leqq \varepsilon$ au voisinage de z;*

(3) *pour tout $x' \in \Gamma$, la fonction $\| x - x' \|$ est continue;*

(3′) *pour tout $x' \in \overline{\Lambda}$, la fonction $\| x - x' \|$ est continue.*

(1) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (3′), (2′) $\Rightarrow$ (2) : évident.

(2) $\Rightarrow$ (1) : c'est l'axiome (CC_{IV}).

(3′) $\Rightarrow$ (2′) : supposons vérifiée la condition (3′); soient $z \in B$ et $\varepsilon > 0$; comme $\overline{\Lambda}(z)$ est partout dense dans $E(z)$, il existe $x' \in \overline{\Lambda}$ tel que $\| x(z) - x'(z) \| < \varepsilon$. La fonction $\| x - x' \|$ étant continue, l'inégalité $\| x - x' \| < \varepsilon$ aura encore lieu sur un voisinage de z. D'où la proposition.

PROPOSITION 2. — *On conserve les notations de la proposition* 1, *et l'on suppose B localement compact. Soient $x \in \Gamma$, K une partie compacte de B, et $\varepsilon > 0$. Il existe $x_1, \ldots, x_n \in \Lambda$, et $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{C}(B)$ à supports compacts, tels que $\| x - f_1 x_1 - \ldots - f_n x_n \| \leqq \varepsilon$ sur K.*

D'après la proposition 1, il existe un recouvrement ouvert $(V_1, \ldots, V_p)$ de K et des éléments $x'_1, \ldots, x'_p$ de $\overline{\Lambda}$ tels que $\| x - x'_i \| \leqq \varepsilon$ dans V_i et tels que les $\overline{V}_i$ soient compacts. Soit $(\eta_1, \ldots, \eta_{p+1})$ une partition continue de l'unité subordonnée à $(V_1, \ldots, V_p, B - K)$. On a $\| x - \eta_1 x'_1 - \ldots - \eta_p x'_p \| \leqq \varepsilon$ sur K tout entier.

PROPOSITION 3. — *Soient B un espace topologique, $(E(z))_{z \in B}$ une famille d'espaces de Banach. Soit $\Lambda \subset \prod_{z \in B} E(z)$ un sous-espace vectoriel sur $\mathbf{C}$. Supposons que :*

(T_I) : *pour tout $z \in B$, l'ensemble $\Lambda(z)$ des $x(z)$ $(x \in \Lambda)$ est partout dense dans $E(z)$;*

(T_{II}) : *pour tout* $x \in \Lambda$, *la fonction* $\| x \|$ *est continue.*

Alors il existe un sous-ensemble Γ *de* $\prod_{z \in B} E(z)$, *et un seul, satisfaisant aux axiomes* (CC_I) *à* (CC_{IV}), *et tel que* $\Gamma \supset \Lambda$, *à savoir l'ensemble des champs de vecteurs* x *vérifiant la condition* ($2'$) *de la proposition* 1. *Si de plus* Λ *vérifie* (CC_{IV}), *alors* $\Gamma = \Lambda$.

L'unicité découle de la proposition 1 : si Γ existe, ses éléments sont caractérisés par la propriété ($2'$). Considérons l'ensemble Γ des champs de vecteurs x vérifiant ($2'$). Remarquons d'abord que, si $x \in \Gamma$, x vérifie également ($3'$) : en effet, soit $x' \in \overline{\Lambda} = \Lambda$; pour tout $z_0 \in B$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $x'' \in \Lambda$ tel que $\| x - x'' \| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ au voisinage de z_0. La fonction $\| x'' - x' \|$ étant continue, on aura pour z assez voisin de z_0 :

$$\big| \| x'' - x' \| (z) - \| x'' - x' \| (z_0) \big| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

L'inégalité triangulaire donne alors

$$\big| \| x - x' \| (z) - \| x - x' \| (z_0) \big| \leq \varepsilon$$

au voisinage de z_0.

Montrons maintenant que Γ satisfait aux axiomes (CC_I) à (CC_{IV}).

(CC_I) : soient $x \in \Gamma$ et $y \in \Gamma$; pour tout $z_0 \in B$ et tout $\varepsilon > 0$, x et y peuvent être approchés à $\frac{\varepsilon}{2}$ près au voisinage de z_0 par des éléments x' et y' de Λ; $x + y$ est alors approché à ε près au voisinage de z_0 par $x' + y'$, donc $x + y \in \Gamma$.

Si $x \in \Gamma$ et $f \in \mathcal{C}(B)$, $fx \in \Gamma$. En effet, soient $z_0 \in B$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $x' \in \Lambda$ tel que

$$\| x - x' \| \leq \inf \left(\frac{\varepsilon}{2 \, | f(z_0) |}, \frac{1}{2} \right)$$

au voisinage de z_0; d'autre part

$$| f - f(z_0) | \leq \frac{\varepsilon}{2 (\| x'(z_0) \| + 1)}$$

au voisinage de z_0. On a

$$fx - f(z_0) \, x' = (f - f(z_0)) \, x + f(z_0) \, (x - x').$$

Chacun de ces deux termes est majoré en norme par $\frac{\varepsilon}{2}$ au voisinage de z_0.

(CC_{III}) : C'est un cas particulier de la propriété ($3'$).

(CC_{II}) : pour tout $z \in B$, $\Gamma(z) \supset \Lambda(z)$ est partout dense dans $E(z)$. On va montrer qu'il est complet, et pour cela que toute famille (ξ_i) d'éléments de $\Gamma(z)$ telle que $\sum \| \xi_i \| < +\infty$ est sommable dans $\Gamma(z)$. Soit (ξ_i) une telle famille : on a $\xi_i = x_i(z)$ avec $x_i \in \Gamma$. Posons

$$x'_i = \left[\sup\left(1, \frac{\| x_i \|}{\| \xi_i \|}\right)\right]^{-1} . x_i,$$

de sorte que $x'_i \in \Gamma$, $\| x'_i \| \leq \| \xi_i \|$, et $x'_i(z) = \xi_i$. La famille (x'_i) est normalement sommable et a pour somme un champ de vecteurs x car les $E(z')$ sont complets. Le champ de vecteurs x appartient à Γ; en effet, soient $z_0 \in B$ et $\varepsilon > 0$; il existe une somme partielle finie $x' = \sum_{i \in J} x'_i$ qui approche x à $\frac{\varepsilon}{2}$ près sur B; mais x' est lui-même approché à $\frac{\varepsilon}{2}$ près au voisinage de z_0 par un élément $x'' \in \Lambda$: donc $x \in \Gamma$ et $x(z)$ est somme de la famille (ξ_i).

Enfin ($CC_{I'}$) résulte immédiatement de la construction de Γ, de même que la dernière partie de la proposition.

Remarque. — Soit $((E(z)), \Gamma)$ un champ continu d'espaces de Banach sur B. Soient $x_1, \ldots, x_n \in \Gamma$ et $z_0 \in B$. Si $x_1(z_0), \ldots, x_n(z_0)$ sont linéairement indépendants, alors $x_1(z), \ldots, x_n(z)$ sont linéairement indépendants pour z assez voisin de z_0. En effet, pour $z \in B$ et $c_1, \ldots, c_n \in \mathbf{C}$, posons

$$\alpha(z, c_1, \ldots, c_n) = \left\| \sum_{i=1}^{n} c_i x_i(z) \right\|,$$

$$\beta(z) = \inf_{\sum |c_i|^2 = 1} \alpha(z, c_1, \ldots, c_n).$$

Alors α est une fonction continue sur $B \times \mathbf{C}^n$, donc β est une fonction continue sur B puisque la sphère unité de $\mathbf{C}^n$ est compacte. Or $x_1(z), \ldots, x_n(z)$ sont linéairement indépendants si et seulement si $\beta(z) > 0$.

Il résulte de là que la fonction qui, à tout point z de B, associe la dimension (finie ou $+\infty$) de $E(z)$, est semi-continue inférieurement.

Toutefois, on peut construire sur $[0, 1]$ un champ continu d'espaces hilbertiens $E(z)$ tel que $\dim E(0) > \aleph_0$, $\dim E(z) = \aleph_0$ pour $z > 0$ (il s'agit de la dimension hilbertienne).

2. **Espace fibré vectoriel défini par un champ.** — Soit $\mathcal{E} = ((E(z))_{z \in B}, \Gamma)$ un champ continu d'espaces de Banach sur B. Soit E l'ensemble somme des $E(z)$. Soit π la surjection canonique de E sur B; nous identifierons $E(z)$ et $\pi^{-1}(z)$. Pour toute partie ouverte Y

de B, pour tout $x \in \Gamma$, et tout $\varepsilon > 0$, notons $T(Y, x, \varepsilon)$ l'ensemble des $\xi \in E$ tels que $\pi(\xi) \in Y$ et $\| \xi - x(\pi(\xi)) \| < \varepsilon$. On dira que $T(Y, x, \varepsilon)$ est le *tube* au-dessus de Y défini par x et ε. Si $T(Y, x, \varepsilon)$ et $T(Y_1, x_1, \varepsilon_1)$ sont deux tubes, $T(Y, x, \varepsilon) \cap T(Y_1, x_1, \varepsilon_1)$ est réunion de tubes. En effet, soient $\xi \in T(Y, x, \varepsilon) \cap T(Y_1, x_1, \varepsilon_1)$ et $z_0 = \pi(\xi)$; on a

$$\| \xi - x(z_0) \| < \varepsilon, \qquad \| \xi - x_1(z_0) \| < \varepsilon_1;$$

soit

$$0 < \varepsilon_2 < \inf(\varepsilon - \| \xi - x(z_0) \|, \qquad \varepsilon_1 - \| \xi - x_1(z_0) \|);$$

il existe $x_2 \in \Gamma$ tel que $\xi = x_2(z_0)$, puis un voisinage ouvert $Y_2 \subset Y \cap Y_1$ de z_0 tel que

$$\| x_2(z) - x(z) \| < \varepsilon_2 + \| \xi - x(z_0) \| \qquad \text{et} \qquad \| x_2(z) - x_1(z) \| < \varepsilon_2 + \| \xi - x_1(z_0) \|$$

pour tout $z \in Y_2$; alors $T(Y_2, x_2, \varepsilon_2) \subset T(Y, x, \varepsilon) \cap T(Y_1, x_1, \varepsilon_1)$, et d'autre part $\xi \in T(Y_2, x_2, \varepsilon_2)$; ceci prouve notre assertion. Ceci posé, les sous-ensembles de E qui sont des réunions de tubes *sont les ensembles ouverts d'une topologie* $\mathfrak{T}$ *sur* E. Il est clair que $\pi(T(Y, x, \varepsilon)) = Y$, donc π est *continue et ouverte* (pour $\mathfrak{T}$ et la topologie donnée sur B). Soit $z \in B$. Montrons que *la topologie induite sur* $E(z)$ *par* $\mathfrak{T}$ *est la topologie forte de* $E(z)$. D'abord, pour tout tube $T(Y, x, \varepsilon)$, l'intersection $T(Y, x, \varepsilon) \cap E(z)$ est une boule ouverte de $E(z)$. D'autre part, soient $\xi \in E(z)$ et β la boule ouverte de centre ξ et de rayon $\varepsilon > 0$ dans $E(z)$; soit $x \in \Gamma$ tel que $x(z) = \xi$; alors $T(B, x, \varepsilon) \cap E(z) = \beta$; donc toute partie fortement ouverte de $E(z)$ est réunion d'ensembles de la forme $T(B, x, \varepsilon) \cap E(z)$, et ceci achève de prouver notre assertion.

Un champ de vecteurs s'identifie à une application $x : B \to E$ telle que $\pi \circ x$ soit l'application identique de B. *Pour que* $x \in \Gamma$, *il faut et il suffit que l'application* x *de* B *dans* E *soit continue.* En effet, supposons d'abord $x \in \Gamma$. Soient $z_0 \in B$ et $T(Y, y, \varepsilon)$ un tube contenant $x(z_0)$. On a $\| x(z_0) - y(z_0) \| < \varepsilon$, donc $\| x(z) - y(z) \| < \varepsilon$ pour z assez voisin de z_0, donc $x(z) \in T(Y, y, \varepsilon)$ pour z assez voisin de z_0; ainsi, x est une application continue de B dans E. Réciproquement, supposons que x soit une application continue de B dans E. Soient $z_0 \in B$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $y \in \Gamma$ tel que $x(z_0) = y(z_0)$. On a $x(z_0) \in T(B, y, \varepsilon)$, donc $x(z) \in T(B, y, \varepsilon)$ pour z assez voisin de z_0; autrement dit, $\| x(z) - y(z) \| < \varepsilon$ dans un voisinage de z_0; ceci prouve que $x \in \Gamma$. Nous devons la définition de $\mathfrak{T}$ et les remarques précédentes à N. Bourbaki.

On voit facilement que, si $\Lambda \subset \Gamma$ est tel que $\Lambda(z)$ soit partout dense dans $E(z)$ pour tout $z \in B$, alors les $T(Y, x, \varepsilon)$ (Y partie ouverte de B, $x \in \Lambda$, $\varepsilon > 0$) forment une base de la topologie de E.

Soit $A \subset E \times E$ l'ensemble des $(\xi, \xi') \in E \times E$ tels que $\pi(\xi) = \pi(\xi')$; l'application $(\xi, \xi') \to \xi + \xi'$ de A dans E est continue. L'application $(\lambda, \xi) \to \lambda\xi$ de $\mathbf{C} \times E$ dans E est continue. Enfin, l'application $\xi \to \| \xi \|$ de E dans $\mathbf{R}$ est continue.

Nous dirons que E, muni de la topologie $\mathcal{T}$ et de la projection $\pi : E \to B$, est l'*espace fibré vectoriel* défini par $\mathcal{E}$.

Si $\mathcal{E}$ est le champ constant sur B défini par un espace de Banach E_0, l'espace E s'identifie à $B \times E_0$.

3. **Propriétés du module Γ.** — Soit $((E(z)), \Gamma)$ un champ continu d'espaces de Banach sur B. Soit $\mathcal{O}^+(B)$ l'ensemble des fonctions continues ≥ 0 sur B. L'application $x \to \|x\|$ de Γ dans $\mathcal{O}^+(B)$ possède les propriétés suivantes :

$$\text{(MN)} \quad \begin{cases} \|x + x'\| \leq \|x\| + \|x'\| & \text{pour } x, x' \in \Gamma; \\ \|fx\| = |f| . \|x\| & \text{pour } x \in \Gamma, \quad f \in \mathcal{O}(B); \\ \|x\| = 0 \iff x = 0. \end{cases}$$

Soient maintenant B un espace topologique, Γ un $\mathcal{O}(B)$-module muni d'une application $\Gamma \to \mathcal{O}^+(B)$ notée $x \to \|x\|$ et satisfaisant à (MN). Nous allons chercher sous quelle condition Γ est isométriquement isomorphe au module des champs de vecteurs continus d'un champ continu d'espaces de Banach sur B. [Un isomorphisme isométrique est un isomorphisme f de $\mathcal{O}(B)$-modules tel que $\|f(x)\| = \|x\|$.]

On dira qu'un filtre $\mathcal{F}$ sur Γ converge localement uniformément vers un élément $x \in \Gamma$ si, pour tout $z \in B$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage Y de z et un $V \in \mathcal{F}$ tels que, pour tout $x' \in V$, on ait $\|x - x'\| < \varepsilon$ sur Y. On dira que $\mathcal{F}$ est un filtre de Cauchy si, pour tout $z \in B$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage Y de z et un $V \in \mathcal{F}$ tels que, pour tous $x', x'' \in V$, on ait $\|x' - x''\| < \varepsilon$ sur Y.

Remarque. — Il n'y a pas en général de topologie (resp. de structure uniforme) sur Γ telle que ces notions correspondent à celles de filtre convergent (resp. de Cauchy) pour cette topologie (resp. cette structure uniforme). Il en est cependant ainsi si B est localement compact : la topologie (resp. la structure uniforme) de la convergence uniforme sur tout compact de B répond alors à la question.

On dira que Γ est complet pour la convergence uniforme locale si tout filtre de Cauchy converge localement uniformément vers un élément de Γ.

Proposition 4. — *Soit B un espace topologique régulier localement paracompact. Soit Γ un $\mathcal{O}(B)$-module, muni d'une application $\Gamma \to \mathcal{O}^+(B)$ notée $x \to \|x\|$ vérifiant* (MN). *Pour qu'il existe un champ continu $\mathcal{E}$ d'espaces de Banach sur B tel que Γ soit isométriquement isomorphe au module des champs de vecteurs continus de $\mathcal{E}$, il faut et il suffit que Γ soit complet pour la convergence uniforme locale.*

Il faut (sans utiliser les hypothèses sur B) : on suppose que Γ est le module des champs de vecteurs continus de $\mathcal{E}$. Si $\mathcal{F}$ est un filtre de Cauchy sur Γ, $\mathcal{F}$ donne un filtre de Cauchy $\mathcal{F}(z)$ sur chaque $E(z)$, et pour tout z, $\mathcal{F}(z)$ converge vers un $x(z) \in E(z)$, car $E(z)$ est complet. Montrons que le champ de vecteurs ainsi défini est continu : pour tout $z \in B$ et tout $\varepsilon > 0$, soient Y un voisinage de z et $V \in \mathcal{F}$ tels que, pour tous x', $x'' \in V$, on ait $\| x' - x'' \| \leqq \varepsilon$ sur Y. Soit $x' \in V \subset \Gamma$; on aura $\| x - x' \| \leqq \varepsilon$ sur Y, et, d'après ($\mathrm{CC_{IV}}$), $x \in \Gamma$. Il est clair que $\mathcal{F}$ converge vers x localement uniformément.

Il suffit : pour tout $z \in B$, notons $J(z)$ le sous-module de Γ formé des x tels que $\| x \| (z) = 0$; et posons $E(z) = \Gamma / J(z)$. Alors $E(z)$ est un $\mathcal{O}(B)$-module, et en particulier un espace vectoriel complexe. Pour $\xi \in E(z)$, soit $x \in \Gamma$ un représentant de ξ. Le nombre $\| x \| (z)$ ne dépend pas du représentant choisi et sera noté $\| \xi \|$. L'application $\xi \to \| \xi \|$ est une norme sur $E(z)$. D'autre part tout $\xi \in E(z)$ admet un représentant $x \in \Gamma$ tel que, pour tout $z' \in B$, on ait $\| x \| (z') \leqq \| \xi \|$; en effet si $x' \in \Gamma$ est un représentant quelconque de ξ, $x = \left[\sup \left(1, \frac{\| x' \|}{\| \xi \|} \right) \right]^{-1} . x'$ répond à la question. Montrons que $E(z)$ est complet, et pour cela que toute famille (ξ_i) d'éléments de $E(z)$ telle que $\sum \| \xi_i \| < +\infty$ est sommable. Soit $(\xi)_i$ une telle famille, et pour tout i soit $x_i \in \Gamma$ un représentant de ξ_i tel que $\| x_i \| \leqq \| \xi_i \|$. La famille (x_i) est sommable dans Γ : en effet les sommes partielles finies définissent un filtre de Cauchy; si x est sa somme, la classe ξ de x dans $E(z) = \Gamma / J(z)$ est somme de la famille (ξ_i). Les $E(z)$ forment donc une famille d'espaces de Banach indexée par B. Pour tout $x \in \Gamma$, soit $\hat{x}$ le champ de vecteurs qui associe à chaque point $z \in B$ l'image canonique de x dans $E(z)$. L'application $x \to \hat{x}$ de Γ dans $\prod_{z \in B} E(z)$ est $\mathcal{O}(B)$-linéaire, et injective car $\| \hat{x} \| = \| x \|$. Son image Λ satisfait aux axiomes ($\mathrm{CC_I}$) à ($\mathrm{CC_{III}}$). Nous allons montrer qu'elle vérifie aussi ($\mathrm{CC_{IV}}$), ce qui achèvera la démonstration.

Les hypothèses faites sur B entraînent que tout point $z \in B$ admet un voisinage K vérifiant la propriété suivante :

(RP) : *pour tout recouvrement ouvert* (Y_i) *de* B, *il existe des fonctions continues* $\eta_i : B \to [0, 1]$, η_i *à support dans* Y_i, *la somme des* η_i *étant localement finie,* $\leqq 1$, *égale à* 1 *sur* K.

On voit facilement qu'on obtient une propriété équivalente à (RP) en remplaçant, dans ce qui précède, « égale à 1 sur K », par « $\geqq 1$ sur K ». Il résulte de là que, si K et K' vérifient (RP), il en est de même de $K \cup K'$.

Soit w un champ de vecteurs tel que, pour tout $z \in B$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in \Gamma$ tel que $\| w - \hat{x} \| \leqq \varepsilon$ au voisinage de z. Il s'agit de montrer que $w \in \Lambda$.

Soient $\varepsilon > 0$ et $K \subset B$ vérifiant (RP). Il existe un recouvrement ouvert (Y_i) de B et une famille (x_i) d'éléments de Γ tels que $\| w - \hat{x}_i \| \leqq \varepsilon$

sur Y_i. Soit (η_i) une famille de fonctions possédant les propriétés de (RP) relativement à K et (Y_i). La famille $(\eta_i x_i)$ est sommable dans Γ, car les sommes partielles finies définissent un filtre de Cauchy. Soit x sa somme. On a $\| w - \hat{x} \| \leqq \varepsilon$ sur K. Donc l'ensemble $V(K, \varepsilon)$ des $y \in \Gamma$ tels que $\| w - \hat{y} \| \leqq \varepsilon$ sur K est non vide. Les $V(K, \varepsilon)$ [pour $K \subset B$ vérifiant (RP) et $\varepsilon > 0$] forment une base de filtre de Cauchy. Ce filtre converge vers un $y \in \Gamma$ et l'on a $\hat{y} = w$.

4. Homomorphismes.

Définition 2. — *Soient $\mathcal{E} = ((E(z)), \Gamma)$, $\mathcal{E}' = ((E'(z)), \Gamma')$ deux champs continus d'espaces de Banach sur un même espace topologique B. Soient E et E' les espaces fibrés vectoriels correspondants. Un homomorphisme de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}'$ est une famille $\varphi = (\varphi_z)_{z \in B}$ d'applications linéaires $\varphi_z : E(z) \to E'(z)$ telle que l'application correspondante $\varphi : E \to E'$ soit continue.*

Proposition 5. — *Soient $\mathcal{E} = ((E(z)), \Gamma)$, $\mathcal{E}' = ((E'(z)), \Gamma')$, et Λ un sous-ensemble total de Γ. Soit $\varphi = (\varphi_z)_{z \in B}$ une famille d'applications linéaires $\varphi_z : E(z) \to E'(z)$. Pour tout champ de vecteurs x de $\mathcal{E}$, notons $\varphi(x)$ le champ de vecteurs x' de $\mathcal{E}'$ défini par $x'(z) = \varphi(x(z))$, et notons $\| \varphi \|$ la fonction $z \to \| \varphi_z \| = \sup_{\|\xi\| \leqq 1} \| \varphi_z(\xi) \|$. Pour que φ soit un homomorphisme, il faut et il suffit que :*

1° *pour tout $x \in \Lambda$, $\varphi(x) \in \Gamma'$;*
2° *$\| \varphi \|$ soit localement bornée.*

Il suffit : on notera π, π' les surjections canoniques $E \to B$, $E' \to B$, et $\overline{\Lambda}$ le sous-espace vectoriel de Γ engendré par Λ. Soient $\xi \in E$ et $\varphi(\xi) = \xi' \in E'$. Montrons que tout voisinage V' de ξ' dans E' a pour image réciproque un voisinage de ξ dans E. Par définition de la topologie de E', V' contient un tube $T'(Y_1, x', \varepsilon)$ où Y_1 est un voisinage de $z = \pi(\xi) = \pi'(\xi')$, où $x' \in \Gamma'$ et $x'(z) = \xi'$; quitte à diminuer Y_1 on peut supposer $\| \varphi \| \leqq M$ sur Y_1. Soit $x \in \overline{\Lambda}$ tel que $\| x(z) - \xi \| \leqq \frac{\varepsilon}{4M}$. On aura alors $\| \varphi_z(x(z)) - \xi' \| \leqq \frac{\varepsilon}{4}$. Mais $\varphi(x) \in \Gamma'$ par hypothèse et $x' \in \Gamma'$ par construction, donc la fonction $\| \varphi(x) - x' \|$ est continue, et par suite $\leqq \frac{\varepsilon}{2}$ sur un voisinage Y_2 de z. Alors V' contient $T' = T'\left(Y, \varphi(x), \frac{\varepsilon}{2}\right)$ avec $Y = Y_1 \cap Y_2$. Son image réciproque par φ contient le voisinage $T\left(Y, x, \frac{\varepsilon}{2M}\right)$ de ξ.

Il faut : si $\varphi : E \to E'$ est continue, on a $x \in \Lambda \Rightarrow x \in \Gamma \Rightarrow \varphi(x) \in \Gamma'$ (*cf.* § 2). Soit $z \in B$. Le tube $T'(B, 0, 1)$, c'est-à-dire l'ensemble des $\xi' \in E'$

tels que $\| \zeta' \| < 1$, a pour image réciproque un ensemble ouvert V de E contenant la section nulle. Il existe un voisinage Y de z et un $\varepsilon > 0$ tels que $V \supset T(Y, 0, \varepsilon)$. On a $\| \varphi \| \leqq \varepsilon^{-1}$ sur Y, donc $\| \varphi \|$ est localement bornée.

Remarque. — Tout homomorphisme $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ définit une application $\mathcal{O}(B)$-linéaire $\varphi : \Gamma \to \Gamma'$. Pour qu'une application $\mathcal{O}(B)$-linéaire $\varphi : \Gamma \to \Gamma'$ provienne d'un homomorphisme de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}'$, il faut et il suffit qu'il existe une fonction localement bornée $\rho : B \to \mathbf{R}$ telle que, pour tout $x \in \Gamma$, on ait $\| \varphi(x) \| \leqq \rho \| x \|$.

Un *isomorphisme* φ de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{E}'$ est une famille $(\varphi_z)_{z \in B}$ telle que :

1° chaque φ_z est un isomorphisme (isométrique) de $E(z)$ sur $E'(z)$;

2° $\varphi(\Gamma) = \Gamma'$.

S'il en est ainsi, φ et φ^{-1} sont des homomorphismes (prop. 5). La réciproque est bien entendu inexacte. Si $\varphi = (\varphi_z)_{z \in B}$ est un homomorphisme de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}'$, si chaque φ_z est une application linéaire bicontinue de $E(z)$ dans $E'(z)$, et si $\varphi^{-1} = (\varphi_z^{-1})_{z \in B}$ est un homomorphisme, on dit que φ est un isomorphisme au sens faible.

Proposition 6. — *Soit Λ un sous-ensemble total de Γ. Pour que $\varphi = (\varphi_z)_{z \in B}$ soit un isomorphisme de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{E}'$, il suffit que, pour tout $z \in B$, φ_z soit un isomorphisme isométrique de $E(z)$ sur $E'(z)$, et que $\varphi(\Lambda) \subset \Gamma'$.*

On a $\varphi(\Gamma) \subset \Gamma'$ d'après la proposition 5. Soient $x' \in \Gamma'$, $z \in B$ et $\varepsilon > 0$. Posons $x = \varphi^{-1}(x')$. Soit $y \in \Gamma$ tel que $y(z) = x(z)$. On a $\varphi y \in \Gamma'$ et $\varphi y(z) = \varphi x(z) = x'(z)$, donc $\| \varphi y - x' \| \leqq \varepsilon$ dans un voisinage Y de z, donc $\| y - x \| \leqq \varepsilon$ dans Y. Il résulte de là que $x \in \Gamma$. Donc $\varphi^{-1}(\Gamma') \subset \Gamma$ et finalement $\varphi(\Gamma) = \Gamma'$. D'où la proposition.

On démontre de manière analogue ceci : pour tout $z \in B$, soit φ_z une application linéaire bicontinue de $E(z)$ sur $E'(z)$; on suppose que les fonctions $z \to \| \varphi_z \|$, $z \to \| \varphi_z^{-1} \|$ sont localement bornées, et que $\varphi(\Lambda) \subset \Gamma$. Alors φ est un isomorphisme au sens faible de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{E}'$.

Si $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ sont les champs constants définis par des espaces de Banach E et E', un isomorphisme de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{E}'$ est une application de B dans l'ensemble des isomorphismes de E sur E', continue pour la topologie forte. Ceci résulte aussitôt de la proposition 6.

Définition 3. — *Un champ continu d'espaces de Banach est dit trivial s'il est isomorphe à un champ constant.*

S'il est isomorphe au sens faible à un champ constant, on dit qu'il est trivial au sens faible.

5. **Images réciproques.** — Soient B et B' deux espaces topologiques et $f : B' \to B$ une application continue. Pour tout champ continu $\mathcal{E} = ((E(z)), \Gamma)$ d'espaces de Banach sur B, on considère la famille d'espaces de Banach $(E'(z'))_{z' \in B'}$ définie par $E'(z') = E(f(z'))$.

L'ensemble Λ' des champs de vecteurs de la forme $x \circ f$ avec x dans Γ est un espace vectoriel complexe qui vérifie ($\mathrm{CC_{II}}$) et ($\mathrm{CC_{III}}$) donc *a fortiori* ($\mathrm{T_I}$) et ($\mathrm{T_{II}}$). D'après la proposition 3, il existe un ensemble Γ' et un seul contenant Λ' et vérifiant ($\mathrm{CC_I}$) à ($\mathrm{CC_{IV}}$). Alors $\mathcal{E}' = ((E'(z'))_{z' \in B'}, \Gamma')$ est un champ continu d'espaces de Banach sur B', appelé image réciproque de $\mathcal{E}$ par f, et noté $f^*(\mathcal{E})$. Soient E l'espace fibré vectoriel défini par $\mathcal{E}$ et π l'application canonique de E sur B. L'espace fibré vectoriel E' défini par $\mathcal{E}'$ s'identifie, comme on le voit facilement, au sous-espace de $B' \times E$ formé des couples (z', ξ) tels que $f(z') = \pi(\xi)$, avec la topologie induite par la topologie produit.

Si f est l'injection canonique d'un sous-espace Y de B, $\mathcal{E}' = f^*(\mathcal{E})$ s'appelle *champ induit* sur Y par $\mathcal{E}$ et se note $\mathcal{E} \mid Y$. Un champ de vecteurs sur Y continu relativement à $\mathcal{E}'$ est, d'après la proposition 3, un champ de vecteurs sur Y limite des champs de Γ pour la convergence uniforme locale sur Y; autrement dit, c'est un champ de vecteurs continu en chaque point de Y au sens du paragraphe 1. Un tel champ sera appelé simplement *champ de vecteurs continu sur Y.*

Deux champs continus $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ d'espaces de Banach sur B seront dits localement isomorphes si tout point $z \in B$ admet un voisinage Y tel que les champs induits par $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ sur Y soient isomorphes.

DÉFINITION 4. — *Un champ continu d'espaces de Banach est dit localement trivial s'il est localement isomorphe à un champ constant.*

On a une notion évidente de locale trivialité au sens faible.

LEMME 1. — *Soient B un espace paracompact, Y une partie fermée de B, $\mathcal{E} = ((E(z)), \Gamma)$ un champ continu d'espaces de Banach sur B, x (resp. y) un champ de vecteurs continu sur B (resp. Y), a un nombre > 0 tel que $\| x(z) - y(z) \| < a$ sur Y. Il existe $x' \in \Gamma$ tel que*

$$\| x'(z) - y(z) \| < a/2 \quad \text{sur } Y, \qquad \| x'(z) - x(z) \| < 2a \quad \text{sur } B.$$

Il existe un recouvrement (V_i) de Y par des parties ouvertes de B, et, pour tout $i \in I$, un $x_i \in \Gamma$, tels que $\| x_i - y \| < a/2$ sur V_i. En remplaçant (V_i) par un recouvrement plus fin, on peut supposer le recouvrement (V_i) localement fini. Soit (η_i) une famille de fonctions ≥ 0 continues dans B, subordonnée à (V_i), telle que $\sum \eta_i = 1$ sur Y (*cf.* [2]). Soit $x_1 = \sum \eta_i x_i$. On a $\| x_1 - y \| < a/2$ sur Y, donc $\| x_1 - x \| < 2a$ sur un voisinage ouvert Z de Y. Soit $f : B \to [0, 1]$ une fonction continue égale à 1 sur Y et à 0 sur $B - Z$. Posons

$$x'(z) = f(z) x_1(z) + (1 - f(z)) x(z).$$

On a

$$\| x'(z) - y(z) \| = \| x_1(z) - y(z) \| < a/2 \quad \text{sur } Y$$

et

$$\| x'(z) - x(z) \| < 2a \quad \text{sur } B.$$

Proposition 7. — *Soient B un espace paracompact, Y une partie fermée de B, $\mathcal{E} = ((E(z)), \Gamma)$ un champ continu d'espaces de Banach sur B, y un champ de vecteurs continu sur Y. Alors y se prolonge en un champ de vecteurs continu sur B.*

En raisonnant comme pour le lemme 1, on construit d'abord un $x_0 \in \Gamma$ tel que $\| x_0(z) - y(z) \| < 1$ sur Y. Puis, appliquant le lemme 1 par récurrence, on obtient une suite (x_n) d'éléments de Γ tels que $\| x_n(z) - y(z) \| < 2^{-n}$ sur Y et $\| x_n(z) - x_{n-1}(z) \| < 2^{-n+2}$ sur B. Les x_n convergent uniformément vers un $x \in \Gamma$. On a $x(z) = y(z)$ sur Y.

Proposition 8. — *Soient $\mathcal{E} = ((E(z)), \Gamma)$ un champ continu d'espaces de Banach sur B, Y_1 et Y_2 deux parties fermées de B, x_i un champ de vecteurs continu sur Y_i. On suppose que x_1 et x_2 coïncident sur $Y_1 \cap Y_2$. Soit x le champ de vecteurs égal à x_1 sur Y_1, à x_2 sur Y_2. Alors x est continu sur $Y_1 \cup Y_2$.*

Si E est l'espace fibré vectoriel associé à $\mathcal{E}$, les champs de vecteurs continus sur Y_1 sont les sections continues de $E \mid Y_1$; de même pour Y_2 et $Y_1 \cup Y_2$; d'où la proposition.

Proposition 9. — *Soient B un espace complètement régulier, $(Y_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de B; posons $Y_{ij} = Y_i \cap Y_j$. Pour tout $i \in I$, soit $\mathcal{E}_i = ((E_i(z)), \Gamma_i)$ un champ continu d'espaces de Banach sur Y_i. Pour tous $i, j \in I$, soit g_{ij} un isomorphisme de $\mathcal{E}_j \mid Y_{ij}$ sur $\mathcal{E}_i \mid Y_{ij}$. On suppose que, pour tous $i, j, k \in I$, on a $g_{ij} g_{jk} = g_{ik}$. Alors il existe un champ continu $\mathcal{E}$ d'espaces de Banach sur B, et, à un isomorphisme près, un seul, possédant la propriété suivante : pour tout $i \in I$, il existe un isomorphisme h_i de $\mathcal{E}_i$ sur $\mathcal{E} \mid Y_i$, tel que $g_{ij} = h_i^{-1} h_j$ pour tous $i, j \in I$.*

L'unicité est immédiate, prouvons l'existence. Pour tout $z \in B$, soit $I(z) \neq \emptyset$ l'ensemble des $i \in I$ tels que $z \in Y_i$. Si $i, j \in I(z)$, $g_{ij}(z)$ est un isomorphisme de $E_j(z)$ sur $E_i(z)$, et $g_{ij}(z)\, g_{jk}(z) = g_{ik}(z)$ si $i, j, k \in I(z)$. Il existe donc un espace de Banach $E(z)$, et, pour tout $i \in I(z)$, un isomorphisme $h_i(z)$ de $E_i(z)$ sur $E(z)$ tels que $g_{ij}(z) = h_i(z)^{-1} h_j(z)$ pour $i, j \in I(z)$. Il existe un ensemble Δ_i et un seul de champs de vecteurs définis sur Y_i et à valeurs dans les $E(z)$ tels que $(h_i(z))_{z \in Y_i}$ soit un isomorphisme de $\mathcal{E}_i$ sur $\mathcal{F}_i = ((E(z))_{z \in Y_i}, \Delta_i)$. Et l'on a $\mathcal{F}_i \mid Y_{ij} = \mathcal{F}_j \mid Y_{ij}$ quels que soient $i, j \in I$.

Ceci posé, soit Γ l'ensemble des $x \in \prod_{z \in B} E(z)$ tels que $x \mid Y_i \in \Delta_i$ pour tout $i \in I$. Il est immédiat que Γ vérifie les axiomes $(\mathrm{CC_I})$, $(\mathrm{CC_{III}})$, $(\mathrm{CC_{IV}})$. Montrons que Γ vérifie $(\mathrm{CC_{II}})$. Soient $z_0 \in B$ et $\xi \in E(z_0)$. Soit $i \in I$ tel que $z_0 \in Y_i$. Soit $V \subset Y_i$ un voisinage de z_0 fermé dans B. Soit $\eta : B \to \mathbf{R}$ une fonction continue égale à 1 en z_0 et à 0 dans $B - V$. Soit $y \in \Delta_i$, tel que $y(z_0) = \zeta$. Soit x l'élément de $\prod_{z \in B} E(z)$ égal à 0 dans $B - V$ et à ηy dans $\dot{V}$. On a $x(z_0) = \zeta$. On va montrer que $x \in \Gamma$. Soit $j \in I$ et montrons que $x \mid Y_j \in \Delta_j$. Il suffit de montrer que, pour tout $z_1 \in Y_j$, x coïncide dans un voisinage de z_1 avec un élément de Δ_j. C'est immédiat si $z_1 \notin V$. Supposons $z_1 \in V$. Alors $z_1 \in Y_{ij}$. Comme $\mathcal{F}_i \mid Y_{ij} = \mathcal{F}_j \mid Y_{ij}$ et que x coïncide, dans un voisinage de z_1, avec un élément de Δ_i, notre assertion est établie.

On a donc prouvé que $\mathcal{E} = ((E(z)), \Gamma)$ est un champ continu d'espaces de Banach sur B. On a $\mathcal{E} \mid Y_i = \mathcal{F}_i$, d'où la proposition.

On dit que $\mathcal{E}$ s'obtient *en recollant les $\mathcal{E}_i$ à l'aide des g_{ij}*.

Soient B un espace localement compact, $\mathcal{E} = ((E(z)), \Gamma)$ un champ continu d'espaces de Banach sur B, B' l'espace compact déduit de B par adjonction d'un point à l'infini ω. Posons $E'(z) = E(z)$ pour $z \in B$, $E'(\omega) = 0$. Soit Γ' l'ensemble des champs de vecteurs x relatifs à $(E'(z))_{z \in B'}$ tels que :

1° $x \mid B \in \Gamma$;

2° $\| x \|$ tend vers zéro à l'infini sur B;

3° $x(\omega) = 0$.

PROPOSITION 10. — *$\mathcal{E}' = ((E'(z))_{z \in B'}, \Gamma')$ est un champ continu d'espaces de Banach sur B', et $\mathcal{E}' \mid B$ s'identifie canoniquement à $\mathcal{E}$.*

Il est immédiat que Γ' vérifie (CC_I), (CC_{II}), (CC_I); l'axiome (CC_{II}) résulte facilement de la complète régularité de B. Soit Γ_0 l'ensemble des restrictions à B des éléments de Γ', c'est-à-dire l'ensemble des éléments de Γ qui tendent vers zéro à l'infini. Alors Γ_0 est un sous-ensemble total de Γ, et les transformés des éléments de Γ_0 par les applications identiques des $E(z)$ sont des champs de vecteurs continus relativement à $\mathcal{E}' \mid B$. Donc $\mathcal{E} = \mathcal{E}' \mid B$ (prop. 6).

6. **Sous-champs continus.**

DÉFINITION 5. — *Soit $\mathcal{E} = ((E(z)), \Gamma)$ un champ continu d'espaces de Banach sur B. Un sous-champ continu de $\mathcal{E}$ est un champ continu $\mathcal{E}' = ((E'(z)), \Gamma')$ d'espaces de Banach sur B tel que, pour tout $z \in B$, $E'(z)$ soit un sous-espace vectoriel fermé de $E(z)$, muni de la norme induite, et que $\Gamma' \subset \Gamma$.*

Il résulte alors de l'axiome (CC_I) que Γ' est formé des $x \in \Gamma$ tels que $x(z) \in E'(z)$ pour tout $z \in B$: en effet, si x vérifie ces propriétés, pour tout $z \in B$, il existe $x' \in \Gamma'$ tel que $x'(z) = x(z)$, et l'on a $\| x - x' \| < \varepsilon$ au voisinage de z, donc $x \in \Gamma'$. Le sous-champ continu $\mathcal{E}'$ est donc entièrement déterminé par la donnée des $E'(z)$.

Supposons $\mathcal{E}$ donné. Pour tout $z \in B$, on se donne un sous-espace vectoriel fermé $E'(z)$ de $E(z)$; pour que les $E'(z)$ définissent un sous-champ continu $\mathcal{E}'$ de $\mathcal{E}$, il suffit qu'il existe $\Lambda \subset \Gamma$ tel que, pour tout $z \in B$, $\Lambda(z)$ soit une partie totale de $E'(z)$. Ceci résulte de la proposition 3 : en effet, l'ensemble des champs de vecteurs $x \in \Gamma$ tels que $x(z) \in E'(z)$ pour tout $z \in B$ vérifie alors $(\mathrm{T_I})$, $(\mathrm{T_{II}})$ et $(\mathrm{CC_{IV}})$.

Si $\mathcal{E}$ est donné, et si $\Lambda \subset \Gamma$ est une partie quelconque, on définit un sous-champ continu en prenant pour $E'(z)$ le sous-espace vectoriel fermé de $E(z)$ engendré par $\Lambda(z)$: c'est le sous-champ continu de $\mathcal{E}$ engendré par Λ.

Si $\mathcal{E}'$ est un sous-champ continu de $\mathcal{E}$, Γ' est un sous-$\mathcal{C}(B)$-module de Γ, et $E'(z) = \Gamma'(z)$ pour tout $z \in B$, ce qui montre que $\mathcal{E}'$ est entièrement déterminé par Γ'.

Supposons $\mathcal{E}$ donné. Pour qu'un sous-$\mathcal{C}(B)$-module Γ' de Γ soit l'ensemble des champs de vecteurs continus d'un sous-champ continu de $\mathcal{E}$, il faut et il suffit que Γ' vérifie $(\mathrm{CC_{IV}})$: en effet, si Γ' vérifie $(\mathrm{CC_{IV}})$, Γ' contient tous les champs de vecteurs continus du sous-champ continu $\mathcal{E}'$ de $\mathcal{E}$ qu'il engendre (prop. 3).

Si Γ' et Γ'' sont les sous-modules de Γ correspondant à des sous-champs continus $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{E}''$ de $\mathcal{E}$, leur intersection $\Gamma' \cap \Gamma''$ définit un sous-champ continu $\mathcal{E}''' = ((E'''(z)), \Gamma' \cap \Gamma'')$ de $\mathcal{E}$. On a $E'''(z) \subset E'(z) \cap E''(z)$, mais l'égalité n'a pas lieu en général. Par exemple, soit $B = [0, 1]$; prenons pour $\mathcal{E}$ le champ constant défini par $\mathbf{C}^2$, de base canonique (e_1, e_2); posons $x'(z) = e_1$, $x''(z) = e_1 + z e_2$, et soient $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{E}''$ les sous-champs continus de $\mathcal{E}$ engendrés par x' et x''. On a $E'(z) \cap E''(z) = 0$ si $z \neq 0$, $E'(0) \cap E''(0) = \mathbf{C} e_1$; mais $\Gamma' \cap \Gamma'' = 0$ car tout champ x de $\Gamma' \cap \Gamma''$ vérifie $x(z) = 0$ pour $z \neq 0$ donc aussi pour $z = 0$.

Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ deux champs continus d'espaces de Banach sur B et f : $\mathcal{E}' \to \mathcal{E}$ un homomorphisme. Pour tout $z \in B$, soit $E''(z)$ l'adhérence de $f_z(E'(z))$ dans $E(z)$. Les $E''(z)$ définissent un sous-champ continu de $\mathcal{E}$. Par contre, les noyaux des f_z ne définissent pas en général un sous-champ continu de $\mathcal{E}'$.

Soient $\mathcal{E} = ((E(z)), \Gamma)$ un champ continu d'espaces de Banach sur B, $\mathcal{E}' = ((E'(z)), \Gamma')$ un sous-champ continu de $\mathcal{E}$, Y une partie de B. Posons $\mathcal{E} \mid Y = ((E(z))_{z \in Y}, \Delta)$, $\mathcal{E}' \mid Y = ((E'(z))_{z \in Y}, \Delta')$. Soit $x \in \Delta$. Pour que $x \in \Delta'$, il faut et il suffit que $x(z) \in E'(z)$ pour tout $z \in Y$: la condition est évidemment nécessaire; réciproquement, supposons-la remplie; soient $z_0 \in Y$ et $\varepsilon > 0$; il existe $y \in \Gamma$ tel que $\| y(z) - x(z) \| \leq \varepsilon$ dans un voisinage de z_0 relativement à Y, et $y' \in \Delta$ tel que $\| y'(z) - y(z) \| \leq \varepsilon$ au voisinage de z_0, d'où $x \in \Delta'$.

Proposition 11. — *Soit $\mathcal{E} = ((E(z)), \Gamma)$ un champ continu d'espaces de Banach sur B, et pour tout $z \in B$ soit $E'(z)$ un sous-espace vectoriel fermé de $E(z)$. Pour que les $E'(z)$ définissent un sous-champ continu de $\mathcal{E}$,* *il faut et, si B est paracompact, il suffit que pour tout $x \in \Gamma$ la fonction $d(x, E')$ qui, au point $z \in B$ associe la distance de $x(z)$ à $E'(z)$, soit semi-continue supérieurement.*

Il faut : si les $E'(z)$ définissent un sous-champ continu de $\mathcal{E}$, $d(x, E') = \inf_{x' \in \Gamma'} \| x - x' \|$ est semi-continue supérieurement comme enveloppe inférieure d'une famille de fonctions continues.

Il suffit (d'après [14], p. 368) : on suppose B paracompact. Pour tout $z_0 \in B$ et tout $\zeta \in E'(z_0)$ on veut construire un $x \in \Gamma$ tel que $x(z_0) = \zeta_0$ et $x(z) \in E'(z)$ pour tout z. Pour cela, on va construire par récurrence une suite (x_n) d'éléments de Γ telle que $x_n(z_0) = \zeta_0$, $d(x_n, E') < 2^{-n}$, et $\| x_n - x_{n-1} \| < 2^{-n+1}$ pour $n \geqq 1$. Construisons x_0. Il existe $x' \in \Gamma$ tel que $x'(z_0) = \zeta_0$. La fonction $d(x', E')$ s'annule en z_0 donc reste < 1 sur un voisinage Y_0 de z_0. Soit η une fonction continue à support dans Y_0 telle que $0 \leqq \eta \leqq 1$ et $\eta(z_0) = 1$. Alors $x = \eta x'$ répond à la question. Supposons x_{n-1} construit et construisons x_n. Pour tout $z \in B$, on a

$$d(x_{n-1}, E') < 2^{-n+1}.$$

Donc il existe $\zeta \in E'(z)$ tel que $\| x_{n-1}(z) - \zeta \| < 2^{-n+1}$. Mais il existe $x' \in \Gamma$ tel que $x'(z) = \zeta$. Les inégalités

$$d(x', E') < 2^{-n} \qquad \text{et} \qquad \| x' - x_{n-1} \| < 2^{-n+1}$$

ont encore lieu sur un voisinage Y de z. Les Y forment un recouvrement ouvert de B; soit (Y_i) un recouvrement ouvert localement fini plus fin, et soit (η_i) une partition de l'unité subordonnée à (Y_i); soit x'_i le champ de vecteur correspondant à Y_i. On peut supposer que $z_0 \in Y_0$, $\eta_0(z_0) = 1$ et $x'_0(z_0) = \zeta_0$. Alors $x_n = \sum \eta_i x'_i$ répond à la question. Les x_n forment une suite de Cauchy pour la convergence uniforme et ont pour limite un $x \in \Gamma$ qui vérifie $d(x, E') = 0$.

COROLLAIRE. — *Soient B un espace paracompact, E_0 un espace de Banach, $\mathcal{E}_0$ le champ constant sur B défini par E_0. Pour tout $z \in B$, soit $E(z)$ un sous-espace vectoriel fermé de E. Pour que les $E(z)$ définissent un sous-champ continu de $\mathcal{E}_0$, il faut et il suffit que $z \to E(z)$ soit semi-continu inférieurement, c'est-à-dire que, pour toute partie ouverte U de E_0, l'ensemble des $z \in B$ tels que $E(z) \cap U \neq \emptyset$ soit ouvert.*

Remarque. — La proposition 11 et son corollaire s'étendent au cas où B est régulier et localement paracompact (en particulier localement compact).

PROPOSITION 12. — *Soit $\mathcal{E} = ((E(z)), \Gamma)$ un champ continu d'espaces de Banach sur B. Soient $x_1, \ldots, x_n \in \Gamma$. Pour tout $z \in B$, soit $E'(z)$ le* *sous-espace vectoriel de $E(z)$ engendré par $x_1(z), \ldots, x_n(z)$. Supposons les $x_i(z)$ linéairement indépendants pour tout $z \in B$. Alors, pour tout $x \in \Gamma$, la fonction $d(x, E')$ est continue sur B.*

Pour tout $z \in B$, on a

$$d(x, E')(z) = \inf_{c_1, \ldots, c_n \in \mathbf{C}} \| x(z) - c_1 x_1(z) - \ldots - c_n x_n(z) \|.$$

Soit $z_0 \in B$. Il existe un voisinage V de z_0 et une constante finie $\mu \geqq 0$ tels que $d(x, E') \leqq \mu$ et $\| x \| \leqq \mu$ dans V. Pour tout $z \in V$, soit $A(z)$ l'ensemble des $(c_1, \ldots, c_n) \in \mathbf{C}^n$ tels que $\| c_1 x_1(z) + \ldots + c_n x_n(z) \| \leqq 2\mu$. Pour $z \in V$, on a

$$d(x, E')(z) = \inf_{c_1, \ldots, c_n \in A(z)} \| x(z) - c_1 x_1(z) - \ldots - c_n x_n(z) \|.$$

D'après le paragraphe 1, remarque, il existe un voisinage $W \subset V$ de z_0 et une constante finie $\nu \geqq 0$ tels que

$$| c_1 |^2 + \ldots + | c_n |^2 \leqq \nu \| c_1 x_1(z) + \ldots + c_n x_n(z) \|^2$$

quels que soient $c_1, \ldots, c_n \in \mathbf{C}$ et $z \in W$. Donc il existe une partie compacte A de $\mathbf{C}^n$ telle que $A(z) \subset A$ pour tout $z \in W$. Ainsi, pour $z \in W$, on a

$$d(x, E')(z) = \inf_{c_1, \ldots, c_n \in A} \| x(z) - c_1 x_1(z) - \ldots - c_n x_n(z) \|.$$

Or $\| x(z) - c_1 x_1(z) - \ldots - c_n x_n(z) \|$ est une fonction continue de $(c_1, \ldots, c_n, z)$. Comme A est compact, on en conclut que $d(x, E')$ est continu sur $V \cap W$.

Corollaire. — *Soient B un espace compact, $((E(z)), \Gamma)$ un champ continu d'espaces de Banach sur B, et $x_1, \ldots, x_n \in \Gamma$. Munissons Γ de la topologie de la convergence uniforme sur B. L'ensemble M des $x \in \Gamma$ tels que $x_1, \ldots, x_n, x$ soient linéairement indépendants en tout point de B est une partie ouverte de Γ.*

En effet, si $x_1, \ldots, x_n$ sont linéairement dépendants en un point de B, on a $M = \emptyset$. Sinon, il suffit d'appliquer la proposition 12.

7. **Séparabilité.**

Définition 6. — *Un champ continu d'espaces de Banach $((E(z)), \Gamma)$ est séparable s'il existe un ensemble total dénombrable $\Lambda \subset \Gamma$.*

Soit $\mathcal{E}$ un champ continu séparable d'espaces de Banach sur B. Si la topologie de B admet une base dénombrable, la topologie de l'espace fibré vectoriel défini par $\mathcal{E}$ admet une base dénombrable.

Proposition 13. — *Soient E un espace de Banach séparable et $H \subset E$ un sous-espace vectoriel fermé distinct de E. Soient B un espace complè-*

tement régulier, z_0 un point de B, $\mathcal{E}$ le champ constant sur B défini par E, et $\mathcal{E}'$ le sous-champ continu de $\mathcal{E}$ défini par $E'(z) = E$ si $z \neq z_0$ et $E'(z_0) = H$. Pour que $\mathcal{E}'$ soit séparable, il faut et il suffit que $\{ z_0 \}$ soit intersection d'une famille dénombrable de voisinages de z_0.

Il faut : soit (x_n) une suite totale de champs continus de $\mathcal{E}'$ c'est-à-dire d'applications continues $B \to E$ telles que $x_n(z_0) \in H$. Posons $f_n(z) = \inf(d(x_n(z), H), 1)$. Les f_n sont continues et $f = \sum 2^{-n} f_n$ est continue. Mais $f^{-1}(0) = \{ z_0 \}$, car si $z \neq z_0$ les $x_n(z)$ sont denses dans E et $f_n(z) \neq 0$ pour au moins un n. Alors les $Y_n = f^{-1}\left(\left[0, \frac{1}{n}\right[\right)$ sont des voisinages de z_0 dont l'intersection se réduit à z_0.

Il suffit : soient (e_n) une suite totale d'éléments de E, (h_n) une suite totale d'éléments de H, (Y_n) une suite de voisinages de z_0 telle que $\cap Y_n = \{ z_0 \}$, et η_n une fonction continue, à support dans Y_n, et telle que $\eta_n(z_0) = 1$. Les h_n et les $(1 - \eta_p) e_q$ définissent une famille totale dénombrable de champs de vecteurs continus relativement à $\mathcal{E}'$.

Remarque. — Soit B un produit non dénombrable d'intervalles $[0, 1]$. La proposition 13 permet de construire sur B un champ continu non séparable $((H(z)), \Gamma)$ d'espaces hilbertiens, tel que chaque $H(z)$ soit séparable. On peut même construire un tel champ sur $[0, 1]$. On a toutefois la proposition suivante :

PROPOSITION 14. — *Soient B un espace métrisable à base dénombrable, $\mathcal{E} = ((E(z)), \Gamma)$ un champ continu localement trivial au sens faible d'espaces de Banach sur B. Si chaque $E(z)$ est séparable, $\mathcal{E}$ est séparable.*

Soit (U_n) un recouvrement ouvert dénombrable de B tel que chaque $\mathcal{E} \mid U_n$ soit trivial au sens faible. Soit (V_n) un recouvrement ouvert de B tel que $\overline{V}_n \subset U_n$ pour tout n. Pour tout n, il existe une suite (x_{nm}) de champs de vecteurs définis, bornés et continus sur U_n, telle que, pour tout $z \in U_n$, les $x_{nm}(z)$ soient partout denses dans $E(z)$. Soit $\eta_n : B \to [0, 1]$ une fonction continue égale à 1 sur V_n et à 0 sur $B - U_n$. Soit y_{nm} le champ de vecteurs sur B égal à $\eta_n x_{nm}$ sur U_n et à 0 sur $B - U_n$. Si $z \in U_n$, y_{nm} est continu dans un voisinage de z; si $z \in B - U_n$, et si $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage de z dans lequel $\| y_{nm} \| \leq \varepsilon$; tout ceci prouve que $y_{nm} \in \Gamma$. Soient $z \in B$ et $\xi \in E(z)$. Il existe n tel que $z \in V_n$; alors ξ est limite de vecteurs $x_{nm}(z) = y_{nm}(z)$. Donc les y_{nm} forment un ensemble total dans Γ.

8. Compléments divers. — Signalons sans démonstration les résultats suivants :

1° Soient B un espace topologique, $\mathcal{E}$ un champ continu d'espaces de Banach sur B, E l'espace fibré vectoriel défini par $\mathcal{E}$, E' un espace fibré vectoriel sur B localement isomorphe à E.

a. Si B est complètement régulier, E' peut être défini par un champ continu d'espaces de Banach sur B.

b. On obtient un contre-exemple en prenant pour B l'espace (non séparé) quotient de $[-1, +1] \times \{0, 1\}$ par la relation d'équivalence identifiant $(t, 0)$ à $(t, 1)$ pour tout $t \neq 0$.

2° Soient $\mathcal{E} = ((E(z)), \Gamma)$ et $\mathcal{E}' = ((E'(z)), \Gamma')$ deux champs continus d'espaces de Banach sur B.

a. Si $z \in B$, tout $x \in \Gamma$ tel que $x(z) = 0$ se met sous la forme fx', avec $x' \in \Gamma$, $f \in \mathcal{O}(B)$, $f(z) = 0$ [on peut prendre $f(z) = \| x(z) \|^{1/2}$]. Par suite, toute application $\mathcal{O}(B)$-linéaire $\varphi : \Gamma \to \Gamma'$ est donnée par une famille $(\varphi_z)_{z \in B}$ où $\varphi_z : E(z) \to E'(z)$ est $\mathbf{C}$-linéaire.

b. Si tout point de B admet un système fondamental dénombrable de voisinages, pour que φ définisse un homomorphisme de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}'$, il suffit que les φ_z soient continues.

c. Si B est métrique et n'a aucun point isolé, toute application $\mathcal{O}(B)$-linéaire de Γ dans Γ' définit un homomorphisme de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}'$.

3° *a*. Soient $\mathcal{E} = ((E(z)), \Gamma)$ un champ continu d'espaces de Banach sur B, $\mathcal{E}' = ((E'(z)), \Gamma')$ un sous-champ continu de $\mathcal{E}$, et $x \in \Gamma$. Alors l'ensemble des $z \in B$ tels que $x(z) \in E'(z)$ est un G_δ de B.

b. Soient B un espace complètement régulier, Y un G_δ de B. Soient H_0 un espace hilbertien de dimension hilbertienne $\aleph_0$, $\mathcal{E} = ((E(z)), \Gamma)$ le champ constant sur B défini par H_0, x l'élément de Γ défini par $x(z) = \xi$ pour tout z (ξ élément fixé non nul de H_0). Il existe un sous-champ continu $\mathcal{E}' = ((E'(z)), \Gamma')$ de $\mathcal{E}$ tel que $x(z) \in E'(z)$ si et seulement si $z \in Y$.

4° Soient B un espace paracompact, $\mathcal{E} = ((E(z)), \Gamma)$, $\mathcal{E}' = ((E'(z)), \Gamma')$ deux champs continus d'espaces de Banach sur B, $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ un homomorphisme. On suppose que, pour tout $z \in B$, $f_z(E(z))$ est dense dans $E'(z)$. Alors, pour tout $x' \in \Gamma'$ et pour toute $h \in \mathcal{O}^+(B)$ telle que $h(z) > 0$ pour tout $z \in B$, il existe $x \in \Gamma$ tel que $\| f(x) - x' \| < h$.

Chapitre II. — Champs continus d'espaces hilbertiens.

9. **Définitions. Sommes hilbertiennes.** — Soit $\mathcal{E} = ((H(z)), \Gamma)$ un champ continu d'espaces hilbertiens sur B. Si $x, y \in \Gamma$, la fonction $z \to (x(z) \mid y(z))$ est continue d'après l'égalité

$$4(x(z) \mid y(z)) = \| x(z) + y(z) \|^2 - \| x(z) - y(z) \|^2 + i \| x(z) + iy(z) \|^2 - i \| x(z) - iy(z) \|^2.$$

Soit a un cardinal. Si, pour tout $z \in B$, $\dim H(z)$ est égal à a, on dit que $\mathcal{E}$ est *de rang a*. (Dans toute la suite, la seule notion de dimension utilisée pour les espaces hilbertiens est celle de dimension hilbertienne.)

On appelle *champ continu de bases orthonormales* (pour $\mathcal{E}$) une famille $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de Γ telle que, pour tout $z\in B$, $(x_i(z))_{i\in I}$ soit une base orthonormale de $H(z)$. Pour que $\mathcal{E}$ soit trivial, il faut et il suffit qu'il existe un champ continu de bases orthonormales pour $\mathcal{E}$; la nécessité est évidente, la suffisance résulte de la proposition 6. S'il existe une suite totale (x_n) d'éléments de Γ telle que, pour tout $z\in B$, les $x_n(z)$ soient linéairement indépendants, alors $\mathcal{E}$ est trivial : en effet, le procédé d'orthonormalisation de Schmidt, appliqué aux x_n en chaque point de B, fournit un champ continu de bases orthonormales. En particulier, si $\mathcal{E}$ est de rang $\aleph_0$ et trivial au sens faible, $\mathcal{E}$ est trivial.

Soient $\mathcal{E} = ((H(z)), \Gamma)$ un champ continu d'espaces hilbertiens sur B, $\psi = (\psi_z)_{z\in B}$ un homomorphisme de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$. On suppose que, pour tout $z\in B$, ψ_z est hermitien. Soit $p : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ une fonction continue. Pour tout $z\in B$, posons $\psi'_z = p(\psi_z)$, qui est un opérateur normal dans $H(z)$. Alors $(\psi'_z)_{z\in B}$ est un homomorphisme de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$: ceci est immédiat si p est un polynôme; dans le cas général, p est limite uniforme sur tout compact de polynômes, et la fonction $z \to \|\psi_z\|$ est localement bornée, d'où notre assertion.

Soient $\mathcal{E} = ((H(z)), \Gamma)$ et $\mathcal{E}' = ((H'(z)), \Gamma')$ deux champs continus d'espaces hilbertiens sur B, $\varphi = (\varphi_z)_{z\in B}$ un homomorphisme de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}'$. Pour tout $z\in B$, φ_z^* est une application linéaire continue de $H'(z)$ dans $H(z)$; mais en général $\varphi^* = (\varphi_z^*)_{z\in B}$ n'est pas un homomorphisme de $\mathcal{E}'$ dans $\mathcal{E}$, comme on le voit facilement déjà dans le cas où $\mathcal{E} = \mathcal{E}'$ est un champ constant. Si φ^* est un homomorphisme de $\mathcal{E}'$ dans $\mathcal{E}$, on dit que φ est *transposable*. Supposons φ transposable, et supposons que φ soit un isomorphisme au sens faible (auquel cas φ^* est un isomorphisme au sens faible). On va montrer qu'alors $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ *sont isomorphes* (*cf.* à ce sujet le problème 4 du paragraphe 19). En effet, d'après l'alinéa précédent, $((\varphi_z^* \varphi_z)^{-1/2})_{z\in B}$ est un homomorphisme de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$; donc $(\varphi_z(\varphi_z^* \varphi_z)^{-1/2})_{z\in B}$ est un homomorphisme de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}'$; mais, pour tout $z\in B$, $\varphi_z(\varphi_z^* \varphi_z)^{-1/2}$ est un isomorphisme isométrique de $H(z)$ sur $H'(z)$, et notre assertion résulte de la proposition 6.

Soit I un ensemble. Pour tout $i\in I$, soit $\mathcal{E}_i = ((H_i(z)), \Gamma_i)$ un champ continu d'espaces hilbertiens sur B. Pour tout $z\in B$, posons $H(z) = \bigoplus_{i\in I} H_i(z)$, et identifions les $H_i(z)$ à des sous-espaces de $H(z)$. Soit Γ' l'ensemble des sommes $\sum_{i\in J} x_i$, où $x_i\in\Gamma_i$ et où J est une partie finie de I. Soit Γ l'ensemble des champs de vecteurs $z \to x(z)\in H(z)$ tels que, pour tout $z_0\in B$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de z_0 et un $y\in\Gamma'$ tels que $\|x(z) - y(z)\| \leq \varepsilon$ dans V. Alors $\mathcal{E} = ((H(z)), \Gamma)$ est un champ continu d'espaces hilbertiens sur B (prop. 3) appelé *somme hilbertienne* des $\mathcal{E}_i$ et noté $\bigoplus_{i\in I} \mathcal{E}_i$. Il est immédiat que les $\mathcal{E}_i$ s'identifient à des sous-champs continus de $\mathcal{E}$. Réciproquement, soit $\mathcal{E} = ((H(z)), \Gamma)$ un champ continu d'espaces hilbertiens sur B, et supposons que, pour tout $z \in B$, $H(z)$ soit somme hilbertienne de sous-espaces $H_i(z)$ $(i \in I)$. Supposons que, pour tout $i \in I$, les $H_i(z)$ définissent un sous-champ continu $\mathcal{E}_i$ de $\mathcal{E}$. Soit $\mathcal{E}' = \bigoplus_{i \in I} \mathcal{E}_i = ((H'(z)), \Gamma')$. Soit $U(z)$ l'isomorphisme canonique de $H(z)$ sur $H'(z)$. Les $U(z)$ définissent un isomorphisme de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{E}'$ (prop. 6) par lequel on identifie ces deux champs.

PROPOSITION 15. — *Pour tout $i \in I$, soit $\mathcal{E}_i = ((H_i(z)), \Gamma_i)$ un champ continu d'espaces hilbertiens sur B. Soit $\mathcal{E} = \bigoplus_{i \in I} \mathcal{E}_i = ((H(z)), \Gamma)$. Soit $z \to x(z) \in H(z)$ un champ de vecteurs sur B, et soit $x_i(z) = P_{H_i(z)}\, x(z)$. Les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $x \in \Gamma$;

(ii) *$x_i \in \Gamma_i$ pour tout i, et, pour tout $z_0 \in B$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de z_0 et une partie finie J de I tels que $\left\| x(z) - \sum_{i \in J} x_i(z) \right\| \leq \varepsilon$ sur V;*

(iii) *$x_i \in \Gamma_i$ pour tout i, et la fonction $\| x \|$ est continue.*

(ii) $\Rightarrow$ (i) : évident.

(i) $\Rightarrow$ (iii) : supposons $x \in \Gamma$. La fonction $\| x \|$ est continue. D'autre part, soient $z_0 \in B$ et $\varepsilon > 0$. Il existe une somme finie $\sum_{i \in J} y_i$ (où $y_i \in \Gamma_i$) et un voisinage V de z_0 tels que $\left\| x(z) - \sum_{i \in J} y_i(z) \right\| \leq \varepsilon$ dans V. Donc, dans V, $\| x_i(z) - y_i(z) \| \leq \varepsilon$ pour $i \in J$ et $\| x_i(z) \| \leq \varepsilon$ pour $i \in I - J$. Ceci prouve que $x_i \in \Gamma_i$ pour tout i.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) : supposons vérifiée la condition (iii). Soient $z_0 \in B$ et $\varepsilon > 0$. Soit J une partie finie de I telle que $\left\| x(z_0) - \sum_{i \in J} x_i(z_0) \right\| < \varepsilon$. La fonction

$$z \to \left\| x(z) - \sum_{i \in J} x_i(z) \right\| = \left[\| x(z) \|^2 - \sum_{i \in J} \| x_i(z) \|^2 \right]^{1/2}$$

est continue, donc reste $< \varepsilon$ dans un voisinage de z_0.

PROPOSITION 16. — *Soit $\mathcal{E} = ((H(z)), \Gamma)$ un champ continu d'espaces hilbertiens sur B. Soit I un ensemble. Supposons que, pour tout $z \in B$, $H(z)$ soit somme hilbertienne de sous-espaces $H_i(z)$ $(i \in I)$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *pour tout $i \in I$, les $H_i(z)$ définissent un sous-champ continu $\mathcal{E}_i$ de $\mathcal{E}$;*

(ii) *pour tout* $x \in \Gamma$ *et tout* $i \in I$, *le champ de vecteurs* $z \to P_{H_i(z)}\, x(z)$ *est continu*;

(iii) *pour tout* $x \in \Gamma$ *et tout* $i \in I$, *la fonction* $z \to \| P_{H_i(z)}\, x(z) \|$ *est continue.*

(ii) $\Rightarrow$ (i) : évident.

(i) $\Rightarrow$ (iii) : si (i) est vérifié, on a vu que $\mathcal{E}$ s'identifie à $\bigoplus \mathcal{E}_i$, et (iii) est vérifié d'après la proposition 15.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) : supposons (iii) vérifié; soient $x \in \Gamma$, $i \in I$, $z_0 \in B$, $\varepsilon > 0$, et $y \in \Gamma$ tel que $y(z_0) = P_{H_i(z_0)}\, x(z_0)$. On a

$$\begin{aligned}\| P_{H_i(z)} x(z) - y(z) \| &\leq \| P_{H_i(z)}(x(z) - y(z)) \| + \| y(z) - P_{H_i(z)} y(z) \| \\ &= \| P_{H_i(z)}(x(z) - y(z)) \| + [\| y(z) \|^2 - \| P_{H_i(z)} y(z) \|^2]^{1/2}.\end{aligned}$$

La dernière expression est fonction continue de z (puisque $x - y \in \Gamma$ et $y \in \Gamma$) et s'annule en z_0, donc est $\leq \varepsilon$ au voisinage de z_0. Donc le champ de vecteurs $z \to P_{H_i(z)}\, x(z)$ est continu. D'où la proposition.

Soient $\mathcal{E} = ((H(z)), \Gamma)$ un champ continu d'espaces hilbertiens, $\mathcal{E}' = ((H'(z)), \Gamma')$ un sous-champ continu de $\mathcal{E}$. On dit que $\mathcal{E}'$ est *facteur direct* de $\mathcal{E}$ s'il existe un sous-champ continu $\mathcal{E}''$ de $\mathcal{E}$ tel que $\mathcal{E} = \mathcal{E}' \oplus \mathcal{E}''$, c'est-à-dire si les $H(z) \ominus H'(z)$ définissent un sous-champ continu de $\mathcal{E}$. On pose alors $\mathcal{E}'' = \mathcal{E} \ominus \mathcal{E}'$.

Proposition 17. — *Soient* $\mathcal{E} = ((H(z)), \Gamma)$ *un champ continu d'espaces hilbertiens sur* B. *Soit* $\mathcal{E}' = ((H'(z)), \Gamma')$ *un sous-champ continu de rang fini de* $\mathcal{E}$. *Alors* $\mathcal{E}'$ *est facteur direct dans* $\mathcal{E}$.

D'après la proposition 16, la propriété à vérifier est de nature locale. On peut donc supposer $\mathcal{E}'$ trivial (*cf.* § 10, remarque). Il existe alors des éléments $x_1, \ldots, x_n$ de Γ' tels que, pour tout $z \in B$, les $x_i(z)$ constituent une base orthonormale de $H'(z)$. Soit $x \in \Gamma$. Le champ

$$z \to P_{H'(z)} x(z) = \sum_{i=1}^{n} (x(z) \mid x_i(z))\, x_i(z)$$

est continu. Il suffit alors d'appliquer la proposition 16.

Remarque 1. — Par contre, un champ trivial $\mathcal{E}$ de rang $\aleph_0$ peut admettre un sous-champ continu $\mathcal{E}'$ qui n'est pas facteur direct comme le montre tout de suite la proposition 11. Le sous-champ $\mathcal{E}'$ peut même être trivial (*cf.* théorème 5).

Remarque 2. — Soient $\mathcal{E} = ((H(z)), \Gamma)$ un champ continu d'espaces hilbertiens sur B, $\mathcal{E}' = ((H'(z)), \Gamma')$ un sous-champ continu, $i(z)$ l'injection canonique de $H'(z)$ dans $H(z)$, et $p(z) = i(z)^*$, qui est le projecteur orthogonal de $H(z)$ sur $H'(z)$. Posons $p = (p(z))_{z \in B}$,

$i = (i(z))_{z \in B}$, de sorte que i est un homomorphisme de $\mathcal{E}'$ dans $\mathcal{E}$. Alors les trois conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\mathcal{E}'$ est facteur direct de $\mathcal{E}$;

(ii) p est un homomorphisme de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}'$;

(iii) i est transposable.

En effet (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) est clair. Si (ii) est vérifié, $(1 - p(z))_{z \in B}$ est un homomorphisme de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$, donc les $H(z) \ominus H'(z)$ définissent un sous-champ continu de $\mathcal{E}$.

10. **Espace fibré principal défini par un champ de rang constant.** — Soient a un cardinal, et $\mathcal{E} = ((H(z)), \Gamma)$ un champ continu d'espaces hilbertiens sur B, de rang a. Soit E l'espace fibré vectoriel défini par $\mathcal{E}$, muni de sa projection $\pi : E \to B$. Soient H un espace hilbertien de dimension a, G le groupe unitaire de H, muni de la topologie forte (ou, ce qui revient au même, de la topologie faible). Nous allons montrer que E est un espace fibré *associé* à un espace fibré principal P de groupe G. En d'autres termes, nous allons construire un espace topologique P muni d'une projection $\rho : P \to B$, sur lequel G opère à droite, et vérifier que :

1° ρ est continue et ouverte;

2° les classes d'équivalence définies par G dans P sont les fibres $\rho^{-1}(z)$, G opérant de façon simplement transitive sur chaque fibre :

3° l'application $P \times G \to P$ est continue ;

4° si Δ est le sous-espace de $P \times P$ formé des couples (u, v) tels que $p(u) = p(v)$, l'application $\sigma : \Delta \to G$ définie par $\sigma(u, v) = g$ si $v = ug$ est continue.

5° G opérant sur $P \times H$ par $((u, \xi), g) \to (ug, g^{-1}\xi)$, E s'identifie à l'espace quotient de $P \times H$ par la relation d'équivalence que définit G.

Nous définirons l'ensemble P comme l'ensemble des isomorphismes $H \to H(z)$ (z variable dans B). Le groupe G opère à droite dans P par l'application $(U, V) \to UV$ de $P \times G$ dans P. L'ensemble P est muni d'une application naturelle surjective $\rho : P \to B$; pour tout $z \in B$, $\rho^{-1}(z)$ est l'ensemble des isomorphismes de H sur $H(z)$. Les classes d'équivalence définies par G dans P sont les ensembles $\rho^{-1}(z)$, et G opère de façon simplement transitive dans chaque $\rho^{-1}(z)$. L'ensemble P s'identifie à un ensemble d'applications de H dans l'espace topologique E; nous munirons P de la *topologie de la convergence simple* dans H. Soient $T_1, \ldots, T_n$ des tubes de E, et $\xi_1, \ldots, \xi_n$ des éléments de H; soit $W(T_1, \ldots, T_n; \xi_1, \ldots, \xi_n)$ l'ensemble des $U \in P$ tels que

$$U\xi_1 \in T_1, \ldots, U\xi_n \in T_n;$$

comme les tubes forment une base de la topologie de E, les ensembles de la forme $W(T_1, \ldots, T_n; \xi_1, \ldots, \xi_n)$ forment une base de la topologie de P; comme $U\xi_1, \ldots, U\xi_n$ ont même projection sur B, on peut de plus imposer à $T_1, \ldots, T_n$ d'avoir même projection sur B. On peut aussi imposer au système $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ d'être orthonormal, en écrivant $\xi_1, \ldots, \xi_n$ comme combinaisons linéaires de n vecteurs orthonormaux. Il est clair que ρ est une application continue de P sur B. Montrons que cette application est ouverte. Soient $U_0 \in W(T_1, \ldots, T_n; \xi_1, \ldots, \xi_n)$, où $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ est orthonormal, et $z_0 = \rho(U_0)$. Il s'agit de montrer que $\rho(W(T_1, \ldots, T_n; \xi_1, \ldots, \xi_n))$ est un voisinage de z_0; posons $T_i = T(Y, x_i, \varepsilon_i)$; on a $\| U_0\xi_i - x_i(z_0) \| < \varepsilon_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$; donc, pour tout z assez voisin de z_0 dans Y, il existe un système orthonormal $\eta_1, \ldots, \eta_n$ dans $H(z)$ tel que $\| \eta_i - x_i(z) \| < \varepsilon_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, autrement dit tel que $\eta_i \in T_i$; si U est un isomorphisme de H sur $H(z)$ tel que $U\xi_1 = \eta_1, \ldots, U\xi_n = \eta_n$, on a $U \in W(T_1, \ldots, T_n; \xi_1, \ldots, \xi_n)$, donc $z \in \rho(W(T_1, \ldots, T_n; \xi_1, \ldots, \xi_n))$. Ceci prouve bien que l'application ρ est ouverte.

Soient $U_0 \in P$, $V_0 \in G$, $\xi_1, \ldots, \xi_n \in H$, $\eta_i = U_0 V_0(\xi_i)$, T_i un tube contenant η_i. Soit $V \in G$ tel que $\| V\xi_i - V_0\xi_i \| \leq \varepsilon$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$. Pour tout $U \in P$, on a $\| UV\xi_i - UV_0\xi_i \| \leq \varepsilon$. D'autre part, $UV_0\xi_i \in T_i$ si U est assez voisin de U_0 dans P. Donc $UV\xi_i \in T_i$ pour U assez voisin de U_0 dans P et V assez voisin de V_0 dans G. Ceci prouve que l'application $(U, V) \rightarrow UV$ de $P \times G$ dans P est continue.

Soient $U_0 \in P$, $U'_0 \in P$, $V_0 \in G$ tels que $U_0 = U'_0 V_0$. Soient $\xi_1, \ldots, \xi_n \in H$, et $\varepsilon > 0$. Soit $T_i = T(Y, x_i, \varepsilon)$ un tube contenant $U_0\xi_i$. Si U est assez voisin de U_0, on a $U\xi_i \in T_i$; si U' est assez voisin de U'_0, on a $U' V_0\xi_i \in T_i$; si de plus $\rho(U) = \rho(U')$, on voit que $\| U\xi_i - U' V_0\xi_i \| < 2\varepsilon$, d'où $\| U'^{-1} U\xi_i - V_0\xi_i \| < 2\varepsilon$. Ainsi l'application $(U, U') \rightarrow U'^{-1} U$, définie sur l'ensemble Δ des couples $(U, U') \in P \times P$ tels que $\rho(U) = \rho(U')$, est une application continue de Δ dans G. Nous avons donc prouvé que P est un espace fibré principal de base B et de groupe G.

Soit r l'application $(U, \xi) \rightarrow U\xi$ de $P \times H$ sur E. Il est immédiat que cette application est continue. Montrons qu'elle est ouverte. Soient $U_0 \in P$, $\xi_0 \in H$, $z_0 = \rho(U_0)$. Soit β la boule ouverte de centre ξ_0 et de rayon $\varepsilon > 0$ dans H. Soient $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ un système orthonormal dans H, $x_1, \ldots, x_n$ des champs continus de vecteurs tels que $x_i(z_0) = U_0\xi_i$, Y un voisinage de z_0 dans B, et $T_i = T(Y, x_i, \varepsilon)$. Il s'agit de prouver que $r(W(T_1, \ldots, T_n; \xi_1, \ldots, \xi_n) \times \beta)$ est un voisinage de $U_0\xi_0$ dans E. Or soit x_0 un champ de vecteurs continu tel que $x_0(z_0) = U_0\xi_0$; et soit $(y_1(z), \ldots, y_n(z))$ le système déduit de $(x_1(z), \ldots, x_n(z))$ par orthonormalisation [en diminuant au besoin Y, on peut supposer les $x_i(z)$ linéairement indépendants pour tout $z \in Y$]; comme $(x_1(z_0), \ldots, x_n(z_0))$ est orthonormal, on a $\| y_i(z) - x_i(z) \| \rightarrow 0$ quand $z \rightarrow z_0$, donc

$y_i(z) \in T_i$ pour z assez voisin de z_0, et d'autre part

$$(y_i(z) \mid x_0(z)) \to (x_i(z_0) \mid x_0(z_0)) = (\xi_i \mid \xi_0).$$

Donc, étant donné $\varepsilon_1 > 0$, il existe un voisinage V de $U_0 \xi_0$ dans E possédant la propriété suivante : si $\eta \in V$, on a $\big| \|\eta\| - \|\xi_0\| \big| \leqq \varepsilon_1$ et il existe dans $H(\pi(\eta))$ un système orthonormal $(y_1, \ldots, y_n)$ tel que $y_i \in T_i$ et $|(y_i \mid \eta) - (\xi_i \mid \xi_0)| \leqq \varepsilon_1$ $(i = 1, \ldots, n)$. Si ε_1 a été pris assez petit, il existe donc un isomorphisme U de H sur $H(\pi(\eta))$ qui transforme ξ_i en y_i pour $i = 1, \ldots, n$, et tel que η soit l'image par U d'un élément de β; alors $U \in W(T_1, \ldots, T_n; \xi_1, \ldots, \xi_n)$, donc $\eta \in r(W(T_1, \ldots, T_n; \xi_1, \ldots, \xi_n) \times \beta)$. Ainsi, $V \subset r(W(T_1, \ldots, T_n; \xi_1, \ldots, \xi_n) \times \beta)$. L'application r est ouverte. Nous avons bien établi que E est un espace fibré associé à P.

Pour que $\mathcal{E}$ soit trivial, il faut et il suffit que P admette une section continue. La condition est évidemment nécessaire. Réciproquement, si P admet une section continue $z \to U(z)$, et si (ξ_λ) est une base orthonormale de H, les champs de vecteurs $z \to U(z)\xi_\lambda$ sont continus; pour tout $z \in B$, les $U(z)\xi_\lambda$ constituent une base orthonormale de $H(z)$, donc $\mathcal{E}$ est trivial.

Remarque. — Supposons $\mathcal{E}$ de rang *a fini*. Alors $\mathcal{E}$ est localement trivial, comme il résulte par orthonormalisation de la remarque du paragraphe 1. Par contre $\mathcal{E}$ n'est pas trivial en général; la théorie des espaces fibrés en fournit de nombreux exemples. Toutefois, si par exemple B est paracompact et contractile, P est trivial, donc $\mathcal{E}$ est trivial.

Dans le cas où $\mathcal{E}$ est de rang infini, nous verrons que la situation est très différente.

11. **Premier théorème de trivialité.**

LEMME 2. — *Soit H un espace hilbertien de dimension infinie. Il existe, pour tout $t \in [0, 1]$, un sous-espace vectoriel fermé H_t de H et, pour tout $t \in]0, 1]$, une application linéaire isométrique U_t de H_t sur H, avec les propriétés suivantes :*

(i) *le projecteur $P_t = P_{H_t}$ est une fonction fortement continue de $t \in [0, 1]$; $H_1 = H$, $H_0 = \{0\}$.*

(ii) *les opérateurs $U_t P_t$, U_t^{-1} sont des fonctions fortement continues de $t \in]0, 1]$; $U_1 = 1$.*

Supposons d'abord $\dim H = \aleph_0$, donc H identifiable à $L^2([0, 1])$. Soit H_t l'ensemble des $f \in L^2([0, 1])$ telles que $f(x) = 0$ pour $x \geqq t$. La propriété (*i*) est immédiate. Si $t \in]0, 1]$ et $f \in H_t$, on définit $U_t f \in H$ par

$$(U_t f)(x) = \sqrt{t}\, f(tx).$$

On a

$$\| U_t f \|^2 = \int_0^1 t \,| f(tx) |^2 \, dx = \int_0^t | f(x') |^2 \, dx' = \| f \|^2,$$

et il est clair que U_t est une application linéaire isométrique de H_t sur H; si $g \in H$, on a, pour $0 \leq x \leq t$,

$$(U_t^{-1} g)(x) = \frac{1}{\sqrt{t}} g\left(\frac{x}{t}\right).$$

Soit $f \in H$; on a

$$\| U_t P_t f - U_{t'} P_{t'} f \|^2 = \int_0^1 | \sqrt{t} f(tx) - \sqrt{t'} f(t'x) |^2 \, dx$$

et ceci tend vers zéro quand $t' \to t$. D'autre part

$$\begin{aligned} \| U_t^{-1} f - U_{t'}^{-1} f \|^2 &= 2 \| f \|^2 - 2 \operatorname{Re}(U_t^{-1} f \mid U_{t'}^{-1} f) \\ &= 2 \| f \|^2 - 2 \operatorname{Re} \int_0^{\inf(t, t')} \frac{1}{\sqrt{t}} f\left(\frac{x}{t}\right) \frac{1}{\sqrt{t'}} \overline{f\left(\frac{x}{t'}\right)} \, dx; \end{aligned}$$

si par exemple $t \leq t'$, on a donc

$$\| U_t^{-1} f - U_{t'}^{-1} f \|^2 = 2 \| f \|^2 - 2 \operatorname{Re} \int_0^1 \sqrt{\frac{t}{t'}} f(x') \overline{f\left(x' \frac{t}{t'}\right)} \, dx'$$

et ceci tend vers zéro quand $t' \to t$. D'où la propriété (ii).

Si maintenant $\dim H$ est un cardinal infini quelconque, on peut identifier H à un espace hilbertien $K \otimes K'$, où K et K' sont des espaces hilbertiens tels que $\dim K = \aleph_0$. Il existe dans K des opérateurs P_t, U_t avec les propriétés (i) et (ii), et il suffit de considérer les opérateurs $P_t \otimes 1$, $U_t \otimes 1$ dans H.

LEMME 3. — *Soient H un espace hilbertien de dimension infinie, G le groupe unitaire de H muni de la topologie forte. Alors G est contractile.*

Soient H_t, P_t, U_t avec les propriétés du lemme 1. Pour $U \in G$ et $t \in]0, 1]$, posons

$$\Phi(U, t) = (1 - P_t) + U_t^{-1} U U_t P_t;$$

l'opérateur $\Phi(U, t)$ induit l'application identique dans $H \ominus H_t$ et induit dans H_t l'opérateur unitaire restriction de $U_t^{-1} U U_t$. Donc, $\Phi(U, t) \in G$, et $\Phi(U, 1) = U$. Posons $\Phi(U, 0) = 1$. Il suffit de prouver que l'application Φ de $G \times [0, 1]$ dans G est continue. Sur $G \times]0, 1]$, ceci résulte aussitôt du lemme 1. D'autre part, supposons que $(U', t') \in G \times]0, 1]$ tende vers $(U, 0) \in G \times [0, 1]$. Alors $P_{t'}$ tend fortement vers zéro, et, pour tout $f \in H$, $\| U_{t'}^{-1} U U_{t'} P_{t'} f \| = \| P_{t'} f \| \to 0$, donc $\Phi(U', t')$ tend fortement vers $1 = \Phi(U, 0)$.

LEMME 4. — *Soient E un espace fibré localement trivial, F sa fibre, B sa base. On suppose F contractile et B paracompact. Alors, le faisceau $\mathcal{F}$ des germes de sections continues de E est mou. En particulier, E admet une section continue définie sur B.*

Soient $b \in B$ et U un voisinage ouvert de b tel que E soit trivial au-dessus de U. Soient V une partie fermée de B contenue dans U et s une section continue de $\mathcal{F}$ au-dessus de V. D'après [7], théorème 341, il suffit de prouver que s peut se prolonger en une section continue de $\mathcal{F}$ au-dessus de U. D'après [7], théorème 331, s se prolonge à un voisinage de V; autrement dit, s est définie par une section continue t de E au-dessus d'un voisinage V' de V, qu'on peut supposer contenu dans U. Les sections continues de E au-dessus de U s'identifient aux applications continues de U dans F. Soit V'' un voisinage de V tel que $\overline{V''} \subset V'$. D'après [17], exposé 1, théorème 1, $t' \mid V''$ se prolonge en une section continue de E au-dessus de U. Cette section définit une section continue de $\mathcal{F}$ au-dessus de U qui prolonge s.

THÉORÈME 1. — *Soit $\mathcal{E}$ un champ continu d'espaces hilbertiens sur B, de rang infini. Si $\mathcal{E}$ est localement trivial et B paracompact, $\mathcal{E}$ est trivial.*

Soit P l'espace fibré principal construit à partir de $\mathcal{E}$ comme au paragraphe 10. Puisque $\mathcal{E}$ est localement trivial, P est localement trivial. Puisque $\mathcal{E}$ est de rang infini, le groupe de P est contractile (lemme 3). D'après le lemme 4, P admet une section continue définie sur B. Donc $\mathcal{E}$ est trivial.

12. **Grassmanniennes infinies.**

— Soit H un espace hilbertien. Nous noterons G l'ensemble des projecteurs (orthogonaux) dans H. Si l'on munit G de la topologie uniforme, on obtient un espace métrisable G_u. Si l'on munit G de la topologie forte (ou, ce qui revient au même, de la topologie faible), on obtient un espace topologique G_f qui est métrisable quand $\dim H \leqq \aleph_0$. On dira que G_u et G_f sont la *grassmannienne uniforme* et la *grassmannienne forte* de H.

Soit $\mathcal{E}_0$ le champ constant sur G_u défini par H. Pour tout $z \in G_u$, posons $H(z) = z(H)$. Alors les $H(z)$ définissent un sous-champ continu $\mathcal{E}$ de $\mathcal{E}_0$. En effet, pour tout $\zeta \in H$, l'application $z \to z(\zeta)$ est un champ continu relatif à $\mathcal{E}_0$, et $z(\zeta) \in H(z)$ pour tout $z \in G_u$; ceci prouve notre assertion. On voit en même temps que, si $\dim H \leqq \aleph_0$, $\mathcal{E}$ est séparable. Nous dirons que $\mathcal{E}$ est le *champ canonique* sur G_u. Remarquons que les $H \ominus H(z)$ définissent aussi un sous-champ continu $\mathcal{E}'$ de $\mathcal{E}_0$, et que $\mathcal{E} \oplus \mathcal{E}' = \mathcal{E}_0$.

De même, soit $\mathcal{O}_0$ le champ constant sur G_f défini par H. Les $H(z)$ et les $H \ominus H(z)$ définissent des sous-champs continus $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$ de $\mathcal{O}_0$, tels que $\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}' = \mathcal{O}_0$. Nous dirons que $\mathcal{O}$ est le *champ canonique* sur G_f.

Si $\dim H \leqq \aleph_0$, ce champ est séparable. Les champs $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ sont les images réciproques de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ pour l'application identique (continue) de G_u dans G_f.

Si Y est une partie de G_u, $\mathcal{E} \mid Y$ est le sous-champ du champ constant sur Y correspondant à H défini par les $H(z)$ (§ 6); autrement dit, les champs de vecteurs continus de $\mathcal{E} \mid Y$ sont les applications continues x de Y dans H telles que $x(z) \in H(z)$ pour tout $z \in Y$. On a une remarque analogue pour G_f.

Soient B un espace topologique, $\mathcal{H}_0$ le champ constant sur B défini par H. Soit $\mathcal{H} = ((K(z)), \Gamma)$ un sous-champ continu facteur direct de $\mathcal{H}_0$. Posons, pour tout $z \in B$, $\varphi(z) = P_{K(z)} \in G_f$. D'après la proposition 16, φ est une application continue de B dans G_f. Pour tout $z \in B$, on a $K(z) = H(\varphi(z))$. Soit x un champ de vecteurs continu relativement à $\mathcal{D}$; alors $z \to x(\varphi(z))$ est une application continue de B dans H telle que $x(\varphi(z)) \in K(z)$ pour tout $z \in B$, donc est un champ de vecteurs continu relativement à $\mathcal{H}$. Soit $\mathcal{H}'$ le champ continu image réciproque de $\mathcal{D}$ par φ. On a $\mathcal{H}' = ((K(z)), \Gamma')$. D'après ce qui précède, il existe un ensemble $\Delta \subset \Gamma \cap \Gamma'$ qui est total relativement à $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$. Donc les applications identiques des $K(z)$ définissent un isomorphisme de $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{H}'$ (prop. 6). Ainsi, *on peut identifier* $\mathcal{H}$ *à* $\varphi^*(\mathcal{D})$.

THÉORÈME 2. — *Soient H un espace hilbertien, G_u la grassmannienne uniforme de H, $\mathcal{E}$ le champ canonique sur G_u, a un cardinal infini, B l'ensemble des éléments de G_u qui sont de rang a. Alors $\mathcal{E} \mid B$ est trivial.*

L'espace B est métrisable, donc paracompact. D'après le théorème 1, il suffit de prouver que $\mathcal{E} \mid B$ est localement trivial. Soit $z_0 \in B$. Soit B' l'ensemble des $z \in G_u$ tels que $\| z - z_0 \| < 1$; pour $z \in B'$, la restriction T_z de z à $H(z_0)$ est un isomorphisme topologique de $H(z_0)$ sur $H(z)$ ([16], p. 132), d'où $z \in B$. L'application $z \to z z_0$ est continue pour la topologie uniforme, donc aussi l'application $z \to T_z$, donc aussi les fonctions $z \to \| T_z \|$, $z \to \| T_z^{-1} \|$. L'adjoint de T_z est la restriction de z_0 à $H(z)$, car, pour $\xi \in H(z)$ et $\xi_0 \in H(z_0)$, on a

$$(z\xi_0 \mid \xi) = (\xi_0 \mid \xi) = (\xi_0 \mid z_0 \xi).$$

Lorsque $z \to u(z)$ est une application continue de B' dans H telle que $u(z) \in H_0(z)$ [resp. $H(z)$] pour tout $z \in B'$, alors $z \to T_z u(z)$ [resp. $z \to T_z^*(z)$] est une application continue de B' dans H. Il résulte de là que $(T_z)_{z \in B'}$ est un isomorphisme au sens faible de $\mathcal{H}$ [champ constant sur B' défini par $H(z_0)$] sur $\mathcal{E} \mid B'$, et que cet isomorphisme est transposable. Le théorème résulte alors de ce qu'on a dit au paragraphe 9.

LEMME 5. — *Soient H un espace hilbertien, n un cardinal fini, B l'ensemble des projecteurs de rang n dans H. Sur B, les topologies forte et uniforme coïncident.*

Soient $z_0 \in B$ et $\varepsilon > 0$. Soit $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ une base orthonormale de $z_0(H)$. Si $z \in B$ est suffisamment voisin de z_0 pour la topologie forte, $\| z\xi_i - \xi_i \|$ est aussi petit qu'on veut, et les $z\xi_i$ constituent une base de $z(H)$; en orthonormalisant les $z\xi_i$, on voit qu'il existe un voisinage fort V de z_0 dans B tel que, si $z \in V$, il existe dans $z(H)$ une base orthonormale $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ telle que $\| \eta_i - \xi_i \| \leq \varepsilon$ $(i = 1, \ldots, n)$. Soit $\xi \in H$ avec $\| \xi \| \leq 1$. On a, pour $z \in V$,

$$\| z\xi - z_0\xi \| = \left\| \sum_{i=1}^{n} (\xi \mid \eta_i)\eta_i - (\xi \mid \xi_i)\xi_i \right\| \leq \sum_{i=1}^{n} |(\xi \mid \eta_i)| \, \| \eta_i - \xi_i \|$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} |(\xi \mid \eta_i - \xi_i)| \, \| \xi_i \| \leq 2n\varepsilon.$$

D'où le lemme.

Le lemme suivant sera complété plus loin (corollaire 1 du théorème 3).

LEMME 6. — *Soient H un espace hilbertien de dimension infinie, G_f la grassmannienne forte de H, $\mathcal{Q}$ le champ canonique sur G_f, n un cardinal fini, Y l'ensemble des $z \in G_f$ tels que $z(H)$ soit de codimension n. Alors $\mathcal{Q} \mid Y$ est trivial.*

D'après le théorème 2, il existe pour tout $z \in Y$ une base orthonormale $(\xi_i(z))_{i \in I}$ de $z(H)$ telle que les applications $z \to \xi_i(z)$ de Y dans H soient continues pour la topologie uniforme. D'après le lemme 5, la topologie uniforme coïncide avec la topologie forte sur Y, puisque l'application $z \to 1 - z$ est un homéomorphisme, à la fois pour la topologie uniforme et pour la topologie forte, de Y sur l'ensemble des projecteurs de rang n de H. Donc les applications $z \to \xi_i(z)$ sont des champs de vecteurs continus relativement à $\mathcal{Q} \mid Y$.

PROPOSITION 18. — *Soient $\mathcal{E}$ un champ continu d'espaces hilbertiens, $\mathcal{E}'$ un sous-champ continu de rang fini n. Si $\mathcal{E}$ est trivial de rang infini, $\mathcal{E} \ominus \mathcal{E}'$ est trivial.*

On peut supposer que $\mathcal{E}$ est le champ constant sur B défini par un espace hilbertien H de dimension infinie. Pour tout sous-espace vectoriel fermé K de H de codimension n, soit $(\xi_i(K))_{i \in I}$ une base orthonormale de K telle que les applications $P_K \to \xi_i(K)$ soient continues pour la topologie forte (lemme 6). Pour tout $z \in B$, soit $K(z)$ l'espace hilbertien associé à z dans le champ $\mathcal{E} \ominus \mathcal{E}'$. L'application $z \to P_{K(z)}$ est fortement continue, donc les applications $z \to \xi_i(K(z))$ sont continues; et, pour tout $z \in B$, les $\xi_i(K(z))$ constituent une base orthonormale de $K(z)$.

13. Deuxième théorème de trivialité.

LEMME 7. — *Soient $\mathcal{E}$ un champ continu d'espaces hilbertiens sur B, Y une partie fermée de B, x un champ de vecteurs continu partout non nul sur Y. On suppose $\mathcal{E}$ trivial de rang infini, et B paracompact. Alors x se prolonge en un champ de vecteurs continu partout non nul sur B.*

On peut supposer que $\mathcal{E}$ est le champ constant sur B défini par un espace hilbertien H de dimension infinie. Soit x' un prolongement continu de x à B (prop. 7). L'ensemble des $z \in B$ tels que $x'(z) \neq 0$ est un voisinage ouvert de Y. L'espace $H - \{0\}$ est contractile ([11], théorème 3; ceci peut aussi se démontrer par un procédé analogue à celui des lemmes 2-3). D'après [17], exposé 1, théorème 1, il existe une application continue de B dans $H - \{0\}$ qui coïncide avec x' sur Y.

LEMME 8. — *Soient $\mathcal{E}$ un champ continu d'espaces hilbertiens sur B, Y une partie fermée de B, x un champ de vecteurs continu partout non nul sur Y. On suppose B paracompact, $\mathcal{E}$ de rang infini, et $\mathcal{E}$ trivial sur B_1, $B_2 - B_1$, $B_3 - B_2$, ..., où $(B_1, B_2, \ldots)$ est une suite croissante de parties fermées de B de réunion B. Alors x se prolonge en un champ de vecteurs continu partout non nul sur B.*

Supposons construits un voisinage fermé V_n de $Y \cup B_n$ dans B et un champ de vecteurs continu x_n partout non nul sur V_n prolongeant x. Soit W_n l'intérieur de V_n. Alors $B_{n+1} \cap (V_n - W_n)$ est une partie fermée de $B_{n+1} \cap (B - W_n)$, et $\mathcal{E} \mid B_{n+1} \cap (B - W_n)$ est trivial. D'après le lemme 7, il existe un champ de vecteurs continu partout non nul x'_n sur $B_{n+1} \cap (B - W_n)$ qui coïncide avec x_n sur $B_{n+1} \cap (V_n - W_n)$. Soit x''_n le champ de vecteurs qui coïncide avec x_n sur V_n et avec x'_n sur $B_{n+1} \cap (B - W_n)$; il est continu (prop. 8) et partout non nul sur $V_n \cup B_{n+1}$; d'après la proposition 7, il se prolonge en un champ de vecteurs continu sur B; il existe un voisinage fermé V_{n+1} de $V_n \cup B_{n+1}$ dans lequel ce prolongement est non nul. On a donc construit un voisinage fermé V_{n+1} de $Y \cup B_{n+1}$ contenant V_n et un champ de vecteurs continu x_{n+1} partout non nul sur V_{n+1} prolongeant x_n. Continuant cette construction de proche en proche, les x_n définissent un champ de vecteurs continu partout non nul sur B qui prolonge x.

LEMME 9. — *Soient $\mathcal{E}$, B, B_1, B_2, ... comme au lemme 8. Soient x_0 un champ de vecteurs continu sur B, et $\varepsilon > 0$. Il existe un champ de vecteurs continu partout non nul x sur B tel que $\| x(z) - x_0(z) \| \leq \varepsilon$ partout sur B.*

Soit Y l'ensemble des $z \in B$ tel que $\| x_0(z) \| \geq \frac{\varepsilon}{2}$; c'est une partie fermée de B. Soit y un champ de vecteurs continu partout non nul sur B prolongeant $x_0 \mid Y$ (lemme 8). Posons $y'(z) = \| y(z) \|^{-1} y(z)$. On a $\| y'(z) \| = 1$, et $x_0(z) = \| x_0(z) \| \, y'(z)$ sur Y. Soit f la fonction égale à $\| x_0(z) \|$ sur Y et à $\frac{\varepsilon}{2}$ sur $B - Y$; comme $\| x_0(z) \| = \frac{\varepsilon}{2}$ en tout point frontière de Y, f est continue. Posons $x(z) = f(z)\, y'(z)$. Alors x est un champ de vecteurs continu, $x(z) \neq 0$ partout, $x(z) = x_0(z)$ sur Y, et $\| x(z) - x_0(z) \| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \| x_0(z) \| \leq \varepsilon$ sur $B - Y$.

Remarque 1. — Dans les trois lemmes précédents, on peut remplacer les espaces hilbertiens par des espaces de Banach; en effet, la sphère unité d'un espace de Banach de dimension infinie est contractile ([3], corollaire 6.4).

LEMME 10. — *Soient $\mathcal{E}$, B, B_1, B_2, ... comme au lemme 8. Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des champs de vecteurs continus orthonormaux sur B, y un champ de vecteurs continu, et $\varepsilon > 0$. Il existe un champ de vecteurs continu x_{n+1} possédant les propriétés suivantes :*

(i) *$x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ sont orthonormaux sur B;*

(ii) *il existe des fonctions complexes continues $f_1, f_2, \ldots, f_{n+1}$ sur B telles que $\left\| \sum_{i=1}^{n+1} f_i(z) x_i(z) - y(z) \right\| \leq \varepsilon$ partout sur B.*

Pour tout $z \in B$, soient $H(z)$ l'espace de Hilbert associé à z dans $\mathcal{E}$, $H'(z)$ le sous-espace vectoriel engendré par $x_1(z), \ldots, x_n(z)$, et $H''(z) = H(z) \ominus H'(z)$. Les $H'(z)$ définissent un sous-champ continu $\mathcal{E}'$ facteur direct de $\mathcal{E}$ (prop. 17) et $\mathcal{E} \ominus \mathcal{E}' \mid B_1$, $\mathcal{E} \ominus \mathcal{E}' \mid B_2 - B_1$, $\mathcal{E} \ominus \mathcal{E}' \mid B_3 - B_2$, ... sont triviaux (prop. 18). Soit $y'(z) = P_{H''(z)}\, y(z)$. D'après le lemme 9 appliqué à $\mathcal{E} \ominus \mathcal{E}'$ et à y', il existe un champ de vecteurs continu x partout non nul relatif à $\mathcal{E}''$ tel que $\| x(z) - y'(z) \| < \varepsilon$ pour tout z. Posons $x_{n+1}(z) = \| x(z) \|^{-1} x(z)$. La propriété (i) est satisfaite. D'autre part

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} (y(z) \mid x_i(z))\, x_i(z) + \| x(z) \|\, x_{n+1}(z) - y(z) \right\|$$
$$= \| y(z) - y'(z) + x(z) - y(z) \| = \| x(z) - y'(z) \| \leq \varepsilon.$$

THÉORÈME 3. — *Soit $\mathcal{E} = ((H(z)), \Gamma)$ un champ continu d'espaces hilbertiens sur B, séparable de rang $\aleph_0$. Soit $(B_1, B_2, \ldots)$ une suite croissante de parties fermées de B, de réunion B. On suppose B paracompact et $\mathcal{E}$ trivial sur B_1, $B_2 - B_1$, $B_3 - B_2$, ... Alors $\mathcal{E}$ est trivial.*

Soit $(y_1, y_2, \ldots)$ une suite d'éléments de Γ tels que, pour tout $z \in B$, les $y_i(z)$ soient partout denses dans $H(z)$. Grâce au lemme 10, on peut construire par récurrence une suite $(x_1, x_2, \dots)$ d'éléments de Γ possédant les propriétés suivantes :

1° pour tout $z \in B$, le système des $x_i(z)$ est orthonormal;

2° il existe des fonctions complexes continues $f_{1n}, f_{2n}, \dots, f_{nn}$ sur B telles que $\left\| \sum_{i=1}^{n} f_{in}(z)\, x_i(z) - y_n(z) \right\| \leq \frac{1}{n}$ partout sur B.

Pour tout $z \in B$, les combinaisons linéaires des $x_i(z)$ sont partout denses dans $H(z)$, donc $(x_1(z), x_2(z), \dots)$ est une base orthonormale de $H(z)$. D'où le théorème.

COROLLAIRE 1. — *Soient H un espace hilbertien de dimension $\aleph_0$, G_f la grassmannienne forte de H, $\mathcal{O}$ le champ canonique sur G_f, B l'ensemble des $z \in G_f$ tels que $z(H)$ soit de codimension finie. Alors $\mathcal{O} \mid B$ est trivial.*

L'espace G_f est métrisable, donc B est paracompact. Soit Y_n l'ensemble des $z \in G_f$ tels que $z(H)$ soit de codimension n $(n = 0, 1, 2, \dots)$. Alors $\mathcal{O} \mid Y_n$ est trivial (lemme 6). Le champ $\mathcal{O} \mid B$ est séparable et de rang $\aleph_0$. L'ensemble des projecteurs de rang $\leq n$ (n fini) est fermé dans G_f, autrement dit $Y_0 \cup Y_1 \cup \dots \cup Y_n$ est fermé dans G_f. Le théorème 3 prouve alors que $\mathcal{O} \mid B$ est trivial.

Remarquons que, sur B, la topologie forte est distincte de la topologie uniforme, de sorte que le corollaire 1 ne pourrait s'obtenir, comme le lemme 6, par simple application du théorème 2.

COROLLAIRE 2. — *Soit $\mathcal{E}$ un champ continu d'espaces hilbertiens sur B, séparable, de rang $\aleph_0$. Soit $(B_\alpha)_{\alpha \leq \lambda}$ une famille bien ordonnée croissante de parties ouvertes paracompactes de B telles que $B_0 = \emptyset$, $B_\lambda = B$, et $B_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} B_\beta$ quand α est un ordinal limite. On suppose $\mathcal{E}$ trivial sur chaque sous-ensemble $B_{\alpha+1} - B_\alpha$. Alors $\mathcal{E}$ est trivial.*

Soit $\alpha > 0$ un ordinal $\leq \lambda$. Supposons $\mathcal{E} \mid B_\beta$ trivial pour $\beta < \alpha$. Si α est un ordinal limite, on a $B_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} B_\beta$, donc $\mathcal{E} \mid B_\alpha$ est trivial d'après le théorème 1. Sinon, on a $\alpha = \alpha' + 1$, et les champs $\mathcal{E} \mid B_{\alpha'}$, $\mathcal{E} \mid B_\alpha - B_{\alpha'}$ sont triviaux; donc $\mathcal{E} \mid B_\alpha$ est trivial d'après le théorème 3 appliqué à la suite de deux parties $B_\alpha - B_{\alpha'}$, B_α, fermées dans B_α. Le corollaire 2 s'obtient alors par induction transfinie.

Remarque 2. — La proposition 13 prouve qu'on ne peut supprimer, dans le théorème 3, l'hypothèse que $\mathcal{E}$ est séparable.

14. Somme d'un champ quelconque et d'un champ trivial.

LEMME 11. — *Soient $\mathcal{E} = ((H(z)), \Gamma)$, $\mathcal{E}' = ((H'(z)), \Gamma')$ deux champs continus d'espaces hilbertiens sur B, et $\mathcal{E}'' = \mathcal{E} \oplus \mathcal{E}' = ((H''(z)), \Gamma'')$.*

On suppose $\mathcal{E}$ trivial de rang infini et B paracompact. Soient $x_0 \in \Gamma''$ et $\varepsilon > 0$. Il existe un $x \in \Gamma''$ tel que, pour tout $z \in B$, on ait $P_{H(z)}\, x(z) \neq 0$ et $\| x(z) - x_0(z) \| \leq \varepsilon$.

Soit $y(z) = P_{H(z)}\, x_0(z)$. On a $y \in \Gamma$. D'après le lemme 9, il existe un $y' \in \Gamma$ tel que $y'(z) \neq 0$ et $\| y'(z) - y(z) \| \leq \varepsilon$ partout sur B. Soit $x(z) = y'(z) + P_{H'(z)}\, x_0(z)$. Il est clair que x possède les propriétés requises.

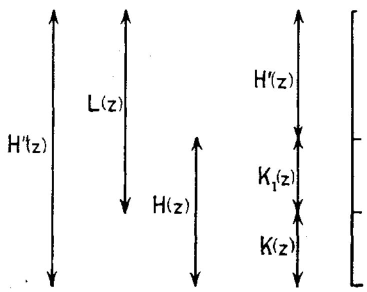
LEMME 12. — *Soient $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$, $\mathcal{E}''$ comme au lemme 11. Soient $x_1, \ldots, x_n \in \Gamma''$ des champs orthonormaux tels que les $P_{H(z)} x_i(z)$ $(1 \leq i \leq n)$ soient linéairement indépendants pour tout $z \in B$. Soient $y \in \Gamma''$ et $\varepsilon > 0$. Il existe un $x_{n+1} \in \Gamma''$ possédant les propriétés suivantes :*

(i) *$x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ sont orthonormaux sur B;*

(ii) *les $P_{H(z)}\, x_i(z)$ $(1 \leq i \leq n+1)$ sont linéairement indépendants pour tout z;*

(iii) *il existe des fonctions complexes continues $f_1, f_2, \ldots, f_{n+1}$ sur B telles que $\left\| \sum_{i=1}^{n+1} f_i(z)\, x_i(z) - y(z) \right\| \leq \varepsilon$ partout sur B.*

Soit $K_1(z)$ le sous-espace vectoriel de $H(z)$ engendré par les $P_{H(z)}\, x_i(z)$ $(1 \leq i \leq n)$. Comme les $P_{H(z)}\, x_i(z)$ sont linéairement indépendants, les $K_1(z)$ et les $K(z) = H(z) \ominus K_1(z)$ définissent des sous-champs continus ω_1 et ω de $\mathcal{E}$ tels que $\mathcal{E} = \omega \oplus \omega_1$ (prop. 17) et ω est trivial de rang infini (prop. 18). Les $L(z) = H'(z) \oplus K_1(z)$ définissent le champ $\mathcal{E}' \oplus \omega_1$. On a $x_1(z), \ldots, x_n(z) \in L(z)$; soit $K'(z)$ le sous-espace vectoriel de $L(z)$ orthogonal aux $x_i(z)$; d'après la proposition 17, les $K'(z)$



définissent un sous-champ continu ω' de $\mathcal{E}' \oplus \omega_1$. Le sous-espace vectoriel de $H''(z)$ orthogonal aux $x_i(z)$ est $K''(z) = K(z) \oplus K'(z)$; les $K''(z)$ définissent le sous-champ continu $\omega'' = \omega \oplus \omega'$ de $\mathcal{E}'' = \mathcal{E} \oplus \mathcal{E}'$. On a $y(z) = \sum_{i=1}^{n} (y(z) \mid x_i(z))\, x_i(z) + y'(z)$, avec

$y'(z) \in K''(z)$. D'après le lemme 11 appliqué à $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$, $\mathcal{D}''$, y' et ε, il existe un $x \in \Gamma''$ possédant les propriétés suivantes :

1° $x(z) \in K''(z)$ pour tout z;

2° $P_{K(z)}\, x(z) \neq 0$ pour tout z;

3° $\| x(z) - y'(z) \| \leqq \varepsilon$ pour tout z.

Soit $x_{n+1}(z) = x(z)/\| x(z) \|$. La propriété (i) est satisfaite. On a $P_{K(z)}\, P_{H(z)}\, x(z) = P_{K(z)}\, x(z) \neq 0$, donc $P_{H(z)}\, x(z)$ est linéairement indépendant des $P_{H(z)}\, x_i(z)$ $(1 \leqq i \leqq n)$, donc les $P_{H(z)}\, x_i(z)$ $(1 \leqq i \leqq n+1)$ sont linéairement indépendants. Enfin, on a

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} (y(z) \mid x_i(z))\, x_i(z) + \| x(z) \|\, x_{n+1}(z) - y(z) \right\|$$
$$= \| y(z) - y'(z) + x(z) - y(z) \| = \| x(z) - y'(z) \| \leqq \varepsilon.$$

THÉORÈME 4. — *Soit $\mathcal{E}'$ un champ continu d'espaces hilbertiens, séparable, sur l'espace paracompact B. Si $\mathcal{E}$ est un champ trivial de rang infini sur B, $\mathcal{E} \oplus \mathcal{E}'$ est isomorphe à $\mathcal{E}$ (donc trivial).*

Si $\mathcal{E}$ est séparable, $\mathcal{E} \oplus \mathcal{E}'$ est séparable et le lemme 12 permet de construire, comme dans la démonstration du théorème 3, une suite de champs continus $x_1, x_2, \ldots$ relatifs à $\mathcal{E} \oplus \mathcal{E}'$ qui forment en chaque point de B une base orthonormale de l'espace hilbertien correspondant. Donc $\mathcal{E} \oplus \mathcal{E}'$ est isomorphe à $\mathcal{E}$. Dans le cas général, on peut écrire $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2$, où $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ sont triviaux et $\mathcal{E}_1$ de rang $\aleph_0$. Alors $\mathcal{E} \oplus \mathcal{E}'$ est isomorphe à $(\mathcal{E}' \oplus \mathcal{E}_1) \oplus \mathcal{E}_2$, donc à $\mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}$ d'après ce qui précède.

Remarque 1. — La proposition 13 montre facilement qu'on ne peut supprimer, dans le théorème 4, l'hypothèse que $\mathcal{E}$ est séparable.

COROLLAIRE 1. — *Soit $\mathcal{E}$ un champ continu d'espaces hilbertiens, séparable, sur l'espace paracompact B. Soient H un espace hilbertien de dimension $\aleph_0$, G_f sa grassmannienne forte, $\mathcal{D}$ le champ canonique sur G_f. Il existe une application continue φ de B dans G_f telle que $\mathcal{E}$ soit isomorphe à l'image réciproque de $\mathcal{D}$ par φ.*

Soit $\mathcal{E}_1$ le champ constant sur B défini par H. D'après le théorème 4, on peut supposer que $\mathcal{E}$ est un sous-champ continu facteur direct de $\mathcal{E}_1$. Le corollaire résulte alors de ce qu'on a dit au paragraphe 12.

Remarque 2. — Le corollaire 1 est l'analogue d'un résultat connu sur les espaces fibrés vectoriels de rang fini. Mais ici, deux champs $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ sur B non isomorphes peuvent donner lieu à des applications φ et φ' homotopes (*cf.* corollaire 1 du théorème 6). D'ailleurs, le lemme 2 permet de montrer facilement que G_f est contractile.

COROLLAIRE 2. — *Soient* $\mathcal{E} = ((H(z)), \Gamma)$ *un champ continu d'espaces hilbertiens sur* B, *séparable, et* $\mathcal{E}' = ((H'(z)), \Gamma')$ *un sous-champ continu de* $\mathcal{E}$. *Si* B *est métrisable,* $\mathcal{E}'$ *est séparable.*

Soit H_0 un espace hilbertien de dimension $\aleph_0$. D'après le théorème 4, on peut supposer que $\mathcal{E}$ est un sous-champ continu du champ constant sur B défini par H_0. L'application $z \to H'(z)$ de B dans l'ensemble des parties fermées de H_0 est semi-continue inférieurement (corollaire de la proposition 11). D'après [14], lemme 5.2, il existe une suite d'applications continues $x_i : B \to H_0$ telles que $x_i(z) \in H'(z)$ pour tout z et telles que, pour tout z, les $x(z)$ soient partout denses dans $H'(z)$. Donc $\mathcal{E}'$ est séparable.

Remarque 3. — La proposition 13 montre qu'on ne peut supprimer, dans le corollaire 2, l'hypothèse que B est métrisable.

COROLLAIRE 3. — *Soit* $\mathcal{E}$ *un champ continu, séparable, d'espaces hilbertiens, sur l'espace paracompact* B. *Soit* I *un ensemble infini. Pour tout* $i \in I$, *soit* $\mathcal{E}_i$ *un champ isomorphe à* $\mathcal{E}$. *Alors* $\bigoplus_{i \in I} \mathcal{E}_i$ *est trivial.*

On se ramène aussitôt au cas où Card $I = \aleph_0$. D'après le théorème 1, il suffit de prouver que $\bigoplus_{i \in I} \mathcal{E}_i$ est localement trivial. On peut donc supposer que $\mathcal{E} = \mathcal{E}' \oplus \mathcal{E}''$, où $\mathcal{E}'$ est trivial de rang 1. Alors $\mathcal{E}_i = \mathcal{E}'_i \oplus \mathcal{E}''_i$ où $\mathcal{E}'_i$ est trivial de rang 1 et $\mathcal{E}''_i$ est isomorphe à $\mathcal{E}''$. Donc $\bigoplus \mathcal{E}_i$ est isomorphe à $(\bigoplus \mathcal{E}'_i) \oplus (\bigoplus \mathcal{E}''_i)$. Or $\bigoplus \mathcal{E}''_i$ est séparable (car $\mathcal{E}''$ est séparable et Card $I = \aleph_0$), et $\bigoplus \mathcal{E}'_i$ est trivial de rang infini. Il suffit alors d'appliquer le théorème 4.

15. **Troisième théorème de trivialité.** — Nous allons d'abord rappeler un cas particulier du théorème 1.2 de [15]. Soit B un espace paracompact de dimension finie $\leq n$ (c'est-à-dire que, pour tout recouvrement ouvert fini de B, il existe un recouvrement ouvert fini plus fin d'ordre $\leq n$). Soient A une partie fermée de B, Y un espace métrique complet, φ une application semi-continue inférieurement de B dans l'ensemble des parties fermées non vides de Y. On suppose que, pour tout $z \in B$, $\varphi(z)$ est contractile. On suppose d'autre part l'existence d'un $\varepsilon_0 > 0$ tel que, pour tout $z \in B$ et toute boule ouverte β de rayon $\leq \varepsilon_0$ dans Y, $\varphi(z) \cap \beta$ soit contractile. Alors, si f est une application continue de A dans Y telle que $f(z) \in \varphi(z)$ pour tout $z \in Y$, f se prolonge en une application continue f' de B dans Y telle que $f'(z) \in \varphi(z)$ pour tout $z \in B$.

THÉORÈME 5. — *Soit* $\mathcal{E} = ((H(z)), \Gamma)$ *un champ continu séparable d'espaces hilbertiens sur* B, *de rang* $\aleph_0$. *Si* B *est paracompact de dimension finie,* $\mathcal{E}$ *est trivial.*

Soit H_0 un espace hilbertien de dimension $\aleph_0$. D'après le théorème 4, on peut supposer que $\mathcal{E}$ est un sous-champ continu du champ constant défini par H_0 sur B. Soit $\varphi(z)$ la sphère unité de $H(z)$. Le corollaire de la proposition 11 entraîne facilement que φ est une application semi-continue inférieurement de B dans l'ensemble des parties fermées non vides de H_0. Chaque $\varphi(z)$ est contractile ([11], théorème 3). L'intersection de toute $\varphi(z)$ et de toute boule ouverte de H_0 est contractile. Soient A une partie fermée de B et x un champ de vecteurs continu sur A (relativement à $\mathcal{E}$), partout non nul. Alors, d'après le résultat de MICHAEL rappelé plus haut, le champ $z \to \| x(z) \|^{-1}.x(z)$ se prolonge en un élément de Γ de norme 1 partout; donc x se prolonge en un élément de Γ partout non nul. A partir de là, le théorème 5 se démontre exactement par la même marche qui a fait passer du lemme 8 au théorème 3.

Répétons qu'on peut construire sur $[0, 1]$ un champ continu $\mathcal{E}$ d'espaces hilbertiens, de rang $\aleph_0$, non séparable; bien entendu, $\mathcal{E}$ est non trivial.

16. **Existence de champs non triviaux.**

LEMME 13. — *Soient H_0 un espace hilbertien de dimension 2, B la grassmannienne des sous-espaces vectoriels de dimension 1 de H_0, X l'espace fibré vectoriel canonique sur B, de rang 1. Soit k un entier ≥ 1. L'espace fibré vectoriel X^k, de rang k, admet B^k pour base. Il n'existe aucune section continue $s : B^k \to X^k$ telle que $s(b) \neq 0$ pour tout $b \in B^k$.*

La classe de Chern totale de X (*cf.* [10]) est $1 + \gamma$, où γ est un générateur de $H^2(B, \mathbf{Z})$. Soient $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k$ les projections canoniques de B^k sur les espaces facteurs. Posons $\pi_i^*(\gamma) = \gamma_i \in H^2(B^k, \mathbf{Z})$. L'espace fibré X^k est le produit fibré de $\pi_1^*(X), \ldots, \pi_k^*(X)$, donc sa classe de Chern totale est $(1 + \gamma_1) \ldots (1 + \gamma_k)$. Si X^k admet une section continue partout non nulle, X^k est le produit fibré d'un espace fibré trivial de rang 1, dont la classe de Chern totale est 1, par un espace fibré de rang $k - 1$, dont la classe de Chern totale c ne comporte pas de terme de degré $> 2k - 2$. Comme on doit avoir $(1 + \gamma_1) \ldots (1 + \gamma_k) = 1.c$, on en conclut que $\gamma_1 \gamma_2 \ldots \gamma_k = 0$, ce qui contredit la structure connue de l'anneau $H^*(B^k, \mathbf{Z})$.

THÉORÈME 6. — *Soient H_0 un espace hilbertien de dimension 2, B la grassmannienne des sous-espaces vectoriels de dimension 1 de H_0, $B^\infty = B \times B \times B \times \ldots$, $H = H_0 \oplus H_0 \oplus H_0 \oplus \ldots$, $\mathcal{E}$ le champ constant sur B^∞ défini par H. Pour tout $b = (b_1, b_2, \ldots) \in B^\infty$, soit*

$$H(b) = b_1 \oplus b_2 \oplus \ldots$$

qui est un sous-espace vectoriel fermé de H. Les $H(b)$ définissent un sous-champ continu de $\mathcal{E}$, soit $\mathcal{Q} = ((H(b)), \Delta)$. Alors tout $x \in \Delta$ s'annule au moins une fois.

L'application $b \to P_{H(b)}$ est fortement continue donc les $H(b)$ définissent bien un sous-champ continu de $\mathcal{E}$. Soit $x \in \Delta$. On a

$$x(b) = x(b_1, b_2, \ldots) = x_1(b) + x_2(b) + \ldots, \qquad \text{avec} \quad x_i(b) \in b_i \subset H_0.$$

Soit A_n l'ensemble des $b = (b_1, b_2, \ldots) \in B^\infty$ tels que

$$x_1(b) = x_2(b) = \ldots = x_n(b) = 0.$$

Pour tout $i > n$, fixons un point $b_i^0 \in B$. L'application

$$(b_1, \ldots, b_n) \to \sum_{i=1}^{n} x_i(b_1, \ldots, b_n, b_{n+1}^0, b_{n+2}^0, \ldots)$$

s'annule au moins une fois sur B^n (lemme 13). Donc $A_n \neq \emptyset$. Les A_n forment une suite décroissante de parties fermées de B^∞. Donc $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \neq \emptyset$, ce qui prouve le théorème.

Corollaire 1. — *Soit I l'intervalle $[0, 1]$. Il existe sur l'espace $X = I \times I \times I \times \ldots$ un champ continu d'espaces hilbertiens $\mathcal{E}$, séparable et de rang $\aleph_0$, tel que tout champ de vecteurs continu s'annule au moins une fois. En particulier, $\mathcal{E}$ est non trivial.*

Utilisons les notations du théorème 6. On peut identifier B^∞ à un sous-espace fermé de X. Pour $b \in X - B^\infty$, posons $K(b) = H$; pour $b \in B^\infty$, posons $K(b) = H(b)$. D'après le corollaire de la proposition 11, les $K(b)$ définissent un sous-champ continu $\mathcal{E}$ du champ constant sur X correspondant à H. D'après le corollaire 2 du théorème 4, $\mathcal{E}$ est séparable. Il est de rang $\aleph_0$. Si x est un champ de vecteurs continu relatif à $\mathcal{E}$ sur X, sa restriction à B^∞ s'annule au moins une fois (théorème 6).

Corollaire 2. — *Soient H un espace hilbertien de dimension $\aleph_0$, G_f sa grassmannienne forte, $\mathcal{F}$ le champ canonique sur G_f, R l'ensemble des $z \in G_f$ tels que $z(H)$ soit de dimension et de codimension infinies.*

(i) *Soit f une application continue de R dans H telle que $f(z) \in z(H)$ pour tout z; il existe $z_0 \in R$ tel que $f(z) = 0$.*

(ii) *Le champ $\mathcal{F} \mid R$ n'est localement trivial en aucun point de R.*

On peut identifier H à l'espace noté également H dans le théorème 6. L'application $b \to P_{H(b)}$ du théorème 6 est un homéomorphisme α de B^∞ sur une partie de R, de sorte que $\mathcal{F} \mid \alpha(B^\infty)$ s'identifie au champ $\mathcal{D}$ du théorème 6. Alors (i) résulte aussitôt du théorème 6. On voit que $\mathcal{F} \mid R$ n'est pas trivial. D'après le théorème 1, il existe un $z_0 \in R$ tel que $\mathcal{F} \mid R$ soit non localement trivial en z_0. Si $z \in R$, il existe un opérateur unitaire de H qui transforme $z(H)$ en $z_0(H)$; donc $\mathcal{F} \mid R$ est non localement trivial en z.

Remarque. — On rapprochera ce dernier résultat du théorème 2 et du corollaire 1 du théorème 3.

On voit que l'hypothèse de dimension finie dans le théorème 5 était indispensable.

Le corollaire 1 du théorème 6 permet, avec le paragraphe 10, de construire un espace fibré principal dont le groupe est métrisable et contractile, dont la base est compacte, métrisable et contractile, et qui n'est pas localement trivial.

17. **Un autre exemple.** — Le théorème 4 conduit au problème suivant : soit $\mathcal{E}$ un champ continu séparable d'espaces hilbertiens, admettant un sous-champ continu trivial de rang $\aleph_0$; alors $\mathcal{E}$ est-il trivial ? Nous allons voir que la réponse est négative. Nous obtiendrons en même temps un exemple de champ non trivial très différent des exemples construits au paragraphe 16.

Soient H_0 un espace hilbertien de dimension infinie, B la boule unité de H_0 munie de la topologie faible, $\mathcal{H}_0$ le champ constant sur B défini par H_0. Soit Γ_0 l'ensemble des applications continues de B dans H_0. Soit $\mathbf{C}e$ un espace hilbertien de dimension 1 engendré par un vecteur e tel que $\| e \| = 1$. Pour tout $z \in B$, posons

$$\begin{cases} H(z) = H_0 & \text{si } \| z \| = 1, \\ H(z) = H_0 \oplus \mathbf{C}e & \text{si } \| z \| < 1; \end{cases}$$
$$x(z) = z + (1 - \| z \|^2)^{1/2} e.$$

Soit Λ l'ensemble des champs de vecteurs de la famille $(H(z))$ de la forme $y + \lambda x$, où $y \in \Gamma_0$, $\lambda \in \mathbf{C}$. L'ensemble Λ vérifie la condition $(\mathrm{T_{II}})$ de la proposition 3, car

$$\| (y + \lambda x)(z) \|^2 = \| y(z) \|^2 + 2\operatorname{Re}(y(z) \mid \lambda z) + |\lambda|^2.$$

D'autre part, Λ vérifie évidemment la condition $(\mathrm{T_I})$. Soit $\mathcal{H} = ((H(z)), \Gamma)$ le champ continu d'espaces hilbertiens sur B tel que $\Gamma \supset \Lambda$. Alors $\mathcal{H}_0$ est un sous-champ continu de $\mathcal{H}$, puisque $\Gamma \supset \Gamma_0$. Il est clair que $\mathcal{H}$ est séparable. On va prouver que $\mathcal{H}$ n'est pas trivial, ce qui résoudra le problème posé.

LEMME 14. — *Il n'existe aucun $y \in \Gamma$ tel que $x(z)$ et $y(z)$ soient linéairement indépendants pour tout $z \in B$.*

D'après la proposition 2 et le corollaire de la proposition 12, s'il existe un $y \in \Gamma$ tel que $x(z)$ et $y(z)$ soient linéairement indépendants pour tout $z \in B$, il en existe un de la forme $y_0 + fx$ avec $y_0 \in \Gamma_0$, $f \in \mathcal{C}(B)$. Alors y_0 est une application continue de B (toujours munie de la topologie faible) dans H (muni de la topologie forte) telle que

(i) $\quad \| y_0(z) \| \neq 0 \quad$ pour tout z;

(ii) $\quad y_0(z) \notin \mathbf{C}z \quad$ pour $\| z \| = 1$.

Pour $z \in B$, posons $u(z) = y_0(z) \| y_0(z) \|^{-1}$. Alors, u est une application continue de B faible dans B forte, donc aussi de B faible dans elle-même; d'après le théorème de Schauder-Tychonoff ([4], p. 456), il existe $z_0 \in B$ tel que $u(z_0) = z_0$. Alors,

$$\| z_0 \| = \| u(z_0) \| = 1 \qquad \text{et} \qquad y_0(z_0) = \| y_0(z_0) \| u(z_0) = \| y_0(z_0) \| z_0,$$

ce qui contredit (ii). Ceci démontre le lemme.

PROPOSITION 19. — *Le champ $\mathcal{H}$ n'est pas trivial.*

Si $\mathcal{H}$ était trivial (de rang infini), on pourrait le munir d'une structure de champ continu d'espaces hilbertiens sur le corps des quaternions. Alors $y = jx$ serait un champ de vecteurs continu de $\mathcal{H}$, tel que $y(z)$ soit $\mathbf{C}$-linéairement indépendant de $x(z)$ pour tout $z \in B$, contrairement au lemme 14. (On peut également utiliser la proposition 18.)

On peut montrer que $\mathcal{H}$ n'est localement trivial en aucun point de B.

18. **Produit tensoriel de deux champs continus d'espaces hilbertiens. Champ conjugué.** — Soient $\mathcal{E} = ((H(z)), \Gamma)$ et $\mathcal{E}' = ((H'(z)), \Gamma')$ deux champs continus d'espaces hilbertiens sur B. Pour tout $z \in B$, soit

$$H''(z) = H(z) \otimes H'(z)$$

le produit tensoriel hilbertien de $H(z)$ et $H'(z)$. Soit Λ l'ensemble des champs de vecteurs sur B à valeurs dans $H''(z)$ de la forme

$$z \to \sum_{i=1}^{n} x_i(z) \otimes x'_i(z),$$

où $x_i \in \Gamma$, $x'_i \in \Gamma'$. La fonction

$$z \to \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i(z) \otimes x'_i(z) \right\|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} (x_i(z) \mid x_j(z))(x'_i(z) \mid x'_j(z))$$

est continue. Les conditions $(\mathrm{T_I})$ et $(\mathrm{T_{II}})$ de la proposition 3 sont ainsi satisfaites. Il existe donc un champ continu d'espaces hilbertiens $\mathcal{E}'' = ((H''(z)), \Gamma'')$ et un seul tel que $\Gamma'' \supset \Lambda$. On posera $\mathcal{E}'' = \mathcal{E} \otimes \mathcal{E}'$.

On vérifie facilement que si $\mathcal{E}$ est un champ trivial de rang 1, $\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}'$ est canoniquement isomorphe à $\mathcal{E}'$. D'autre part, si $\mathcal{E} = \bigoplus_{i \in I} \mathcal{E}_i$, $\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}'$ est canoniquement isomorphe à $\bigoplus_{i \in I} \mathcal{E}_i \otimes \mathcal{E}'$. Ces remarques, jointes au corollaire 3 du théorème 4, prouvent le résultat suivant :

PROPOSITION 20. — *Soient B un espace paracompact, $\mathcal{E}$ un champ continu séparable d'espaces hilbertiens sur B, $\mathcal{E}'$ un champ continu trivial d'espaces hilbertiens sur B, de rang infini. Alors, $\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}'$ est trivial.*

Par ailleurs, si $\mathcal{E} = ((H(z)), \Gamma)$ est un champ continu d'espaces hilbertiens sur B, et si $\overline{H(z)}$ dénote l'espace hilbertien conjugué de $H(z)$, alors $((\overline{H(z)}), \Gamma)$ est un champ continu d'espaces hilbertiens dit conjugué de $\mathcal{E}$ et noté $\bar{\mathcal{E}}$. On peut montrer que, si B est paracompact et $\mathcal{E}$ séparable de rang $\aleph_0$, $\mathcal{E} \otimes \bar{\mathcal{E}}$ est trivial.

19. Quelques problèmes non résolus.

1° Disons qu'un champ $((H(z)), \Gamma)$ sur B est élémentaire si $\dim H(z) = 1$ sur une partie ouverte Y de B et $H(z) = 0$ dans $B - Y$. Alors tout champ continu de rang infini d'espaces hilbertiens est-il somme hilbertienne de champs élémentaires ?

2° Soient $\mathcal{E} = ((H(z)), \Gamma)$, $\mathcal{E}' = ((H'(z)), \Gamma')$ deux champs continus d'espaces hilbertiens sur B. Si $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ sont isomorphes au sens faible, $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ sont-ils isomorphes ?

Les problèmes suivants ne se posent que dans le cas non séparable.

3° Tout champ continu d'espaces hilbertiens est-il isomorphe à un sous-champ continu d'un champ constant ?

4° Soient H un espace hilbertien de dimension $> \aleph_0$, G_f sa grassmannienne forte, $\mathcal{E}$ le champ canonique sur G_f, B l'ensemble des $z \in G_f$ tels que $z(H)$ soit de dimension $\aleph_0$. Alors $\mathcal{E} \mid B$ est-il séparable ?

Chapitre III. — Champs continus de C^*-algèbres.

20. Préliminaires sur les C^*-algèbres élémentaires. — Soit A une C^*-algèbre. On dira que A est *élémentaire* s'il existe un espace hilbertien H tel que A soit isomorphe à la C^*-algèbre des opérateurs compacts dans H. Les faits suivants sont bien connus : soient H et H' deux espaces hilbertiens, A (resp. A') la C^*-algèbre des opérateurs compacts dans H (resp. H'). Pour que A et A' soient isomorphes, il faut et il suffit que H et H' aient même dimension. Tout isomorphisme de A sur A' provient d'un isomorphisme de H sur H'. Deux isomorphismes φ et φ' de H sur H' définissent le même isomorphisme de A sur A' si et seulement si $\varphi' = \lambda\varphi$, avec $\lambda \in \mathbf{U}$, groupe des nombres complexes de module 1. Le groupe G' des automorphismes de A est canoniquement isomorphe au quotient du groupe unitaire G de H par son centre, lui-même canoniquement isomorphe à $\mathbf{U}$ si $H \neq 0$.

En particulier, l'ensemble des opérateurs de Hilbert-Schmidt (resp. de rang k) de A ne dépend pas de la réalisation de A dans un espace hilbertien.

L'ensemble A^0 des opérateurs de Hilbert-Schmidt de A est un idéal bilatère partout dense de A. Muni du produit scalaire

$$(a, b) \rightarrow (a \mid b) = \mathrm{Tr}(ab^*) = \mathrm{Tr}(b^* a),$$

c'est un espace hilbertien. Si p est un projecteur de rang 1, Ap est un sous-espace vectoriel fermé de A^0, et les normes induites sur Ap par la norme de A et la norme hilbertienne de A^0 coïncident : en effet, si $a \in A$, on a

$$(ap)^* (ap) = pa^* ap = \lambda p \qquad (\lambda \geq 0),$$

donc

$$\mathrm{Tr}((ap)^* (ap)) = \lambda = \| (ap)^* (ap) \| = \| ap \|^2.$$

Si $\dim H = a$, nous dirons que A est de rang a^2 (égal à a si a est infini); lorsque a est fini, on retrouve la notion usuelle de rang de A.

Soient H un espace hilbertien, $x \in H$ un vecteur de norme 1. Nous poserons $\alpha (H, x) = (A, p)$ où A est la C^*-algèbre des opérateurs compacts dans H et p le projecteur sur $\mathbf{C}x$.

Soient A une C^*-algèbre élémentaire, $p \in A$ un projecteur de rang 1. Nous poserons $\beta (A, p) = (H, x)$, où H est l'espace hilbertien Ap et $x = p$.

Lemme 15.

(i) *Soient H un espace hilbertien, $x \in H$ un vecteur de norme* 1. *Posons $\alpha (H, x) = (A, p)$, de sorte que $\beta (\alpha (H, x)) = (Ap, p)$. Pour tout $a \in Ap$, posons $\varphi (a) = ax$. Alors φ est un isomorphisme de l'espace hilbertien Ap sur l'espace hilbertien H, tel que $\varphi (p) = x$.*

(ii) *Soient A une C^*-algèbre élémentaire, $p \in A$ un projecteur de rang* 1. *Posons $\beta (A, p) = (H, x)$, $\alpha(H, x) = (A', p')$. Pour tout $a \in A$, soit $\psi (a)$ l'application linéaire de $H = Ap$ dans lui-même définie par $\psi (a)y = ay$. Alors ψ est un isomorphisme de la C^*-algèbre A sur la C^*-algèbre A', tel que $\psi (p) = p'$.*

Adoptons les notations de (i). Il est clair que φ est linéaire et surjectif. Si $a \in Ap$, on a $a = ap$, donc

$$\mathrm{Tr}(a^*a) = \mathrm{Tr}(pa^*ap) = (a^*ax \mid x) = \| ax \|^2 = \| \varphi(a) \|^2$$

donc φ est isométrique. Enfin $\varphi (p) = p (x) = x$.

Adoptons les notations de (ii). Il existe un espace hilbertien H_0 et un $x_0 \in H_0$ de norme 1 tels que (A, p) s'identifie à $\alpha(H_0, P_{\mathbf{C}x_0})$. Soit φ_0 l'isomorphisme de (H, x) sur (H_0, x_0) défini en (i). Pour tout $a \in A$ et tout $b \in H$, on a

$$\varphi_0(\psi(a) . b) = \varphi_0(ab) = (ab) (x_0) = a(\varphi_0(b))$$

donc $\psi (a) = \varphi_0^{-1} a \varphi_0$ et ψ est bien un isomorphisme de A sur A' qui transforme p en p'. D'où le lemme.

Les isomorphismes φ et ψ seront dits *canoniques*.

Remarque 1. — Considérons les catégories suivantes :

(i) la catégorie des espaces hilbertiens munis d'un vecteur de norme 1;

(ii) la catégorie des C^*-algèbres élémentaires munies d'un projecteur de rang 1;

(on prend pour morphismes les isomorphismes). Alors, α (resp. β), prolongé de façon évidente aux isomorphismes, est un foncteur de la catégorie (i) [resp. (ii)] dans la catégorie (ii) [resp. (i)]. D'après le lemme 15, il y a *équivalence de ces deux catégories.*

Remarque 2. — Soient H et H' deux espaces hilbertiens, σ un isomorphisme de H sur H'. Soit L l'ensemble des applications linéaires de H dans H' de la forme $\lambda\sigma$, où $\lambda \in \mathbf{C}$; si $\lambda, \mu \in \mathbf{C}$, nous poserons $(\lambda\sigma \mid \mu\sigma) = \lambda\bar{\mu}$; ainsi, L devient un espace hilbertien de dimension 1 sur $\mathbf{C}$; si σ' est un autre isomorphisme de H sur H' définissant le même ensemble L, on a $\sigma' = \theta\sigma$ avec $|\theta| = 1$, donc

$$(\lambda\sigma' \mid \mu\sigma') = (\lambda\theta\sigma \mid \mu\theta\sigma) = \lambda\theta\bar{\mu}\bar{\theta} = \lambda\bar{\mu};$$

la structure d'espace hilbertien de L est donc indépendante du choix de σ. D'ailleurs, si $\rho, \rho' \in L$ et si $\xi \in H$ est de norme 1, on a $(\rho \mid \rho') = (\rho(\xi) \mid \rho'(\xi))$. La norme hilbertienne d'un élément de L coïncide avec sa norme comme application linéaire de H dans H'. L'application $(\rho, x) \to \rho(x)$ de $L \times H$ dans H' définit une application linéaire φ de $L \otimes H$ dans H', et l'on vérifie que φ est un isomorphisme (qui sera dit canonique) du produit tensoriel hilbertien $L \otimes H$ sur l'espace hilbertien H'.

21. **Champs continus de C^*-algèbres élémentaires.**

DÉFINITION 7. — *Un champ continu de C^*-algèbres sur un espace topologique B est un champ continu $\mathcal{A} = ((A(z)), \Theta)$ d'espaces de Banach sur B, chaque $A(z)$ étant muni d'une structure de C^*-algèbre, et Θ étant une sous-algèbre involutive de* $\prod_{z \in B} A(z)$.

Cf. [5] et [13] pour cette définition.

Soit $\mathcal{A} = ((A(z)), \Theta)$ un champ continu d'espaces de Banach, chaque $A(z)$ étant muni d'une structure de C^*-algèbre. Pour que $\mathcal{A}$ soit un champ continu de C^*-algèbres, il suffit qu'il existe un sous-ensemble total de Θ stable pour le produit et l'involution.

Nous dirons qu'un champ continu $\mathcal{A} = ((A(z)), \Theta)$ de C^*-algèbres est un champ continu de C^*-algèbres élémentaires si chaque $A(z)$ est une C^*-algèbre élémentaire. Si en outre chaque $A(z)$ est de rang a, on dit que $\mathcal{A}$ est *de rang a.*

Quand on parlera d'isomorphismes de champs de C^*-algèbres, il s'agira bien entendu d'isomorphismes compatibles avec les structures d'algèbres involutives sur les fibres. De même pour les notions de trivialité et de trivialité locale.

Définition 8. — *Soit $\mathcal{A}$ un champ continu de C^*-algèbres élémentaires sur B. On dit que $\mathcal{A}$ vérifie la condition de Fell si, pour tout $z_0 \in B$, il existe un voisinage Y de z_0 et un champ de vecteurs p de $\mathcal{A}$, défini et continu sur Y, tel que, pour tout $z \in Y$, $p(z)$ soit un projecteur de rang* 1.

Une condition très voisine, dans un contexte un peu différent, a été considérée par Fell [5].

Il est clair qu'un champ localement trivial de C^*-algèbres élémentaires non nulles vérifie la condition de Fell; mais la réciproque est inexacte.

22. **Champ continu de C^*-algèbres élémentaires associé à un champ continu d'espaces hilbertiens.** — Soit $\mathcal{H} = ((H(z)), \Gamma)$ un champ continu d'espaces hilbertiens sur B. Pour tout $z \in B$, soit $A(z)$ la C^*-algèbre des opérateurs compacts de $H(z)$. Soit $\Lambda \subset \prod_{z \in B} A(z)$ l'ensemble des champs d'opérateurs de la forme $\theta_{x,y}$ avec $x, y \in \Gamma$, où $\theta_{x,y}(z)$ est l'opérateur de rang ≤ 1 dans $H(z)$ défini par

$$(\theta_{x,y}(z))(\xi) = (\xi \mid y(z))\, x(z).$$

Le sous-espace vectoriel Λ' de $\prod_{z \in B} A(z)$ engendré par Λ vérifie les conditions (T_I) et (T_{II}) de la proposition 3 : la condition (T_I) provient de ce que tout opérateur compact est limite en norme de combinaisons linéaires d'opérateurs de rang 1; la condition (T_{II}) provient de ce que $\| \theta_{x_1, x_2}(z) + \theta_{x_3, x_4}(z) + \ldots + \theta_{x_{2i-1}, x_{2i}}(z) \|$ est fonction continue des $(x_i(z) \mid x_j(z))$. Donc il existe un ensemble $\Theta \supset \Lambda$ et un seul tel que $\mathcal{A} = ((A(z)), \Theta)$ soit un champ continu d'espaces de Banach sur B. L'ensemble Λ est stable pour l'involution et le produit, car

$$\theta_{x,y}^* = \theta_{y,x} \qquad \text{et} \qquad \theta_{x,y} \cdot \theta_{x',y'} = (x' \mid y)\, \theta_{x,y'}.$$

Il en résulte que $\mathcal{A}$ est un champ continu de C^*-algèbres élémentaires sur B, qui sera dit *associé* à $\mathcal{H}$ et qui sera noté $\mathcal{A}(\mathcal{H})$. Il est clair que, si $\mathcal{H}$ est séparable, $\mathcal{A}$ est séparable.

Proposition 21. — *Soient $\mathcal{H} = ((H(z)), \Gamma)$ un champ continu d'espaces hilbertiens sur B, $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathcal{H}) = ((A(z)), \Theta)$.*

(i) *Tout $a \in \Theta$ est un homomorphisme de $\mathcal{H}$ dans lui-même.*

(ii) *Soient* $a \in \Theta$, $z_0 \in B$ *et* $\varepsilon > 0$; *il existe un voisinage* Y *de* z_0, *un entier* n *et un homomorphisme* $p = (p(z))_{z \in Y}$ *de* $\mathcal{H} \mid Y$ *dans lui-même tel que chaque* $p(z)$ *soit un projecteur de rang* n *vérifiant*

$$\| p(z)a(z)p(z) - a(z) \| \leqq \varepsilon \quad \textit{sur } Y.$$

(iii) *Soit* a *un champ de vecteurs relatif à* $\mathcal{A}$ *de norme localement bornée. On suppose que, pour tout* $z_0 \in B$ *et tout* $\varepsilon > 0$, *la condition* (ii) *est vérifiée. On suppose d'autre part que, pour tous* $x, y \in \Gamma$, *la fonction* $z \to (a(z)x(z) \mid y(z))$ *est continue. Alors* $a \in \Theta$.

Si $a \in \Theta$, la fonction $\| a \|$ est localement bornée. Si $a \in \Lambda$, il est clair que a est un homomorphisme de $\mathcal{H}$ dans lui-même (prop. 5). Tout $a \in \Theta$ est limite pour la convergence uniforme locale de champs de $\bar{\Lambda}$ (prop. 1), donc est encore un homomorphisme de $\mathcal{H}$ dans lui-même. D'où (i).

Soient $a \in \Theta$, $z_0 \in B$ et $\varepsilon > 0$. Prouvons (ii). Il suffit d'envisager le cas où $a \in \bar{\Lambda}$. Alors $a(z_0)$ est de rang fini, donc il existe un système orthonormal $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ dans $H(z_0)$ tel que $p_0 a(z_0) p_0 = a(z_0)$ en désignant par p_0 le projecteur orthogonal sur $\mathbf{C}\xi_1 + \ldots + \mathbf{C}\xi_n$. Soient Y_1 un voisinage de z_0 et $x_1, \ldots, x_n$ des champs de vecteurs continus et orthonormaux sur Y_1 tels que $x_i(z_0) = \xi_i$. Soit $p(z)$ le projecteur orthogonal sur $\mathbf{C}x_1(z) + \ldots + \mathbf{C}x_n(z)$ dans $H(z)$. Alors $p = (p(z))_{z \in Y_1}$ est un homomorphisme de $\mathcal{H} \mid Y_1$ dans lui-même, et $p(z_0)a(z_0)p(z_0) = a(z_0)$, donc $\| p(z)a(z)p(z) - a(z) \| \leqq \varepsilon$ dans un voisinage Y de z_0. D'où (ii).

Soit a un champ de vecteurs relatif à $\mathcal{A}$ vérifiant les conditions de (iii). D'après ce qui précède, tout $b \in \Theta$ vérifie aussi les conditions de (iii), donc il en est de même de $a - b$ ([5], lemme 4.5); donc la fonction $z \to \| a(z) - b(z) \|$ est continue ([5], lemme 4.7). Donc $a \in \Theta$ (prop. 1). D'où la proposition.

23. **Correspondance entre champs d'espaces hilbertiens et champs de C^*-algèbres; résultats locaux.** — Soit B un espace topologique. Nous allons donner des définitions analogues à celles qui précèdent le lemme 15.

Soit $\mathcal{H}$ un champ continu d'espaces hilbertiens sur B, muni d'un champ de vecteurs continu x tel que $\| x \| = 1$. Nous poserons $\alpha(\mathcal{H}, x) = (\mathcal{A}, p)$, où $\mathcal{A}$ est le champ continu de C^*-algèbres élémentaires sur B associé à $\mathcal{H}$ et où $p = \theta_{x,x}$ (de sorte que p est un champ continu relatif à $\mathcal{A}$ de projecteurs de rang 1).

Soit $\mathcal{A}$ un champ continu de C^*-algèbres élémentaires sur B, muni d'un champ continu p de projecteurs de rang 1. Nous poserons $\beta(\mathcal{A}, p) = (\mathcal{H}, x)$, où $\mathcal{H}$ et x sont définis de la manière suivante. Soit $\varphi = (\varphi_z)_{z \in B}$, où φ_z est la multiplication à droite par $p(z)$ dans $A(z)$; alors φ est un homomorphisme du champ continu d'espaces de Banach

$\mathcal{A}$ dans lui-même; l'image $\varphi_z(A(z)) = H(z)$ de φ_z est le sous-espace vectoriel fermé $A(z)p(z)$ de $A(z)$, et nous savons que c'est un espace hilbertien; les $H(z)$ définissent un sous-champ continu $\mathcal{H}$ de $\mathcal{A}$, et $\mathcal{H}$ est donc un champ continu d'espaces hilbertiens sur B. D'autre part, on pose $x = p$, de sorte que x est un champ de vecteurs continu relativement à $\mathcal{H}$, tel que $\|x\| = 1$. Il est clair que, si $\mathcal{A}$ est séparable, $\mathcal{H}$ est séparable.

LEMME 16.

(i) *Soient $\mathcal{H}$ un champ continu d'espaces hilbertiens sur B, muni d'un champ de vecteurs continu x tel que $\|x\| = 1$, et $(\mathcal{H}', x') = \beta(\alpha(\mathcal{H}, x))$. Posons $\mathcal{H} = ((H(z)), \Gamma)$, $\mathcal{H}' = ((H'(z)), \Gamma')$. Pour tout $z \in B$, soit φ_z l'isomorphisme canonique de $H'(z)$ sur $H(z)$. Alors $\varphi = (\varphi_z)_{z\in B}$ est un isomorphisme de $\mathcal{H}'$ sur $\mathcal{H}$ tel que $\varphi(x') = x$.*

(ii) *Soient $\mathcal{A}$ un champ continu de C^*-algèbres élémentaires sur B, muni d'un champ continu p de projecteurs de rang 1, et $(\mathcal{A}', p') = \alpha(\beta(\mathcal{A}, p))$. Posons $\mathcal{A} = ((A(z)), \Theta)$, $\mathcal{A}' = ((A'(z)), \Theta')$. Pour tout $z \in B$, soit ψ_z l'isomorphisme canonique de $A(z)$ sur $A'(z)$. Alors $\psi = (\psi_z)_{z\in B}$ est un isomorphisme de $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{A}'$ tel que $\psi(p) = p'$.*

Adoptons les notations de (i). Il est clair que $\varphi(x') = x$. Soient $y \in \Gamma$ et $y' = \theta_{y,x} \in \Gamma'$. On a

$$\varphi_z(y'(z)) = \theta_{y,x}(z)x(z) = y(z).$$

Ainsi, $\varphi^{-1}(y) = y'$, ce qui prouve que φ est un isomorphisme de $\mathcal{H}'$ sur $\mathcal{H}$ (prop. 6).

Adoptons les notations de (ii). Il est clair que $\psi(p) = p'$. Pour montrer que ψ est un isomorphisme de $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{A}'$, il suffit de montrer que $\psi(a) \in \Theta'$ pour tout a de la forme $a'pa''$ $(a', a'' \in \Theta)$: en effet, les champs de cette forme constituent un sous-ensemble total de Θ. Mais si $a = a'pa''$, $\psi(a)$ est le champ de vecteurs de $\mathcal{A}'$ dont la valeur en z est l'opérateur qui, à $\gamma p(z)$, $(\gamma \in A(z))$, associe

$$\begin{aligned} a'(z)p(z)a''(z)\gamma p(z) &= a'(z)\operatorname{Tr}(p(z)a''(z)\gamma p(z))\,p(z) \\ &= (\gamma p(z) \mid a''^*(z)p(z))\,a'(z)p(z). \end{aligned}$$

Donc $\psi(a) \in \Theta'$.

Remarque 1. — Considérons les catégories suivantes :

(i) la catégorie des champs continus d'espaces hilbertiens munis d'un champ de vecteurs continu x tel que $\|x\| = 1$;

(ii) la catégorie des champs continus de C^*-algèbres élémentaires sur B, munis d'un champ continu de projecteurs de rang 1;

(on prend pour morphismes les isomorphismes). Alors, α (resp. β), prolongé de façon évidente aux isomorphismes, est un foncteur de la catégorie (i) [resp. (ii)] dans la catégorie (ii) [resp. (i)]. D'après le lemme 16 il y a *équivalence de ces deux catégories.*

THÉORÈME 7. — *Soient B un espace topologique, $\mathcal{A}$ un champ continu de C^*-algèbres élémentaires sur B. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *pour tout $z_0 \in B$, il existe un voisinage Y de z_0 et un champ continu $\mathcal{H}$ d'espaces hilbertiens sur Y, avec $H(z) \neq 0$ pour tout z, tel que $\mathcal{A} \mid Y$ soit isomorphe à $\mathcal{A}(\mathcal{H})$.*

(ii) *$\mathcal{A}$ vérifie la condition de Fell.*

(i) $\Rightarrow$ (ii). Soit $z_0 \in B$. Soient Y_0 un voisinage de z_0 et $\mathcal{H}$ un champ continu d'espaces hilbertiens non nuls sur Y_0 tel que $\mathcal{A} \mid Y_0$ soit isomorphe à $\mathcal{A}(\mathcal{H})$. Soit ξ un élément non nul de $H(z_0)$. Soit x un champ de vecteurs continu de $\mathcal{H}$ tel que $x(z_0) = \xi$. L'ensemble Y des $z \in Y_0$ tels que $x(z) \neq 0$ est un voisinage de z_0; posons $y(z) = \| x(z) \|^{-1} x(z)$ pour $z \in Y$. Le champ de vecteurs $\theta_{y,y}$ de $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ défini sur Y est un champ de vecteurs continu sur Y, et $\theta_{y,y}(z)$ est un projecteur de rang 1 pour tout $z \in Y$, ce qui montre que la condition de Fell est vérifiée.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Supposons que $\mathcal{A}$ vérifie la condition de Fell. Soit $z_0 \in B$. Il existe un voisinage Y de z_0 et un champ continu p de projecteurs de rang 1 de $\mathcal{A}$ défini sur Y. Posons $\beta(\mathcal{A} \mid Y, p) = (\mathcal{H}, x)$. Alors, d'après le lemme 16, $\mathcal{A} \mid Y$ est isomorphe à $\mathcal{A}(\mathcal{H})$.

LEMME 17. — *Soient $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ deux champs continus d'espaces hilbertiens non nuls sur B, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ les champs associés de C^*-algèbres, f un isomorphisme de $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{A}'$. Pour tout $z \in B$, il existe un voisinage Y de z et un isomorphisme de $\mathcal{H} \mid Y$ sur $\mathcal{H}' \mid Y$ qui induit $f \mid Y$.*

Il existe un voisinage Y de z et un champ continu p de projecteurs de rang 1 de $\mathcal{A} \mid Y$. Alors $p' = f(p)$ est un champ continu de projecteurs de rang 1 de $\mathcal{A}' \mid Y$. Quitte à diminuer Y, on peut supposer qu'il existe des champs de vecteurs continus x de $\mathcal{H} \mid Y$ et x' de $\mathcal{H}' \mid Y$ de norme 1 tels que, pour tout $z \in Y$, $p(z)$ et $p'(z)$ soient les projecteurs définis par $x(z)$ et $x'(z)$. Alors f définit un isomorphisme g de $(\mathcal{A} \mid Y, p)$ sur $(\mathcal{A}' \mid Y, p')$, d'où un isomorphisme de $\beta(\mathcal{A} \mid Y, p) = \beta(\alpha(\mathcal{H} \mid Y, x))$ sur $\beta(\mathcal{A}' \mid Y, p') = \beta(\alpha(\mathcal{H}' \mid Y, x'))$. Compte tenu du lemme 16, on obtient un isomorphisme de $(\mathcal{H} \mid Y, x)$ sur $(\mathcal{H}' \mid Y, x')$ qui induit g.

THÉORÈME 8. — *Soient B un espace topologique, $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ deux champs continus d'espaces hilbertiens non nuls sur B, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ les champs associés de C^*-algèbres. Pour que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ soient localement isomorphes, il faut et il suffit que $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ soient localement isomorphes.*

La suffisance est évidente, la nécessité résulte du lemme 17.

Remarque 2. — Soient $\mathcal{H}$ un champ continu d'espaces hilbertiens sur B, $\mathfrak{A}$ le champ associé de C^*-algèbres. On suppose $\mathcal{H}$ de rang infini et B paracompact. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\mathcal{H}$ est trivial;

(ii) $\mathfrak{A}$ est trivial;

(iii) $\mathcal{H}$ est localement trivial;

(iv) $\mathfrak{A}$ est localement trivial.

En effet, (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iv) est évident, (iv) $\Rightarrow$ (iii) d'après le théorème 8, et (iii) $\Rightarrow$ (i) d'après le théorème 1.

24. Correspondance entre champs d'espaces hilbertiens et champs de C^*-algèbres; premier résultat global.

Théorème 9. — *Soient B un espace complètement régulier, $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ deux champs continus d'espaces hilbertiens non nuls sur B, $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{A}'$ les champs associés de C^*-algèbres. Pour que $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{A}'$ soient isomorphes, il faut et il suffit qu'il existe un champ continu d'espaces hilbertiens sur B, de rang* 1, *soit $\mathcal{L}$, tel que $\mathcal{H}'$ soit isomorphe à $\mathcal{L} \otimes \mathcal{H}$.*

La condition est suffisante : supposons $\mathcal{H}' = \mathcal{L} \otimes \mathcal{H}$; soient $\mathcal{H} = ((H(z)), \Gamma)$, $\mathcal{L} = ((L(z)), \Delta)$; alors $a \to 1 \otimes a$ est un isomorphisme φ_z de l'algèbre des opérateurs compacts dans $H(z)$ sur l'algèbre des opérateurs compacts dans $L(z) \otimes H(z)$; et $(\varphi_z)_{z\in B}$ est un isomorphisme de $\mathfrak{A}$ sur $\mathfrak{A}'$.

Prouvons la nécessité. Soit $\psi = (\psi_z)_{z\in B}$ un isomorphisme de $\mathfrak{A}$ sur $\mathfrak{A}'$. Posons $\mathcal{H} = ((H(z)), \Gamma)$, $\mathcal{H}' = ((H'(z)), \Gamma')$. Pour tout $z \in B$, ψ_z provient d'un isomorphisme de $H(z)$ sur $H'(z)$ bien défini à la multiplication près par un élément de $\mathbf{U}$, et la remarque 2 du paragraphe 20 définit un espace hilbertien $L(z)$ de dimension 1 dont les éléments sont des applications linéaires de $H(z)$ dans $H'(z)$. La norme d'un élément de $L(z)$ pour la structure hilbertienne de $L(z)$ coïncide avec sa norme comme application linéaire de $H(z)$ dans $H'(z)$. Soit Ω l'ensemble des champs de vecteurs sur B à valeurs dans les $L(z)$ qui sont des homomorphismes de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}'$. Il est immédiat que Ω vérifie les axiomes (CC_I) et (CC_{IV}); si $r, r' \in \Omega$, et si $x \in \Gamma$ vérifie $\|x\| = 1$ au voisinage de $z_0 \in B$, on a $(r(z) \mid r'(z)) = (r(z)x(z) \mid r'(z)x(z))$ au voisinage de z_0, donc l'axiome (CC_{III}) est vérifié; enfin, soit $z_0 \in B$; d'après le lemme 17, il existe un voisinage ouvert Y de z_0 et un isomorphisme s de $\mathcal{H} \mid Y$ sur $\mathcal{H}' \mid Y$ qui définit ψ_z en chaque point z de Y; soit $f : B \to \mathbf{C}$ une fonction continue bornée, nulle dans un voisinage de $B - Y$; alors la fonction égale à $f(z)\, s(z)$ sur Y et à 0 sur $B - Y$ est un élément de Ω qui peut prendre en z_0 une valeur arbitraire de $L(z_0)$; donc l'axiome (CC_{II}) est vérifié. Ainsi, $\mathcal{L} = ((L(z)), \Omega)$ est un champ continu d'espaces hilbertiens sur B, de rang 1. Soit φ_z l'isomorphisme canonique de $L(z) \otimes H(z)$ sur $H'(z)$. Si $r \in \Omega$ et $x \in \Gamma$, le champ

$$z \to \varphi_z(r(z) \otimes x(z)) = r(z)(x(z))$$

est un élément de Γ' puisque r est un homomorphisme de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}'$; donc $\varphi = (\varphi_z)_{z\in B}$ est un isomorphisme de $\mathcal{L} \otimes \mathcal{H}$ sur $\mathcal{H}'$ (prop. 6). Ceci achève de prouver le théorème.

Remarque 1. — Même si $\mathcal{L}$ est non trivial, $\mathcal{H}'$ peut être isomorphe à $\mathcal{H}$ (*cf.* prop. 20).

Remarque 2. — Supposons B paracompact. Comme un champ de rang 1 est localement trivial, les classes de champs continus de rang 1 d'espaces hilbertiens sur B correspondent bijectivement aux éléments de $H^1(B, \mathcal{U})$, en notant $\mathcal{U}$ le faisceau des germes d'applications continues de B dans $\mathbf{U}$. Considérons la suite exacte de groupes

$$0 \to \mathbf{Z} \to \mathbf{R} \xrightarrow{\varphi} \mathbf{U} \to 1,$$

où $\varphi(x) = \exp(2i\pi x)$. Comme $\mathbf{R}$ est fibré localement trivial sur $\mathbf{U}$, on en déduit une suite exacte de faisceaux

$$0 \to \mathbf{Z} \to \mathcal{R} \to \mathcal{U} \to 1,$$

où $\mathcal{R}$ désigne le faisceau des germes d'applications continues de B dans $\mathbf{R}$. D'où une suite exacte de cohomologie

$$H^n(B, \mathcal{R}) \to H^n(B, \mathcal{U}) \to H^{n+1}(B, \mathbf{Z}) \to H^{n+1}(B, \mathcal{R}).$$

Or $H^n(B, \mathcal{R}) = 0$ pour $n \geq 1$ parce que $\mathcal{R}$ est fin, d'où, comme il est bien connu, un isomorphisme canonique

$$H^n(B, \mathcal{U}) \to H^{n+1}(B, \mathbf{Z}).$$

En particulier, $H^1(B, \mathcal{U})$ est canoniquement isomorphe à $H^2(B, \mathbf{Z})$, et le théorème 9 entraîne le résultat suivant :

COROLLAIRE. — *Soient B un espace paracompact, $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ deux champs continus d'espaces hilbertiens non nuls sur B, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ les champs associés de C^*-algèbres. On suppose $H^2(B, \mathbf{Z}) = 0$. Pour que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ soient isomorphes, il faut et il suffit que $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ soient isomorphes.*

Remarque 3. — Avec les notations du théorème 9, on a

$\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ isomorphes $\Rightarrow \mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ isomorphes $\Rightarrow \mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ localement isomorphes.

La réciproque de la première implication est inexacte en général, même si l'on se limite aux champs séparables de rang $\aleph_0$. Soit, en effet, $\mathcal{E} = ((H(z)), \Gamma)$ le champ du théorème 6. Soit $\mathcal{A} = ((A(z)), \Delta)$ le champ associé à $\mathcal{E}$. Le champ $\mathcal{E}$ a été construit comme somme hilbertienne de champs de rang 1; soient $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots$ ces champs. Alors le champ de C^*-algèbres associé à $\mathcal{E} \otimes \overline{\mathcal{E}}_1$ est isomorphe à $\mathcal{A}$ (th. 9); mais $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E} \otimes \overline{\mathcal{E}}_1$ sont non isomorphes, car $\mathcal{E} \otimes \overline{\mathcal{E}}_1$ admet le sous-champ trivial $\mathcal{E}_1 \otimes \overline{\mathcal{E}}_1$, de rang 1, alors que $\mathcal{E}$ n'admet aucun sous-champ trivial de rang 1 (théorème 6).

La réciproque de la deuxième implication est inexacte, même si l'on se limite aux champs séparables de rang $\aleph_0$. En effet, reprenons le champ $\mathcal{E}$ du théorème 6. Soit $\mathcal{E}_1$ le champ sur $I \times I \times I \times \ldots$ déduit de $\mathcal{E}$ comme au corollaire 1 du théorème 6. Soit $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}(\mathcal{E}_1)$. Le champ $\mathcal{E}$ est somme hilbertienne de sous-champs de rang 1; soit $\mathcal{E}'$ le champ obtenu en remplaçant dans la construction de $\mathcal{E}$ le premier sous-champ de rang 1 par un champ de rang 1 trivial; soit $\mathcal{E}'_1$ le champ sur $I \times I \times \ldots$ déduit de $\mathcal{E}'$ comme l'est $\mathcal{E}_1$ de $\mathcal{E}$; alors il existe un champ de vecteurs continu x' relatif à $\mathcal{E}'$ partout non nul; raisonnant comme au lemme 7, on voit que ce champ se prolonge en un champ de vecteurs continu sur $I \times I \times \ldots$, relatif à $\mathcal{E}'_1$, partout non nul. Comparant avec le corollaire 1 du théorème 6, on voit que $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{E}'_1$ sont non isomorphes. Comme $H^2(I \times I \times \ldots, \mathbf{Z}) = 0$, $\mathcal{A}_1$ est non isomorphe à $\mathcal{A}'_1 = \mathcal{A}(\mathcal{E}'_1)$. Mais il est facile de voir que $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}'_1$ sont localement isomorphes.

25. Correspondance entre champs d'espaces hilbertiens et champs de C^*-algèbres; deuxième résultat global.

Lemme 18. — *Soient $\mathcal{H} = ((H(z)), \Gamma)$ un champ continu d'espaces hilbertiens sur B tel que $H(z) \neq 0$ pour tout z, et $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathcal{H})$. Pour qu'un automorphisme φ de $\mathcal{H}$ induise l'identité de $\mathcal{A}$, il faut et il suffit qu'il soit de la forme $(u(z).1_z)_{z\in B}$, où 1_z désigne l'application identique de $H(z)$, et où u est une application continue de B dans $\mathbf{U}$.*

La condition est évidemment suffisante. Montrons qu'elle est nécessaire. Pour tout $z \in B$, φ_z est un automorphisme de $H(z)$ qui induit l'identité sur l'algèbre des opérateurs compacts de $H(z)$; c'est donc une homothétie de rapport $u(z) \in \mathbf{U}$. Montrons que u est une fonction continue. Pour tout $z_0 \in B$, il existe un champ de vecteurs continu x de $\mathcal{H}$ qui soit $\neq 0$ dans un voisinage Y de z_0. Sur Y, on a

$$u(z) = (\varphi_z x(z) \mid x(z)) \, \| x(z) \|^{-2}.$$

Donc u est bien continue en z_0.

Dans toute la suite de ce paragraphe, on désigne par B un espace paracompact et par $\mathcal{A}$ un champ continu de C^*-algèbres élémentaires sur B vérifiant la condition de Fell. On va chercher sous quelle condition il existe un champ continu $\mathcal{H}$ d'espaces hilbertiens sur B tel que $\mathcal{A}$ soit isomorphe à $\mathcal{A}(\mathcal{H})$. Si $(Y_i)_{i \in I}$ est une famille de parties de B, on posera

$$Y_{i_1 i_2 \ldots i_p} = Y_{i_1} \cap Y_{i_2} \cap \ldots \cap Y_{i_p}$$

quels que soient $i_1, \ldots, i_p \in I$.

LEMME 19. — *Il existe :*

1° *un recouvrement ouvert* $(Y_i)_{i \in I}$ *de* B;

2° *pour tout* $i \in I$, *un champ continu* $\mathcal{H}_i$ *d'espaces hilbertiens sur* Y_i *et un isomorphisme* h_i *du champ associé de C*-algèbres sur* $\mathcal{A} \mid Y_i$;

3° *pour tous* $i, j \in I$, *un isomorphisme* g_{ij} *de* $\mathcal{H}_j \mid Y_{ij}$ *sur* $\mathcal{H}_i \mid Y_{ij}$ *qui induit l'isomorphisme* $h_i^{-1} h_j$ *des champs associés de C*-algèbres.*

Il existe un recouvrement ouvert $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ de B et, pour tout $\alpha \in A$, un champ continu $\mathcal{K}_\alpha$ d'espaces hilbertiens sur U_α et un isomorphisme k_α de $\mathcal{A}(\mathcal{K}_\alpha)$ sur $\mathcal{A} \mid U_\alpha$ (théorème 7). Comme B est paracompact, on peut supposer (U_α) localement fini. Il existe un recouvrement ouvert $(V_\alpha)_{\alpha \in A}$ de B tel que $\overline{V}_\alpha \subset U_\alpha$ pour tout α. Posons $\mathcal{K}'_\alpha = \mathcal{K}_\alpha \mid V_\alpha$. Fixons provisoirement $\alpha \in A$ et $z \in V_\alpha$. Il existe un voisinage ouvert $W \subset V_\alpha$ de z et une partie finie A' de A telle que $W \cap \overline{V}_\beta = \emptyset$ pour $\beta \notin A'$. Soit $\beta \in A'$. Il existe un voisinage ouvert $W_\beta \subset W$ de z et un isomorphisme de $\mathcal{K}'_\beta \mid W_\beta \cap V_\beta$ sur $\mathcal{K}'_\alpha \mid W_\beta \cap V_\beta$ qui induit $k_\alpha^{-1} k_\beta$: c'est évident si $z \notin \overline{V}_\beta$; si $z \in \overline{V}_\beta$, on a $z \in U_\beta$, et notre assertion résulte du lemme 17. En définitive, comme A' est fini, on obtient un voisinage ouvert $W_{\alpha,z} \subset V_\alpha$ de z, et, pour tout $\beta \in A$, un isomorphisme de $\mathcal{K}'_\beta \mid W_{\alpha,z} \cap V_\beta$ sur $\mathcal{K}'_\alpha \mid W_{\alpha,z} \cap V_\beta$ qui induit $k_\alpha^{-1} k_\beta$. Ceci posé, l'ensemble I du lemme sera l'ensemble des $i = (\alpha, z)$ où $\alpha \in A$, $z \in V_\alpha$; on posera $Y_i = W_{\alpha,z}$, $\mathcal{H}_i = \mathcal{K}'_\alpha \mid W_{\alpha,z}$, $h_i = k_\alpha \mid W_{\alpha,z}$. L'existence des g_{ij} résulte aussitôt de la construction précédente.

LEMME 20. — *On conserve les notations du lemme* 19.

(i) *Pour tous* $i, j, k \in I$, *il existe une fonction continue unique* $u_{ijk} : Y_{ijk} \to \mathbf{U}$ *telle que* $g_{ij}\, g_{jk} = u_{ijk}\, g_{ik}$.

(ii) *Les* u_{ijk} *définissent un* 2*-cocycle de* (Y_i) *à valeurs dans le faisceau* $\mathcal{U}$ *des germes d'applications continues de* B *dans* $\mathbf{U}$.

(iii) *L'image* γ *de ce cocycle dans* $H^2(B, \mathcal{U})$ *ne dépend que de* $\mathcal{A}$.

(i) résulte du lemme 18. Si $i, j, k, l \in I$, on a sur Y_{ijkl} :

$$\begin{aligned} u_{jkl}\, u_{ikl}^{-1}\, u_{ijl} &= (g_{jl}^{-1} g_{jk}\, g_{kl})(g_{kl}^{-1}\, g_{ik}^{-1}\, g_{il})(g_{il}^{-1}\, g_{ij}\, g_{jl}) \\ &= g_{jl}^{-1}\,(g_{jk}\, g_{ik}^{-1})\, g_{ij}\, g_{jl} \\ &= g_{jl}^{-1}\,(u_{ijk}\, g_{ij}^{-1})\, g_{ij}\, g_{jl} \\ &= u_{ijk}, \end{aligned}$$

d'où (ii).

Prouvons (iii). Soient $(Y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, $\mathcal{H}_\lambda$, h_λ, $g_{\lambda\mu}$ avec des propriétés analogues à celles du lemme 19, $(u_{\lambda\mu\nu})$ le cocycle correspondant. Pour prouver que (u_{ijk}) et $(u_{\lambda\mu\nu})$ définissent le même élément de $H^2(B, \mathcal{U})$, on peut ([7], p. 222) remplacer (Y_i) par un recouvrement plus fin, les objets $\mathcal{H}_i$, h_i, g_{ij} étant remplacés pas leurs restrictions aux ensembles du nouveau recouvrement; et de même pour (Y_λ). Ceci permet de supposer, en raisonnant comme pour le lemme 19, que, pour tout $i\in I$ et tout $\lambda\in\Lambda$, il existe un isomorphisme $g_{i\lambda}$ de $\mathcal{H}_\lambda \mid Y_{i\lambda}$ sur $\mathcal{H}_i \mid Y_{i\lambda}$ qui induit l'isomorphisme $h_i^{-1}h_\lambda$ des champs associés de C^*-algèbres. Soit A l'ensemble somme de I et de Λ. Les données précédentes définissent un recouvrement $(Y_a)_{a\in A}$, des $\mathcal{H}_a$, h_a $(a\in A)$, des g_{ab} $(a, b\in A)$ qui vérifient les propriétés du lemme 19, donc des u_{abc} $(a, b, c\in A)$. D'après [7], p. 222, l'élément de $H^2(B, \mathcal{U})$ défini par (u_{abc}) est égal, d'une part, à celui défini par (u_{ijk}), d'autre part à celui défini par $(u_{\lambda\mu\nu})$. D'où le lemme.

Rappelons qu'il existe un isomorphisme canonique

$$i : H^2(B, \mathcal{U}) \to H^3(B, \mathbf{Z}).$$

Définition 9. — *Soit γ l'élément de $H^2(B, \mathcal{U})$ défini au lemme 20. Son image canonique $i(\gamma)$ dans $H^3(B, \mathbf{Z})$ sera noté $\delta(\mathcal{A})$.*

Théorème 10. — *Soit B un espace paracompact. Soit $\mathcal{A}$ un champ continu de C^*-algèbres élémentaires sur B, vérifiant la condition de Fell. Pour qu'il existe un champ continu $\mathcal{H}$ d'espaces hilbertiens sur B tel que $\mathcal{A}$ soit isomorphe à $\mathcal{A}(\mathcal{H})$, il faut et il suffit que $\delta(\mathcal{A}) = 0$.*

Il faut. Supposons $\mathcal{A}$ isomorphe à $\mathcal{A}(\mathcal{H})$. Dans la construction de $\delta(\mathcal{A})$, on peut prendre pour recouvrement de B le recouvrement formé du seul ensemble ouvert B. Tout 2-cocycle relatif à ce recouvrement est cohomologue à 0, donc $\delta(\mathcal{A}) = 0$.

Il suffit. Si $\delta(\mathcal{A}) = 0$, il existe ([7], p. 224) des Y_i, $\mathcal{H}_i$, h_i, g_{ij} $(i, j\in I)$ avec les propriétés du lemme 19, et des fonctions continues $v_{ij} : Y_{ij} \to \mathbf{U}$ telles que pour tous $i, j, k\in I$, on ait $u_{ijk} = v_{jk}v_{ik}^{-1}v_{ij}$. Si l'on pose $g'_{ij} = v_{ij}^{-1}g_{ij}$, les isomorphismes $g'_{ij} : \mathcal{H}_j \mid Y_{ij} \to \mathcal{H}_i \mid Y_{ij}$ vérifient

$$g'_{ij}\,g'_{jk} = v_{ij}^{-1}\,g_{ij}\,g_{jk}\,v_{jk}^{-1} = u_{ijk}^{-1}\,v_{ik}^{-1}\,u_{ijk}\,g_{ik} = g'_{ij}$$

et l'on peut définir un champ continu $\mathcal{H}$ d'espaces hilbertiens sur B en recollant les $\mathcal{H}_i$ à l'aide des g'_{ij} (prop. 9). Soit $\mathcal{A}' = \mathcal{A}(\mathcal{H})$. Il existe, pour tout $i\in I$, un isomorphisme h'_i de $\mathcal{A}' \mid Y_i$ sur $\mathcal{A} \mid Y_i$, et $h_i'^{-1}h'_j$ est induit par l'automorphisme identique de $\mathcal{H} \mid Y_{ij}$, de sorte que $h'_i = h'_j$ sur Y_{ij}. Les h'_i définissent donc un isomorphisme de $\mathcal{A}'$ sur $\mathcal{A}$.

Corollaire. — *Soit B un espace paracompact tel que*

$$H^2(B, \mathbf{Z}) = H^3(B, \mathbf{Z}) = 0.$$

Il y a correspondance bijective canonique entre les classes de champs continus d'espaces hilbertiens non nuls sur B et les classes de champs continus de C^*-algèbres élémentaires sur B vérifiant la condition de Fell.

Remarque. — Pour toute partie ouverte Y de B, soit $\mathfrak{H}(Y)$ [resp. $\mathfrak{A}(Y)$] la catégorie des champs continus sur Y d'espaces hilbertiens non nuls (resp. des champs continus sur Y de C^*-algèbres élémentaires vérifiant la condition de Fell), les morphismes étant les isomorphismes. On définit ainsi des *faisceaux de groupoïdes* $\mathfrak{H}$ et $\mathfrak{A}$ sur B, et les classes à isomorphisme près d'objets de $\mathfrak{H}(B)$ [resp. $\mathfrak{A}(B)$] correspondent bijectivement aux éléments de $H^1(B, \mathfrak{H})$ [resp. $H^1(B, \mathfrak{A})$]; *cf.* [9]. Les résultats précédents expriment une sorte d'exactitude des suites

$$1 \overset{*}{\to} \mathcal{U} \to \mathfrak{H} \to \mathfrak{A} \to 0,$$
$$H^1(B, \mathcal{U}) \overset{*}{\to} H^1(B, \mathfrak{H}) \to H^1(B, \mathfrak{A}) \to H^2(B, \mathcal{U}).$$

(La flèche $\overset{*}{\to}$ indique un groupe qui opère dans un ensemble.) L'hypothèse de paracompacité de B est probablement superflue si l'on prend les groupes de cohomologie de Grothendieck. Mais la théorie de GROTHENDIECK pour un faisceau de groupoïdes sur un espace non paracompact n'a jamais été écrite.

Problème. — Soient B un espace paracompact, $\mathcal{A}$ un champ continu de C^*-algèbres élémentaires sur B, de rang $\aleph_0$, vérifiant la condition de Fell. Existe-t-il un champ continu $\mathcal{H}$ d'espaces hilbertiens sur B tel que $\mathcal{A}$ soit localement isomorphe à $\mathcal{A}(\mathcal{H})$? En d'autres termes existe-t-il un champ continu $\mathcal{A}'$ de C^*-algèbres sur B localement isomorphe à $\mathcal{A}$ et tel que $\delta(\mathcal{A}') = 0$?

26. **Cas des champs localement triviaux.**

Soit H_0 un espace hilbertien de dimension $a > 0$; soit A_0 la C^*-algèbre des opérateurs compacts de H_0. Soit G (resp. G') le groupe des automorphismes isométriques de H_0 (resp. A_0), muni de la topologie de la convergence simple. On a $G' = G/\mathbf{U}$, et $\mathbf{U}$ est le centre de G. D'après un résultat de WIGNER ([1], p. 6-7), G est fibré localement trivial sur G' par l'application canonique. Il en résulte qu'on a une suite exacte centrale de faisceaux de groupes sur B :

$$1 \to \mathcal{U} \to \mathcal{G} \to \mathcal{G}' \to 1,$$

où $\mathcal{U}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}'$ sont les faisceaux de germes d'applications continues de B dans $\mathbf{U}$, G, G'.

Supposons B *paracompact*. D'après les travaux de DEDECKER, FRENKEL, GROTHENDIECK (*cf.* par exemple [8], chap. 5), on a alors une application canonique

$$\Delta : H^1(B, \mathcal{G}') \to H^2(B, \mathcal{U}).$$

Les classes à isomorphisme près de champs localement triviaux de C^*-algèbres élémentaires de rang a^2 sur B correspondent bijectivement aux éléments de $H^1(B, \mathcal{G}')$. Rappelons les raisonnements classiques qui prouvent l'existence de cette correspondance. Soit $\mathcal{A}$ un champ localement trivial de C^*-algèbres élémentaires sur B, de rang a^2. Il existe un recouvrement ouvert $(Y_i)_{i \in I}$ de B et des isomorphismes h_i : $\mathcal{A}_i \to \mathcal{A} \mid Y_i$, où $\mathcal{A}_i$ est le champ constant sur Y_i défini par A_0. Les $g_{ij} = h_i^{-1} h_j$ constituent un 1-cocycle du recouvrement à valeurs dans $\mathcal{G}'$. Il est facile de voir que l'élément correspondant de $H^1(B, \mathcal{G}')$ ne dépend que de $\mathcal{A}$, et non pas du choix de (Y_i) et des h_i. Soit $\mathcal{A}'$ un autre champ localement trivial de C^*-algèbres élémentaires sur B, de rang a^2; s'il existe des isomorphismes $h'_i : \mathcal{A}_i \to \mathcal{A}' \mid Y_i$, et si le nouveau cocycle (g'_{ij}) est cohomologue à (g_{ij}), il existe des applications continues $k_i : Y_i \to G'$ telles que

$$h'^{-1}_i h'_j = k_i^{-1} h_i^{-1} h_j k_j \quad \text{sur } Y_{ij},$$

d'où

$$h_i k_i h'^{-1}_i = h_j k_j h'^{-1}_j \quad \text{sur } Y_{ij},$$

ce qui prouve que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ sont isomorphes; il résulte de là que si un même élément de $H^1(B, \mathcal{G}')$ est associé à $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ sont isomorphes. Enfin, tout élément de $H^1(B, \mathcal{G}')$ provient d'un champ continu localement trivial de C^*-algèbres élémentaires sur B, de rang a : ceci se voit en appliquant la proposition 9.

LEMME 21. — *Si l'on identifie canoniquement les classes de champs localement triviaux de C^*-algèbres élémentaires de rang a sur B aux éléments de $H^1(B, \mathcal{G}')$, les applications δ et Δ s'identifient* [$H^2(B, \mathcal{U})$ *étant identifié à* $H^3(B, \mathbf{Z})$].

Soit $\mathcal{A}$ un champ continu localement trivial de C^*-algèbres élémentaires sur B, de rang a. Soit c l'élément correspondant de $H^1(B, \mathcal{G}')$. Introduisons les notations $(Y_i)_{i \in I}$, h_i, g_{ij} comme ci-dessus, de telle sorte que c soit l'image de (g_{ij}) dans $H^1(B, \mathcal{G}')$. En choisissant le recouvrement (Y_i) assez fin, on peut supposer qu'il existe, pour tous i, j, une application continue l_{ij} de Y_{ij} dans $\mathcal{G}$ qui définisse g_{ij} par passage au quotient. Ceci posé, rappelons que $\Delta(c)$ n'est autre que l'élément de $H^2(B, \mathcal{U})$ correspondant au 2-cocycle (u_{ijk}) que définit la formule $l_{ij} l_{jk} = u_{ijk} l_{ik}$. Soit $\mathcal{H}_i$ le champ constant d'espaces hilbertiens sur Y_i correspondant à H_0. Alors $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}(\mathcal{H}_i)$, et l_{ij} est un isomorphisme de $\mathcal{H}_j \mid Y_{ij}$ sur $\mathcal{H}_i \mid Y_{ij}$ qui induit $h_i^{-1} h_j$. Comparant avec les lemmes 19 et 20, on voit que $\Delta(c) = \delta(\mathcal{A})$.

LEMME 22. — *Soit* $0 \to \mathcal{A} \xrightarrow{f} \mathcal{B} \xrightarrow{g} \mathcal{C} \to 0$ *une suite exacte centrale de faisceaux de groupes sur un espace paracompact B. Si $\mathcal{B}$ est mou,* $\Delta : H^1(B, \mathcal{C}) \to H^2(B, \mathcal{A})$ *est bijective.*

Injectivité. — Soit (c_{ij}) un 1-cocycle du recouvrement localement fini $(Y_i)_{i\in I}$ à valeurs dans $\mathcal{C}$. Quitte à remplacer (Y_i) par un recouvrement plus fin, on peut supposer $(c_{ij}) = g((b_{ij}))$ où (b_{ij}) est une cochaîne alternée de (Y_i) à valeurs dans $\mathcal{B}$. Alors (a_{ijk}) défini par $b_{ij}\, b_{jk} = b_{ik}\, a_{ijk}$ est un 2-cocycle de (Y_i) à valeurs dans $\mathcal{A}$ dont la classe est l'image de celle de (c_{ij}) par Δ. Soient (c'_{ij}) un autre cocycle, (b'_{ij}) et (a'_{ijk}) définis comme ci-dessus, et supposons qu'il existe une cochaîne (a_{ij}) à valeurs dans $\mathcal{A}$ telle que $a'_{ijk} = a_{ijk}\, a_{ij}\, a_{jk}\, a_{ik}^{-1}$. Nous allons prouver que (c_{ij}) et (c'_{ij}) sont cohomologues, ce qui établira que Δ est injective. Remplaçant les b_{ij} par les $a_{ij}^{-1}\, b_{ij}$, on est ramené au cas où $a'_{ijk} = a_{ijk}$. Soit $(Y'_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert tel que $\overline{Y'_i} \subset Y_i$ pour tout $i \in I$. Soit L l'ensemble des couples (J, v), où $J \subset I$, où $v = (v_i)_{i\in J}$, et où, pour tout $i \in J$, v_i est une section continue de $\mathcal{B}$ sur $\overline{Y'_i}$, tels que $b'_{ij} = v_i b_{ij}\, v_j^{-1}$ pour $i, j \in J$. L'ensemble L est ordonné inductif. Notons encore (J, v) un élément maximal de L. On va montrer que $J = I$, ce qui prouvera que (b_{ij}) et (b'_{ij}), et *a fortiori* (c_{ij}) et (c'_{ij}), sont cohomologues. Supposons qu'il existe $i \in I - J$. Soit $Y = \overline{Y'_i} \cap \bigcup_{j\in J} \overline{Y'_j}$. Soit $z \in Y$. Si j_1 et j_2 sont deux indices de J tels que $z \in \overline{Y'_{j_1}}$ et $z \in \overline{Y'_{j_2}}$, on a

$$\begin{aligned} b'_{ij_1}(z)\, v_{j_2}(z)\, b_{ij_2}(z)^{-1} &= b'_{ij_2}(z)\, v_{j_2}(z)\, b_{j_1 j_2}(z)^{-1}\, b_{ij_1}(z)^{-1}\, a_{ij_1 j_2}(z) \\ &= b'_{ij_2}(z)\, b'_{j_1 j_2}(z)^{-1}\, v_{j_1}(z)\, b_{ij_1}(z)^{-1}\, a_{ij_1 j_2}(z) \\ &= b'_{ij_1}(z)\, a_{ij_1 j_2}(z)^{-1}\, v_{j_1}(z)\, b_{ij_1}(z)^{-1}\, a_{ij_1 j_2}(z) \\ &= b'_{ij_1}(z)\, v_{j_1}(z)\, b_{ij_1}(z)^{-1}. \end{aligned}$$

Il résulte de là qu'on peut définir une section continue w_i de $\mathcal{B}$ sur Y telle que $b'_{ij} = w_i\, b_{ij} v_j^{-1}$ quel que soit $j \in J$. Comme $\mathcal{B}$ est mou, w_i se prolonge en une section continue v_i de $\mathcal{B}$ sur $\overline{Y'_i}$, ce qui contredit la maximalité de (J, v).

Surjectivité. — Soient $(Y_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert localement fini de B, (a_{ijk}) un 2-cocycle alterné de ce recouvrement à valeurs dans $\mathcal{A}$. Soit (Y'_i) un recouvrement ouvert tel que $\overline{Y'_i} \subset Y_i$. Soit L l'ensemble des couples (J, b) où $J \subset I$, $b = (b_{ij})_{i,j\in I}$, et où, pour tous $i, j \in J$, b_{ij} est une section continue de $\mathcal{B}$ sur $\overline{Y_i} \cap \overline{Y'_j}$, tels que $b_{ij}\, b_{jk} = b_{ik}\, a_{ijk}$ pour $i, j, k \in J$. L'ensemble L est ordonné inductif. Notons encore (J, b) un élément maximal de L. On va montrer que $J = I$. Il en résultera que les $b_{ij} \mid Y'_{ij}$ définissent par passage au quotient un 2-cocycle de (Y'_i) à valeurs dans $\mathcal{C}$, dont la classe de cohomologie a pour image, dans $H^2(B, \mathcal{A})$, la classe de (a_{ijk}); la démonstration du lemme sera donc achevée.

Supposons qu'il existe $i \in I - J$. Soit M l'ensemble des couples (K, b'), où $K \subset J$, $b' = (\hat{b}_{ij})_{j\in K}$, et où, pour tout $j \in K$, $\hat{b}_{ij}$ est une section continue de $\mathcal{B}$ sur $\overline{Y}'_i \cap \overline{Y}'_j$, tels que $\hat{b}_{ij}\, b_{jk} = \hat{b}_{ik}\, a_{ijk}$ pour $j, k \in K$. Notons encore (K, b') un élément maximal de M. Montrons que $K = J$. Sinon, soit $j \in J - K$. On peut définir une section continue β de $\mathcal{B}$ sur $\overline{Y}'_i \cap \overline{Y}'_j \cap \bigcup_{k \in K} \overline{Y}'_k$ telle que $\beta b_{jk} = \hat{b}_{ik} a_{ijk}$ quel que soit $k \in K$; en effet, si $k, l \in K$, définissons β_k, β_l par $\beta_k\, b_{jk} = \hat{b}_{ik}\, a_{ijk}$, $\beta_l\, b_{jl} = \hat{b}_{il}\, a_{ijl}$; on en déduit

$$\beta_l\, b_{jk}\, b_{kl}\, a_{jkl}^{-1} = \hat{b}_{ik}\, b_{kl}\, a_{ikl}^{-1}\, a_{ijl},$$

d'où

$$\beta_l = \hat{b}_{ik}\, b_{jk}^{-1}\, a_{ijl}\, a_{ikl}^{-1}\, a_{jkl} = \hat{b}_{ik}\, b_{jk}^{-1}\, a_{ijk} = \beta_k.$$

Comme $\mathcal{B}$ est mou, on peut prolonger β en une section continue de $\mathcal{B}$ sur $\overline{Y}'_i \cap \overline{Y}'_j$, et ceci contredit la maximalité de (K, b'). Donc $K = J$. Il existe par conséquent une famille $(\hat{b}_{ij})_{j \in J}$, où, pour tout $j \in J$, $\hat{b}_{ij}$ est une section continue de $\mathcal{B}$ sur $\overline{Y}'_i \cap \overline{Y}'_j$ avec $\hat{b}_{ij}\, b_{jk} = \hat{b}_{ik}\, a_{ijk}$ pour $j, k \in J$. Alors les b_{jk} et les $\hat{b}_{ij}$ contredisent la maximalité de (J, b).

THÉORÈME 11. — *Soient B un espace paracompact, a un cardinal infini. L'application $\mathcal{A} \to \delta(\mathcal{A})$ définit une correspondance bijective entre $H^3(B, \mathbf{Z})$ et les classes de champs localement triviaux de C^*-algèbres élémentaires sur B, de rang a.*

Reprenons les notations du début du paragraphe. D'après les lemmes 3 et 4, $\mathcal{G}$ est mou. Donc $\Delta : H^1(B, \mathcal{G}') \to H^2(B, \mathcal{U})$ est bijective (lemme 22). Il suffit alors d'appliquer le lemme 21.

Dans le théorème 11, on se limite aux champs localement triviaux. Mais cette restriction est parfois inessentielle :

THÉORÈME 12. — *Soit $\mathcal{A}$ un champ continu de C^*-algèbres élémentaires sur B, séparable, de rang $\aleph_0$, vérifiant la condition de Fell. Si B est paracompact de dimension finie, $\mathcal{A}$ est localement trivial.*

Soit $z_0 \in B$. Il existe un voisinage fermé Y de z_0 et un champ continu e sur Y, relatif à $\mathcal{A}$, tel que $e(z)$ soit partout dans Y un projecteur de rang 1. Posons $\beta(\mathcal{A} \mid Y, e) = (\mathcal{H}, x)$. Alors $\mathcal{H}$ est séparable de rang $\aleph_0$, et Y est paracompact de dimension finie, donc $\mathcal{H}$ est trivial (théorème 5). Or $\mathcal{A} \mid Y$ est isomorphe à $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ (lemme 16), donc est trivial.

27. **Application à l'étude de certaines C^*-algèbres.** — Soit A une CCR-algèbre. Soit B son spectre que nous supposerons séparé; c'est alors un espace localement compact. Tout élément z de B s'identifie à un idéal primitif de A; soit $A(z) = A/z$, qui est une C^*-algèbre élémentaire non nulle. Tout $x \in A$ définit un champ de vecteurs $z \to x'(z) \in A(z)$ sur B, $x'(z)$ étant l'image canonique de x dans $A(z)$. Ces champs forment

une sous-algèbre involutive de l'algèbre involutive de tous les champs de vecteurs. Si $x \in A$, la fonction $z \to \| x' (z) \|$ est continue puisque B est séparé ([13], th. 4.1). Pour tout $z \in B$, l'ensemble des $x' (z)$, où x parcourt A, est $A (z)$ tout entier. Il existe donc un champ continu $\mathcal{O} = ((A (z)), \Delta)$ et un seul, tel que les champs x' ($x \in A$) soient continus relativement à $\mathcal{O}$. Nous dirons que $\mathcal{O}$ est le champ associé à A. Si A est une C^*-algèbre à trace continue ([5], chap. IV), $\mathcal{O}$ vérifie la condition de Fell. Si A est séparable, $\mathcal{O}$ est séparable et B est à base dénombrable, donc paracompact.

Maintenant, partons d'un champ continu $\mathcal{O} = ((A (z)), \Delta)$ de C^*-algèbres élémentaires sur un espace localement compact B. Soit A l'ensemble des $y \in \Delta$ tels que $\| y (z) \|$ tende vers zéro à l'infini sur B. Pour $y \in A$, posons $\| y \| = \sup\limits_{z \in B} \| y (z) \|$. Alors A est une CCR-algèbre (*cf.* [5], chap. I, n° 1) qui sera dite associée à $\mathcal{O}$. Supposons $A (z) \neq 0$ pour tout $z \in B$. Tout élément z de B définit un idéal primitif de A, à savoir l'ensemble I_z des $y \in A$ tels que $y (z) = 0$, et le quotient A/I_z est isomorphe à $A (z)$; donc à z est associée une représentation irréductible de A et une seule (à une équivalence près). D'après [5], corollaire du théorème 1.2, B s'identifie ainsi au spectre de A. Si $\mathcal{O}$ vérifie la condition de Fell, A est une C^*-algèbre à trace continue.

Lemme 23. — *Soient A une C^*-algèbre à trace continue, $\mathcal{O} = ((A (z), \Delta)$ le champ continu de C^*-algèbres élémentaires non nulles associé à A, A' la C^*-algèbre à trace continue associée à $\mathcal{O}$. Pour tout $x \in A$, soit x' l'élément de Δ défini par x. Alors $x' \in A'$ et $x \to x'$ est un isomorphisme de A sur A'.*

On a $x' \in A'$ d'après [13], lemme 4.3. Il est clair que $x \to x'$ est un homomorphisme de A dans A'. D'après [12], p. 411, cet homomorphisme est isométrique. Il est surjectif d'après [13], théorème 3.3. (*Cf.* aussi [5], corollaire du théorème 1.4).

Lemme 24. — *Soient B un espace localement compact, $\mathcal{O} = ((A (z)), \Delta)$ un champ continu de C^*-algèbres élémentaires sur B, vérifiant la condition de Fell. Soient A la C^*-algèbre à trace continue associée à $\mathcal{O}$, et $\mathcal{O}' = ((A' (z)), \Delta')$ le champ continu de C^*-algèbres élémentaires non nulles associé à A. Pour tout $z \in B$, soit $U (z)$ l'isomorphisme canonique de $A (z)$ sur $A' (z)$. Alors $(U (z))_{z \in B}$ est un isomorphisme de $\mathcal{O}$ sur $\mathcal{O}'$.*

Les éléments de A constituent une famille totale de champs de vecteurs continus relatifs à $\mathcal{O}$. Or leurs transformés par $(U (z))_{z \in B}$ sont des champs continus relatifs à $\mathcal{O}'$. Le lemme résulte alors de la proposition 6.

Définition 10. — *Soient A une C^*-algèbre séparable à trace continue, B son spectre, $\mathcal{O}$ le champ continu de C^*-algèbres élémentaires sur B associé à A. Alors $\delta (\mathcal{O}) \in H^3 (B; \mathbf{Z})$ sera noté aussi $\delta (A)$.*

Étant donné un champ continu $\mathcal{H}$ d'espaces hilbertiens non nuls sur un espace localement compact, on peut construire le champ continu associé $\mathcal{A}$ de C^*-algèbres élémentaires, puis la C^*-algèbre à trace continue A associée à $\mathcal{A}$. Alors A est la C^*-algèbre dite *dérivée* de $\mathcal{H}$ dans [5], p. 258 : ceci résulte de la proposition 21.

THÉORÈME 13. — *Soit A une C^*-algèbre séparable à trace continue. Pour que A soit dérivée d'un champ continu d'espaces hilbertiens, il faut et il suffit que $\delta(A) = 0$.*

Ceci résulte des lemmes 23, 24 et du théorème 10.

LEMME 25. — *Soient B un espace localement compact à base dénombrable, $\mathcal{A} = ((A(z)), \Theta)$ un champ continu localement trivial de C^*-algèbres élémentaires séparables sur B, A la C^*-algèbre associée à $\mathcal{A}$. Alors A est séparable.*

D'après la proposition 14, $\mathcal{A}$ est séparable. D'autre part, grâce à la proposition 10, on se ramène au cas où B est compact (métrisable). Soit (x_n) une suite totale d'éléments de Θ. Soit (f_m) une suite partout dense dans $\mathcal{C}(B)$. Les $f_m x_n$ sont des éléments de A. Montrons qu'ils sont partout denses dans A. Soient $x \in A$ et $\varepsilon > 0$. D'après la proposition 2, il existe $g_1, \ldots, g_p \in \mathcal{C}(B)$ telles que

$$\| x - g_1 x_1 - \ldots - g_p x_p \| \leqq \varepsilon.$$

En choisissant convenablement les indices $i_1, \ldots, i_p$, on aura $\| x - f_{i_1} x_1 - \ldots - f_{i_p} x_p \| \leqq 2\varepsilon$, d'où le lemme.

Soit a un cardinal. Une C^*-algèbre A sera dite *homogène de degré a* si toute représentation irréductible de A est de dimension a. Pour a fini, on retrouve la définition de [5], p. 249, et [18], p. 498.

THÉORÈME 14. — *Soit B un espace localement compact à base dénombrable, de dimension finie.*

(i) *Si A est une C^*-algèbre séparable à trace continue, homogène de degré $\aleph_0$, de spectre B, le champ continu de C^*-algèbres élémentaires sur B associé à A est localement trivial.*

(ii) *L'application $A \to \delta(A)$ définit une bijection de l'ensemble des classes de C^*-algèbres séparables à trace continue, homogènes de degré $\aleph_0$, de spectre B, sur $H^3(B, \mathbf{Z})$.*

(i) résulte du théorème 12. Compte tenu de (i), (ii) résulte des lemmes 23, 24, 25 et du théorème 11.

COROLLAIRE. — *Soit B un espace localement compact à base dénombrable, de dimension finie, tel que $H^3(B, \mathbf{Z}) = 0$. Soit A une C^*-algèbre séparable* *à trace continue, homogène de degré $\aleph_0$, de spectre B. Notons A_0 la C^*-algèbre des opérateurs compacts dans un espace hilbertien de dimension $\aleph_0$. Alors A est isomorphe à la C^*-algèbre des applications continues $z \to x(z)$ de B dans A_0 telles que $\| x(z) \|$ tende vers zéro à l'infini.*

En effet, la C^*-algèbre A' des applications continues de B dans A_0 tendant vers zéro à l'infini est séparable, de spectre B, à trace continue, homogène de degré $\aleph_0$. Comme $H^3(B, \mathbf{Z}) = 0$, A est isomorphe à A' d'après le théorème 14.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Bargmann (V.). — On unitary ray representations of continuous groups, *Annals of Math.*, Series 2, t. 59, 1954, p. 1-46.

[2] Bourbaki (Nicolas). — *Topologie générale*, chap. 9 : *Utilisation des nombres réels en topologie générale*, 2e édition. Paris, Hermann, 1958 (*Act. scient. et ind.*, 1045; *Éléments de Mathématique*, 8).

[3] Dugundji (J.). — An extension of Tietze's theorem, *Pacific J. of Math.*, t. 1, 1951, p. 353-367.

[4] Dunford (N.) and Schwartz (J. T.). — *Linear operators*, Part 1 : *General theory*. New York, Interscience Publishers, 1958 (*Pure and applied Mathematics, Interscience*, 7).

[5] Fell (J. M. G.). — The structure of algebras of operator fields, *Acta Math.*, t. 106, 1961, p. 233-280.

[6] Godement (Roger). — Sur la théorie des représentations unitaires, *Annals of Math.*, Series 2, t. 53, 1951, p. 68-124.

[7] Godement (Roger). — *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*. Paris, Hermann, 1958 (*Act. scient. et ind.*, 1252; *Publ. Inst. math. Univ. Strasbourg*, 13).

[8] Grothendieck (Alexander). — *A general theory of fibre spaces with structure sheaf*. Lawrence, University of Kansas, 1955.

[9] Haefliger (André). — Structures feuilletées et cohomologie à valeur dans un faisceau de groupoïdes, *Comment. Math. Helvet.*, t. 32, 1958, p. 248-329 (*Thèse Sc. math.*, Paris, 1958).

[10] Hirzebruch (Friedrich). — *Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie*, 2te Auflage. Berlin, Springer-Verlag, 1962 (*Ergebnisse der Mathematik ..., Neue Folge*, 9).

[11] Kakutani (S.). — Topological properties of the unit sphere of a Hilbert space, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, t. 19, 1943, p. 269-271.

[12] Kaplansky (Irving). — Normed algebras, *Duke math. J.*, t. 16, 1949, p. 399-418.

[13] Kaplansky (Irving). — The structure of certain operator algebras, *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 70, 1951, p. 219-255.

[14] Michael (Ernest). — Continuous selections, I., *Annals of Math.*, Series 2, t. 63, 1956, p. 361-382.

[15] Michael (Ernest). — Continuous selections, II., *Annals of Math.*, Series 2, t. 64, 1956, p. 562-580.

[16] NAGY (Béla Sz). — Perturbations des transformations linéaires fermées, *Acta Sc. Math.*, t. 14, 1951, p. 125-137.

[17] Séminaire H. CARTAN, Tome 2 : *Espaces fibrés et homotopie*, 2e édition. Paris, Secrétariat mathématique, 1956.

[18] TOMIYAMA (J). and TAKESAKI (M.). — Applications of fibre bundles to the certain class of C^*-algebras, *Tôhoku math. J.*, t. 13, 1961, p. 498-523.

(Manuscrit reçu le 10 octobre 1962.)

Jacques DIXMIER,
Professeur à la Faculté des Sciences,
64, rue Gay-Lussac,
Paris 5e.

Adrien DOUADY,
Attaché de Recherches C. N. R. S.,
15, rue André-Chénier,
Fontenay-aux-Roses (Seine).