ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria III: MATEMATYKA STOSOWANA XXIII (1984)

BOLESŁAW KOPOCIŃSKI
Wrocław

Klasy funkcji niezawodności

(Praca wpłynęła do Redakcji 31.03.1982)

SPIS TREŚCI

1. WPROWADZENIE

Podstawowym pojęciem używanym w tej pracy jest element o losowym czasie życia. Przedmiotem rozważań jest rozkład prawdopodobieństwa tej zmiennej losowej lub równoważna mu funkcja niezawodności. Swoboda naszych rozważań jest w tej pracy ograniczona świadomością, że w praktyce zazwyczaj te funkcje nie są znane, a możliwości empirycznego ich poznania są ograniczone.

Określone własności funkcji rozkładu lub funkcji niezawodności definiują odpowiednie klasy tych funkcji. Jest wiele takich klas. Przedmiotem tej pracy jest przegląd rezultatów dotyczących kilku klas, zdefiniowanych w sposób naturalny i praktycznie użytecznych. Przeważająca część przedstawionych tu rezultatów jest dziełem trzech autorów: R. E. Barlowa, A. W. Marshalla i F. Proschana. W znacznej części znajdują się one w mało znanej w Polsce książce Barlowa i Proschana [9]. Praca ta w pośredni sposób przybliży Czytelnikowi tę interesującą książkę.

Będziemy tu używali anglosaskiej symboliki dla rozważanych klas rozkładów. Precedensem w literaturze może być symbolika Kendalla, powszechnie używana w pokrewnej teorii obsługi masowej. W języku polskim w interesującym nas zakresie funkcjonuje jedynie pojęcie elementu starzejącego się, ale to określenie nie jest adekwatne do żadnej formalnie zdefiniowanej klasy. Dodajmy, że próby spolszczenia raczej nie powiodły się (zob. [22]).

W całej pracy F oznacza rozkład prawdopodobieństwa pewnej nieujemnej zmiennej losowej. Przyjmujemy następujące konwencje i oznaczenia: F jest funkcją prawostronnie ciągłą (jakkolwiek nie jest to zgodne z polską tradycją),

$$F^{-1}(t) = \inf\{x:\ F(x) > t\},\qquad 0 \leqslant t < 1,$$

$$F^{-1}(1) = \sup\{x:\ F(x) < 1\}.$$

Niezawodnością nazywamy funkcję

$$P(x) = 1 - F(x),\qquad x \geqslant 0.$$

Gęstość rozkładu prawdopodobieństwa F, o ile istnieje, oznaczamy przez f, średnią w tym rozkładzie, o ile istnieje, oznaczamy przez μ_1. Używamy terminu „rosnący" w miejsce „niemalejący" i „malejący" w miejsce „nierosnący". W niektórych przypadkach przedstawiamy równocześnie pewne pary rezultatów, zwanych dualnymi, podając w nawiasach dualną wersję założeń i tez.

2. DEFINICJE KLAS

Następujące klasy rozkładów prawdopodobieństwa będą przedmiotem naszych rozważań. W nawiasach podajemy terminy angielskie będące źródłem symboli.

(a) F należy do klasy EXP rozkładów wykładniczych, jeżeli
$P(x+y)/P(y) = P(x)$ dla $x > 0,\ y > 0$;

(b) F należy do klasy IFR rozkładów o rosnącej intensywności uszkodzeń (increasing failure rate), jeżeli dla każdego $x > 0$ $P(x+y)/P(y)$ maleje dla $0 \leqslant y < F^{-1}(1)$;

(c) F należy do klasy DFR rozkładów o malejącej intensywności uszkodzeń (decreasing failure rate), jeżeli $F^{-1}(0) = 0$ oraz dla każdego $x > 0$ $P(x+y)/P(y)$ rośnie dla $y \geqslant 0$ lub jeśli F jest zdegenerowane w zerze, $F(0) = 0$;

(d) F należy do klasy IFRA rozkładów o przeciętnie rosnącej intensywności uszkodzeń (increasing failure rate average), jeżeli $(1/y)(-\log P(y))$ rośnie dla $0 < y < F^{-1}(1)$ lub jeśli F jest zdegenerowane w zerze;

(e) F należy do klasy DFRA rozkładów o przeciętnie malejącej intensywności uszkodzeń (decreasing failure rate average), jeżeli $(1/y)(-\log P(y))$ maleje dla $y > 0$ lub jeżeli F jest zdegenerowane w zerze;

(f) F należy do klasy NBU rozkładów czasu życia elementów „nowe lepsze od używanych" (new better than used), jeżeli $P(x+y) \leqslant P(x)P(y)$ dla $x > 0$, $y > 0$;

(g) F należy do klasy NWU rozkładów czasu życia elementów „nowe gorsze od używanych" (new worse than used), jeżeli $P(x+y) \geqslant P(x)P(y)$ dla $x > 0$, $y > 0$;

(h) F należy do klasy NBUE rozkładów czasu życia elementów „nowe lepsze od średnio używanych" (new better than used in expectation), jeżeli $\mu_1 = \int_0^\infty P(x)dx < \infty$ oraz $\int_y^\infty P(x)dx \leqslant \mu_1 P(y)$ dla $y > 0$;

(i) F należy do klasy NWUE rozkładów czasu życia elementów „nowe gorsze od średnio używanych" (new worse than used in expectation), jeżeli $\int_y^\infty P(x)dx < \infty$ oraz $\int_y^\infty P(x)dx \geqslant \mu_1 P(y)$ dla $y > 0$.

U w a g a. Klasy IFR, IFRA, NBU i NBUE w potocznym rozumieniu zawierają rozkłady czasu życia elementów starzejących się. Gdy w definicji klasy DFR przyjmiemy $F^{-1}(0) \geqslant \theta$, wówczas otrzymujemy klasę rozkładów F przesuniętych (shifted) i oznaczamy ją przez SDFR (zob. [25]). Na ogół będziemy zakładali $F^{-1}(0) = 0$, a ogólną sytuacją zajmiemy się w punkcie 5.3.

W przypadku gdy w definicjach (a) - (i) rozkład prawdopodobieństwa F jest dyskretny, określony na liczbach całkowitych, nieujemnych, również argumenty funkcji definiujących klasy mogą być ograniczone do tej dziedziny. Otrzymujemy wówczas dyskretne wersje rozważanych klas. W literaturze można spotkać rozważania dotyczących dyskretnych klas IFR i DFR. Podajemy więc ich równoważne charakteryzacje.

(b′) $\{p_n, n = 0, 1, \ldots\}$ należy do klasy IFR, jeżeli $p_k / \sum_{n=k}^{\infty} p_n$ rośnie dla $k = 0, 1, \ldots$;

(c′) $\{p_n, n = 0, 1, \ldots\}$ należy do klasy DFR, jeżeli $p_k / \sum_{n=k}^{\infty} p_n$ maleje dla $k = 0, 1, \ldots$

Terminologia i symbolika tu wprowadzona pochodzi z teorii niezawodności i odnowy. W innych dziedzinach, na przykład w teorii obsługi masowej, zastosowaniach w biologii itp., gdzie te pojęcia mogą wystąpić, może się ona wydać sztuczna. Wówczas różnie się ją modyfikuje. W [2] i [3] mamy IFR = IHR (increasing hazard rate). Warto odnotować, że istnieją związki klasy IFR z klasą TP_2 funkcji dodatnio określonych rzędu 2 (totaly positive of order 2, zob. [27]) oraz klasą PF_2 gęstości Pólya (Pólya frequency functions of order 2, zob. [20]).

3. RELACJE

Wystarczy spojrzenie na definicje, aby połączyć klasy rozkładów w pary klas dualnych: IFR i DFR, IFRA i DFRA, NBU i NWU oraz NBUE i NWUE. Można przypuszczać, że wiele wyników dotyczących klas można połączyć w pary dualne, przy czym dowody będą się sprowadzały do banalnych modyfikacji. Pewną niedogodność sprawia warunek DFR, który w przeciwieństwie do warunku IFR nie gwarantuje istnienia wartości oczekiwanej. Niekiedy pojawia się więc w twierdzeniach dualnych dodatkowe założenie istnienia wartości oczekiwanej. Tak jest również w twierdzeniach cytowanych w tym paragrafie.

Zdefiniowane w poprzednim paragrafie klasy rozkładów pozostają w następujących relacjach:

(A) $\quad$ EXP $\subset$ IFR $\subset$ IFRA $\subset$ NBU $\subset$ NBUE,

(B) $\quad$ EXP $\subset$ DFR $\subset$ DFRA $\subset$ NWU,

(C) $\quad$ jeżeli $F \in$ NWU i ma skończoną wartość oczekiwaną, to $F \in$ NBUE.

Przedstawimy teraz uwagi o dowodach relacji w przypadku (A). Dla przejrzystości zestawimy warunki równoważne definicjom kolejno pojawiających się w (A) klas rozkładów:

(i) $\quad P(x+y)/P(y) = P(x), \qquad x > 0, \quad y > 0,$

(ii) $\quad P(x+y_1)P(y_2) \geqslant P(x+y_2)P(y_1), \qquad x > 0, \quad 0 < y_1 < y_2,$

(iii) $P(\alpha y) \geqslant P^{\alpha}(y), \quad y > 0, \quad 0 < \alpha < 1,$

(iv) $P(x+y) \leqslant P(x)P(y), \quad x > 0, \quad y > 0,$

(v) $\int_0^\infty P(x+y)dx \leqslant \mu_1 P(y), \quad y > 0.$

Warunek (i) jest oczywiście mocniejszy od warunku (ii). Również dowód relacji IFR $\subset$ NBU jest natychmiastowy, natomiast uplasowanie klasy IFRA między tymi dwoma klasami wymaga pewnego wysiłku.

Dowodzi się, że jeśli $F \in$ IFR oraz $F(z) < 1$, to F jest absolutnie ciągła w przedziale $(0, z)$, zatem ewentualna nieciągłość F może występować w punkcie $F^{-1}(1)$. Mając gęstość f rozkładu F, możemy definiować funkcję intensywności uszkodzeń $r(y) = f(y)/P(y)$ dla $0 < y < F^{-1}(1)$. Teraz, jeżeli $F \in$ IFR, to łatwo wykazać, że w obszarze $0 < y < F^{-1}(1)$ $r(y)$ jest rosnąca, $-\log P(y)$ jest wypukła, dla każdego $\lambda > 0$ $P(y) - e^{-\lambda y}$ zmienia znak co najwyżej raz, przy czym ewentualna zmiana znaku jest z + na −. Wymieniona na końcu własność jest równoważna definicji $F \in$ IFRA. To dowodzi, że warunek (iii) jest słabszy od warunku (ii).

Jeżeli obok warunku (iii) napiszemy to samo w postaci $P((1-\alpha)y) \geqslant P^{1-\alpha}(y)$, $y > 0$, $0 < \alpha < 1$, i pomnożymy stronami te warunki, to otrzymamy (iv). Warunek (v) powstaje przez scałkowanie stronami warunku (iv).

4. WŁASNOŚCI

Różnorakie sytuacje praktyczne, w których mogą się znaleźć elementy pozwalają określić pewne przekształcenia rozkładów czasu życia elementów. Bliżej zapoznamy się z trzema przekształceniami: operacją splotu, operacją mieszania i przekształceniem rozkładów czasu życia elementów przez tworzenie systemów. Następnie pokażemy jak działają te operacje na rozkładach w rozważanych przez nas klasach.

4.1. Operacje

Przypuśćmy, że element w chwili uszkodzenia zostaje zastąpiony elementem rezerwowym. Jeżeli X_1 i X_2 oznaczają czasy życia elementu i elementu rezerwowego, to $X_1 + X_2$ jest chwilą uszkodzenia pary, a jeżeli dodatkowo założymy, że te zmienne losowe są niezależne, to rozkład sumy jest splotem

$$Pr(X_1 + X_2 \leqslant y) = \int_0^y F_1(y-x)dF_2(x), \qquad y > 0,$$

przy czym F_i jest rozkładem X_i, $i = 1, 2$.

Przypuśćmy, że w urnie znajdują się elementy, przy czym p_n jest frakcją elementów o rozkładzie czasu życia F_n, $n = 1, 2, \ldots$ Element wzięty z urny ma wówczas czas życia o rozkładzie $F = \sum_{n=1}^{\infty} p_n F_n$. Ogólnie, mieszanką rozkładów F_a, zależnych od pewnego parametru $a \in A$, nazywamy

$$F(y) = \int_A F_a(y) m(da),$$

gdzie m jest pewną miarą probabilistyczną na A.

Przejdziemy teraz do wprowadzenia pewnych elementarnych pojęć z teorii systemów. Niech α oznacza wartość binarnę elementu. Jest to zmienna losowa przyjmująca wartość $\alpha = 1$, jeżeli element pracuje oraz przyjmująca wartość $\alpha = 0$, jeżeli element jest uszkodzony. Gdy dany jest czas X życia elementu, wówczas wartość binarna jest procesem stochastycznym postaci

$$\alpha = \alpha(t) = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli } X \geqslant t, \\ 0, & \text{jeżeli } X < t. \end{cases}$$

Przypuśćmy, że mamy n elementów scharakteryzowanych wartościami binarnymi $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Powiemy, że elementy te tworzą system, jeżeli dana jest funkcja $\Phi = \Phi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, zwana funkcję struktury, określająca wartość binarną systemu w zależności od wartości binarnych elementów. Naturalnie jest przyjąć, że $\Phi(1, 1, \ldots, 1) = 1$, $\Phi(0, 0, \ldots, 0) = 0$.

System elementów nazywamy koherentnym, jeżeli funkcja struktury jest niemalejąca i nie jest stała dla każdego argumentu. Interesującą podklasą systemów koherentnych stanowią systemy typu „k z n" mające funkcję struktury postaci

$$\Phi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli } \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n \geqslant k, \\ 0, & \text{w przeciwnym razie.} \end{cases}$$

Przy $k=n$ mamy systemy o strukturze szeregowej, a przy $k=1$ mamy systemy o strukturze równoległej.

Każda funkcja struktury Φ definiuje czas pracy systemu, a łączny rozkład czasu życia elementów i funkcja struktury pozwalają wyznaczyć rozkład czasu życia systemu. Dla przykładu, jeżeli $X_1, X_2, \ldots, X_n$ oznaczają czasy życia elementów oraz $X_{1n} \leqslant X_{2n} \leqslant$

... $\leqslant X_{nn}$ są statystykami pozycyjnymi w tym ciągu, to czas życia systemu „k z n" jest równy statystyce pozycyjnej $X_{n-k+1,n}$.

W dalszym ciągu będziemy zakładali, że czasy życia elementów są zmiennymi losowymi niezależnymi. W tym przypadku rozkład czasu życia systemu zależy od rozkładów jednowymiarowych czasu życia elementów i funkcji struktury. W skrócie system utożsamiamy z pewną operacją na rozkładach czasu życia elementów.

4.2. Klasy i operacje

Nasuwa się interesujące pytanie, które klasy rozkładów prawdopodobieństwa zdefiniowane w paragrafie 2 są zamknięte ze względu na rozważane operacje. Rozkłady wykładnicze należą do klas dualnych, a rozważane operacje wyprowadzają poza tę klasę (pewne degeneracje możemy tu zaniedbać). Stąd wynika, że jeżeli twierdzenie o zamkniętości zachodzi dla pewnej klasy, to nie zachodzi dla klasy dualnej.

Klasy IFR, NBU i NBUE są zamknięte ze względu na operację splotu. W pierwszym przypadku w dowodzie wykorzystuje się równoważność: $F \in$ IFR wtedy i tylko wtedy, gdy $F(x+y)$, $x+y \geqslant 0$, jest funkcją dodatnio określoną rzędu 2 (zob. [8], str. 25). W punkcie 5.1 wykażemy, że w przypadku dyskretnej klasy IFR problem sprowadza się do sprawdzenia, że klasa ciągów logarytmicznie wklęsłych jest zamknięta ze względu na operację splotu ciągów.

Klasy DFR i DFRA są zamknięte ze względu na tworzenie mieszanek. Twierdzenie takie nie jest prawdziwe w klasach NWU, chyba że dodatkowo założymy, że klasa jest ograniczona do mieszanek rozkładów nie przecinających się. Przy wspomnianym ograniczeniu twierdzenie o zamkniętości jest prawdziwe także w klasie NBUE.

Klasy IFRA i NBU są zamknięte ze względu na tworzenie systemów koherentnych. Twierdzenie nie jest prawdziwe w klasie IFR i NBUE, chyba że dodatkowo założymy, że są to systemy postaci "k z n".

Dowody wymienionych twierdzeń albo odpowiednie kontrprzykłady można znaleźć częściowo w [26] oraz w [9]. W dowodach używane są jedynie definicje klas i operacji, bez użycia wyszukanych metod. Można je traktować jako interesujące ćwiczenia.

5. CHARAKTERYZACJE

Własność braku pamięci czasu życia elementu definiująca klasę rozkładów EXP, jednoznacznie wyznacza postać analityczną rozkładu. Wiadomo, że $F \in$ EXP wtedy i tylko wtedy, gdy $P(x) = e^{-\lambda x}$, $x \geqslant 0$, przy czym $\lambda > 0$. Teraz przejdziemy do przedstawienia pewnych niekonwencjonalnych charakteryzacji innych klas rozkładów. Będą to charakteryzacje klasy dyskretnych rozkładów IFR przez ciągi logarytmicznie wklęsłe i charakteryzacje rozważanych przez nas klas w ogólności przez własności transformaty Laplace'a oraz przez własności statystyk pozycyjnych w próbach losowych.

5.1. Ciągi logarytmicznie wklęsłe

Ciąg liczbowy $\{a_n,\ n = 0, 1, \ldots\}$ nazywamy logarytmicznie wklęsłym, jeżeli $a_n^2 \geqslant a_{n-1}a_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$, natomiast logarytmicznie wypukłym, jeżeli nierówność ma zwrot przeciwny.

Rozważmy rozkład $\{p_n,\ n = 0, 1, \ldots\} \in \mathrm{IFR}$. Kładąc $q_n = p_{n+1} + p_{n+2} + \ldots$, $n = -1, 0, 1, \ldots$, mamy $p_n = q_{n-1} - q_n$, $n = 0, 1, \ldots$, a stąd wynika następująca równoważność: $\{p_n,\ n = 0, 1, \ldots\} \in \mathrm{IFR}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\{q_n,\ n = -1, 0, \ldots\}$ jest logarytmicznie wklęsły. Analogiczny rezultat można sformułować w przypadku dyskretnej klasy DFR.

Wiadomo (zob. [17]), że klasa ciągów logarytmicznie wklęsłych jest zamknięta ze względu na operację splotu. Z powyższych uwag wynika, że dyskretna klasa IFR jest zamknięta ze względu na operację splotu.

5.2. Transformata Laplace'a

Przypomnijmy wzór na odwrócenie transformaty Laplace'a. Gdy f jest gęstością prawdopodobieństwa, ciągłą w x_0, $\varphi(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)dx$, $s > 0$, wówczas

$$f(x_0) = \lim_{n\to\infty} \left[s^{n+1} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{d^n}{ds^n} \varphi(s) \right] \Bigg|_{s=n/x_0}$$

(zob. [18], str. 218).

Wzór ten, ważny w teorii prawdopodobieństwa, nie wnosi do zastosowań dużego pożytku. Dlatego, z pewną satysfakcją, Winogradow [28]-[30] wykorzystuje go do scharakteryzowanie rozkładów należących do klas IFR i NBU. Rezultat ten rozszerzają Block i Savits w [12], którzy podobnie charakteryzują inne klasy rozkładów.

Załóżmy, że $F(0+) = 0$ oraz wprowadźmy transformatę Laplace'a-Stieltjesa rozkładu F: $\varphi(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dF(x)$, $s \geqslant 0$. Zdefiniujmy ciąg funkcji

$$a_n(s) = \frac{(-1)^n}{n!} \frac{d^n}{ds^n} \left(\frac{1 - \varphi(s)}{s} \right), \qquad n = 0, 1, \ldots, \quad s \geqslant 0,$$

oraz niech

$$\alpha_0(s) = 1,$$

$$\alpha_{n+1}(s) = s^{n+1}a_n(s), \qquad n = 0, 1, \ldots, \quad s \geqslant 0.$$

Podstawowy rezultat tego paragrafu jest następujący:

(a) $F \in IFR$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $s > 0$ cięg $\alpha_n(s)$, $n = 0, 1, \ldots$, jest logarytmicznie wklęsły,

(b) $F \in IFRA$ wtedy i tylko wtedy , gdy dla każdego $s > 0$ ciąg $(\alpha_n(s))^{1/n}$ maleje dla $n = 1, 2, \ldots$,

(c) $F \in NBU$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $s > 0$ mamy $\alpha_{m+n}(s) \leqslant \alpha_m(s)\alpha_n(s)$ dla $m > 0$, $n > 0$,

(d) $F \in NBUE$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $s > 0$ mamy

$$\alpha_n(s) \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i(s) \geqslant \sum_{i=n}^{\infty} \alpha_i(s) \quad \text{dla} \quad n > 0.$$

Analogiczne rezultaty można sformułować dla klas DFR, DFRA, NWU i NWUE. W poprzednim punkcie tej pracy przypomnieliśmy, że klasa ciągów logarytmicznie wklęsłych jest zamknięta ze względu na operację splotu. Można wykazać (zob. [17]), że ciąg $\alpha_n(s)$, $n = 0, 1, \ldots$, zdefiniowany dla rozkładu splotowego jest splotem ciągów zdefiniowanych dla rozkładów splatanych. Stąd wynika, że klasa IFR jest zamknięta ze względu na operację splotu.

Myśl dowodu cytowanych wyżej twierdzeń (a)-(d) wynika z probabilistycznej interpretacji wyrazów ciągu $\alpha_n(s)$, $n = 0, 1, \ldots$ Mamy bowiem

$$\alpha_n(s) = EP(T_n(s)), \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

gdzie $T_n(s)$ jest zmienną losową o rozkładzie Erlanga rzędu n z parametrem s. Ponieważ $ET_n(s) = n/s$, $\mathrm{Var}\, T_n(s) = n/s^2$, więc biorąc $s = n/x$, $x > 0$, mamy następującą wersję wzoru na odwrócenie transformaty Laplace'a

$$\alpha_n(s) \to P(x), \qquad n \to \infty.$$

Własności funkcji P mogą być wobec tego przełożone na własności wyrazów ciągu α, natomiast z powyższej relacji wynika, że własności wyrazów ciągu α mogę być przełożone na własności funkcji P. Pełny dowód twierdzeń znajduje się w [12]. Tutaj przedstawimy pewne szczegóły dowodu w przypadku (a).

D o s t a t e c z n o ś ć. Mamy $\alpha_{n+1}(s) = \int_0^\infty P(u)dG(u)$, gdzie $dG(u) = (s^{n+1}/n!)u^n \exp(-su)du$. Niech $x > 0$ będzie punktem ciągłości F, $s = s(n,x)$ i $\lim_{n\to\infty} n/s = x$. Ponieważ $G_n \to G$, gdzie G jest rozkładem skoncentrowanym w x, więc z twierdzenia 5.2 z książki Billingsleya [11] wynika, że $\lim_{n\to\infty} \alpha_{n+1}(s) = P(x)$.

Z warunku $\alpha_n^2(s) \geqslant \alpha_{n-1}(s)\alpha_{n+1}(s)$, $n = 1, 2, \ldots$, wynika warunek $\alpha_{n-k}(s)\, \alpha_{n+k}(s) \geqslant \alpha_{n-l}(s)\alpha_{n+l}(s)$ dla $k < l$. Ustalmy $x > 0$, $0 < y_1 < y_2$, $y_2 = (n-k)y_1/(n-l)$, $x = (k+l)y_1/(n-l)$, $s = (n-l)/y_1$. Wówczas po przejściu do granicy przy $n \to \infty$ otrzymujemy $P(y_2)P(x+y_1) \geqslant P(y_1)P(x+y_2)$. To oznacza, że $F \in IFR$.

K o n i e c z n o ś ć. Zauważmy, że $\alpha_n(0) = \mu_{n+1}/(n+1)!$, $n = 0, 1, \ldots$ W pracy [6] dowodzi się, wykorzystując łańcuch wcześniejszych rezultatów (por. także punkt 6.1 tej pracy), że jeżeli $F \in IFR$, to

(1) $$\alpha_n^2(0) \geqslant \alpha_{n-1}(0)\alpha_{n+1}(0).$$

Z teorii systemów o strukturze szeregowej (zob. punkt 4.2) wiadomo, że jeżeli $F \in IFR$, to $1 - (1-F(x))e^{-sx}$ również należy do klasy IFR. Napiszmy warunek (1) dla tej funkcji rozkładu, otrzymujemy wówczas $\alpha_n^2(s) \geqslant \alpha_{n-1}(s)\alpha_{n+1}(s)$, $s > 0$, co należało wykazać.

5.3. Statystyki pozycyjne

Teraz przedstawimy charakteryzacje klas IFR i SDFR oraz NBU i NWU przy użyciu statystyk pozycyjnych. Rezultaty dualne formułujemy równocześnie podając w nawiasach kwadratowych wersję dualną założeń i tez.

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będzie próbą losową rozmiaru n oraz $X_{1n} \leqslant X_{2n} \leqslant \ldots \leqslant X_{nn}$ będzie ciągiem statystyk pozycyjnych w tej próbie. Definiujemy k-ty ważony odstęp $W_{kn} = (n-k+1)(X_{kn}-X_{k-1,n})$ dla $k = 1, 2, \ldots, n$, przy czym $X_{0n} = 0$, oraz statystykę $T_{kn} = \sum_{i=1}^{k} W_{in}$ dla $k = 1, 2, \ldots, n$, przy czym $T_{0n} = 0$.

Gdy w chwili $t = 0$ instalujemy n elementów w celu zbadania czasu ich życia, wówczas kolejne statystyki pozycyjne są chwilami uszkodzeń elementów, a T_{kn} jest sumą czasów życia elementów do chwili k-tego uszkodzenia. Wielkości te grają ważną rolę w teorii opracowywania eksperymentów niezawodnościowych (por. [9], str. 61).

Wprowadźmy za pracą [1] następującą funkcję:

$$H_F^{-1}(t) = \int_0^{F^{-1}(t)} P(u)du, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Może ona służyć do scharakteryzowania klas IFR i SDFR. W [1] wykazano, że $F \in IFR$ $[F \in SDFR]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $H_F^{-1}(t)$ dla $0 \leqslant t \leqslant 1$ jest wklęsła [wypukła].

Jeżeli $H_F^{-1}(t)$ lub, co jest równoważne, $F^{-1}(t)$ jest ciągła dla $0 < t < 1$, k i n rosną tak, że $k/n \to t$ przy $n \to \infty$, to

$$\frac{1}{n}T_{kn} \longrightarrow H_F^{-1}(t) \quad \text{z prawdopodobieństwem 1.}$$

Ten fakt wykorzystuje się w dowodzie twierdzenia: $F \in IFR$ [$F \in SDFR$ ze skończoną wartością oczekiwaną] wtedy i tylko wtedy, gdy F ma skończoną wartość oczekiwaną i EW_{kn} jest malejący [rosnący] dla $k = 2, 3, \ldots,$ dla nieskończenie wielu n.

Powyższa charakteryzacja wykorzystuje ciąg statystyk pozycyjnych przy $n \to \infty$. Teraz wspomnimy o innej charakteryzacji klas IFR i DFR wykorzystującej próbę ustalonego rozmiaru. Dla ciągłego rozkładu F mamy $Pr(X_{m+1,n} - X_{mn} > u | X_{mn} = x) = (P(x+u)/P(x))^{n-m}$ (zob. [14], str. 18). Stąd wynika twierdzenie: ciągły rozkład $F \in IFR$ $[F \in SDFR]$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla ustalonych m i n $2 \leqslant m+1 \leqslant n$ i dla każdego $u \geqslant 0$ $Pr(X_{m+1,n} - X_{mn} > u | X_{mn} = x)$ maleje [rośnie] dla $-\infty < x < F^{-1}(1)$ $[F^{-1}(0) \leqslant x < \infty]$. Innymi słowy zmienna losowa $X_{m+1,n} - X_{mn}$ jest stochastycznie malejąca [rosnąca] zależnie od zmiennej losowej X_{mn}.

Podobnie jak poprzednio można scharakteryzować klasy NBU i NWU. Ciągły rozkład prawdopodobieństwa $F \in NBU$ $[F \in NWU]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $Pr(X_{1,n-m} > u) \geqslant [\leqslant]$ $Pr(X_{m+1,n} - X_{mn} > u | X_{mn} = x)$ dla pewnego ustalonego m i n $(1 \leqslant m < n)$ i dla każdego $u \geqslant 0$ i $x \geqslant 0$.

6. WNIOSKI I ZASTOSOWANIA

Na początku pracy zapowiedzieliśmy, że przedstawimy rezultaty praktycznie użyteczne. Dla udokumentowania tej zapowiedzi teraz przedstawimy cztery przykłady zastosowań. Ograniczamy się przy tym do zagadnień teorii niezawodności i odnowy.

6.1. Momenty

Niżej wykażemy, że w klasie NBUE, najszerszej w ciągu klas rozkładów czasu życia elementów starzejących się, istnieją momenty dowolnego rzędu. Ponieważ warunek definiujący klasę DFR nie gwarantuje skończoności wartości oczekiwanej, więc własności momentów, które tutaj podamy mogą być formułowane w wersjach dualnych przy założeniu ich istnienia.

Niech $\mu_r = r\int_0^\infty x^{r-1}P(x)dx$ oraz $\lambda_r = \mu_r/\Gamma(r+1)$, $r \geq 0$. (Uwaga, w punkcie 5.2 używaliśmy oznaczenia $\alpha_n(0) = \lambda_{n+1}$, $n = 0, 1, \ldots$)

W 1961 roku udowodniono (zob. [21]), że dla rozkładów prawdopodobieństwa należących do klasy IFR ciąg standaryzowanych momentów λ_r, $r = 0, 1, \ldots$, jest logarytmicznie wklęsły, czyli $\lambda_n^2 \geq \lambda_{n-1}\lambda_{n+1}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Pierwotny dowód tego faktu wykorzystuje pojęcie funkcji dodatnio określonych i jakkolwiek do sformułowania twierdzenia użyte są najprostsze pojęcia analizy, nie ma prostszego dowodu.

W przypadku rozkładów należących do klasy NBU sytuacja jest łatwiejsza.

Obie strony nierówności $P(x+y) \leq P(x)P(y)$, $x > 0$, $y > 0$, pomnóżmy przez $x^{r-1}y^{s-1}/\Gamma(r)\Gamma(s)$ i scałkujmy. Otrzymamy wówczas implikację: jeżeli $F \in$ NBU, to $\lambda_{r+s} \leq \lambda_r\lambda_s$, $r \geq 0$, $s \geq 0$. Warunek ten oznacza, w szczególności, że ciąg λ_r, $r = 0, 1, \ldots$, ma dyskretną własność NBU.

Weźmy nierówność $\int_y^\infty P(x)dx \leq \mu_1 P(y)$, pomnóżmy ją przez $y^{r-1}/\Gamma(r)$ i scałkujmy stronami. Wynika z tego implikacja: jeżeli $F \in$ NBUE, to $\lambda_{r+1} \leq \lambda_r\mu_1$, czyli $\mu_r \leq \Gamma(r+1)\mu_1^r$. Stęd wynika zapowiedziany na wstępie rezultat, że w klasie NBUE momenty dowolnego rzędu są skończone.

6.2. Oszacowania funkcji niezawodności

Przynależność rozkładu prawdopodobieństwa do określonej klasy oraz dodatkowa znajomość na przykład kwantyla rozkładu, wartości oczekiwanej lub dalszych momentów pozwala oszacować funkcję niezawodności. Znaczenie praktyczne takich oszacowań jest ważne dlatego, że estymacja kwantyla lub wartości oczekiwanej jest efektywniejsza aniżeli estymacja funkcji rozkładu, zwłaszcza, że znajomość funkcji niezawodności jest pożądana w niewygodnym obszarze, gdy wartość funkcji jest bliska zera lub jedności.

W paragrafie 3 zauważyliśmy, że funkcja niezawodności w klasach IFRA i DFRA przecina funkcję wykładniczą co najwyżej raz, dodajmy, że jeżeli mają one tę samą średnią, to przecina ją dokładnie raz albo jest z nią identyczna. To pozwala wykazać, że jeżeli $F \in$ IFRA, to

$$P(x) \geqslant \begin{cases} \exp(-x/\mu_1), & x \leqslant \mu_1, \\ 0, & x > \mu_1, \end{cases}$$

$$P(x) \leqslant \begin{cases} 1, & x \leqslant \mu_1, \\ \exp(-w(x)x), & x > \mu_1, \end{cases}$$

gdzie $w(x)$ jest rozwiązaniem równania $1 - w\mu_1 = e^{-wx}$, $w > 0$. Oszacowań tych nie można wzmocnić także w węższej klasie IFR.

Gdy $F \in$ DFR i dana jest wartość oczekiwana μ_1, wówczas najmocniejsze oszacowanie funkcji niezawodności od dołu jest banalne, $P(x) \geqslant 0$, natomiast oszacowanie od góry jest następujące:

$$P(x) \leqslant \begin{cases} \exp(-x/\mu_1), & x \leqslant \mu_1, \\ \mu_1/ex, & x > \mu_1. \end{cases}$$

Oszacowanie to pozostaje w mocy w klasie DFRA (zob. [5]). Dla wymienionych wyżej funkcji sporządzone są tablice [4].

W klasie NBUE znajdujemy łatwo

$$P(x) \geqslant (1/\mu_1) \int_x^\infty P(u)du = 1-(1/\mu_1) \int_0^x P(u)du \geqslant 1-x/\mu_1, \quad x \leqslant \mu_1.$$

Interesujące uzupełnienia wymienionych oszacowań znajdujemy między innymi w pracy [24]. Udowodniono w niej, że oszacowanie od góry w klasach IFR i IFRA pozostają w mocy w klasie NBU. W klasie NBUE natomiast najmocniejsze oszacowanie od góry ma postać

$$P(x) \leqslant \begin{cases} 1, & x \leqslant \mu_1, \\ \exp(-(x-\mu_1)/\mu_1), & x > \mu_1. \end{cases}$$

Najmocniejsze oszacowanie w klasach NWU i NWUE ma postać

$$0 \leqslant P(x) \leqslant \mu_1/(x+\mu_1), \qquad x \geqslant 0.$$

6.3. Nierówności teorii odnowy

Przyjmijmy, że elementy uszkodzone są natychmiast odnawiane. Zakładając, że standardowe fakty z teorii odnowy sa znane (por. [27], [22]) przypominamy, że $N(t)$ oznacza jak zwykle liczbę odnów w przedziale $[0, t]$ oraz $H(t) = EN(t)$, $t \geqslant 0$.

Niech F_u oznacza rozkład prawdopodobieństwa czasu życia elementu, który pozostał jeszcze elementowi pracującemu w chwili u. Rozważmy proces $N_u(t) = N(t+u) - N(u)$, $t \geq 0$. Mówimy, że jest to proces odnowy zmodyfikowany, w którym czas życia pierwszego elementu w strumieniu odnawianych elementów ma wyróżniony rozkład F_u.

Wiadomo, że $P_u(t) = 1 - F_u(t) = P(t+u) + \int_0^t P(t+u-x)dH(x)$ dla każdego $u \geq 0$, $t \geq 0$. Jeżeli założymy, że $F \in$ NBU, to otrzymujemy stąd $P_u(t) \leq P(t)$ dla każdego $u \geq 0$, $t \geq 0$. Ten sam warunek odnajdujemy w twierdzeniu (zob. [26]): dla każdego $u \geq 0$ $P_u(t) \leq P(t)$ dla $t \geq 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $N(t) \underset{st}{\leq} N_u(t)$ dla $t \geq 0$. Przypominamy, że zmienne losowe X i Y spełniają stochastyczną nierówność $X \underset{st}{\leq} Y$, jeżeli $Pr(X \geq x) \leq Pr(Y \geq x)$ dla każdego x.

Proces odnowy $\tilde{N}(t)$, $t \geq 0$, w którym czas życia pierwszego elementu ma rozkład $\tilde{F}(x) = (1/\mu_1) \int_0^x P(u)du$, $x > 0$, nazywamy stacjonarnym. Przy odpowiednich założeniach regularności mamy $F_u \to \tilde{F}$, przy $u \to \infty$. Po przejściu granicznym twierdzenie cytowane w poprzednim akapicie przyjmuje następującą postać: $F \in$ NBUE wtedy i tylko wtedy, gdy $N(t) \underset{st}{\leq} \tilde{N}(t)$ dla $t \geq 0$. Wnioskiem z tego twierdzenia jest implikacja: jeżeli $F \in$ NBUE, to $H(t) \leq t/\mu_1$. Dla wariancji analogiczny rezultat jest następujący: jeżeli $F \in$ NBU, to $\mathrm{Var}\, N(t) \leq H(t)$, $t \geq 0$.

Gdy przyjmiemy, że elementy nowe są lepsze od używanych, wówczas naturalne jest pytanie, czy i kiedy opłaca się wymienić profilaktycznie element uprzedzając ewentualność uszkodzenia. Warte uwagi są dwie strategie odnowy uprzedzającej: A - elementy wymienia się w chwili osiągnięcia przez nie wieku T, oraz B - elementy wymienia się w z góry ustalonych chwilach $T, 2T, 3T, \ldots$ Charakterystyki procesów odnowy odpowiadające tym strategiom odnowy opatrujemy indeksami A i B.

Zajmujemy się uszkodzeniami zdarzającymi się mimo odnowy uprzedzającej. Niech $N(t)$, $N_A(t,T)$, $N_B(t,T)$, $t \geq 0$, oznaczają interesujące nas procesy odnowy w strumieniach uszkodzeń elementów bez odnowy uprzedzającej i z odpowiednią odnową uprzedzającą. Wykorzystując te oznaczenia charakteryzujemy klasę rozkładów NBU. Można wykazać, że $N(t) \underset{st}{\leq} N_A(t,T)$ dla każdego $t \geq 0$, $T \geq 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $N(t) \underset{st}{\leq} N_B(t,T)$ dla każdego $t \geq 0$, $T \geq 0$, wtedy i tylko wtedy, gdy $F \in$ NBU (zob. [1], wniosek 2.1, twierdzenie 2.4).

Można zapytać o wzajemne relacje między strategiami A i B. Jest raczej oczywiste, że jeżeli $F \in$ IFR, to odnowa uprzedzająca typu B jest korzystniejsza aniżeli odnowa uprzedzająca typu A. Twierdzenie odwrotne wymaga zdefiniowania nowej klasy rozkładów wychodzącej poza klasę NBUE (zob. [23]).

6.4. SYSTEMY Z ODNOWĄ

Rozważmy system n elementowy i załóżmy, możliwość odnowy elementów po uszkodzeniu. Wartości binarne elementów nieodnawianych definiujemy tak, jak w punkcie 4.1. Gdy i-ty element jest odnawiany, wówczas jego wartość binarną $\alpha_i = \alpha_i(t)$ definiujemy jako proces awarii (alternujący) w zwykłym sensie (zob. [19], [22]).

Interesujące twierdzenie znajdujemy w pracy Barlowa i Proschana [10], będące uogólnieniem rezultatu prezentowanego w punkcie 4.2.

Niech Φ będzie funkcją struktury systemu. Jeżeli system ma strukturę koherentną, procesy awarii są niezależne, nieodnawialne elementy mają czas pracy o rozkładzie należącym do klasy IFR, odnawialne elementy mają rozkład czasu pracy o rozkładzie wykładniczym oraz czas odnowy o rozkładzie należącym do klasy DFR, wszystkie elementy są nowe w chwili $t = 0$, to czas do pierwszego uszkodzenia systemu ma rozkład należący do klasy NBU.

W punkcie 6.2 wspomnieliśmy, że jeżeli $F \in$ NBU oraz μ_1 jest wartością oczekiwaną w tym rozkładzie, to $P(x)$ dla $x \leqslant \mu_1$ można oszacować od góry i od dołu. Wobec tego oszacowanie niezawodności systemu sprowadza się do znalezienia wartości oczekiwanej czasu życia systemu.

W dowodzie tego twierdzenia wykorzystuje się pewne pomocnicze procesy Markowa oraz własność stochastycznej monotoniczności pewnych procesów. Zdefiniujmy proces $Z_i(t)$, $t \geqslant 0$, związany z procesem $\alpha_i(t)$ w ten sposób, że $Z_i(t) = 0$, jeżeli $\alpha_i(t) = 1$, oraz $Z_i(t) = t - t_n$, jeżeli $\alpha_i(t) = 0$ oraz $t_n \leqslant t < t_{n+1}$, przy czym t_n i t_{n+1} są chwilami początku i końca odnowy realizowanej w chwili t. Zauważmy, że proces $\alpha_i(t)$ jest malejącą funkcją procesu $Z_i(t)$.

Przy założeniach twierdzenia proces stochastyczny $Z_i(t)$, $t \geqslant 0$, jest procesem Markowa rosnącym, natomiast funkcjonał $\inf_{0 \leqslant s \leqslant t} \Phi(\underline{\alpha}(s))$ jest malejącą funkcją $\underline{\alpha}(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \ldots$ $\ldots, \alpha_n(t))$. To pozwala udowodnić, że

$$\Pr(\Phi(\underline{\alpha}(s)) = 1,\ 0 \leqslant s \leqslant t \mid \underline{Z}(0) = \underline{0}) \geqslant$$

$$\geqslant \Pr(\Phi(\underline{\alpha}(a+s)) = 1,\ 0 \leqslant s \leqslant t \mid \Phi(\underline{\alpha}(s)) = 1, 0 \leqslant s \leqslant a,\ \underline{Z}(0) = \underline{0}),$$

$$t \geqslant 0, \quad a \geqslant 0,$$

gdzie $\underline{Z}(0) = (Z_1(0),\ Z_2(0),\ \ldots,\ Z_n(0))$.

To znaczy, że czas pierwszego przejścia w procesie $\Phi(t)$ do stanu 0 ma rozkład należący do klasy NBU.

W pewnych sytuacjach twierdzenie Barlowa i Proschana zachodzi dla systemów z elementami bez odnowy z czasem pracy o rozkładzie należącym do klasy NBU. Jest tak mianowicie wtedy, gdy elementy z rozkładem czasu pracy należącym do klasy NBU są modułami połączonymi szeregowo. W tym przypadku twierdzenie zachodzi, ponieważ klasa NBU jest zamknięta ze względu na tworzenie systemów koherentnych. Pewnego postępu dokonali Chiang i Niu dowodząc w [13], wspomniane wyżej twierdzenie bez dodatkowych założeń dotyczęcych koherentnej struktury systemu.

PRACE CYTOWANE

[1] R. E. Barlow, R. Campo, Total time on test processes and applications to failure data analysis, w: Reliability and Fault Tree Analysis, R. E. Barlow, N. D. Singpurwalla (Eds) SIAM, Philadelphia 1975. str. 451-482.

[2] R. E. Barlow, A. W. Marshall, Bounds for distributions with monotone hazard rate, I, Ann. Math. Statist. 35 (1964), str. 1234-1257.

[3] R. E. Barlow, A. W. Marshall, Bounds for distributions with monotone hazard rate, II, Ann, Math. Statist. 35 (1964), str. 1258-1274.

[4] R. E. Barlow, A. W. Marshall, Tables of bounds for distributions with monotone hazard rate, JASA 60 (1965), str. 872--890.

[5] R. E. Barlow, A. W. Marshall, Bounds on interval probabilities for restricted families of distributions, Proc. Fifth Berkeley Symp. Math. Statist. Prob. III, 1967, str. 229-257.

[6] R. E. Barlow, A. W. Marshall, F. Proschan, Properties of distributions with monotone hazard rate, Ann. Math. Statist. 34 (1963), str. 375-389.

[7] R. E. Barlow, F. Proschan, Comparison of replacement polices and renewal theory implications, Ann. Math. Statist. 35 (1964), str. 557-589.

[8] R. E. Barlow, F. Proschan, Mathematical Theory of Reliability, Wiley, New York-London-Sidney 1965.

[9] R. E. Barlow, F. Proschan, Statistical Theory of Reliability and Life Testing: Probability Models, Holt, Reinehart and Winston, New York 1975.

[10] R. E. Barlow, F. Proschan, Theory of maitained systems: distribution of time to first system failure, Mathematics of Operations Research, 1 (1976), str. 32-42.

[11] P. Billingsley, Convergence of Probability Measures, Wiley, New York 1968.

[12] H. W. Block, T. H. Savits, Laplace transforms for classes of life distributions, Ann. Probab. 8 (1980), str. 465-474.

[13] Dalen T. Chiang, Shun-Chen Niu, On the distribution of time to first system failure, J. Appl. Prob. 17 (1980), str. 481--489.

[14] H. A. David, Order Statistics, Wiley, New York 1970.

[15] J. D. Esary, A. W. Marshall, F. Proschan, Some reliability applications of the hazard transform SIAM J. Appl. Math. 18 (1970), str. 849-860.

[16] J. D. Esary, A. W. Marshall, F. Proschan, Shock models and wear processes, Ann. Probab. 1 (1973), str. 627-649.

[17] M. Fekete, G. Pólya, Über ein Problem von Laguerre, Rend. Circ. Math. Palermo, 34 (1912), str. 1-32.

[18] W. Feller, Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa, t. II, PWN, Warszawa 1969.

[19] B. W. Gniedenko, J. K. Bielajew, A. D. Sołowiew, Matematyczne metody teorii niezawodności, PWN, Warszawa 1968.

[20] S. Karlin, Total Positivity, Vol. 1, Stanford Univ. Press, Stanford, Calif. 1968.

[21] S. Karlin, F. Proschan, R. E. Barlow, Moment inequalities for Pólya frequency functions, Pacific. J. Math. 11 (1961), str. 1023-1033.

[22] B. Kopociński, Zarys teorii odnowy i niezawodności, PWN, Warszawa 1973.

[23] B. Kopociński, H. Przybysz, Uwaga o strategiach odnowy uprzedzającej, Mat. Stos. 15 (1979), str. 75-79.

[24] A. Korzeniowski, A. Opawski, Bounds for reliability in the NBU, NWU and NBUE, NWUE classes, Zastos. Mat. 15 (1976), str. 1-5.

[25] N. A. Landberg, R. V. León, F. Proschan, Characterization of nonparametric classes of life distributions, Ann. Probab. 8 (1980), str. 1163-1170.

[26] A. W. Marshall, F. Proschan, Classes of distributions applicable in replacement with renewal theory implications, Proc. Sixth Berkeley Symp. Math. Statist. Prob. 1 (1972), str. 395-415.

[27] I. J. Schoenberg, On Pólya frequency functions, J. Analyse Math. 1 (1951), str. 331-374.

[28] O. P. Vinogradov, Opredelenie starejuščich funkcij raspredelenija v terminach preobrazovanija Laplasa, Teor. verojatn. primenen. 18 (1973), str. 856-859.

[29] O. P. Vinogradov, Ob odnom svojstve logarifmičecki vognutych posledovatel'nostej, Mat. zametki, 18 (1975), str. 467-472.

[30] O. P. Vinogradov, O primenenijach odnoj formuly obraščēnija preobrazovanija Laplasa, Teor. verojatn. primenen. 21 (1976), str. 857-860.