



Cohomologie galoisienne des groupes quasi-déployés sur des corps de dimension cohomologique ≤ 2

*Galois cohomology of quasi-split groups over fields of cohomological
dimension ≤ 2*

PHILIPPE GILLE*

Mathématiques, Bât. 425, UMR 8628 du C.N.R.S, Université Paris-Sud, F-91405 Orsay
Cedex, France. e-mail: gille@math.u-psud.fr

Received: 11 March 1999; accepted: 14 October 1999)

Abstract. Let k be a perfect field with cohomological dimension ≤ 2 . Serre's conjecture II claims that the Galois cohomology set $H^1(k, G)$ is trivial for any simply connected semi-simple algebraic G/k and this conjecture is known for groups of type 1A_n after Merkurjev–Suslin and for classical groups and groups of type F_4 and G_2 after Bayer–Parimala. For any maximal torus T of G/k , we study the map $H^1(k, T) \rightarrow H^1(k, G)$ using an induction process on the type of the groups, and it yields conjecture II for all quasi-split simply connected absolutely almost k -simple groups with type distinct from E_8 . We also have partial results for E_8 and for some twisted forms of simply connected quasi-split groups. In particular, this method gives a new proof of Hasse principle for quasi-split groups over number fields including the E_8 -case, which is based on the Galois cohomology of maximal tori of such groups.

Mathematical Subject Classifications (2000). 11E72, 20G10, 20G30.

Key words. Galois cohomology, semisimple groups, Bruhat–Tits theory, Hasse principle.

Soit k un corps, k_s une clôture séparable de k et $\mathcal{G} = \text{Gal}(k_s/k)$ le groupe de Galois absolu de k . Dans son livre ‘Cohomologie galoisienne’, Serre a formulé la conjecture suivante:

CONJECTURE II [Se1, Se2]. Soit G/k un groupe semi-simple simplement connexe absolument presque k -simple. On note $S(G)$ l'ensemble de ses entiers de torsion. Pour tout premier $p \in S(G)$, on fait l'hypothèse suivante:

- (a) si p est inversible dans k , $cd_p(k) \leq 2$,
- (b) si $\text{car}(k) = p$, pour toute extension séparable k'/k , le groupe de cohomologie $H_p^3(k')$ de Kato (voir ci-dessous) est nul.

Alors $H^1(k, G) = 1$.

* Ce travail a été supporté par le réseau européen TMR ‘‘Géométrie arithmétique’’.

Cette conjecture a été démontrée par Merkurjev–Suslin pour les groupes de type 1A_n [Su1] et Bayer–Parimala pour les groupes classiques, de type F_4 et G_2 , dans le cas d’un corps parfait [BP]. Dans cet article, nous nous intéressons à la conjecture pour les groupes exceptionnels D_4 (avec trialité), E_6 , E_7 et E_8 , et notre résultat principal est le théorème suivant.

THÉORÈME (th. 4, § III.3). *Soit G/k un groupe semi-simple simplement connexe et quasi-déployé satisfaisant les hypothèses de la conjecture II. Supposons que l’on soit dans un des cas suivants*

- (1) G n’est pas de type E_8 ,
- (2) le groupe G est de type E_8 et \mathcal{G} est un p -groupe (p premier).

Alors $H^1(k, G) = 1$.

Chernousov a indépendamment démontré le théorème principal (sur un corps parfait) avec des arguments très proches de ceux utilisés dans la preuve du principe de Hasse [Ch4]. Notre méthode est toute autre et repose sur le théorème suivant qui donne, sous les hypothèses de la conjecture II, des informations sur l’image de l’application naturelle $H^1(k, T) \rightarrow H^1(k, G)$ pour certains k -tores maximaux T/k de G/k .

THÉORÈME (th. 7, § III.3). *Soient k un corps, G/k un groupe semi-simple simplement connexe absolument simple, T/k un k -tore maximal de G déployé par une extension cyclique de degré premier. On suppose que G/k satisfait les hypothèses de la conjecture II. Alors l’application naturelle $i_* : H^1(k, T) \rightarrow H^1(k, G)$ est nulle.*

La preuve de ce théorème utilise la théorie de Bruhat–Tits et les invariants de Rost. Ensuite, on peut appliquer les résultats classiques sur la cohomologie galoisienne des groupes algébriques linéaires, i.e. le théorème de Steinberg et les résultats de Harder sur le principe de Hasse [H1].

Le théorème ci-dessus permet aussi de donner dans la section V (indépendante des sections III et IV) une preuve très simple et quasi-uniforme du principe de Hasse pour les groupes quasi-déployés définis sur un corps de nombres, qui en particulier ne diabolise pas les groupes de type E_8 .

0. Notations et rappels

Pour tout groupe abélien A et pour tout entier N , on note ${}_nA$ (resp. A/n) le noyau (resp. le conoyau) la multiplication $A \xrightarrow{\times n} A$.

0.1 Soit X une variété algébrique intègre définie sur k . On note $X(k)$ l’ensemble des k -points rationnels de X . Si L/k est une extension de corps, on note $X_L = X \times_{\text{Spec}(k)} \text{Spec}(L)$ l’extension des scalaires de X à L et $\bar{X} = X_{\bar{k}}$. On dit que

X est k -rationnelle si X est k -birationnelle à un espace affine. Soit Y une variété algébrique définie sur L et supposons que l'extension L/k est finie. On note alors $R_{L/k}Y$ la restriction des scalaires, à la Weil, de L à k de Y (cf. [BLR] p. 191). On note $\mathbb{G}_a = \text{Spec}(k[t])$ le groupe additif. Si G/k est un groupe algébrique linéaire connexe, on note G_{red} le plus grand quotient réductif de G et G_{tor} le plus grand quotient torique de G (appelé tore coradical dans [SGA3]).

0.2. Groupes de types multiplicatifs. On note $\mathbb{G}_m = \text{Spec}(k[t, 1/t])$ le tore standard. Soit M un k -groupe de type multiplicatif (cf. [SGA3], exp. X). On dit que M est un k -tore (resp. est fini) si \hat{M} est un \mathbb{Z} -module libre (resp. fini). On note $\hat{M} = \text{Hom}_{k\text{-gr}}(M, \mathbb{G}_m)$ le module galoisien des caractères de M . Si $\chi \in \hat{M}(k_s)$, on note k_χ/k l'extension galoisienne finie minimale telle que $\chi \in \hat{M}(k_\chi)$. On définit ensuite l'extension galoisienne finie k_M/k comme le composé des extensions k_χ pour χ parcourant $\hat{M}(k_s)$ et on note $\Gamma(M) = \text{Gal}(k_M/k)$. Si $\Gamma(M) = 1$ (i.e. \hat{M} est un module galoisien avec action triviale), on dit que M est déployé. Ainsi k_M/k est l'extension minimale déployant M . Pour toute extension séparable finie L/k , le k -groupe $R_{L/k}(M)$ est de type multiplicatif et on note $R_{L/k}^1(M)$ le noyau de la norme $N_{L/k} : R_{L/k}(M) \rightarrow M$. On dit qu'un tore T est *quasi-trivial* si T est un produit direct de facteurs $R_{L/k}\mathbb{G}_m$. On dit qu'un tore T est *inversible* s'il est facteur direct d'un tore quasi-trivial.

0.3. Types, *-action et algèbres de Tits. Dans cet article, nous utilisons continuellement la classification des groupes semi-simples sur k [T1] que l'on suppose connue du lecteur. Rappelons toutefois que si G/k est un groupe semi-simple absolument presque k -simple, on peut lui associer un diagramme de Dynkin Δ muni d'une action $\mathcal{G} \rightarrow \text{Aut}(\Delta)$ (l'action $*$), définie à conjugaison près par un élément de $\text{Aut}(\Delta)$. Selon que l'on tient compte ou non de l'action $*$, on dit que Δ (resp. Δ muni de l'action $*$) est le type de G (resp. le type quasi-déployé de G).

On note μ le centre de G , qui est un k -groupe de type multiplicatif et G_{ad} le groupe adjoint de G . A tout caractère $\chi \in \hat{\mu}(k_s)$, la théorie des représentations linéaires permet d'associer une algèbre simple centrale A_χ/k_χ . Les algèbres $(D_\chi/k_\chi)_{\chi \in \hat{\mu}(k_s)}$ sont appelées les algèbres de Tits de G [T3, MPW, M3]. Selon la terminologie introduite par Tits [T4], on dit que G est une forme fortement interne si l'action $*$ est triviale et si les algèbres de Tits de G sont déployées.

0.4. Sous-groupes maximaux associés à une racine simple (cf. [T4], § 1.7). Soit G un groupe semi-simple déployé, simple et épinglé, ce qui est la donnée suivante [C2]:

- un k -tore maximal déployé $T \subset G$,
- un système de racines réduit irréductible $\Phi = \Phi(T, G) \subset \hat{T} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ muni d'une base Δ définissant Φ^+ ,

- une famille de morphismes $(U_\alpha : \mathbb{G}_a \rightarrow G)_{\alpha \in \Phi}$ et un sous-groupe de Borel B de G , tels que si l'on ordonne arbitrairement $\Phi^+ = (\alpha_i)_{i=1, \dots, q}$, le produit sur G induit un isomorphisme

$$T \times \prod_{i=1, \dots, q} \mathbb{G}_a \xrightarrow{id \times \prod_{i=1, \dots, q} U_{\alpha_i}} B.$$

On note α_0 l'opposé de la racine maximale et $\mathbf{\Delta} = \Delta \cup \{\alpha_0\}$ le diagramme de Dynkin complété de Δ (cf. [Bou], §VI). Alors à toute racine $\alpha \in \Delta$, on peut associer le sous-groupe H_α de G engendré par T , $U_{\pm\beta}$ ($\beta \in \Delta \setminus \{\alpha\}$) et $U_{\pm\alpha_0}$. Le groupe H_α est un groupe semi-simple de même rang que G et dont le diagramme de Dynkin s'identifie à $\mathbf{\Delta} \setminus \{\alpha\}$.

0.5. Relation d'ordre sur les diagrammes de Dynkin, entiers de torsion. On introduit la catégorie \mathcal{D}_k des graphes finis non-orientés munis d'une action de \mathcal{G} . Si L/k est une extension séparable finie de corps, on a une application naturelle de restriction $\mathcal{D}_k \rightarrow \mathcal{D}_L$ où $\text{Gal}(L.k_s/L)$ agit via $\text{Gal}(k_s/k)$. On introduit sur \mathcal{D}_k l'ordre partiel suivant. On dit que $\Delta < \Delta'$ s'il existe un plongement de graphes \mathcal{G} -équivariant $\Delta \hookrightarrow \Delta'$. On a par exemple $A_4 \times A_4 < \tilde{E}_8$, où \tilde{E}_8 désigne le diagramme de Dynkin étendu de type E_8 .

On rappelle que Serre a défini pour chaque diagramme de Dynkin irréductible Δ un ensemble fini de nombres premiers $S(\Delta)$, appelés les entiers de torsion de Δ [Se2]. Pour chaque type, ces entiers sont les suivants :

- $S(A_n) = \{2, \text{diviseurs premiers de } n+1\}$;
- $S(B_n) = S(C_n) = S(G_2) = \{2\}$;
- $S(D_n) = \{2\}$ ($n \neq 4$);
- $S(D_4) = S(E_6) = S(E_7) = \{2, 3\}$;
- $S(E_8) = \{2, 3, 5\}$.

On peut étendre cette définition au cas non irréductible en posant $S(\cup_i \Delta_i) = \cup_i S(\Delta_i)$. Enfin, si G/k est un groupe semi-simple de type Δ , on pose $S(G) = S(\Delta)$.

0.6. Cohomologie. On travaille essentiellement avec la cohomologie galoisienne [Se1] et nous notons $H^i(k, \)$ les objets de cohomologie correspondants. En particulier, on note $Br(k) = H^2(k, k_s^\times)$ le groupe de Brauer de k . Si D/k est une algèbre simple centrale, on note $[D]$ sa classe dans $Br(k)$ et on définit l'exposant de D comme l'ordre du groupe fini engendré par $[D]$ dans $Br(k)$. D'après Wedderburn, on sait qu'il existe une algèbre à divisions T/k , défini à isomorphisme près, tel que $D \approx M_n(T)$. On définit alors l'indice de D par $\text{Ind}_k(D) = \sqrt{\dim_k(T)}$. Cependant, nous travaillons aussi avec la cohomologie étale (resp. plate) pour laquelle nous notons $H_{\text{ét}}^i(X, \)$ (resp. $H_{\text{ppf}}^i(X, \)$) les objets de cohomologie (cf. [Mi]).

I. Préliminaires

I.1. CORPS DE DIMENSION 1 ET 2

(a) *Dimension d'un corps.* Prenons les notations de [Se2] p. 21-22. Soit F un corps de caractéristique p , $p > 0$. Soit Ω_F le F -espace vectoriel de la \mathbb{Z} -algèbre F . Si i est un entier, $i \geq 0$, on pose $\Omega_F^i = \bigwedge^i \Omega_F$ et la différentiation extérieure d applique Ω_F^i dans Ω_F^{i-1} . Il existe une application additive p -linéaire $\gamma : \Omega_F^i \rightarrow \Omega_F^i/d\Omega_F^{i-1}$ et une seule, telle que $\gamma(x\omega) = x^p\omega$ pour toute forme différentielle logarithmique $\omega = dy_1/y_1 \wedge \cdots \wedge dy_i/y_i$. L'opérateur ω est l'inverse de l'opérateur de Cartier. On pose

$$H_p^{i+1}(F) = \text{Coker}(\gamma - 1 : \Omega_F^i \rightarrow \Omega_F^i/d\Omega_F^{i-1}). \quad (\text{I.1.1})$$

On note $H_{dec}^{i+1}(F)$ l'ensemble des éléments décomposables de $H_p^{i+1}(F)$, i.e s'écrivant $xdy_1/y_1 \wedge \cdots \wedge dy_i/y_i$ modulo $d\Omega_F^{i-1}$ avec $x, y_1, \dots, y_i \in F^\times$. Soit F un corps. On définit la dimension séparable $\dim_p^{sep}(F)$ selon

- (1) Si $\text{car}(F) \neq l$, $\dim_p^{sep}(F) = cd_l(F)$,
- (2) Si $p = \text{car}(F)$, $\dim_p^{sep}(F) = \text{Inf}\{r \geq 0 \mid H_p^{r+1}(F') = 0 \ \forall F'/F \text{ séparable finie}\}$.

Si $\text{car}(F) = 0$, pour tout entier $q \geq 0$, on peut considérer le faisceau galoisien $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(q)$. Si F est de caractéristique positive p , la théorie de Kato et de Bloch–Kato [K, BK] produit l'objet $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}(q) = W_n\Omega_{F, \log}^q[-q]$, qui est un complexe de faisceaux galoisiens concentré en degré q . Soit $m = p^n r$ avec $(p, r) = 1$, on définit le complexe de faisceaux galoisiens $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}(q) = \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}_p(2) \oplus \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}(q)$, et par limite inductive, on a défini le complexe de faisceaux galoisiens $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(q)$ dans cette situation. On pose alors

$$H^{q+1}(F) = H^{q+1}(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(q)) \quad (q \geq 0). \quad (\text{I/1/2})$$

Soit maintenant K un corps complet pour une valuation discrète de rang 1, d'anneau de valuation O et de corps résiduel F . On suppose que $\text{car}(F) = \text{car}(K)$ et ainsi le morphisme $O \rightarrow F$ est scindé, produisant ainsi une application $H^{q+1}(F) \rightarrow H^{q+1}(K)$ qui ne dépend pas du scindage choisi. On note K_{nr} une clôture non ramifiée de K . On note alors $H_{nr}^{q+1}(K) = \text{Ker}(H^{q+1}(K) \rightarrow H^{q+1}(K_{nr}))$. Kato [K] a défini une application de résidu $\partial_K : H_{nr}^{q+1}(K) \rightarrow H^q(F)$ de sorte que pour $q \geq 1$ l'on a une suite exacte

$$0 \rightarrow H^{q+1}(F) \rightarrow H_{nr}^{q+1}(K) \xrightarrow{\partial_K} H^q(F) \rightarrow 0, \quad (\text{I.1.3})$$

scindée par le choix d'une uniformisante. Izhboldin [I] a montré que ces applications

de résidus locales induisent la suite exacte de localisation (I.1.4)

$$0 \longrightarrow H^{q+1}(k) \longrightarrow \text{Ker}[H^{q+1}(k(t)) \rightarrow H^{q+1}(k_s(t))] \\ \xrightarrow{\oplus \partial_M} \oplus H^q(k(M)) \xrightarrow{\oplus N_{k(M)/k}} H^q(k) \longrightarrow 0,$$

où M parcourt les points fermés de la droite projective \mathbb{P}_k^1 .

(B) Groupes de normes. Soient X/k une variété et v un k -groupe de type multiplicatif. Pour tout $\gamma \in H_{fppf}^2(k, v)$, on définit le groupe de normes $N_{X,\gamma}^{sep}(k)$ de X et γ comme le sous-groupe de k^\times engendré par les $N_{L/k}(L^\times)$ pour les extensions finies séparables de corps L/k satisfaisant $X(L) \neq \emptyset$ et $\gamma_L = 0 \in H_{fppf}^2(L, v)$. Si $\gamma = 0$, le groupe $N_{X,\gamma}^{sep}(k)$ n'est pas autre chose que le groupe de normes séparable $N_X^{sep}(k)$ de la variété X considéré dans [Gi2].

PROPOSITION 1. Soient v un k -groupe de type multiplicatif fini, X/k une variété et p un nombre premier. On suppose que $\dim_p^{sep}(k) \leq 2$ et que pour toute extension finie k'/k , on a $N_X^{sep}(k') = k'^\times \text{ mod } k'^{\times p}$. Alors

$$N_{X,\gamma}^{sep}(k) = k^\times \text{ mod } k^{\times p}.$$

Démonstration. On désigne par $\mathcal{N}_X(k, v)$ l'assertion suivante

$$\mathcal{N}_X(\mathbf{k}, v) : N_{X,\gamma}^{sep}(k') = k'^\times \text{ mod } k'^{\times p}, \quad \forall k'/k \text{ separable finie, } \forall \gamma \in H_{fppf}^2(k', v).$$

LEMME 1. Les hypothèses sont celles de la proposition 1.

(a) Soit $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ une suite exacte de k -groupes finis de types multiplicatifs. Alors

$$\mathcal{N}_X(k, A) \text{ et } \mathcal{N}_X(k, C) \implies \mathcal{N}_X(k, B).$$

(b) Soient p un nombre premier, \mathcal{G}_p un p -Sylow (profini) de \mathcal{G} et L/k l'extension associée. Soit v un k -groupe fini de type multiplicatif p -primaire. Alors

$$\mathcal{N}_X(L, v_L) \implies \mathcal{N}_X(k, v).$$

Démonstration du lemme. (a) Soit $0 \rightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \rightarrow 0$ une suite exacte de k -groupes finis de types multiplicatifs. Pour montrer l'assertion $\mathcal{N}_X(k, B)$, on peut supposer $k' = k$. Soit $\beta \in H_{fppf}^2(k, B)$. On va montrer que $N_{X,\gamma}^{sep}(k).k^{\times p} = k^\times$. Soit $x \in k^\times$. Notons $p_* : H_{fppf}^2(k, B) \rightarrow H_{fppf}^2(k, C)$. Par hypothèse, on a $N_{X,p_*(\beta)}^{sep}(k).k^{\times p} = k^\times$. Par suite, sans perte de généralité, on peut supposer que $x = N_{k'/k}(x')$, $x' \in k'^\times$, où k'/k est une extension séparable finie tuant $p_*(\gamma)$ et satisfaisant $X(k') \neq \emptyset$. La suite exacte

$$H_{fppf}^2(k', A) \xrightarrow{i_*} H_{fppf}^2(k', B) \xrightarrow{i_*} H_{fppf}^2(k', C)$$

montre que $\beta_{k'} = i_*(\alpha)$ avec $\alpha \in H_{fppf}^2(k', A)$. Or $N_{X,\alpha}^{sep}(k').k'^{\times p} = k'^\times$, donc

$x' \in N_{X,\alpha}^{sep}(k').k'^{\times p} \subset N_{X,\beta}^{sep}(k').k'^{\times p}$. Donc $x \in N_{k'/k}(N_{X,\beta}^{sep}(k')).k^{\times p} \subset N_{X,\gamma}^{sep}(k).k^{\times p}$. Le (b) est un exercice de restriction–corestriction laissé au lecteur. \square

On peut maintenant démontrer la proposition 1. Le (a) du lemme nous permet de nous ramener à un groupe fini v/k qui est p -primaire pour un nombre premier p et le b) du lemme nous permet de nous ramener au cas où \mathcal{G} est un pro- p groupe. On sait que la correspondance $v \rightarrow \hat{v}$ induit une anti-équivalence de catégories entre la catégorie des k -groupes finis p -primaires de type multiplicatif et la catégorie des \mathcal{G} -modules finis p -primaires ([SGA3], exp. 106). Soit v un k -groupe fini p -primaire de type multiplicatif. Comme le \mathcal{G} -module \hat{v} est discret, fini et p -primaire, il admet une suite de compositions dont les quotients successifs sont isomorphes à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ([Se1], §4.1). Par dualité, pour tout k -groupe fini de type multiplicatif v , il existe une suite de k -groupes $(v_i)_{i=0,\dots,n}$ et des suites exactes

$$1 \rightarrow \mu_p \rightarrow v_i \rightarrow v_{i+1} \rightarrow 1 \quad (i = 0, \dots, n - 1)$$

avec $v_0 = v$ et v_n . Le (a) du lemme nous ramène à prouver l’assertion $\mathcal{N}_X(k, v)$ pour le groupe μ_p . D’après le théorème 90 de Hilbert, on a $H_{fppf}^2(k, \mu_p) = {}_p Br(k)$. Soit $\gamma \in H_{fppf}^2(k, \mu_p)$. La classe γ est représentée par une algèbre simple centrale D/k dont on note Y la variété de Severi–Brauer. On a alors $N_{X,\gamma}^{sep}(k) = N_{X \times_k Y}^{sep}(k^\times)$. D’après Merkurjev–Suslin ([MS] et [Gi2], §V.1 dans le cas de caractéristique positive), on a $N_Y^{sep}(k) = k^\times$. Le même raisonnement que dans la preuve du (a) conduit à $N_{X,\gamma}^{sep}(k) = k^\times \pmod{k^{\times p}}$. \square

I.2. GROUPES QUASI-DÉPLOYÉS, ENTIERS DE TORSION ET THÉORÈME DE STEINBERG (CONJECTURE I).

Rappelons un corollaire important au théorème de Steinberg sur les classes de conjugaisons rationnelles.

THÉORÈME 1 ([St]). *Soit G/k un groupe semi-simple quasi-déployé. Alors pour tout élément $\gamma = [z] \in H^1(k, G)$, et pour tout tore maximal T de ${}_z G$ il existe un plongement $\rho : T \hookrightarrow G$ tel que γ appartienne à l’image de $H^1(k, T) \xrightarrow{\rho_*} H^1(k, G)$.* \square

La terminologie ‘entiers de torsion’ pour G se justifie par le lemme suivant, qui est bien connu.

LEMME 2 (cf. [Se2] lemme 1). *Soit G/k un groupe semi-simple absolument presque k -simple. Soit $T \subset G$ un k -tore maximal de G . Alors, les groupes $H^1(k, T)$ et $H^1(k, \hat{T})$ sont annulés par un produit d’éléments de $S(G)$.*

Joignant ce lemme au théorème 1, et sachant que $H^1(k, T)\{p\} = 0$ pour tout k -tore défini sur un corps k satisfaisant $\dim_p^{sep}(k) \leq 1$, on en déduit le

THÉORÈME 2 (Steinberg, Conjecture I, [BoS] §8.6 dans le cas non parfait). *Soit G/k un groupe semi-simple absolument presque k -simple. On suppose que $\dim_p^{sep}(k) \leq 1$ pour tout premier $p \in S(G)$. Alors $H^1(k, G) = 1$.*

Mentionnons que le théorème de Steinberg se généralise de la façon suivante.

THÉORÈME 3 (Kottwitz [Ko]). *On suppose k parfait. Soit G/k un groupe semi-simple quasi-déployé.*

- (a) *Si G est simplement connexe, alors toute classe de conjugaison rationnelle contient un élément de $G(k)$.*
- (b) *On suppose $\text{car}(k) = 0$. Soit $x \in G(k_s)$ un élément semi-simple tel que le stabilisateur G_x de x (pour l'action de G sur lui-même par conjugaison) soit connexe. Alors, si la classe de conjugaison de x est rationnelle, elle contient un élément de $G(k)$. \square*

Exactement de même que pour le théorème de Steinberg, ceci entraîne le

COROLLAIRE 1. *On suppose $\text{car}(k) = 0$. Soient G/k un groupe semi-simple quasi-déployé, et $z \in Z^1(k, G)$ un cocycle.*

- (a) *Soit $\xi \in_z G(k)$. Alors il existe $\xi_0 \in G(k) \bar{k}$ -conjugué à ξ de sorte que $[z]$ appartienne à l'image de $H^1(k, Z_G(\xi_0)) \rightarrow H^1(k, G)$.*
- (b) *Soit $S \subset_z G(k)$ un k -sous-tore de G . Alors il existe un plongement $\rho : S \hookrightarrow G$ de sorte que $[z]$ appartienne à l'image de $H^1(k, Z_G(S)) \xrightarrow{\rho^*} H^1(k, G)$. \square*

Les entiers de torsion apparaissent également lorsque l'on s'intéresse à des corps dont le groupe de Galois absolu est un p -groupe. Nous donnons ici une forme générale à une remarque de Rost sur les groupes de type E_6 ([MPW,II], §8).

LEMME 3. *Soient G_0/k un groupe semi-simple de Chevalley, B_0/k un sous-groupe de Borel déployé de G_0/k et T_0/k un tore maximal déployé de B_0/k . Soit H_0/k un sous-groupe (lisse) de G_0/k satisfaisant $T_0 \subset H_0 \subset G_0$. On note $\Gamma = \text{Aut}(G_0, B_0, T_0, H_0)$ le sous-groupe du groupe fini $\text{Aut}(G_0, B_0, T_0)$ des automorphismes extérieurs de G_0 laissant stable H_0 . Soit p un nombre premier. On suppose que le groupe de Galois absolu \mathcal{G} de k est un p -groupe profini et que p ne divise pas $[N_{G_0}(T_0)/T_0 : N_{H_0}(T_0)/T_0]$. Soit $\varphi \in \text{Hom}(\mathcal{G}, \Gamma)$ et notons ${}^\varphi G_0$ (resp. ${}^\varphi H_0$) le groupe tordu par φ .*

- (a) *L'application naturelle*

$$H^1(k, {}^\varphi H_0) \rightarrow H^1(k, {}^\varphi G_0)$$

est surjective.

(b) On suppose H_0 connexe. Soit T un k -tore maximal de ${}^{\varphi}G_0$. Alors T est conjugué par un élément de ${}^{\varphi}G_0(k)$ à un k -tore maximal de ${}^{\varphi}H_0$. \square

Une autre conséquence du théorème de Steinberg est le lemme suivant.

LEMME 4. Soient G_0/k un groupe semi-simple de Chevalley, presque simple, B_0/k un sous-groupe de Borel déployé de G_0/k et T_0/k un tore maximal déployé de B_0/k . On note $W_0 = N_{G_0}(T_0)/T_0$ le groupe de Weyl, $\Gamma = \text{Aut}(G_0, B_0, T_0)$ le sous-groupe du groupe fini des automorphismes extérieurs de G_0 . Le groupe Γ agit sur W_0 et on forme le produit semi-direct $W_0 \rtimes \Gamma$, muni du morphisme canonique $\pi : W_0 \rtimes \Gamma \rightarrow \Gamma$. Soit p un nombre premier impair. On choisit un p -sous-groupe de Sylow $\Gamma^{(p)}$ (resp. $W_0^{(p)}$) de Γ (resp. W_0) de sorte que $\Gamma^{(p)}$ agisse sur $W_0^{(p)}$. Soit $f \in \text{Hom}_c(\mathcal{G}, W_0^{(p)} \rtimes \Gamma^{(p)})$. Alors il existe un plongement ${}^f T_0 \rightarrow \pi_* f G_0$.

Remarque 1. Le tore ${}^f T_0$ est le tore tordu par l'homomorphisme $f: \mathcal{G} \rightarrow W_0 \rtimes \Gamma$. L'extension galoisienne minimale déployant ${}^f T_0$ est donnée par f .

Démonstration. La classe de l'extension de groupes

$$1 \rightarrow T_0(F) \rightarrow N_{G_0}(T_0)(F) \rightarrow W_0 \rightarrow 1$$

est de 2-torsion (cf. [T2]). Par suite, il existe un relèvement $s : W_0^{(p)} \rightarrow N_{G_0}(T_0)(F)$. Celui-ci se prolonge en un relèvement

$$s : W_0^{(p)} \rtimes \Gamma^{(p)} \rightarrow N_{G_0 \rtimes \Gamma}(T_0)(F) = N_{G_0}(T_0)(F) \rtimes \Gamma$$

du morphisme $N_{G_0}(T_0)(F) \rtimes \Gamma \rightarrow W_0 \rtimes \Gamma$. Soit $f \in \text{Hom}_c(\mathcal{G}, W_0^{(p)} \rtimes \Gamma^{(p)})$. Alors l'élément $s_* f \in \text{Hom}_c(\mathcal{G}, N_{G_0}(T_0)(F) \rtimes \Gamma)$ définit un cocycle $z \in Z^1(\mathcal{G}, G_0(\tilde{F}) \rtimes \Gamma)$ de sorte que ${}^f T$ est un sous-tore maximal du groupe ${}_z G_0$. Or la forme quasi-déployée de G_0 est $\pi_* f G_0$. Le théorème de Steinberg montre qu'il existe un plongement ${}^f T_0 \rightarrow \pi_* f G_0$. \square

Terminons cette section par un lemme facile.

LEMME 5. (a) Soit G un groupe semi-simple simplement connexe qui est une forme interne de sa forme déployée. Soient $P \subset G$ un sous-groupe parabolique de G , et Z un sous-groupe de Levi de G , dont on note DZ son groupe dérivé. Alors la condition $H^1(k, DZ) = 1$ entraîne la nullité de l'application $H^1(k, P) \rightarrow H^1(k, G)$.

(b) Soit G un groupe semi-simple simplement connexe qui est une forme interne de sa forme déployée et soit $f: G \rightarrow G'$ une isogénie centrale de noyau μ . Soient $P \subset G$ un sous-groupe parabolique de G et $P' = f(P)$, et Z un sous-groupe de Levi de G . On suppose que $H^1(k, H) = 1$ pour toute forme interne de H de DZ . Alors

l'application $H^1(k, P') \rightarrow H^1(k, G')$ est constante sur les fibres de l'application composée $H^1(k, P') \rightarrow H^1(k, G') \xrightarrow{\delta^2} H_{\text{ppf}}^2(k, \mu)$.

Démonstration. (a) Comme le radical unipotent de P est déployé, on sait que l'on a une bijection $H^1(k, Z) \approx H^1(k, P)$, (cf. [SGA3], exp. XXVI, Cor 2.3). On considère le k -tore S et la suite exacte $1 \rightarrow DZ \rightarrow Z \rightarrow S \rightarrow 1$. Si G est une forme interne de sa forme déployée, alors S est déployé et le théorème de Hilbert 90 montre que l'application $H^1(k, DZ) \rightarrow H^1(k, Z)$ est surjective. Le (b) est laissé en exercice. \square

I.3. RAPPELS SUR LA R -ÉQUIVALENCE SUR LES TORES [CTS1,V].

Soit X/k une variété algébrique. On note \mathcal{O} l'anneau semi-local de la droite affine \mathbb{A}_k^1 aux points 0 et 1. La R -équivalence est la relation d'équivalence sur l'ensemble des points rationnels $X(k)$ de X engendrée par la relation élémentaire suivante: deux points x et y de $X(k)$ sont dits directement R -équivalents s'il existe $\phi \in X(\mathcal{O})$, satisfaisant $\phi(0) = x$ et $\phi(1) = y$. Comme me l'a fait remarquer Bruno Kahn, cette définition peut s'étendre aux foncteurs contravariants de la catégorie Sch/k des k -schémas dans les ensembles. Soit

$$F : Sch/k \rightarrow \text{Ens} \tag{I.3.1}$$

un tel foncteur. Deux points x et y de $F(k)$ sont dits directement R -équivalents s'il existe $\phi \in F(\mathcal{O})$, satisfaisant $\phi(0) = x$ et $\phi(1) = y$. La R -équivalence sur l'ensemble $F(k)$ est alors la relation d'équivalence engendrée par cette relation élémentaire. Un cas intéressant est le cas où F est un foncteur à valeurs dans la catégorie des groupes abstraits. Dans ce cas, l'ensemble des éléments R -équivalents à $1 \in F(k)$ est un groupe que l'on note $RF(k)$ et $F(k)/R \approx F(k)/RF(k)$. De plus, si k est infini, on sait que la relation élémentaire est une relation d'équivalence. Suivant la terminologie introduite par Merkurjev pour les groupes algébriques linéaires, on dira qu'un foncteur F est R -trivial si $F(K)/R = 1$ pour toute extension de corps K/k .

Soit T/k un tore. Dans [CTS1], Colliot-Thélène et Sansuc ont calculé le groupe $T(k)/R$ de la façon suivante. On note $\hat{T} = \text{Hom}_{gr}(T, \mathbb{G}_m)$ (resp. \hat{T}^0) le module galoisien des caractères (cocaractères) de T . Rappelons qu'un tore S/k est dit flasque si $H^1(L, \hat{S}^0) = 0$ pour toute extension finie séparable de corps L/k . Le tore T/k admet une résolution flasque

$$1 \rightarrow S \rightarrow E \rightarrow T \rightarrow 1, \tag{I.3.2}$$

où E/k est un k -tore quasi-trivial et S/k un tore flasque. Alors l'application de bord $\delta : T(k) \rightarrow H^1(k, S)$ produit un isomorphisme $T(k)/R \approx H^1(k, S)$. De plus, on sait que si le tore T/k est déployé par une extension galoisienne métacyclique (i.e. les sous-groupes de Sylow du groupe de Galois sont cycliques), alors $T(k)/R = 1$. Un point essentiel dans cette théorie est la caractérisation des k -tores R -triviaux, i.e. satisfaisant $T(L)/R = 1$ pour toute extension L/k . Un k -tore est

R -trivial si et seulement s'il admet une résolution $1 \rightarrow T_1 \rightarrow T_2 \rightarrow T \rightarrow 1$ où les T_i sont des tores inversibles, i.e. facteurs directs de tores quasi-triviaux. En d'autres termes, la condition " T R -trivial" dépend uniquement du module galoisien \hat{T} .

Soit maintenant M/k un groupe de type multiplicatif. Alors $X \rightarrow H_{fppf}^1(X, M)$ définit un foncteur contravariant de Sch/k dans la catégorie des groupes abéliens. On peut donc définir les groupes $H_{fppf}^1(k, M)/R$ et le sous-groupe $RH_{fppf}^1(k, M) \subset H_{fppf}^1(k, M)$. D'après la proposition 1.3 de [CTS2], on sait que M/k admet une résolution flasque (d'un autre type que le précédent)

$$1 \rightarrow M \rightarrow S \rightarrow E \rightarrow 1, \quad (\text{I.3.3})$$

où E/k est un tore quasi-trivial et S/k un tore flasque. Une démonstration analogue à celle du théorème principal de [CTS1] montre que le morphisme naturel $H_{fppf}^1(k, M) \rightarrow H^1(k, S)$ induit un isomorphisme $H_{fppf}^1(k, M)/R \approx H^1(k, S)$. En particulier, si le groupe de type multiplicatif M/k est déployé par une extension galoisienne métacyclique, alors $H_{fppf}^1(k, M)/R = 1$. Si T est un k -tore, on note T^D le tore dual de T , i.e. le tore défini par $\hat{T}^D = \hat{T}^0$.

LEMME 6. (a) Soit T/k un tore de rang 1 ou 2. Alors $T(k)/R = 1$ et $H^1(k, T)/R = 1$.

(b) Soient $T, T'/k$ des k -tores et soit E un k -tore quasi-trivial. Si T' est une extension de T par E (resp. de E par T), alors on a un isomorphisme naturel $T'(k)/R \approx T(k)/R$ (resp. $H^1(k, T)/R \approx H^1(k, T')/R$).

(c) Soit T/k un tore. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.

- (i) T est R -trivial,
- (ii) le foncteur $H^1(\cdot, T^D)$ est R -trivial.

Démonstration. (a) Si le tore T/k est de rang 1, il est déployé par une extension quadratique séparable, donc $T(k)/R = 1$ et $H^1(k, T)/R = 1$. Les classes d'isomorphismes de k -tores de dimension 2 sont classifiées par l'ensemble $H^1(k, GL_2(\mathbb{Z})) = \text{Hom}(\mathcal{G}, GL_2(\mathbb{Z}))/\sim$, l'ensemble des homomorphismes de groupe de \mathcal{G} dans $GL_2(\mathbb{Z})$ modulo conjugaison. Soit T/k un tore de rang 2. On peut supposer que T/k correspond à un homomorphisme $f: \mathcal{G} \rightarrow W \subset GL_2(\mathbb{Z})$ où W est le sous-groupe standard d'ordre 12 de $GL_2(\mathbb{Z})$. Par un argument de transfert, on peut supposer que $\text{Im}(f)$ est un 2-groupe ou un 3-groupe. Si c'est un 3-groupe, l'image $\text{Im}(f)$ est cyclique d'ordre 3 et alors $T(k)/R = 1$ et $H^1(k, T)/R = 1$. Si $\text{Im}(f)$ est un 2-groupe, le seul cas à considérer est le cas où $\text{Im}(f) \approx \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$ est le sous-groupe diagonal de $GL_2(\mathbb{Z})$. Alors T/k est le produit de deux tores de rang 1, d'où $T(k)/R = 1$ et $H^1(k, T)/R = 1$ (on sait même que T/k est une variété k -rationnelle d'après le §4.9 de [V]).

Le (b) est un exercice et on passe. au (c) On rappelle qu'un tore I/k est dit inversible s'il est facteur direct d'un module quasi-trivial. Soit T/k un k -tore. D'après la proposition 7.4 de [CTS2], on sait que T (resp. $H^1(\cdot, T^D)$) est R -trivial si et seulement si il existe une suite exacte de k -tores $1 \rightarrow I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow T \rightarrow 1$ (resp. $1 \rightarrow T^D \rightarrow J_1 \rightarrow J_2 \rightarrow 1$) avec I_1, I_2 inversibles (resp. J_1, J_2 inversibles). Par dualité,

les deux conditions précédentes ne font qu'une, d'où l'on conclut que T est R -trivial si et seulement si le foncteur $H^1(\cdot, T^D)$ est R -trivial. \square

De nombreux exemples de tores sont étudiés du point de vue de la R -équivalence dans [CTS1]. Le lemme précédent permet de donner un exemple simple de tore T/k tel que $H^1(\cdot, T)$ n'est pas R -trivial.

LEMME 7. *Soient n un entier et $A_1/k, A_2/k$ deux algèbres étales de dimension n . On considère le monomorphisme de tores $f: \mathbb{G}_m \rightarrow R_{A_1/k}\mathbb{G}_m \times R_{A_2/k}\mathbb{G}_m$ donné par $f(x) = (x, x)$ et le k -tore $T = \text{Coker}(f) = (R_{A_1/k}\mathbb{G}_m \times R_{A_2/k}\mathbb{G}_m)/\mathbb{G}_m$. Alors $H^1(k, T) = \text{Ker}(Br(k) \rightarrow Br(A_1) \oplus Br(A_2))$ et:*

- (a) *Si $n = 2$, $H^1(\cdot, T)$ est R -trivial.*
- (b) *Si n est un nombre premier impair et si A_1 et A_2 sont des extensions de corps cycliques linéairement disjointes, alors $H^1(\cdot, T)$ n'est pas R -trivial.*

Démonstration. La suite exacte $1 \rightarrow \mathbb{G}_m \xrightarrow{f} R_{A_1/k}\mathbb{G}_m \times R_{A_2/k}\mathbb{G}_m \rightarrow T \rightarrow 1$ donne immédiatement $H^1(k, T) = \text{Ker}(Br(k) \rightarrow Br(A_1) \oplus Br(A_2))$. Ensuite, on observe que le caractère $g: R_{k_1/k}\mathbb{G}_m \times R_{k_2/k}\mathbb{G}_m \rightarrow \mathbb{G}_m$ donné par $g(x_1, x_2) = N_{A_1/k}(x_1)N_{A_2/k}(x_2)^{-1}$ induit un caractère $g: T \rightarrow \mathbb{G}_m$. On note alors

$$T_1 = \text{Ker}(T \xrightarrow{g} \mathbb{G}_m) = \text{Ker}\left[\left(R_{A_1/k}\mathbb{G}_m \times R_{A_2/k}\mathbb{G}_m\right)/\mathbb{G}_m \rightarrow \mathbb{G}_m\right].$$

On a $H^1(k, T_1)/R \approx H^1(k, T)/R$ et l'on constate alors que

SOUS-LEMME 7'. *Les modules galoisiens \hat{T}_1 et \hat{T}_1^0 sont isomorphes.* \square

On est donc ramené suivant le lemme 6 à étudier $T_1(k)/R$. On considère le tore $T_2 = \text{Ker}(R_{k_1/k}\mathbb{G}_m \times R_{k_2/k}\mathbb{G}_m \xrightarrow{g} \mathbb{G}_m)$. Comme T_2 est une extension de T_1 par \mathbb{G}_m , on a $T_1(k)/R \approx T_2(k)/R$ où T_2 est défini par les équations $N_{A_1/k}(x_1) \times N_{A_2/k}(x_2) = 1$. Il n'est pas difficile de voir que

$$T_2(k)/R = (N_{A_1/k}(A_1^\times) \cap N_{A_2/k}(A_2^\times))/k^{\times n} \cdot N_{A_1 \otimes_k A_2/k}((A_1 \otimes_k A_2)^\times).$$

Si $p = 2$, on sait que $T_2(k)/R = 1$ ([KLST], lemme 1.2), et si $n = p$ est impair, on sait d'après Merkurjev ([M1], Cor. 2.9) que si A_1 et A_2 sont des extension cycliques de premier p disjointes, alors il existe une extension E/k telle que $T_2(E)/R \neq 1$. \square

1.4. ANNULATION DE CLASSES DE $H^i(k(t))$ PAR CHANGEMENT DE BASE

Rappelons la question suivante de Serre ([Se1], question 6.2 p. 124) posée originellement en caractéristique nulle.

(I.4.1) Soit $\alpha \in \text{Br}(k(t))$ tel qu'il existe $t_0 \in \mathbb{P}^1(k)$ satisfaisant $\alpha(t_0) = 0$. Existe-t-il une fonction rationnelle $f : \mathbb{P}_k^1 \rightarrow \mathbb{P}_k^1$ non constante et un point $t'_0 \in \mathbb{P}^1(k)$ satisfaisant $f^*(\alpha) = 0$ et $f(t'_0) = t_0$?

Dans le cas de ${}_2\text{Br}(k(t))$, on sait d'après Mestre que cette question a une réponse positive si α a quatre pôles (comptés avec multiplicités) [Me]. De façon analogue, pour $q \geq 2$, on peut poser la question suivante.

(I.4.2) Soit $\alpha \in \text{Ker}(H^q(k(t)) \rightarrow H^q(k_s(t)))$. Soient t_0, t_1 des points fermés de $\mathbb{P}^1(k)$ qui ne sont pas des pôles de α . Existe-t-il une fonction rationnelle $f : \mathbb{P}_k^1 \rightarrow \mathbb{P}_k^1$ non constante et des points t'_0, t'_1 de $\mathbb{P}^1(k)$ satisfaisant $f^*(\alpha) \in H^q(k)$, $f(t'_0) = t_0$ et $f(t'_1) = t_1$?

En fait, nous sommes intéressés ici (cf. Proposition 2, § II.3) par le cas d'un corps de dimension cohomologique 2 pour $q = 3$ (et alors $H^3(k) = 0$) et nous sommes encouragés par le cas facile des corps locaux et globaux de caractéristique 0.

LEMME 8. *On suppose que k est un corps local ou global imaginaire pur de caractéristique nulle. Alors la question (I.4.2) a une réponse affirmative pour $q = 3$. De façon précise, si la classe $\alpha \in H^3(k(t))$ d'ordre n n'a pas de pôles en 0 et à l'infini, il existe un entier m tel que le changement de base $t = f(t') = (t')^m$ tue la classe α .*

Démonstration. Par dévissage, on peut supposer que $\alpha \in {}_l H^3(k(t))$ pour un premier l et un argument de transfert montre que l'on peut supposer que k contient une racine primitive l -ième de l'unité ζ .

Premier cas : k local: On note $\Sigma = \{t_1, \dots, t_s\}$ l'ensemble des pôles de α . Il existe un entier m tel que

$$t_i \notin (k(t_i)^\times)^m \quad (i = 1, \dots, s). \quad (*)$$

Nous affirmons que le changement de base $t = f(t') = (t')^m$ tue la classe α . Observons tout d'abord que f est non-ramifié en Σ . On note $k_0 = k(\mu_m)$ et $l^{m_0} = [k_0 : k]$.

SOUS-LEMME 8'. *Pour $i = 1, \dots, s$, on a*

$$f^{-1}(t_i) = k_{i,1} \times k_{i,2} \times \dots \times k_{i,r_i},$$

où $k_{i,j}/k(t_i)$ est une extension de corps satisfaisant $[k_{i,j} : k(t_i)] \in l\mathbb{Z}$ pour $j = 1, \dots, r_i$.

En effet, la condition (*) ci-dessus entraîne tout d'abord que $k(t_i) \not\subseteq k_{i,j}$. Ensuite, comme l'extension $k_0(t')/k_0(t)$ est galoisienne de groupe $\mathbb{Z}/l^m\mathbb{Z}$, il existe une extension galoisienne L_i/k_0 cyclique de degré l^{m_i} telle que

$$f^{-1}(t_i) \otimes_k k_0 = (L_i)^{l^{m-m_i}},$$

d'où un plongement $k_{i,j} \subset L_i$. En considérant les inclusions de corps $k \subset k(t_i) \subset k_{i,j} \subset L_i$, on conclut que $[k_{i,j} : k(t_i)]$ divise $[L_i : k] = [L_i : k_0][k_0 : k] = l^{m_i+m_0}$ donc $[k_{i,j} : k(t_i)] \in l\mathbb{Z}$. Le sous-lemme est démontré. Puisque $H^3(k) = 0$, on a le diagramme de restrictions (*loc. cit.* §3)

$$\begin{array}{ccc} {}_lH^3(k(t)) & \xrightarrow{\sim} & \bigoplus_{M \in \mathbb{A}^1} {}_lBr(k(M)) \\ f^* \downarrow & & \downarrow f_M^* \\ {}_lH^3(k(t')) & \xrightarrow{\sim} & \bigoplus_{M' \in \mathbb{A}^1} {}_lBr(k(M')), \end{array}$$

où f_M^* est la restriction ${}_lBr(k(M)) \rightarrow {}_lBr(f^{-1}(k(M)))$ aux points non ramifiés de f . D'après le sous-lemme, le corps de classes local montre donc que le morphisme $f_{t_i}^* : \mathbb{Z}/l\mathbb{Z} = {}_lBr(k(t_i)) \rightarrow {}_lBr(f^{-1}(k(t_i)))$ est nul, ainsi la classe $f^*\alpha$ a tous ses résidus nuls et est donc nulle.

Second cas : k global. On note Ω_f l'ensemble des places finies de k et k_v le complété de k à la place v . La suite exacte de localisation ci-dessus et la théorie du corps de classes global montre que le morphisme $H^3(k(t)) \rightarrow \prod_{v \in \Omega_f} H^3(k_v(t))$ donne lieu à un morphisme injectif

$$H^3(k(t)) \hookrightarrow \bigoplus_{v \in \Omega_f} H^3(k_v(t)).$$

On note $\{v_1, \dots, v_r\}$ l'ensemble des places où $\alpha_v \neq 0$. On choisit un entier m tel que le changement de base $t = f(t) = (t')^m$ tue α_{v_j} pour $j = 1, \dots, r$. L'injection ci-dessus montre que le changement de base $t = (t')^m$ tue la classe α , i.e. $f^*\alpha = 0$. \square

II. Étude de l'application $H^1(k, T) \rightarrow H^1(k, G)$

Soient G/k un groupe semi-simple simplement connexe absolument simple et $i : T/k \hookrightarrow G$ un k -tore maximal G ; on note G_{ad} le groupe adjoint de G et $\pi : G \rightarrow G_{ad}$ l'isogénie naturelle.

II.1. NOYAUX STABLES

La difficulté principale que nous souhaitons contourner réside dans le fait que l'application $i_* : H^1(k, T) \rightarrow H^1(k, G)$ dépend a priori du plongement i , même si son image n'en dépend pas; en particulier, le noyau $\text{Ker}(i_*)$ n'est pas en général un sous-groupe de $H^1(k, T)$. Pour les applications que nous avons en vue, il est commode de considérer plutôt le composé

$$H^1(k, T) \xrightarrow{i_*} H^1(k, G) \xrightarrow{\pi_*} H^1(k, G_{ad}).$$

Il est bien connu que les $G(k)$ -classes de conjugaison de plongements de T dans G

sont décrites par les ${}^gT = gTg^{-1} \hookrightarrow G$ où g parcourt l'ensemble des éléments de $G(k_s)$ tels que $g^{-1}sg \in T(k_s)$ pour tout $s \in \mathcal{G}$. On définit alors le "noyau stable" $\text{Ker}_s(i_*)$, i.e. l'intersection des noyaux des applications composées $H^1(k, T) \rightarrow H^1(k, {}^gT) \rightarrow H^1(k, G)$ et on sait ([T5], §3.3) que $\text{Ker}_s(i_*) + \text{Ker}(i_*) \subset \text{Ker}(i_*)$, et donc que le groupe engendré par $\text{Ker}_s(i_*)$ est contenu dans $\text{Ker}(i_*)$. De même, on définit le noyau stable $\text{Ker}_s(\pi_* \circ i_*)$ comme l'intersection des noyaux des applications composées $H^1(k, T) \rightarrow H^1(k, {}^gT) \rightarrow H^1(k, G) \rightarrow H^1(k, G_{ad})$. On note $i_{ad} : T_{ad} \hookrightarrow G_{ad}$ l'image du tore T dans G_{ad} . Puisque $\text{Hom}_{k-gr}(T, G) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{k-gr}(T_{ad}, G_{ad})$, notant $\pi_* : H^1(k, T) \rightarrow H^1(k, T_{ad})$, on a

$$\text{Ker}_s(\pi_* \circ i_*) = \pi_*^{-1}(\text{Ker}_s(i_{ad,*})) \subset H^1(k, T),$$

d'où immédiatement le

LEMME 9. $\text{Ker}_s(\pi_* \circ i_*) + \text{Ker}(\pi_* \circ i_*) \subset \text{Ker}(\pi_* \circ i_*)$.

En particulier, le sous-groupe de $H^1(k, T)$ engendré par $\text{Ker}_s(\pi_* \circ i_*)$ est contenu dans $\text{Ker}(\pi_* \circ i_*)$.

II.2. INVARIANTS DE ROST

On rappelle que l'on dispose de l'invariant de Rost $r_{k,G} : H^1(k, G) \rightarrow H^3(k)$ [R1, R2, Se2, EKLIV, Gi2]. Dans cette section, nous nous proposons d'étudier l'application composée

$$\psi_k : H^1(k, T) \xrightarrow{i_*} H^1(k, G) \xrightarrow{r_{k,G}} H^3(k), \tag{II.1.1}$$

qui n'est pas en général un homomorphisme de groupes. Soit $1 \rightarrow T \rightarrow S \rightarrow E \rightarrow 1$ une résolution flasque de T , on note $\delta : E(k) \rightarrow H^1(k, T)$. Le tore quasi-trivial E se décompose en $E = \prod_i E_i = \prod_i R_{k_i/k}(\mathbb{G}_m)$ où les k_i/k sont des extensions séparables de corps. On considère le composé

$$\psi_i : k_i^\times = E_i(k) \rightarrow E(k) \rightarrow H^1(k, G) \rightarrow H^3(k),$$

LEMME 10. Soit i tel que $k_i = k$. Alors il existe $\beta_i \in H^2(k)$ tel que pour tout $y \in k^\times = E_i(k)$, on a

$$\psi_i(y) = \beta_i \cup y.$$

Démonstration. On considère l'application composée

$$\psi_{i,k(t)} : k(t)^\times = E(k(t)) \rightarrow H^1(k(t), T) \rightarrow H^1(k(t), G) \xrightarrow{r_{k(t),G}} H^3(k(t)),$$

qui est à valeurs dans $\text{Ker}(H^3(k(t)) \rightarrow H^3(k_s(t)))$ puisque $H^1(k_s(t), T) = 0$ d'après le théorème de Hilbert 90 et on note $c = \psi_{i,k(t)}(t)$ dans $H^3(k(t))$. La suite exacte de

localisation (cf. I.1.4)

$$0 \rightarrow H^3(k) \rightarrow \text{Ker}[H^3(k(t)) \rightarrow H^3(k_s(t))] \xrightarrow{\oplus \partial_M} \oplus_{M \in \Delta_k^1} H^2(k(M)) \rightarrow 0,$$

et le fait que les pôles potentiels de c sont 0 et ∞ montre que si l'on pose $\beta = \partial_0(c)$ dans $H^2(k) = Br(k)$, on a $c = \beta \cup (t)$ dans $H^3(k(t))$. Suivant [Gi2, th. 2], on peut spécialiser cette égalité en $y \in k^\times$, d'où la formule $\psi_i(y) = \beta \cup y$ dans $H^3(k)$. \square

II.3. MISE EN PLACE DE L'INDUCTION SUR LES TYPES

(a) *Où l'on utilise la théorie de Bruhat–Tits.* On suppose de plus dans ce paragraphe que G/k est quasi-déployé, on note G_{ad}/k le groupe adjoint de G et $\pi : G \rightarrow G_{ad}$ la projection naturelle. On considère l'application

$$H^1(\tilde{K}/K, G) \xrightarrow{r_K} H_{nr}^3(K) \xrightarrow{\partial_K} Br(F), \tag{II.2.1}$$

où le résidu ∂_K est défini en (16.1.3). La théorie de Bruhat–Tits permet de comprendre l'objet $H^1(\tilde{K}/K, G)$ (cf. [BrT2], Cor. 3.15). On note B un sous-groupe de Borel de G/k , $\mathbf{B}/\text{Spec}(O)$ le sous-groupe d'Iwahori standard, i.e. tel que $\mathbf{B}(O) = sp^{-1}(B(F))$ où sp désigne la spécialisation $sp : G(O) \rightarrow G(F)$. Notons $P_0 = G(O)$, P_1, \dots, P_r les K -sous-groupes parahoriques de G contenant le sous-groupe d'Iwahori \mathbf{B} et \mathfrak{F}_i les O -schémas en groupe associés. On note $\overline{\mathfrak{F}}_i/F$ la fibre spéciale de \mathfrak{F}_i et $M_i = \overline{\mathfrak{F}}_{i,red}$. Pour $i = 0, \dots, r$, on note $H^1(F, M_i)_{an}$ les classes $[z]$ telles que le groupe tordu ${}_z M_i$ ne possède pas de F -sous-groupes paraboliques propres (cela est bien défini). Le lemme de Hensel induit la bijection suivante $H^1(O, \mathfrak{F}_i) \approx H^1(F, M_i)$. Composant l'inverse de l'application précédente et l'application naturelle $H^1(\text{Gal}(\tilde{K}/K), P_i) \rightarrow H^1(\text{Gal}(\tilde{K}/K), G(\tilde{K}))$, on obtient une bijection

$$\coprod_{i=0, \dots, r} H^1(F, M_i)_{an} \xrightarrow{\sim} H^1(\tilde{K}/K, G). \tag{II.2.2}$$

La bijection ci-dessus est appelée la décomposition de Bruhat–Tits; elle nous permet d'établir le lemme-clef suivant.

LEMME 11. *On suppose que pour tout $\Delta' \in \mathcal{D}_F$, $\Delta' < \Delta$, Δ' non isomorphe à Δ , et pour tout sous-groupe semi-simple simplement connexe quasi-déployé H/F de diagramme de Dynkin Δ' (muni de l'action de $\text{Gal}(F.k_s/F)$), on a $H^1(F, H) = 1$. Alors*

$$\pi_* \left[\text{Ker} \left[H^1(\tilde{K}/K, G) \xrightarrow{\partial_K \circ r_K} Br(F) \right] \right] \subset \text{Im} \left[H_{ét}^1(O, G_{ad}) \rightarrow H^1(\tilde{K}/K, G_{ad}) \right].$$

Démonstration. Soit $\gamma \in H^1(\tilde{K}/K, G)$ appartenant au noyau de l'application $\partial_K \circ r_K$. Il existe donc un i tel que γ est l'image par la décomposition de Bruhat–Tits

de $\gamma' \in H^1(F, M_i)$. On peut de plus supposer que \mathfrak{P}_i est un sous-groupe parahorique maximal de G .

Premier cas : \mathfrak{P}_i est spécial, i.e. le diagramme de Dynkin de M_i est isomorphe à Δ . Alors $\pi_*(\mathfrak{P}_i(\tilde{O}))$ est conjugué à $\pi_*(\mathfrak{P}_0(\tilde{O})) = G_{ad}(\tilde{O})$, ce qui implique $\pi_*\gamma \in \text{Im}[H^1_{\mathcal{E}l}(O, G_{ad}) \rightarrow H^1(\tilde{K}/K, G_{ad})]$.

Second cas. \mathfrak{P}_i n'est pas spécial. On applique alors le théorème 4 de [Gi2, § IV.2]. On dispose d'une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathbb{G}_m \rightarrow M'_i \rightarrow M_i \rightarrow 1$$

de groupes réductifs dont on note $\delta : H^1(F, M_i) \rightarrow Br(F)$ l'application de bord associée. On a alors le diagramme commutatif suivant

$$\begin{CD} H^1(\tilde{K}/K, G(\tilde{K})) @<< H^1_{\mathcal{E}l}(O, \mathfrak{P}_i) @>> H^1(F, M_i) \\ @V r_K VV @. @V \delta VV \\ H^3_{nr}(K) @>> \partial_K >> Br(F), \end{CD}$$

qui implique que $\gamma' \in \text{Im}(H^1(F, M'_i) \rightarrow H^1(F, M_i))$. Or suivant le théorème 3' de [Gi2, §IV.2], on a une décomposition $M'_i = DM'_i \times S_i$ où DM'_i est un groupe semi-simple simplement connexe quasi-déployé dont le diagramme de Dynkin est un sous-diagramme de Δ non isomorphe à Δ et S_i un F -tore inversible. Il résulte de l'hypothèse d'induction que $H^1(F, M'_i) = H^1(F, DM'_i) \times H^1(F, S_i) = 1$, donc $\gamma' = 1$, et a fortiori $\gamma = 1$ et $\pi^*(\gamma) = 1$. □

(b) *La proposition principale*

La proposition ci-dessous a pour objet de donner des condition suffisantes pour que l'application $H^1(k, T) \rightarrow H^1(k, G) \rightarrow H^1(k, G_{ad})$ soit nulle, du moins sur le sous-groupe $RH^1(k, T)$.

PROPOSITION 2. *Soient G/k un groupe semi-simple simplement connexe absolument simple, T/k un k -tore maximal de G . On suppose que $\dim_p^{sep}(k) \leq 2$ pour tout premier $p \in S(G)$.*

(a) *On note X/k la variété des sous-groupe de Borel de G , Δ le diagramme de Dynkin de G et Δ' le diagramme de Dynkin complété de Δ . On fait les deux hypothèses suivantes:*

(A) *Pour toute extension séparable finie k'/k et pour tout diagramme de Dynkin $\Delta' \in \mathcal{D}_{k'}$, $\Delta' < \Delta$, Δ' non isomorphe à Δ , si H/k' désigne le sous-groupe semi-simple simplement connexe quasi-déployé de diagramme de Dynkin Δ' (muni de l'action de $\text{Gal}(k'.k_s)$), on a $H^1(k', H) = 1$,*

(B) Pour toute extension séparable finie k'/k , on a $N_X^{sep}(k') = k'^{\times}$ (condition automatiquement satisfaite si G est quasi-déployé).

Soient $1 \rightarrow T \rightarrow \prod_{i \in I} R_{k_i/k} \mathbb{G}_m \rightarrow S \rightarrow 1$ une résolution flasque de T , $I_0 = \{i \in I \mid k_i = k\}$ et $\delta : \prod_i k_i^{\times} \rightarrow H^1(k, T)$ l'application de bord. Alors l'application naturelle $\pi_* \circ i_* : H^1(k, T) \rightarrow H^1(k, G_{ad})$ est triviale sur $\delta(\prod_{i \in I_0} k^{\times})$. En particulier, si T est déployé par une extension cyclique de degré premier, l'application $\pi_* \circ i_* : H^1(k, T) \rightarrow H^1(k, G_{ad})$ est triviale.

(b) On suppose G quasi-déployé et que toute classe de $\text{Ker}(H^3(k(t)) \rightarrow H^3(k_s(t)))$ est annulable par changement de base à double point base (cf. 16.1.4). Alors l'application $\pi_* \circ i_* : H^1(k, T) \rightarrow H^1(k, G_{ad})$ est triviale sur $RH^1(k, T)$.

Remarque 2. Si le groupe G/k est quasi-déployé, il est bien connu que l'application $\pi_* : H^1(k, G) \rightarrow H^1(k, G_{ad})$ a un noyau trivial. Dans ce cas, les conclusions de la proposition sont plus fortes, i.e l'application $i_* : H^1(k, T) \rightarrow H^1(k, G)$ est triviale sur $RH^1(k, T)$. La condition d'annulabilité de l'assertion b) n'est connue que pour les corps de nombres imaginaires purs.

Avant de démontrer cette proposition qui constitue le coeur de l'article, arrêtons-nous brièvement sur l'hypothèse **B** relative au groupe de normes séparable de la variété des sous-groupes de Borel de G . Le lemme ci-dessous donne une condition suffisante pour que l'hypothèse **B** soit satisfaite.

LEMME 12. Soit G/k un groupe semi-simple simplement connexe. On note G^{qd}/k la forme quasi-déployée de G . Soit X la variété des sous-groupes de Borel de G/k . On suppose que $\dim_p^{sep}(k) \leq 2$ pour tout $p \in S(G)$. On suppose $H^1(k', G^{qd}) = 1$ pour toute extension séparable finie k'/k . Alors pour toute extension séparable finie k'/k , on a $N_X^{sep}(k') = k'^{\times}$.

Démonstration. D'après le résultat principal de [T5], on sait qu'il existe un entier d dont les facteurs premiers appartiennent à $S(G)$ et une extension séparable de corps L/k qui déploie G et dont le degré divise d . Par suite, le groupe $k'^{\times}/N_X^{sep}(k')$ est annulé par d et il suffit de voir que $N_X^{sep}(k') \cdot k'^{\times p} = k'^{\times}$ pour tout $p \in S(G)$. On note μ le centre de G^{qd} et G_{ad}^{qd} le groupe adjoint de G^{qd} . A la k -forme G de G^{qd} correspond une classe $\gamma \in H^1(k, G_{ad}^{qd})$, qui est triviale si et seulement si le groupe G est quasi-déployé. L'hypothèse montre que l'application de bord

$$H^1(k', G_{ad}^{qd}) \xrightarrow{\beta} H_{fppf}^2(k', \mu)$$

a un noyau trivial pour toute extension séparable finie k'/k . Ainsi $N_X^{sep}(k') \cdot k'^{\times p} = N_{\beta(\gamma)}^{sep}(k') \cdot k'^{\times p} = k'^{\times}$ d'après la proposition 1 (§I.1). \square

Démonstration de la proposition 2. Il est tout d'abord clair que l'on peut supposer k infini. On note $\pi_* \circ i_* : H^1(k, T) \rightarrow H^1(k, G) \rightarrow H^1(k, G_{ad})$ de noyau $\text{Ker}(\pi_* \circ i_*)$ et

on considère le “noyau stable” $\text{Ker}_s(\pi_* \circ i_*)$. D’après le lemme 8, on sait que le groupe engendré par $\text{Ker}_s(\pi_* \circ i_*)$ est contenu dans $\text{Ker}(\pi_* \circ i_*)$.

(a) On considère l’application $\delta : \prod_{i \in I_0} k^\times \rightarrow H^1(k, T)$. Pour montrer que $\delta(\prod_{i \in I_0} k^\times) \subset \text{Ker}(\pi_* \circ i_*)$, il suffit de montrer que $\delta(\prod_{i \in I_0} k^\times) \subset \text{Ker}_s(\pi_* \circ i_*)$; cela peut se vérifier sur chaque facteur de k^\times . Sans perte de généralité, on peut donc travailler sur un seul facteur \mathbb{G}_m et supposer que $\delta(k^\times)$ est l -primaire pour un premier $l \in S(G)$. On considère le composé

$$\psi : k^\times \xrightarrow{\delta} H^1(k, T) \xrightarrow{i_*} H^1(k, G) \xrightarrow{r_{k,G}} H^3(k),$$

et d’après le lemme 9, il existe $\beta \in H^2(k) = \text{Br}(k)$ tel que $\psi(y) = \beta \cup y$. Sous chacune des hypothèses **A** ou **B**, la proposition 1 entraîne

$$N_{X,\beta}(k).k^{\times l} = k^\times.$$

On est donc ramené à voir que l’application $i_* \circ \delta : L^\times \rightarrow H^1(k, G)$ est nulle pour toute extension de corps L/k satisfaisant $\beta_L = 1$ et $X(L) \neq \emptyset$. Soient L/k une telle extension et $y \in L^\times$. On veut montrer que $(\pi_* \circ i_* \circ \delta)(y) = 1$ dans $H^1(k, G_{ad})$. On considère le polynôme $P(t) = t^N + y$, où $N = [k_T : k]$.

LEMME 13. $P(t) \in \text{Ker} \left[k(t)^\times \xrightarrow{\pi_* \circ i_* \circ \delta} H^1(k(t), G_{ad}) \right]$.

On remarque tout d’abord que comme la classe $P(t)$ est régulière en 0, le lemme entraîne par spécialisation que $(\pi_* \circ i_* \circ \delta)(y) = 1$ dans $H^1(k, G_{ad})$; de plus cela est vrai pour tout plongement de T dans G donc $\delta(y)$ appartient au noyau stable $\text{Ker}_s(\pi_* \circ i_*)$. Montrons maintenant le lemme en notant $\gamma = (\pi_* \circ i_* \circ \delta)(P(t)) \in H^1(k(t), G_{ad})$ et en établissant tout d’abord que $\psi_{k(t)}(P(t)) = 0$ dans $H^3(k(t))$. Cela provient de la formule de projection puisque l’on a

$$\psi(P(t)) = \beta \cup N_{L/k}(t^N + y') = \text{Cor}_k^L[\beta_L \cup (t^N + y)] = 0,$$

puisque $\beta_L = 0$. La classe $\delta(P(t))$ de $H^1(k(t), T)$ est régulière à l’infini, puisque $N.H^1(k, \hat{T}^0) = 0$ et de plus comme $P(t)$ est unitaire, l’image de $\delta(P(t))$ dans $H^1(k((1/t)), T)$ est nulle. Les pôles de $\delta(P(t))$ sont contenus dans l’ensemble fini de points fermés $\Sigma = \{t \mid N_{L/k}(t^N + y) = 0\}$. Par suite, la classe γ de $H^1(k_s(t)/k(t), G_{ad})$ est régulière sur $\mathbb{P}_k^1 \setminus \Sigma$. Pour tout $M \in \Sigma$, on note \hat{k}_M le complété de $k(t)$ en M , et sachant que $k(M)$ quasi-déplie G , le lemme 11 s’applique et donne l’inclusion

$$\begin{aligned} & \pi_* \left[\text{Ker} \left[H^1(\hat{k}_M \otimes_k k_s / \hat{k}_M, G) \xrightarrow{\partial_{M \circ r}} \text{Br}(k(M)) \right] \right] \\ & \subset \text{Im} \left[H_{\text{ét}}^1(\hat{O}_M, G_{ad}) \rightarrow H^1(\hat{k}_M \otimes_k k_s / \hat{k}_M, G_{ad}) \right]. \end{aligned}$$

Comme $\psi(P(t)) = 0$ dans $H^3(k(t))$, il résulte que γ est régulière en M , donc sur toute la droite projective \mathbb{P}_k^1 . D’après un lemme de Harder ([H2], lemme 4.1.3), la classe

γ provient donc d'une classe globale $\alpha \in H_{\text{ét}}^1(\mathbb{P}^1, G_{ad})$. Or, on sait que la fibre générique de α est constante ([H3, RgRm], cf. [Gi1], th. I.2.1), donc $\gamma \in \text{Im}[H^1(k, G_{ad}) \rightarrow H^1(k(t), G_{ad})]$. On peut évaluer cette classe à l'infini, et on trouve $\gamma = 1$ dans $H^1(k, G)$, puisque l'image de $\delta(P(t))$ est nulle dans $H^1(k(\frac{1}{t}), T)$ et donc a fortiori dans $H^1(k(\frac{1}{t}), G_{ad})$.

On se place maintenant dans le cas particulier où T est déployé par une extension cyclique de degré premier L/k . Alors, on peut choisir $E = \prod_i E_i$ tel que $E = \mathbb{G}_m$ ou $R_{L/k}\mathbb{G}_m$. Vu que $H^1(L, T) = 0$ et que la norme $N_{L/k} : (L \otimes_k L)^\times \rightarrow L^\times$ est surjective, le bord $\delta : E(k) \rightarrow H^1(k, T)$ est nul sur les facteurs $R_{L/k}\mathbb{G}_m$, et l'assertion démontrée précédemment montre que l'application $H^1(k, T) \rightarrow H^1(k, G_{ad})$ est nulle.

(b) Soit $1 \rightarrow T \rightarrow S \rightarrow E \rightarrow 1$ une résolution flasque de T et $\delta : E(k) \rightarrow H^1(k, T)$. On a $\delta(E(k)) = H^1(k, T)$. On considère le composé $\psi : E(k) \rightarrow H^1(k, T) \rightarrow H^1(k, G) \rightarrow H^3(k)$. Soit $y \in E(k)$ et notons $\alpha = \psi\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$ dans $\text{Ker}(H^3(k(t)) \rightarrow H^3(k_s(t)))$. Alors α est régulière en 0 et à l'infini. D'après l'hypothèse d'annulabilité appliquée au symbole α , il existe une fonction rationnelle $f : \mathbb{P}_k^1 \rightarrow \mathbb{P}_k^1$ telle que $f^*\alpha = 0$, $f(0) = 0$ et $f(\infty) = \infty$. Par suite, $\psi\left(\frac{f(0)+y}{f(0)+1}\right) = 0$ dans $H^3(k(t))$. Le même raisonnement qu'au lemme 13 assure que $(\pi_* \circ i_* \circ \delta)\left(\frac{f(0)+y}{f(0)+1}\right)$ est une classe constante de $H^1(k(t), G_{ad})$ et l'évaluation à l'infini montre que cette classe est triviale, i.e. $(\pi_* \circ i_* \circ \delta)\left(\frac{f(0)+y}{f(0)+1}\right) = 1$ dans $H^1(k(t), G_{ad})$. On spécialise maintenant cette égalité en 0 et il vient $(\pi_* \circ i_* \circ \delta)(1+y) = 1$. Ceci montre que l'application $\pi_* \circ i_* : H^1(k, T) \rightarrow H^1(k, G_{ad})$ est triviale sur $RH^1(k, T)$.

III. Le cas quasi-déployé

Le but de cette section est de démontrer le résultat principal de cet article.

THÉORÈME 4. *Soit G/k un groupe semi-simple simplement connexe, quasi-déployé. On suppose que $\dim_p^{\text{sep}}(k) \leq 2$ pour tout $p \in S(G)$. Supposons que l'on soit dans un des cas suivants*

- (1) le groupe G ne contient pas de facteur de type E_8 ;
- (2) le groupe de Galois \mathcal{G} est un p -groupe (p premier);

alors $H^1(k, G) = 1$.

III.1. EXTENSIONS QUADRATIQUES ET CYCLIQUES D'ORDRE 3

La proposition 2 du §2.2 se prête bien aux applications sur la cohomologie galoisienne d'une extension quadratique grâce au lemme bien connu suivant.

LEMME 14 (cf. [PR] lemme 6.17' p. 383). *Soient G un groupe réductif sur un corps k et L/k une extension quadratique séparable. On suppose que le groupe G_L admet un L -parabolique P , dont la classe de conjugaison est auto-opposée. Soit $\gamma \in H^1(L/k, G)$. Alors, il existe un k -tore S de G , tel que $Z_G(S) \times_k L$ soit un*

L-sous-groupe de Levi d'un conjugué de P_L et un k -tore maximal $T/k \subset Z_G(S)$ tel que

$$\gamma \in \text{Im}(H^1(L/k, T) \rightarrow H^1(L/k, G)).$$

□

Remarque 3. La classe de conjugaison des sous-groupes de Borel est auto-opposée, donc le lemme vaut toujours si P est un sous-groupe de Borel. De plus, le lemme avec $\gamma = 1$ montre en particulier que le groupe G possède un k -tore S , tel que $Z_G(S) \times_k L$ soit un L -sous-groupe de Levi d'un conjugué de P_L .

La combinaison de la proposition 2 (§26.2) et du lemme 14 entraînent le

COROLLAIRE 2. *Soit L/k une extension quadratique séparable. Soit G/k un groupe satisfaisant les mêmes hypothèses que dans la proposition 2.*

(a) *Supposons G_L déployé. Alors l'application*

$$H^1(L/k, G) \rightarrow H^1(L/k, G_{ad})$$

est nulle.

(b) *On suppose que k est un corps de nombres imaginaire pur, que G est quasi-déployé et G_L est quasi-déployé de type 3D_4 . Alors $H^1(L/k, G) = 1$.*

Démonstration. (a) Soit $\gamma \in H^1(L/k, G)$. Le lemme 14 indique qu'il existe un k -tore maximal T/k de G/k tel que γ provienne de $H^1(k, T)$ et tel que T_L soit inclus dans un sous-groupe de Borel B_L de G_L . Le tore T_L est déployé et la proposition 2.a entraîne alors $\gamma_{ad} = 1$ dans $H^1(k, G_{ad})$.

(b) Soit $\gamma \in H^1(L/k, G)$. Suivant le lemme 14, il existe un k -tore maximal T/k de G/k tel que γ provienne de $H^1(k, T)$ et tel que T_L soit inclus dans un sous-groupe de Borel B_L de G_L , qui est de type 3D_4 . Par suite, le tore T est déployé par une extension métacyclique, d'où $H^1(k, T)/R = 0$ et la proposition 2.b. entraîne la nullité de l'application $H^1(k, T) \rightarrow H^1(k, G)$, d'où $\gamma = 1$. □

Passons aux extensions cycliques de degré 3 avec le lemme suivant, dû à Harder.

LEMME 15 ([H1, III], lemme 3.24 et §3.4) *Soit L/k une extension cyclique de degré 3. Soit G/k un groupe semi-simple absolument presque k -simple de type D_4 (resp. E_6). Si G_L est déployé, alors le groupe G admet un sous-groupe réductif H de type A_2 (resp. D_4) contenant un k -tore maximal T/k de G/k déployé par L/k . □*

Le corollaire suivant résulte immédiatement du lemme précédent, du théorème de Steinberg (cf. §I) et de la proposition 2.

COROLLAIRE 3. *Soit L/k une extension cyclique de degré 3. Soit G/k un groupe semi-simple quasi-déployé presque k -simple de type D_4 ou de type E_6 . On suppose*

que G/k satisfait les hypothèses de la proposition 2. Soit $[z] \in H^1(k, G)$ tel que le groupe tordu ${}_z G_L$ est déployé. Alors $[z] = 1$. \square

III.2. INDUCTION SUR LES TYPES

Rappelons le théorème ‘d’annulation’ suivant, dû à Tits.

THÉORÈME 5 ([T5]). *On suppose $\text{car}(k) \neq 2$ et $\text{car}(k) \neq 3$.*

- (a) *Si tout élément de k est un carré, tout k -groupe de type B_n, C_n, D_n ($n \neq 4$), D_4 non trialitaire, ou G_2 est déployé.*
- (b) *Si tout élément de k est une puissance sixième, tout k -groupe de type D_4, F_4 , ou E_7 est déployé.* \square

Remarquons que le cas de E_8 fait défaut dans ce théorème, exprimant ainsi une difficulté supplémentaire pour ce cas. Il n’est pas difficile d’étendre ce résultat au cas des caractéristiques 2 et 3.

THÉORÈME 5’. (a) *Tout k -groupe de type B_n, C_n, D_n ($n \neq 4$), D_4 non trialitaire, ou G_2 est déployé par une tour d’extensions quadratiques séparables.*

(b) *Tout k -groupe de type D_4, F_4 , ou E_7 est déployé par une tour d’extensions galoisiennes de degrés 2 ou 3.* \square

Rappelons aussi le lemme suivant de Tits, qui intervient dans la preuve du théorème 5.

LEMME 16 ([T6], lemme 1). *Soit G/k une forme fortement interne de type $X = F_4, E_6, E_7$. Alors G contient un sous-groupe semi-simple H respectivement de type $A_2 \times A_2, F_4, E_6$. De plus, si $X = F_4$, chacun des deux facteurs de type A_2 d’un tel sous-groupe H est défini sur k et si $X = E_7$, H est fortement intérieur sur toute extension sur lequel il est intérieur.* \square

Nous disposons maintenant de tous les ingrédients nécessaires à la preuve du théorème 4. Soit G/k un groupe semi-simple simplement connexe quasi-déployé, le corps k satisfaisant les hypothèses de la conjecture II. On note G_0 la forme déployée du groupe G , parfois désignée uniquement par son type. La démonstration procède par induction sur les types en utilisant la proposition 2 du §II.2 et ses corollaires sur les extensions quadratiques et cycliques d’ordre 3. Remarquons tout d’abord que les cas 1A_n et C_n sont réglés indépendamment des hypothèses faites sur le corps (cf. [Se1], §III.1).

Groupes de type 2A_n . Soit G/k un groupe semi-simple quasi-déployé de type 2A_n associé à l’extension quadratique séparable L/k . Comme G_L est déployé de type

A_n , on a $H^1(L/k, G) = H^1(k, G)$ et le corollaire 2.a (§III.1) montre l’assertion par récurrence sur $n \geq 2$.

Groupes de type B_n (resp. D_n). Si G_0 désigne le groupe de Chevalley de type B_n (resp. D_n), le théorème 5’ ci-dessus montre qu’il suffit de montrer que $H^1(L/k, G_0) = 1$ pour toute extension quadratique séparable L/k . Le corollaire 2.a montre alors l’assertion par récurrence sur $n \geq 2$.

Groupes de type 2D_n . Soit G/k un groupe semi-simple quasi-déployé de type 2D_n associé à l’extension quadratique séparable L/k . Comme G_L est déployé de type D_n , on a $H^1(L/k, G) = H^1(k, G)$ d’après le cas précédent. Le corollaire 2.a montre alors l’assertion par récurrence sur $n \geq 2$.

Groupes de type 3D_4 . Ce cas est traité avec le corollaire 3 du § III.1.

Groupes de type 6D_4 . Soit G/k de type 6D_4 ; on note L/k l’extension cubique associée à G , d’extension discriminant k'/k et de clôture galoisienne $L' = L.k'$. Le cas précédent implique $H^1(k'/k, G) = H^1(k, G)$. On considère le sous-groupe maximal $H = (SL_2 \times R_{L/k}SL_2)/\mu_2$ de G (μ_2 étant plongé diagonalement), et le k -tore maximal $T_0 = (\mathbb{G}_m \times R_{L/k}\mathbb{G}_m)/\mu_2$, qui est le centralisateur d’un k -tore maximal déployé de G . On va montrer que l’application $H^1(k, H) \rightarrow H^1(k, G)$ est surjective. Soit $\gamma \in H^1(k'/k, G)$. Le lemme 14 entraîne l’existence d’un k -tore T/k tel que γ provienne de $H^1(k, T)$ et tel qu’il existe un sous-groupe de Borel $B_{k'}$ de $G_{k'}$ satisfaisant $T/k = B_{k'} \cap {}^\sigma B_{k'}$. Comme σ transforme les racines positives de $T_{k'}$ en racines négatives, un coup d’oeil sur le système de racines D_4 ($w_0 = -1$, cf. [Bou]) montre que σ agit sur $T_{k'}$ par $t \rightarrow t^{-1}$. Par suite, $T \xrightarrow{\sim} R_{k'/k}^1(T_0)$ est plongeable dans H , et comme l’image de l’application $H^1(k, T) \rightarrow H^1(k, G)$ ne dépend pas du plongement $T \hookrightarrow G$ et que $H^1(k', T) = 0$, on a $\gamma \in \text{Im}(H^1(k'/k, H) \rightarrow H^1(k, G))$. Il suffit donc de montrer que l’application $H^1(k'/k, H) \rightarrow H^1(k, G_{ad})$ est triviale. Le bord $\delta : H^1(k'/k, H) \rightarrow Br(k'/k) = k^\times / N_{k'/k}(k'^\times)$ est une bijection. Le plongement diagonal $SL_2 \rightarrow SL_2 \times R_{L/k}SL_2$ induit un plongement $PGL_2 \rightarrow H$ de sorte que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} H^1(k, PGL_2) & \xrightarrow{\delta} & {}_2Br(k) \\ \downarrow & & \parallel \\ H^1(k, H) & \longrightarrow & {}_2Br(k). \end{array}$$

commute. On considère le k -tore $S = R_{k'/k}(\mathbb{G}_m)/\mathbb{G}_m$ de PGL_2 . Alors $H^1(k, S) = Br(k'/k)$ et le composé $\delta : H^1(k, S) \rightarrow H^1(k'/k, PGL_2) \rightarrow Br(k'/k)$ est

l'identité. La proposition 2(a) montre alors que le composé

$$k^\times \rightarrow k^\times / N_{k'/k}(k'^\times) = H^1(k'/k, S) \rightarrow H^1(k'/k, T) \rightarrow H^1(k, G) \rightarrow H^1(k, G_{ad})$$

est nul, ce qui termine ce cas.

Groupes de type F_4 . C'est un cas intéressant, puisque l'on dispose de deux démonstrations distinctes, l'une passant par les invariants de Rost (cf. [BP], [Se2] et [Gi2] §5.4 en caractéristique positive) et une autre s'appuyant sur le cas D_4 que l'on va donner ici. On note $G_0 = F_4$, T_0 un k -tore maximal déployé et B_0 un sous-groupe de Borel de G_0 . Suivant [A, §14], il existe un sous-groupe déployé H_0 semi-simple simplement connexe de type D_4 tel que $B_0 \cap H_0$ est un sous-groupe de Borel de H_0 . On sait que $N_{G_0}(H_0) = H_0 \rtimes \text{Aut}(H_0, B_0 \cap H_0) = H_0 \rtimes S_3$ et $N_{H_0 \rtimes S_3}(T_0) = N_{G_0}(T_0)$. Comme l'application $H^1(k, N_{G_0}(T_0)) \rightarrow H^1(k, G_0)$ est surjective, l'application $H^1(k, H_0 \rtimes S_3) \rightarrow H^1(k, G_0)$ est aussi surjective. Or le cas des groupes quasi-déployés de type D_4 traité précédemment montre que $H^1(k, H_0 \rtimes S_3) \xrightarrow{\sim} H^1(k, S_3)$ et qu'ainsi tout groupe de type F_4 contient un sous-groupe quasi-déployé de type D_4 et est donc isotrope. On est donc ramené à des groupes plus petits et l'induction sur les types donne $H^1(k, F_4) = 1$.

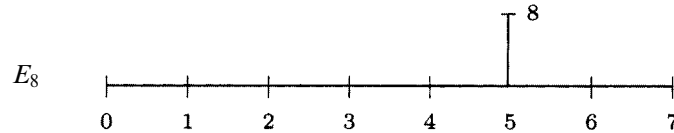
Groupes de type E_6 . Suivant le lemme 16 (§III.2), on sait que toute forme fortement interne d'un groupe de type E_6 contient un sous-groupe de type F_4 , et est donc de rang relatif supérieur ou égal à 4. Par suite, si E_6 désigne le groupe de Chevalley simplement connexe de type E_6 , on sait que toute classe de $H^1(k, E_6)$ provient d'un groupe simplement connexe déployé de type $A_1 \times A_1$ ou A_2 , donc est triviale.

Groupes de type 2E_6 . Exactement comme 2D_n .

Groupes de type E_7 . D'après le corollaire 2(a), il est loisible de supposer que $H^1(k, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0$. Soit $[z] \in H^1(k, E_7)$ et G le groupe tordu par le cocycle z . D'après le lemme 5, on peut supposer le groupe G anisotrope. Suivant le lemme 16, toute forme fortement interne d'un groupe de type E_7 contient un sous-groupe H de type E_6 . Le groupe H est une forme interne et la seconde assertion du lemme 16 dit que H est une forme fortement interne, donc déployée d'après le cas de E_6 traité précédemment. Le groupe G est donc isotrope, ce qui contredit notre hypothèse de départ.

Groupes de type E_8 . On suppose que \mathcal{G} est un pro p -groupe. Si $p \notin S(E_8)$, le théorème 2 du §I.2 montre que $H^1(k, G) = 1$. Supposons tout d'abord que $p = 2$. Il suffit alors de montrer que $H^1(L/k, E_8)$ pour toute extension quadratique séparable L/k , ce qui résulte du corollaire 2.a (§III.1). Supposons maintenant $p = 3$. On considère le sous-groupe semi-simple H_0 associé à la racine α_2 du

diagramme de Dynkin (cf. §0.4)



Le groupe H_0 est de type $E_6 \times A_2$ et si E_6/k désigne le groupe de Chevalley simplement connexe de type E_6 , on a $H_0 \approx (E_6 \times SL_3)/\mu_3$ où μ_3 se plonge diagonalement dans $E_6 \times SL_3$. On peut appliquer le lemme 3 (§II.2) et ainsi l'application $H^1(k, H_0) \rightarrow H^1(k, G_0)$ est surjective. On a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & \longrightarrow & \mu_3 & \longrightarrow & E_6 \times SL_3 & \longrightarrow & H_0 & \longrightarrow & 1 \\
 & & \Delta \downarrow & & \parallel & & \lambda \downarrow & & \\
 1 & \longrightarrow & \mu_3 \times \mu_3 & \longrightarrow & E_6 \times SL_3 & \longrightarrow & E_6/\mu_3 \times PGL_3 & \longrightarrow & 1
 \end{array}$$

induisant le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 H^1(k, H_0) & \xrightarrow{\delta} & {}_3Br(k) \\
 \downarrow & & \Delta_* \downarrow \\
 H^1(k, E_6/\mu_3) \times H^1(k, PGL_3) & \longrightarrow & {}_3Br(k) \times {}_3Br(k).
 \end{array}$$

Soit $[z] \in H^1(k, H_0)$. Le diagramme indique que $\delta([z])$ provient de $H^1(k, PGL_3)$ et est donc la classe d'une algèbre cyclique. Par suite, il existe une extension cyclique L/k d'ordre 3 tuant $\partial([z])$. D'après les cas précédents, on sait que le noyau de $H^1(L, H_0) \rightarrow {}_3Br(L)$ est trivial, ainsi l'extension L/k tue $[z]$. Le groupe semi-simple ${}_zH_0$ est donc déployé par L/k et d'après le lemme 15 (§36.1), on sait qu'il admet un k -tore maximal T/k déployé par L/k . Le théorème de Steinberg montre l'existence d'un plongement $T \hookrightarrow H_0$ tel que $[z]$ appartienne à l'image de $H^1(k, T) \rightarrow H^1(k, H_0)$. Comme T/k est un k -tore maximal de G_0/k , la proposition 2 (§26.2) conclut que l'application $H^1(k, T) \rightarrow H^1(k, G_0)$ est nulle et l'image de $[z]$ dans $H^1(k, G_0)$ est donc triviale.

Le cas le plus intéressant est $p = 5$ pour lequel on dispose de deux démonstrations, la démonstration originale étant celle de Chernousov [Ch2] (cf. [Gi2] th. 10 en caractéristique positive). On considère le sous-groupe semi-simple H_0 associé à la racine α_4 du diagramme de Dynkin de type E_8 ci-dessus. On sait que $H_0 = SL_5 \times SL_5/\mu$ où $\mu = \text{Ker}(\mu_5 \xrightarrow{(\times 1, \times 2)} \mu_5 \times \mu_5) \approx \mu_5$ d'après le §1.7 de [T4]. Le groupe de Weyl de H_0 est donc le produit semi-direct de $S_5 \times S_5$ par $\mathbb{Z}/2$ et le lemme 3 du §1.2 montre que l'application $H^1(k, H_0) \rightarrow H^1(k, G_0)$ est surjective.

On a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & \longrightarrow & \mu_5 & \longrightarrow & SL_5 \times SL_5 & \longrightarrow & H_0 \longrightarrow 1 \\
 & & (\times 1, \times 2) \downarrow & & \parallel & & \lambda \downarrow \\
 1 & \longrightarrow & \mu_5 \times \mu_5 & \longrightarrow & SL_5 \times SL_5 & \longrightarrow & PGL_5 \times PGL_5 \longrightarrow 1,
 \end{array}$$

induisant (puisque $H^1(k, SL_5 \times SL_5) = 1$) le diagramme commutatif exact d'ensembles pointés

$$\begin{array}{ccccc}
 1 & \longrightarrow & H^1(k, H_0) & \xrightarrow{\delta} & {}_5Br(k) \\
 & & \lambda^* \downarrow & & (\times 1, \times 2) \downarrow \\
 1 & \longrightarrow & H^1(k, PGL_5) \times H^1(k, PGL_5) & \xrightarrow{\delta'} & {}_5Br(k) \times {}_5Br(k).
 \end{array}$$

Soit $[z] \in H^1(k, H_0)$. Le diagramme indique que $\partial([z])$ provient de $H^1(k, PGL_5)$ et est donc la classe d'une algèbre cyclique D/k . Par suite, il existe une extension cyclique L/k d'ordre 5 tuant $\partial([z])$ et telle que le tore $R_{L/k}(\mathbb{G}_m) \times R_{L/k}(\mathbb{G}_m)$ soit un tore maximal de ${}_{\lambda_*([z])}(PGL_5 \times PGL_5)$. Alors le tore $T = \lambda^{-1}(R_{L/k}(\mathbb{G}_m) \times R_{L/k}(\mathbb{G}_m))$ est un sous-tore maximal de ${}_zH_0$. Le théorème de Steinberg montre l'existence d'un plongement $T \hookrightarrow H_0$ tel que $[z]$ appartienne à l'image de de $H^1(k, T) \rightarrow H^1(k, H_0)$. Comme T/k est un k -tore maximal de G_0/k déployé par l'extension cyclique L/k , la proposition 2 (§II.2) conclut que l'application $H^1(k, T) \rightarrow H^1(k, G_0)$ est nulle et ainsi l'image de $[z]$ dans $H^1(k, G_0)$ est triviale.

Remarque 4. La démonstration du cas de type E_8 montre en fait un peu plus. Si k satisfait les hypothèses de la conjecture 26 et si H_0 désigne le sous-groupe maximal de E_8 de type $E_6 \times A_2$, on sait d'après Wedderburn que toute algèbre simple centrale de degré 3 est cyclique. La démonstration ci-dessus montre alors que l'application $H^1(k, H_0) \rightarrow H^1(k, E_8)$ est triviale.

III.4. CONSÉQUENCES SUR LES ISOGÉNIES

Le théorème 4 (début du § III) et un travail précédent [Gi1] permettent d'obtenir sans difficulté le

THÉORÈME 6. *Soit $G'/k \rightarrow G/k$ une isogénie spéciale de groupes réductifs de noyau le k -groupe de type multiplicatif μ , i.e. G' est le produit direct d'un groupe semi-simple simplement connexe et d'un tore quasi-trivial. On suppose que $\dim_p^{sep}(k) \leq 2$ pour tout $p \in S(G)$. Soit X la variété des sous-groupes de Borel de G/k .*

- (a) $N_X^{sep}(k) = k^\times$.
- (b) *L'application caractéristique $G(k) \rightarrow H_{fppf}^1(k, \mu)$ est surjective, et on a une suite exacte naturelle de groupes*

$$G'(k)/R \rightarrow G(k)/R \rightarrow H_{fppf}^1(k, \mu)/R \rightarrow 1.$$

Démonstration. On peut supposer que G est simplement connexe, de groupe fondamental μ . On note G^{qd} la forme quasi-déployée de G . On sait qu'il existe une famille d'extensions séparables $(k_i)_{i=1, \dots, r}$ et des groupes semi-simples simplement connexes quasi-déployés G_i/k_i respectivement absolument presque k_i -simple tels que $G^{qd} = \prod_i R_{k_i/k} G_i$. Par un argument de transfert, il est loisible de supposer que \mathcal{G} est un p -groupe pour $p \in S(G)$. On déduit du théorème 4 (§III) et du lemme de Schapiro que $H^1(k, G^{qd}) = \prod_i H^1(k_i, G_i) = 1$. Le lemme 12 (§II.2) montre alors que $N_X^{sep}(k) = k^\times$.

(b) On commence par établir l'énoncé suivant.

LEMME 17 (i) *La restriction de l'application caractéristique $G(k) \rightarrow H_{fppf}^1(k, \mu)$ à $RG(k)$ induit une surjection $RG(k) \rightarrow RH_{fppf}^1(k, \mu)$.*

(ii) *L'application caractéristique $G(k) \rightarrow H_{fppf}^1(k, \mu)$ est surjective.*

Preuve du lemme. (i) Soient $1 \rightarrow \mu \rightarrow S \rightarrow E \rightarrow 1$ une résolution flasque de μ et $\delta : E(k) \rightarrow H_{fppf}^1(k, \mu)$ l'application de bord associée. On note $C_\lambda(k) \subset H_{fppf}^1(k, \mu)$ (resp. $RC_\lambda(k) \subset H_{fppf}^1(k, \mu)$) l'image par l'application caractéristique de $G(k)$ (resp. $RG(k)$). On a $\delta(E(k)) = RH_{fppf}^1(k, \mu)$ (cf. §I.3) et il suffit de montrer que $\delta(E(k)) \subset RC_\lambda(k)$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $E = R_{L/k} \mathbb{G}_m$ pour une extension finie séparable de corps L/k .

1er cas. $L = k$ et $E = \mathbb{G}_m$ Suivant la proposition 36.2.5 de [Gil], on a

$$\delta(N_X^{sep}(k)) \subset RC_\lambda(k) \subset RH_{fppf}^1(k, \mu).$$

D'après le a), on a donc $\delta(k^\times) \subset RC_\lambda(k)$.

2nd cas. $E = R_{L/k} \mathbb{G}_m$ avec L/k finie séparable. Il existe une algèbre étale A/L telle que $E \otimes_L k = \mathbb{G}_{m,L} \times R_{A/L} \mathbb{G}_m$. Considérons le diagramme commutatif de corestrictions

$$\begin{array}{ccc} E(L) = L^\times \times A^\times & \xrightarrow{\delta_L} & H_{fppf}^1(L, \mu) \\ N_{L/k} \downarrow & & N_{L/k} \downarrow \\ E(k) = L^\times & \xrightarrow{\delta_k} & H_{fppf}^1(k, \mu). \end{array}$$

La norme $N_{L/k} : E(L) \rightarrow E(k)$ induit l'identité sur le premier facteur L^\times . Le premier cas appliqué au corps L et à $\mathbb{G}_{m,L}$ implique que $\delta_L(L^\times) \subset R(L, C_\lambda)$. Le théorème 26.3.2 de [Gil] montre que $\delta(E(k)) \subset N_{L/k}(RC_\lambda(L)) \subset RC_\lambda(k)$.

(ii) Montrons tout d'abord la surjectivité de l'application caractéristique $G(k) \rightarrow H_{fppf}^1(k, \mu)$ dans le cas où G est semi-simple. Une chasse au diagramme laissée au lecteur permet de se ramener au cas où G est adjoint et μ est le groupe fondamental de G . Utilisant la classification de tels groupes et le lemme de Schapiro, on peut supposer que G est absolument simple. La table (cf. [PR] p. 332) montre que μ/k de G/k est déployé par une extension métacyclique, donc $H_{fppf}^1(k, \mu)/R = 1$ et le *i*) montre que l'application $G(k) \rightarrow H_{fppf}^1(k, \mu)$ est surjective.

Dans le cas général, G' n'étant plus supposé semi-simple et G n'étant plus supposé adjoint, il existe un k -tore quasi-trivial E'/k tel que $G' = DG' \times E'$ où DG' est semi-simple simplement connexe. On a $\mu \subset DG' \times E'$ et on note B (resp. C) l'image de μ par la projection $DG' \times E' \rightarrow DG'$ (resp. $DG' \times E' \rightarrow E'$). Comme DG' est semi-simple simplement connexe, l'application $H^1(k, B) \rightarrow H^1(k, DG')$ est triviale. Arguant du théorème 90 de Hilbert, on sait de plus que l'application $H^1(k, C) \rightarrow H^1(k, E') = 1$ est triviale; il résulte que l'application $H_{fppf}^1(k, \mu) \rightarrow H^1(k, G')$ est triviale, i.e. l'application caractéristique $G(k) \rightarrow H_{fppf}^1(k, \mu)$ est surjective. Le lemme est démontré et entraîne avec la proposition II.1.3 de [Gi1] l'exactitude de la suite

$$G'(k)/R \rightarrow G(k)/R \rightarrow H_{fppf}^1(k, \mu)/R \rightarrow 1. \quad \square$$

Remarque 5. Il est à noter que le (c) était déjà connu pour les groupes de type D_4 [Gal] et que l'assertion (b) généralise le théorème 36.3.1 de [Gi1] du cas d'un corps global imaginaire pur au cas d'un corps de dimension cohomologique ≤ 2 .

Si G/k est un groupe semi-simple simplement connexe absolument presque k -simple, de diagramme de Dynkin Δ et de diagramme de Dynkin complété $\mathbf{\Delta}$, et satisfaisant les hypothèses de la conjecture 26, on observe les trois faits suivants:

- (1) Suivant le théorème 4 (§ III), l'hypothèse **A** de la proposition 2 (§ II.2) est satisfaite, i.e. pour toute extension séparable finie k'/k et pour tout diagramme de Dynkin $\Delta' \in \mathcal{D}_{k'}$, $\Delta' < \mathbf{\Delta}$, $\Delta' \neq \Delta$, si H/k' désigne le sous-groupe semi-simple simplement connexe quasi-déployé de diagramme de Dynkin Δ' (muni de l'action de $\text{Gal}(k'.k_s)$), on a $H^1(k', H) = 1$;
- (2) l'hypothèse **B** de la proposition 2 est satisfaite, i.e. pour toute extension séparable finie k'/k , on a $N_X^{sep}(k') = k'^{\times}$ (X est la variété des sous-groupes de Borel de G);
- (3) l'application $H^1(k, G) \rightarrow H^1(k, G_{ad})$ est injective suivant le *b*) du théorème 6.

L'application de la proposition 2 et d'un argument de torsion implique alors le théorème annoncé dans l'introduction.

THÉORÈME 7. *Soit G/k un groupe semi-simple simplement connexe absolument simple, T/k un k -tore maximal de G déployé par une extension cyclique de degré*

premier. On suppose que $\dim_p^{\text{sep}}(k) \leq 2$ pour tout premier $p \in S(G)$. Alors l'application naturelle $i_* : H^1(k, T) \rightarrow H^1(k, G)$ est nulle. \square

IV. Résultats partiels pour des groupes tordus

La proposition 2 montre qu'il est naturel d'étudier les k -tores maximaux T des groupes semi-simples simplement connexes du point de vue de l'invariant $H^1(k, T)/R$.

IV.1. TORES MAXIMAUX

La proposition ci-dessous montre que les applications directes de la proposition 2 sont très limitées puisque le groupe $H^1(k, T)/R$ est non trivial en général pour tous les types exceptés 1A_n , C_n et G_2 . Nous n'avons pas cherché à réaliser de façon effective ces contre-exemples en dimension cohomologique 2 (i.e. avec $cd(k) \leq 2$ et $H^1(k, T)/R \neq 1$), mais il est probable qu'il est possible de le faire. Nous discuterons cependant en détail le cas particulier important des corps de nombres dans la dernière partie.

PROPOSITION 3. *Soit G/k un groupe semi-simple simplement connexe et absolument presque simple. On note X le type quasi-déployé de G .*

- (a) *Si $X = {}^1A_n, C_n$ ou G_2 , alors pour tout k -tore maximal T/k de G , on a $H^1(k, T)/R = 1$.*
- (b) *Soit p un nombre premier. Dans les cas suivants*
- $p = 2$ et $X = {}^2A_3 = {}^2D_3, B_n$ ($n \geq 3$), 1D_n ($n \geq 4$), F_4, E_6, E_7, E_8 ,
 - $p = 3$ et $X = {}^3D_4, F_4, {}^1E_6, E_7, E_8$,
 - $p = 5$ et $X = E_8$,

il existe un groupe semi-simple simplement connexe quasi-déployé G/\mathbb{Q} absolument presque simple de type X , un \mathbb{Q} -tore maximal T de G , et une extension de corps E/\mathbb{Q} telle que $(H^1(E, T)/R)\{p\} \neq 1$.

Enonçons sans démonstration le lemme facile suivant qui permet, dans le cas d'un groupe déployé, d'être ramené au cas d'un tore maximal T non inclus dans un sous-groupe parabolique propre de G .

LEMME 18. (a) *Soit $1 \rightarrow G \rightarrow G' \rightarrow S \rightarrow 1$ une suite exacte de k -groupes réductifs, où S est un k -tore. Soit \mathcal{T} (resp. \mathcal{T}') la variété des tores maximaux de G (resp. G'). Alors la trace induit un isomorphisme naturel $\mathcal{T}' \approx \mathcal{T}$.*

(b) *Soit G un groupe semi-simple quasi-déployé absolument presque k -simple, et $H \subset G$ un sous-groupe de Levi d'un sous-groupe parabolique de G . On suppose que le centre réductif de H est un k -tore déployé (ce qui est toujours le cas si G est lui-même déployé). Soit S un k -tore maximal du groupe semi-simple simplement*

connexe DH et T le k -tore maximal de H (donc de G) associé par le a). Alors on a un isomorphisme $H^1(k, S)/R \approx H^1(k, T)/R$.

Démonstration. Soit G/k un groupe semi-simple simplement connexe déployé de type A_n, C_n ou G_2 et T/k un k -tore maximal de G/k . Si $X = A_n$, alors $G = SL_{n+1}$ et il existe une algèbre étale A/k de rang $n + 1$ telle que $T = R^1_{A/k} \mathbb{G}_m = \text{Ker}(R_{A/k} \mathbb{G}_m \xrightarrow{N_{A/k}} \mathbb{G}_m)$. Suivant le théorème 90 de Hilbert, on a $H^1(k, T) = k^\times / N_{A/k}(A^\times)$, d'où $H^1(k, T)/R = 1$.

Soit T un k -tore maximal du groupe semi-simple simplement connexe de type C_n . D'après la description du groupe des poids (cf. [Bou]), il est aisé de voir qu'il existe des k -algèbres étales $L \subset E$ satisfaisant $[E : k] = n$ et $[L : k] = 2n$ et telles que $T = R_{E/k}(R^1_{L/E} \mathbb{G}_m)$. On a donc $H^1(k, T) = \text{Ker}(Br(E) \rightarrow Br(L)) \approx E^\times / N_{L/E}(L^\times)$. Il résulte que $H^1(k, T)/R = 1$. Le cas de G_2 est réglé par le lemme 6 du §1.3.

(b) On pose $k = \mathbb{Q}$.

$p = 2$. On commence par le cas de 2A_3 . Soit L/k une extension quadratique séparable et G/k le groupe quasi-déployé de type 2A_3 associé à L/k . Soit $M/k = k_1 \times k_2$ l'algèbre étale produit de deux extensions biquadratiques telle que l'algèbre étale $k_1.k_2.L$ soit un corps. Alors le tore $T = \text{Ker}(R_{L/k} R^1_{M/k} \mathbb{G}_m \xrightarrow{N_{L/k}} R^1_{M/k} \mathbb{G}_m)$ est un k -tore maximal de G . Nous prétendons que le foncteur $H^1(\cdot, T)$ n'est pas R -trivial. Pour cela, on considère le tore dual T^D de T , i.e. défini par $\hat{T}^D = \hat{T}^0$, et d'après le lemme 6.c, il suffit de voir que T^D n'est pas R -trivial. Le tore T^D est décrit par la suite exacte

$$1 \rightarrow R_{M/k}(\mathbb{G}_m)/\mathbb{G}_m \rightarrow R_{L/k}(R_{M \otimes_k L}(\mathbb{G}_m)/\mathbb{G}_m) \rightarrow T^D \rightarrow 1.$$

Comme $H^1(k, R_{M/k}(\mathbb{G}_m)/\mathbb{G}_m) = \text{Ker}(Br(k) \rightarrow Br(M)) = \text{Ker}(Br(k) \rightarrow Br(k_1) \oplus Br(k_2))$, on obtient une surjection

$$T^D(k) \rightarrow \text{Ker}(Br(k) \rightarrow Br(k_1) \oplus Br(k_2) \oplus Br(L)) \rightarrow 0,$$

et on sait d'après [ELTV, § 3, § 5], que le second objet n'est pas paramétrisable rationnellement. Il résulte que T^D n'est pas R -trivial.

Passons au type B_3 déployé dont le groupe de Chevalley simplement connexe est le groupe déployé Spin_7 . On dispose d'un plongement naturel $\text{Spin}_6 \rightarrow \text{Spin}_7$ et l'unique automorphisme extérieur de Spin_6 se prolonge en un automorphisme intérieur de Spin_7 . En d'autres mots, le plongement $\text{Spin}_6 \rightarrow \text{Spin}_7$ se prolonge en $\text{Aut}(\text{Spin}_6) \rightarrow \text{Spin}_7$. On déduit de cette remarque que le tore T étudié précédemment est un sous-tore du groupe déployé Spin_7 , et l'assertion est donc démontrée dans ce cas.

Pour le type D_4 , on considère la suite exacte $1 \rightarrow \mu_2 \rightarrow \text{Spin}_8 \rightarrow SO_8 \rightarrow 1$. Soit L/k une extension quadratique $k_1, k_2/k$ deux extensions quadratiques telles que $k_1 \cdot k_2 \cdot L$ est un corps. On pose $M = k_1 \times k_2$. Le tore $R_{M/k}(R^1_{M.L/M} \mathbb{G}_m)$ est un k -tore maximal de SO_8 . Prenant son image inverse par l'isogénie $\text{Spin}_8 \rightarrow SO_8$,

on obtient un tore maximal T de Spin_8 s'inscrivant dans une suite exacte $1 \rightarrow \mu_2 \rightarrow T \rightarrow R_{M/k}(R_{M.L/M}^1 \mathbb{G}_m) \rightarrow 1$. La suite exacte longue de cohomologie galoisienne donne

$$\dots \rightarrow k^\times/k^{\times 2} \rightarrow H^1(k, T) \rightarrow L^\times/N_{L.M}((LM)^\times) \rightarrow_2 Br(k).$$

Faisant l'identification $L^\times/N_{L.M}((LM)^\times) \xrightarrow{\sim} Br(M.L/M)$, il n'est pas difficile de voir que la flèche de bord $Br(M.L/M) \rightarrow Br(k)$ est la corestriction de M à k . On a donc une surjection

$$H^1(k, T) \rightarrow \text{Ker}\left(L^\times/N_{L.M}((LM)^\times) \xrightarrow{N_{M/k}} k^\times/N_{L/k}(L^\times)\right) \rightarrow 0.$$

Le terme de droite est déjà apparu dans l'étude du type 2A_3 et on sait que l'on ne peut pas le paramétrer rationnellement. Il résulte que le foncteur $H^1(\cdot, T)$ n'est pas R -trivial.

Pour les autres types F_4, E_6, \dots , l'assertion résulte du lemme 18.b.

$p = 3$. Commençons par le cas de F_4 . Alors F_4 possède un sous-groupe maximal de type $A_2 \times A_2$ qui est isomorphe à $SL_3 \times SL_3/\mu_3$ où μ_3 est le sous-groupe diagonal du centre $\mu_3 \times \mu_3$ de $SL_3 \times SL_3$. Soient k_1/k et k_2/k deux extensions cycliques d'ordre 3. Alors le quotient T/k du tore $R_{k_1/k}^1 \mathbb{G}_m \times R_{k_2/k}^1 \mathbb{G}_m$ par le sous-groupe μ_3 diagonal est un k -tore maximal de H , donc de F_4 . Le groupe $H^1(k, T)$ s'obtient par la suite exacte

$$k^\times/k^{\times 3} \rightarrow k^\times/N_{k_1/k}(k_1^\times) \times k^\times/N_{k_2/k}(k_2^\times) \rightarrow H^1(k, T) \rightarrow H^2(k, \mu_3) \rightarrow H^2(k_1/k, \mathbb{G}_m) \oplus H^2(k_2/k, \mathbb{G}_m).$$

On tombe donc sur l'objet $\text{Ker}(Br(k) \rightarrow Br(k_1) \oplus Br(k_2))$ qui n'est pas R -trivial suivant le lemme 6 (§ I.3). Le tore précédent est aussi le tore maximal d'un groupe quasi-déployé de type 3D_4 , ce qui traite aussi ce cas. Pour le type E_6 , on considère le sous-groupe maximal de H de type $(A_2)^3$ et isomorphe à $(SL_3)^3/\mu_3$ où μ_3 est le sous-groupe diagonal du centre $(\mu_3)^3$ de $(SL_3)^3$. Un argument similaire montre alors qu'il existe un exemple de k -tore de E_6 tel que la partie 3-primaire de $H^1(k, T)/R$ soit non triviale. Le lemme 18 règle le cas des types E_7 et E_8 .

$p = 5$. Pour E_8 , on considère le sous-groupe maximal de type $A_4 \times A_4$ et la preuve est exactement analogue à celle produite pour F_4 et pour $p = 3$. □

IV.2. GROUPES DE TYPE D_4, E_6 ET E_7

Dans cette section, nous donnons des applications du théorème 7 du § III.3 aux groupes exceptionnels de type D_4, E_6 et E_7 , dont les algèbres de Tits n'ont pas d'index trop grands.

THÉORÈME 8 (type D_4). *On suppose $\text{car}(k) \neq 2$. Soit G/k un groupe semi-simple simplement connexe de type ${}^{3,6}D_4$. On note L/k l'extension étale cubique associée*

à la forme quasi-déployée de G . On suppose que $cd_2(k) \leq 2$, $\dim_3^{sep}(k) \leq 2$. Si l'algèbre d'Allen de G est d'indice 2, alors $H^1(k, G) = 1$ et le groupe G admet un sous-groupe parabolique de type $\{1, 3, 4\}$.

Démonstration. On note D/L l'algèbre d'Allen de G , que l'on suppose d'indice 2. Selon [Ga2], il existe une forme interne de G (i.e. avec même algèbre d'Allen) qui soit isotrope de type $\{1, 3, 4\}$. On peut donc supposer G isotrope et il suffit de voir que $H^1(k, G) = 1$. En particulier, ce groupe G possède un sous-groupe maximal $H = (SL_2 \times_{R_{L/k}} SL(D))/\mu_2$, isotrope de type A_1^4 . D'après la proposition 43.9 p. 555 de [KMRS], prop. 43.9, on sait que D est semblable à une algèbre de quaternions (a, b) avec $a \in k^\times$ et $b \in L^\times$. On note $k' = k(\sqrt{a})$ et σ le générateur de $\text{Gal}(k'/k)$. Comme le groupe $G_{k'}$ est quasi-déployé, on a $H^1(k'/k, G) = H^1(k, G)$ d'après le théorème 4 (§36). On va montrer que $H^1(k'/k, H) \rightarrow H^1(k, G)$ est surjectif. Le groupe H admet le k -tore maximal

$$T_1 = R_{k'/k}^1[(\mathbb{G}_m \times_{R_{L/k}} \mathbb{G}_m)/\mu_2] \xrightarrow{\sim} R_{k'/k}^1(\mathbb{G}_m \times_{R_{L/k}} \mathbb{G}_m)/\mu_2.$$

Soit $\gamma \in H^1(k'/k, G)$. Le lemme 14 entraîne l'existence d'un k -tore T/k tel que γ provienne de $H^1(k'/k, T)$ et tel qu'il existe un sous-groupe de Borel $B_{k'}$ de $G_{k'}$ satisfaisant $T/k = B_{k'} \cap {}^\sigma B_{k'}$; σ agit sur $T_{k'}$ par $t \rightarrow t^{-1}$. Par suite, on a $T \xrightarrow{\sim} T_1$ et T est plongeable dans le sous-groupe maximal H . Comme $H^1(k', T) = 0$ et comme l'image de l'application $H^1(k, T) \rightarrow H^1(k, G)$ ne dépend pas du plongement $T \hookrightarrow G$, on a $\gamma \in \text{Im}(H^1(k'/k, H) \rightarrow H^1(k, G))$. Le bord $\delta : H^1(k'/k, H) \rightarrow \text{Br}(k'/k) = k^\times/N_{k'/k}(k'^\times)$ est injectif. Il suffit donc de montrer que $\delta[\text{Ker}(H^1(k'/k, H) \rightarrow H^1(k, G))]$ se surjecte sur $k^\times/N_{k'/k}(k'^\times)$. Le plongement diagonal $\mathbb{G}_m \rightarrow \mathbb{G}_m \times_{R_{L/k}} \mathbb{G}_m$ induit un plongement $\mathbb{G}_m = \mathbb{G}_m/\mu_2 \hookrightarrow (\mathbb{G}_m \times_{R_{L/k}} \mathbb{G}_m)/\mu_2$, d'où un plongement

$$R_{k'/k}^1 \mathbb{G}_m \hookrightarrow T_1.$$

Une chasse au diagramme laissée au lecteur montre que le composé

$$\begin{aligned} k^\times/N_{k'/k}(k'^\times) &= H^1(k'/k, R_{k'/k}^1 \mathbb{G}_m) \rightarrow H^1(k'/k, T_1) \rightarrow \\ &\rightarrow H^1(k, H) \xrightarrow{\delta} \text{Br}(k'/k) = k^\times/N_{k'/k}(k'^\times) \end{aligned}$$

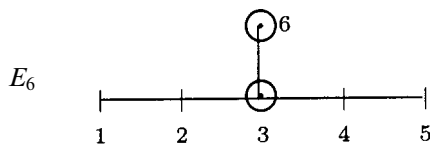
est l'identité; la proposition 2.a. montre alors que le composé

$$\begin{aligned} k^\times \rightarrow k^\times/N_{k'/k}(k'^\times) &= H^1(k'/k, R_{k'/k}^1 \mathbb{G}_m) \rightarrow H^1(k'/k, T_1) \\ &\rightarrow H^1(k, G) \rightarrow H^1(k, G_{ad}) \end{aligned}$$

est nul, ce qui achève la démonstration, vu que $H^1(k, G)$ s'injecte dans $H^1(k, G_{ad})$ d'après le théorème 6. □

THÉORÈME 9 (type E_6). Soit G/k un groupe semi-simple simplement connexe de type E_6 . On suppose que $\dim_2^{sep}(k) \leq 2$, $\dim_3^{sep}(k) \leq 2$.

- (a) Si G/k est de type 1E_6 , et si l'algèbre de Tits de G est d'indice 1 ou 3, alors $H^1(k, G) = 1$. De plus, si l'algèbre de Tits de G est d'indice 3, alors $H^1(k, G) = 1$ et G/k admet un sous-groupe parabolique de type $\{1, 2, 4, 5\}$



- (b) Si G/k est de type 2E_6 et si l'algèbre de Tits de G est d'indice 1 ou 3, alors $H^1(k, G) = 1$ et G/k admet un sous-groupe parabolique de type $\{1, 2, 4, 5\}$.

Démonstration. Le théorème 4 (§III) permet de supposer que l'algèbre de Tits D de G est d'indice 3. Si G est une forme interne, on sait suivant le § 6.4.5 de [T3] qu'il existe une k -forme G_1 de E_6 d'algèbre de Tits D et ayant un sous-groupe parabolique de type $\{1, 2, 4, 5\}$. On laisse le soin au lecteur de vérifier que le même argument utilisant des sous-groupes de type $A_2 \times A_2 \times A_2$ montre que l'assertion précédente vaut aussi si G est une forme externe. Il existe donc une k -forme G_1 de E_6 d'algèbre de Tits D et ayant un sous-groupe parabolique de type $\{1, 2, 4, 5\}$. Il suffit donc de montrer que $H^1(k, G_1) = 1$, puisque G est une k -forme fortement interne de G_1 . On peut donc supposer dans la suite que G admet un sous-groupe parabolique de type $\{1, 2, 4, 5\}$.

Type 1E_6 . D'après un théorème de Wedderburn (cf. [KMRT], th. 19.2), on sait que toute algèbre simple centrale de degré 3 est une algèbre cyclique; il existe donc une extension cyclique k'/k de degré 3 déployant D et on a $H^1(k, G) = H^1(k'/k, G)$. Soit $[z] \in H^1(k'/k, G)$. Le groupe ${}_zG_{k'}$ est déployé. Le lemme 14 (§III.1) indique que ${}_zG$ possède un sous-groupe réductif H de type D_4 déployé par L/k . Le groupe DH est semi-simple de type D_4 et son invariant d'Allen est trivial. Le théorème 4 (§ III) implique que DH est quasi-déployé et ainsi H et à fortiori ${}_zG$ sont isotropes. Comme $\text{Ind}_k(D) = 3$, la théorie de la réduction de l'indice ([MPW, II], table 8.A) jointe à la liste des types possibles [T1] montre que ${}_zG$ admet un sous-groupe parabolique de type $\{1, 2, 4, 5\}$. Le lemme 5.b (§I.1) entraîne que γ s'envoie sur 1 par $H^1(k, G) \rightarrow H^1(k, G_{ad})$ et le théorème 6.b (§ III.3) permet de conclure que $\gamma = 1$.

Type 2E_6 . On note L/k l'extension quadratique associée à la forme quasi-déployée de G . Le cas précédent implique que $H^1(k, G_1) = H^1(L/k, G)$ et que G_L admet un sous-groupe parabolique de type $\{1, 2, 4, 5\}$. Soit $\gamma \in H^1(L/k, G)$. Le lemme 14 (§III.1) donne un k -tore S de rang 2 déployé par L/k de G , un tore maximal $T/k \subset Z_G(S)$ tel que $\gamma \in \text{Im}(H^1(L/k, T) \rightarrow H^1(L/k, G))$ de sorte que $DZ_G(S)$ soit un groupe simplement connexe de type $A_2 \times A_2$. Remarquons tout de suite que $DZ_G(S)$ est une forme externe et que le groupe $\text{Gal}(L/k)$ permute les deux facteurs de type A_2 . En effet, supposons que $DZ_G(S)$ soit une forme interne. Alors

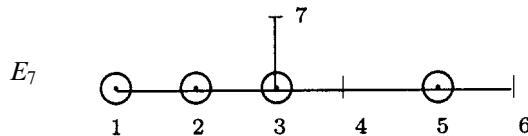
$DZ_G(S)$ est déployé par le produit $M/k = F_1.F_2$ de deux extensions galoisiennes de degré 3 et ainsi le groupe G_M contient un groupe déployé de type $A_2 \times A_2$, ce qui n'est pas possible, vu que G_M n'est pas une forme interne. Le groupe $DZ_G(S)$ est donc une forme externe, qui est déployée par L/k , il s'ensuit qu'il existe une algèbre simple centrale A/L de degré 3 telle que $DZ_G(S) = R_{L/k}(SL_1(A))$. Le lemme suivant n'est pas difficile à établir.

LEMME 19. Soient G_0/k le groupe de Chevalley simplement connexe de type E_6 , et S_0 un tore déployé de rang 2 tel que $Z_{G_0}(S_0)$ soit un sous-groupe de Levi du groupe parabolique de type $\{1, 2, 4, 5\}$. Alors $Z_{G_0}(S_0) = DZ_{G_0}(S_0) \times S_0$ (Ind. utiliser le sous-groupe maximal de type $A_2 \times A_2 \times A_2$). □

Il s'ensuit que $Z_G(S) = DZ_G(S) \times S$ et que $T = (DZ_G(S) \cap T) \times S$. Puisque $S \xrightarrow{\sim} R_{L/k}^1 \mathbb{G}_m$, la proposition 2.a montre que l'application $H^1(k(DZ_G(S) \cap T)) \times H^1(k, S) \rightarrow H^1(k, G)$ est $H^1(k, S)$ -équivariante. Il résulte donc que γ provient de $H^1(k, DZ_G(S)) = 1$, puisque $DZ_G(S)$ est un groupe simplement connexe de type $A_2 \times A_2$. On conclut que $\gamma = 1$. □

THÉORÈME 10 (type E_7). Soit G/k un groupe semi-simple simplement connexe de type E_7 . On suppose que $\dim_2^{sep}(k) \leq 2$, $\dim_3^{sep}(k) \leq 2$. On note D/k l'algèbre de Tits de G .

(a) Si $\text{Ind}_k(D) = 1$ ou 2, alors $H^1(k, G) = 1$. De plus, G/k admet un sous-groupe parabolique de type $\{4, 6, 7\}$



(b) Si $\text{Ind}_k(D) = 4$, alors $H^1(k, G) = 1$. De plus, G/k admet un sous-groupe parabolique de type $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Démonstration. Soit donc G/k un groupe simplement connexe de type E_7 d'algèbre de Tits D . Si $\text{Ind}_k(D) = 1$, alors G est déployé d'après le théorème 4 (§ III) et $H^1(k, G) = 1$.

(a) $\text{Ind}_k(D) = 2$ Si $\text{car}(k) \neq 2$, alors D/k est une algèbre de quaternions et il existe une extension quadratique séparable k'/k déployant k' . Si $\text{car}(k) = 2$, alors D/k est une algèbre notée $[a, b]$ (i.e. de présentation $X^2 - X = a$, $Y^2 = b$, $YXY^{-1} = X + 1$) et l'extension quadratique séparable $k' = k[x]/x^2 + x + a$ déploie D . Le groupe $G_{k'}$ est donc déployé et admet un sous-groupe parabolique de type $\{6\}$. Le lemme 14 (pa III.1) montre que le groupe G/k possède un sous-groupe simplement connexe H de type E_6 déployé par k'/k . Ainsi H est

une forme fortement interne de sa forme quasi-déployée et le théorème 4 assure que H est quasi-déployé. Par suite H et a fortiori G sont trois fois isotropes (i.e. contiennent un k -tore déployé de rang 3) et la liste des diagrammes de Dynkin possibles [T1] établit que G admet un sous-groupe parabolique de type $\{4, 6, 7\}$. Le lemme 5.b (§I.1) entraîne alors que l'application $H^1(k, G) \rightarrow H^1(k, G_{ad})$ est triviale et le théorème 6.b (§II.3) permet de conclure que $H^1(k, G) = 1$.

- (b) $\text{Ind}_k(D) = 4$ Puisque D/k est d'indice 4 et d'exposant 2, un théorème d'Albert (cf. [KMRT], th. 16.1 p. 233) montre que si $\text{car}(k) \neq 2$ (resp. $\text{car}(k) \neq 2$), alors D est une algèbre de biquaternions (resp. une algèbre $[a, b] \otimes_k [a', b']$). Par suite, il existe une extension quadratique séparable k'/k satisfaisant $\text{Ind}_{k'}(D) \leq 2$. Ainsi, le groupe $G_{k'}$ admet un sous-groupe parabolique de type $\{4, 6, 7\}$. Le même argument qu'au (a) montre que G a un sous-groupe H semi-simple simplement connexe de type $A_3 \times A_1$ qui est déployé par l'extension k'/k . Notons $H_1 \subset H$ le facteur de type A_3 . Le même argument (i.e. le lemme 14) montre que H_1 possède un sous-groupe H_2 de type A_2 , qui est déployé par k'/k . Alors l'algèbre de Tits de H_2 est déployée et le théorème 4 montre que H_2 est quasi-déployé, donc a fortiori isotrope. Par suite, le groupe G est isotrope et selon la table 8B p. 63 de [MPW], on sait que l'hypothèse $\text{Ind}_k(D) = 4$ force G à posséder un sous-groupe parabolique de type $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. De même qu'au (a), on montre que $H^1(k, G) = 1$. \square

IV.3. DISCUSSION SUR LE TYPE E_8

THÉORÈME 11. *On suppose $\text{car}(k) = 0$ et $cd_p(k) \leq 2$ pour $p = 2, 3, 5$. Pour toute extension cyclique L/k de degré 2, 3 ou 5, on a $H^1(L/k, E_8) = 1$.*

Il est intéressant d'isoler de la démonstration du théorème le lemme suivant.

LEMME 20. *On suppose $\text{car}(k) = 0$. On note H_0 le sous-groupe maximal déployé de E_8 de type $E_6 \times A_2$. Soit L/k une extension cyclique de degré 3. On suppose que $H^1(k, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0$. Alors*

$$H^1(L/k, E_8)_{an} \subset \text{Im}(H^1(k, H_0) \rightarrow H^1(k, E_8))$$

($H^1(L/k, E_8)_{an}$ désigne le sous-ensemble des classes de cohomologie anisotropes, i.e. les classes $[z]$ telles que le groupe tordu ${}_z E_8$ soit anisotrope).

Démonstration du lemme 20. On note σ un générateur de $\text{Gal}(L/k)$. Soit $z \in Z^1(k, E_8)_{an}$ et $G = {}_z E_8$ le groupe tordu. Soit P_L un L -parabolique de G_L de type E_7 et

$$C = P_L \cap \sigma(P_L) \cap \sigma^2(P_L) \subset G_L.$$

Le groupe C_L est défini sur k et suivant le lemme 6.32 de [PR], on sait que

$\dim_k(C) \geq 77$. Nous allons montrer que C_L est un sous-groupe de Levi d'un L -sous-groupe parabolique de G inclus dans P_L . En effet, soit Q_L un L -sous-groupe parabolique de G contenant C_L et contenu dans P_L que l'on suppose minimal pour cette propriété. Alors $C = Q_L \cap \sigma(Q_L) \cap \sigma^2(Q_L)$. Par minimalité de Q_L , on a $Q_L = R_u(Q_L) \cdot (Q_L \cap \sigma(Q_L))$, donc Q_L et $\sigma(Q_L)$ sont opposés ([BoT], prop. 4. 10); le groupe $M_L := Q_L \cap \sigma(Q_L)$ est donc un sous-groupe de Levi de Q_L contenant C_L . De plus, $C_L = M_L \cap \sigma^2(Q_L)$ est un L -parabolique de M_L . Si $C_L \neq M_L$, alors le radical unipotent $R_u(C)_L$ est un groupe déployé non trivial, donc $R_u(C)$ est aussi déployé, ce qui contredit l'anisotropie de G . Il résulte que C_L est un sous-groupe de Levi de Q_L . Le groupe C est donc réductif, et son diagramme de Dynkin absolu est un sous-diagramme de E_7 . Un examen facile des cas possibles sous les hypothèses $H^1(k, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0$ et $\dim_k(C) \geq 77$ entraîne alors que C est de type E_6 . Le groupe $H := Z_G(C) \cdot C$ est semi-simple de type $E_6 \times A_2$. Soit T/k un k -tore maximal de H . Alors le système de racines $\Phi(G_{k_s}, T_{k_s})$ de type E_8 admet le sous-système $\Phi(H_{k_s}, T_{k_s})$ de type $E_6 \times A_2$. Comme tous les sous-systèmes $E_6 \times A_2$ du système de racines E_8 sont conjugués par le groupe de Weyl, il résulte que le groupe H_{k_s} est conjugué (par un élément de $G(k_s)$) au sous-groupe standard H_{0,k_s} de type $E_6 \times A_2$. D'après le lemme 1 de [Se1, §III.12], ceci entraîne

$$[z] \in \text{Im}(H^1(k, N_{E_8}(H_0)) \rightarrow H^1(k, E_8)).$$

On a une injection $N_{E_8}(H_0)/H_0 \rightarrow \text{Aut}(H_0)/H_0 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, donc le groupe $N_{E_8}(H_0)/H_0$ est 2-primaire et l'hypothèse $H^1(k, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0$ entraîne $H^1(k, N_{E_8}(H_0)/H_0) = 1$. Il résulte que $[z] \in \text{Im}(H^1(k, H_0) \rightarrow H^1(k, E_8))$. \square

Démonstration du théorème 11. Le cas $p = 2$ a déjà été fait dans la section III.1.

$p = 3$. On veut montrer que $H^1(L/k, E_8) = 1$. Le cas $p = 2$ nous permet de supposer que $H^1(k, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0$. Soit $[z] \in H^1(L/k, E_8)$ et G le groupe tordu par z . Si G est isotrope, on sait que G est déployé et donc $[z] = 1$. Supposons donc G anisotrope. Le lemme 20 ci-dessus indique que toute classe de $H^1(L/k, E_8)_{an}$ provient du sous-groupe maximal déployé H_0 de type $E_6 \times A_2$ et la remarque 4 du § III.2 conclut que $H^1(L/k, E_8) = 1$.

$p = 5$. Les cas $p = 2$ et $p = 3$ nous permettent de supposer que k ne possède pas d'extension propre de degré $2^2 3^\beta$. Soit L/k une extension cyclique de degré 5. Soit $[z] \in H^1(L/k, E_8)$ et G le groupe tordu par z . On suppose G anisotrope et on veut montrer que G possède un k -tore maximal déployé par L/k , ce qui est suffisant pour voir que $[z] = 1$ d'après les théorèmes 1 et 7. Suivant un théorème de Chernousov ([Ch1], cf. [T5] th. 3) on sait que G admet un sous-groupe semi-simple H de type A_4 déployé par L/k . Le groupe H est isogène à $SL(D)$ pour une algèbre simple centrale cyclique D d'indice 5 déployée par L/k . Il existe donc un tore S/k de rang 4 de H déployé par L/k . Le groupe $DZ_G(S)$ est un groupe semi-simple simplement connexe anisotrope de rang ≤ 4 , qui est déployé par L/k . Si $DZ_G(S) = 1$, alors

$Z_G(S)$ est un k -tore maximal de G déployé par L/k . Si $DZ_G(S) \neq 1$, le type A_4 est la seule possibilité pour $DZ_G(S)$; le même raisonnement que précédemment fournit un tore S'/k de rang 4 déployé par L/k et le tore composé $T = S.S'$ est un k -tore maximal de G déployé par L/k . \square

Ce résultat met en évidence l'absence de "théorème d'annulation" pour le type E_8 (cf. th. 5, § III.2) qui ramènerait le problème à une question d'extensions cycliques.

V. Principe de Hasse

(a) Soit k un corps global et G/k un groupe semi-simple. Kunyavskii et Skorobogatov [KS] ont montré que si l'approximation faible vaut pour les k -tores maximaux de G sans effet (i.e. dont l'extension déployante a le même groupe de Galois que le tore générique de G), alors l'approximation faible vaut pour G . Cela s'applique aux groupes presque simples pour lesquels Klyachko [Kl] a démontré que l'approximation faible vaut pour les k -tores maximaux de G non affectés. Nous nous proposons de montrer ici comment l'étude de l'arithmétique des tores maximaux d'un groupe semi-simple simplement connexe quasi-déployé G permet d'établir le principe de Hasse pour les espaces principaux homogènes sous G .

THÉORÈME 12. *Soit k un corps de nombres et $(k_v)_{v \in \infty}$ l'ensemble des places archimédiennes de G . Soit G/k un groupe semi-simple quasi-déployé simplement connexe et absolument presque simple. Alors l'application $H^1(k, G) \rightarrow \prod_{v \in \infty} H^1(k_v, G)$ est bijective.*

Rappelons que le principe de Hasse est connu pour tout groupe simplement connexe d'après Kneser [Kn], Harder [H1] et Chernousov [Ch1]. La preuve du théorème 12 repose sur la proposition suivante.

PROPOSITION 4. *Soit G/k comme dans le théorème 12 et v une place de k .*

- (a) *Pour tout k_v -tore maximal T de G_{k_v} , le groupe fini $H^1(k_v, T)/R$ est 2-primaire.*
- (b) *Il existe une extension abélienne 2-primaire L/k et un L -tore maximal T/L de G_L tel que $H^1(L, T)/R$ est 2-primaire.*

Le (b) utilise un argument de Harder [H1], à savoir l'approximation faible sur la variété des tores maximaux de G . Sur un corps local non archimédien, on peut exprimer simplement le défaut $H^1(k, T)/R$.

LEMME 21. *Soient k un corps local non archimédien et T/k un tore d'extension déployante k_T de groupe de Galois $\Gamma(T) = \text{Gal}(k_T/k)$.*

- (a) $H^1(k, T)/R \xrightarrow{\sim} \text{Coker}(\bigoplus_{\sigma \in \Gamma(T)} H^{-1}((\sigma), \hat{T}^0) \rightarrow H^{-1}(\Gamma(T), \hat{T}^0)).$

(b) On suppose qu'il existe $\sigma \in \Gamma(T)$ satisfaisant $(\hat{T}^0)^{\Gamma(T)} = (\hat{T}^0)^{(\sigma)}$. Alors $H^1(k, T)/R = 0$.

Démonstration. (a) On considère une résolution flasque $1 \rightarrow T \rightarrow S \rightarrow E \rightarrow 1$, avec S flasque et E quasi-trivial. Suivant le §I.3, on a $H^1(k, T)/R \approx H^1(k, S)$ et d'après Tate, on a un isomorphisme de groupes finis $H^1(k, S) \approx H^1(k, \hat{S})^D$, où D désigne le dual de Pontryagin. On note $\Gamma = \Gamma(T)$. On voit facilement que la suite exacte de Γ -modules $0 \rightarrow \hat{E} \rightarrow \hat{S} \rightarrow \hat{T} \rightarrow 0$ induit un isomorphisme

$$H^1(k, \hat{S}) = H^1(\Gamma, \hat{S}) \xrightarrow{\sim} X^1_\omega(\Gamma, \hat{T}),$$

où $X^1_\omega(\Gamma, \hat{T}) = \text{Ker}[H^1(\Gamma, \hat{T}) \rightarrow \bigoplus_{\sigma \in \Gamma} H^1((\sigma), \hat{T})]$. Par dualité (cf. [CH], ch. XII, §6), on a

$$H^1(\Gamma, \hat{S})^D \approx \text{Coker}\left(\bigoplus_{\sigma \in \Gamma} H^{-1}((\sigma), \hat{T}^0) \rightarrow H^{-1}(\Gamma, \hat{T}^0)\right).$$

(b) Par définition, on a

$$H^{-1}(\Gamma, \hat{T}^0) = \text{Ker}\left(\hat{T}^0 \xrightarrow{\text{Cor}_\Gamma^1} (\hat{T}^0)^\Gamma\right) / I_\Gamma \hat{T}^0.$$

On suppose qu'il existe $\sigma \in \Gamma$ satisfaisant $(\hat{T}^0)^\Gamma = (\hat{T}^0)^{(\sigma)}$. Alors, comme \hat{T}^0 est sans torsion, on a $\text{Ker}\left(\hat{T}^0 \xrightarrow{\text{Cor}_\Gamma^1} (\hat{T}^0)^{(\sigma)}\right) = \text{Ker}\left(\hat{T}^0 \xrightarrow{\text{Cor}_\Gamma^1} (\hat{T}^0)^\Gamma\right)$ et ainsi $H^1(k, T)/R = 0$ suivant le (a).

Démonstration de la proposition 4. (a) Tout d'abord, observons que par un argument de transfert, on peut supposer que \mathcal{G} est un p -groupe pour $p \in S(G) \setminus \{2\}$. Le théorème de Steinberg permet ensuite de supposer que G est déployé ou de type 3D_4 . Pour les groupes classiques et de type G_2 , l'assertion résulte alors immédiatement du lemme 2 du §I.2. Le lemme 18 permet de traiter uniquement les cas d'un tore d'un groupe quasi-déployé de type 3D_4 , F_4 et E_8 . Pour ces trois cas, le critère (b) du lemme précédent permet de conclure que $H^1(k_v, T)/R$ est 2-primaire.

(b) On note Γ le groupe de Galois de l'extension déployant le tore générique de G et $\Gamma^{(p)}$ un p -groupe de Sylow de Γ de G pour tout premier $p \in S(G) \setminus \{2\}$. On fixe un tel p et une place v de k au dessus de p . D'après Demuskin [D], si $[k_v : \mathbb{Q}_p]$ est assez grand, on sait que k_v possède une extension galoisienne de groupe $\Gamma^{(p)}$. Par approximation faible, il existe donc une extension L/k abélienne 2-primaire, des places w_p de L et des extensions galoisiennes L'_{w_p}/L_{w_p} de groupe de Galois $\Gamma^{(p)}$ ($p \in S(G)$). Comme le groupe $G_{L_{w_p}}$ est quasi-déployé, le lemme 4 montre l'existence d'un L_{w_p} -tore T_p de $G_{L_{w_p}}$ dont le groupe de Galois associé est isomorphe à $\Gamma^{(p)}$. Or, suivant un théorème de Chevalley [C1] (cf. [SGA3, exp. XIV]), la variété des tores de G_L est rationnelle, donc satisfait à l'approximation faible. Ainsi, il existe un L -tore T de G_L tel que $T_{L_{w_p}} \approx T_p$. En particulier, le groupe de Galois associé à T/L est

Γ . On choisit une résolution flasque $1 \rightarrow T \rightarrow S \rightarrow E \rightarrow 1$ de T . D'après le *a*), on a $H^1(k, S)\{l\} = H^1(k, S)\{l\}$ pour tout premier $l \neq 2$. Or d'après Tate (cf. [PR] §6.3), le groupe fini $S(G)$ -primaire $X^1(k, S)$ est isomorphe au dual de Pontryagin du noyau du morphisme

$$H^2(\Gamma, \hat{S}) \rightarrow \prod_w H^2(\Gamma_w, \hat{S}),$$

où Γ_w désigne le groupe de décomposition en w de l'extension L_T/L associé à T . On conclut en observant que ce groupe est 2-primaire par construction, puisque les groupes de Sylow de Γ sont représentés par des groupes de décomposition. \square

Démonstration du théorème 12. Soit G/k un groupe quasi-déployé comme dans l'énoncé. Tout d'abord, rappelons que la surjectivité de $H^1(k, G) \rightarrow \prod_{v \in \infty} H^1(k_v, G)$ résulte d'une démonstration uniforme de Kneser–Harder (cf. [H1] lemme 1.12). De plus, Chernousov a récemment donné une preuve uniforme de l'injectivité de l'application $H^1(k(\sqrt{-1})/k, G) \rightarrow \prod_{v \in \infty} H^1(k_v, G)$ [Ch3]. Par suite, on peut supposer que k est un corps imaginaire pur et il nous faut montrer $H^1(k, G) = 1$.

1er cas: les groupes déployés ou quasi-déployés de type 3D_4 . On procède par induction sur les types en étendant l'assertion $H^1(k, G) = 1$ à toutes les extensions finies de k . Soit $\gamma = [z] \in H^1(k, G)$. Soit T un k -tore maximal de ${}_z G$. Le théorème de Steinberg donne un plongement $\rho : T \hookrightarrow G$ tel que $\gamma = \rho^*(\beta) \in \text{Im}(H^1(k, T) \rightarrow H^1(k, G))$. Le groupe $H^1(k, T)/R$ est un 2-groupe d'après la proposition 4 et la théorie du corps de classes assure l'existence d'une extension abélienne 2-primaire k'/k telle que la restriction $H^1(k, T)/R \rightarrow H^1(k', T)/R$ est nulle. La proposition 2.b du §II.2 et le lemme 8 du §I.4 indiquent que $\gamma' = \gamma_{k'} = 1 \in H^1(k', G)$. Mais le corollaire 2 (*a* et *b*, §III.1) implique $H^1(k'/k, G) = 1$, donc $\gamma = 1$.

2nd cas: le cas général. Avec la même induction sur les types, on remarque qu'il existe une extension quadratique L/k telle que G/L soit déployé ou quasi-déployé de type 3D_4 . Le corollaire 2 montre immédiatement le théorème. \square

(b) *Corps dont l'extension abélienne maximale est de dimension cohomologique 1.* Le corps $k = \mathbb{C}((t))(u)$ ressemble aux corps p -adiques du point de vue de la cohomologie galoisienne car le corps $k' = \mathbb{C}((t^{-\infty}))(u)$ satisfait $cd(k') \leq 1$ et le groupe de Galois $\text{Gal}(k'/k)$ est pro-cyclique. En particulier, sur un tel corps, toutes les algèbres simples centrales sont cycliques.

THÉORÈME 13. *Soit k un corps parfait. On suppose qu'il existe une extension galoisienne k'/k de groupe de Galois (pro)-cyclique satisfaisant $cd(k') \leq 1$.*

- (a) *Alors pour tout groupe semi-simple simplement connexe G/k sans facteurs de type E_8 , on a $H^1(k, G) = 1$*
- (b) *Si $\text{car}(k) = 0$, alors $H^1(k, E_8) = 1$.*

En particulier, pour le corps $\mathbb{C}((t))(u)$, la conjecture II vaut; cela répond à une question de Yves Laszlo.

Démonstration. Remarquons que la condition sur k entraîne $cd(k) \leq 2$. Pour les groupes classiques, de type G_2 et F_4 , cela est un cas particulier de [BP]. On peut évidemment supposer que G/k est absolument presque k -simple de type X . Les cas de $X = E_6, E_7$ sont réglés par les théorèmes 9 et 10 du IV.3. On discute les cas de D_4 tripartites et E_8 .

Cas D_4 . Si $\text{car}(k) \neq 2$, le théorème 8 s'applique. Si $\text{car}(k) = 2$, l'algèbre d'Allen de G est déployée, et le théorème 4 montre que $H^1(k, G) = 1$.

Cas E_8 . L'hypothèse $cd(k) \leq 1$ jointe au théorème de Steinberg implique que toute k -forme de E_8 est déployée par une extension cyclique de degré $2^2 3^{\beta} 5^{\gamma}$. Le théorème 11 implique $H^1(k, G) = 1$. \square

Remerciements

Cet article a été écrit lors d'un séjour à l'Université de Cambridge pendant le semestre "Arithmétique et Géométrie" organisé à l'institut Newton. Je tiens à remercier l'ensemble du département de Mathématiques pour son accueil et plus spécialement Ján Nekovář.

Les remarques de Volodia Chernousov et de Jean-Louis Colliot-Thélène m'ont permis d'éclaircir quelques points obscurs d'une version préliminaire de cet article. Je les remercie chaleureusement tous les deux.

Bibliographie

- [A] Adams, J. F.: *Lectures on Exceptional Lie Groups*, Chicago Lectures in Mathematics, 1996.
- [B] Bayer, E. and Parimal, R.: Galois cohomology of the classical groups over fields of cohomological dimension ≤ 2 , *Invent Math.* **122** (1995), 195–229.
- [BK] Bloch, S. and Kato, K.: p-adic étale cohomology, *Pub. Math. IHES* **66** (1986), 107–152.
- [BoS] Borel, A. and Springer, T. A.: Rationality properties of linear algebraic groups II, *Tôhoku Math. J.* **20** (19??), 443–497.
- [BoT] Borel, A. and Tits, J.: Groupes réductifs, *Pub. Math. IHES* **27** (1965), 55–152.
- [BLR] Bosch, S., Lütkebohmert, W. and Raynaud, M.: *Néron Models*, *Ergeb. Math. Grenzgeb.* **21** Springer, Berlin, 1990.
- [Bou] Bourbaki, N.: *Groupes et algèbres de Lie*, Ch. IV, V and VI, Masson, 1981.

- [BrT1] Bruhat, F. and Tits, J.: Groupes réductifs sur un corps local II, *Publ. Math. IHES* **60** (1984).
- [BrT2] Bruhat, F. and Tits, J.: Groupes algébriques sur un corps local III. Compléments et application à la cohomologie galoisienne, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo* **34** (1987), 671–698.
- [CH] Cartan, H. and Eilenberg, S.: *Homological Algebra*, Princeton Univ. Press, 1956.
- [C1] Chevalley, C.: On algebraic group varieties, *J. Math. Soc. Japan* **6** (1954), 303–324.
- [C2] Chevalley, C.: Sur certains groupes simples, *Tohoku Math. J.* **7** (1955), 14–66.
- [Ch1] Chernousov, V. I.: The Hasse principle for groups of type E_8 , *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* **306** (1989), 1059–1063 (in Russian), and *Math. USSR-Izv.* **34** (1990), 409–423 (in English).
- [Ch2] Chernousov, V.: Remark on the Serre mod-5 invariant for groups of type E_8 . *Math. Zametki* **56**, No. 1 (1994), 116–121; English translation: *Math. Notes* **56**, (1) (1994), 730–733.
- [Ch3] Chernousov, V.: An alternative proof of Scheiderer’s theorem on Hasse principle for principal homogeneous spaces, *Documenta Math.* **3** (1998), 135–148.
- [Ch4] Chernousov, V., Letter, 5 December 1998.
- [ChM] Chernousov, V. and Merkurjev, A. S.: R -equivalence and special unitary groups, *J. Algebra* **209** (1998), 175–198.
- [CTS1] Colliot-Thélène, J.-L. and Sansuc, J.-J.: La R -équivalence sur les tores, *Ann. Sci. ENS* **10** (1977), 175–230.
- [CTS2] Colliot-Thélène, J.-L. and Sansuc, J.-J.: Principal homogeneous spaces under flasque tori: applications, *J. Algebra* **106** (1987), 148–205.
- [EKL]V] Esnault, H., Kahn, B., Levine, M. and Viehweg, E.: The Arason invariant and mod 2 algebraic cycles, *J. Amer. Math. Soc.* **11**, (1) (1998), 73–118.
- [ELTW] Elman, R., Lam, T. Y., Tignol, J.-P. and Wadsworth, A.: Witt ring and Brauer groups under multiquadratic extensions, *Amer. J. Math.* **105** (1983), 1119–1170.
- [Ga1] Garibaldi, S.: Trialitarian groups and Hasse principle, *Manuscripta Math.* **98** (1999), 97–114.
- [Ga2] Garibaldi, S.: Isotropic trialitarian algebraic groups, *J. Algebra* **210** (1998), 385–418.
- [Gi1] Gille, P.: La R -équivalence sur les groupes réductifs définis sur un corps global, *Publ. Math. IHES* **86** (1998), 199–235.
- [Gi2] Gille, P.: Invariants cohomologiques de Rost en caractéristique positive, *K-Theory* **21** (1) (2000), 57–100.
- [GD] Grothendieck, A. and Dieudonné, J.: Eléments de géométrie algébrique IV, *Publ. Math. IHES* **20** (1964), **24** (1965), **32** (1967).
- [H1] Harder, G.: Über die Galoiskohomologie halbeinfacher Matrizen Gruppen I, *Math. Zeit.* **90** (1965), 404–428; II *Math. Zeit.* **92** (1966), 396–415; III *J. Reine Angew. Math.* **274/5** (1975), 125–138.
- [H2] Harder, G.: Halbeinfach Gruppenschemata über Dedekindringen, *Invent. Math.* **4** (1967), 165–191.
- [H3] Harder, G.: Halbeinfache Gruppenschemata über vollständigen Kurven, *Invent. Math.* **6** (1968), 107–149.
- [I] Izhboldin, O.: On the cohomology groups of the field of rational functions, *Coll. Math. St.-Petersburg, Ser. 2, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. (2)* 1974, *Amer. Math. Soc.*, Providence, 1996, pp. 21–44.
- [K] Kato, K.: Galois cohomology of complete discrete valuation fields, dans *Lecture Notes in Math.* **967** Springer, New York, 1982, pp. 215–238.

- [K1] Klyackho, A. A.: Tori without affect in semisimple algebraic groups, *Arithmetic and Geometry of Manifolds*, Interuniv. Collect. Sci. Works, Kujbyshev (1989), 67–78.
- [Kn] Kneser, M.: Lectures on Galois cohomology of classical groups, *Lectures on Math.* 47, Bombay, 1969.
- [Ko] Kottwitz, R.: Rational conjugacy classes in reductive groups, *Duke Math. J.* **49** (1982), 785–807.
- [KS] Kunyavskii, B. E. and Skorobogatov, A. N.: Weak approximation in algebraic groups and homogeneous spaces, *Contempo. Math.* **131** (3) (1992), 447–451.
- [KLST] Knus, M.-A., Lam, T.-Y., Schapiro, D. B. and Tignol, J.-P.: Discriminants of involutions on biquaternion algebras, dans *Proc. Sympos. Pure Math O*, 58, Amer. Math. Soc., Providence, 1995, pp. 279–304.
- [KMRT] Knus, M.-A., Merkurjev, A.-S., Rost, M. and Tignol, J.-P.: The Book of Involutions, *AMS* **44** 1998.
- [M1] Merkurjev, A.-S.: Certain \mathcal{K} -cohomology groups of Severi–Brauer varieties, *Proc. Sympos. Pure Math O*, 58, Amer. Math. Soc., Providence, 1995, pp. 319–331.
- [M2] Merkurjev, A.-S.: Maximal indices of Tits Algebras, *Doc. Math. J. DMV* **1** (1996), 215–228.
- [MPW] Merkurjev, A. S., Panin, I. A. and Wadsworth, A.: Index reduction formulas for twisted flag varieties, I, *K-Theory* **10** (6) (1996), 517–596; II, *K-Theory* **12** (2) (1998), 108–196.
- [MS] Merkurjev, A.-S. and Suslin, A.-A.: \mathcal{K} -cohomologie des variétés de Severi–Brauer et l’homomorphisme de norme résiduelle (in Russian), *Izv. Akad. Nauk SSSR* **46** (1982), 1011–1046; English translation: *Math. USSR Izv.* **21** (1983), 307–340.
- [Me] Mestre, J.-F.: Annulation par changement de variable d’éléments de ${}_2Br(k(x))$ ayant quatre pôles, *C.R. Acad. Sci. Paris* **319** (1994).
- [Mi] Milne, J. S.: *Étale Cohomology*, Princeton Univ. Press, 1980.
- [PR] Platonov, V.-P. and Rapinchuk, A.-S.: *Algebraic Groups and Number Theory* (English translation), Academic Press, New York, 1994.
- [RgRm] Raghunathan, M. S. and Ramanathan, A.: Principal bundles on the affine line, *Proc. Indian Acad. Sci.* **93** (1984), 137–144.
- [R1] Rost, M.: A mod 3-invariant for exceptional Jordan algebras, *C.R. Acad. Sci. Paris* **315** (1991), 823–827.
- [R2] Rost, M.: Cohomological Invariants, in preparation.
- [Sa] Sansuc, J.-J.: Groupe de Brauer et arithmétique des groups algébriques sur un corps de nombres, *J. Reine Angew. Math.* **327** (1981), 13–81.
- [Se1] Serre, J.-P.: *Cohomologie galoisienne*, 5^{ième} éd., Lectures Notes in Math. 5, Springer, New York, 1994.
- [Se2] Serre, J.-P.: Cohomologie galoisienne: Progrès et problèmes, *Séminaire Bourbaki*, 783 (1993–94); *Astérisque* **227** (1995).
- [SGA3] *Séminaire de Géométrie algébrique de l’IHES., 1963–1964, schémas en groupes, dirigé par M. Demazure et A. Grothendieck*, Lecture Notes in Math. 151–153, Springer, New York 1970.
- [St] Steinberg, R.: Regular elements of semisimple algebraic groups, *Publ. Math. IHES* **25** (1965), 281–312.
- [Su1] Suslin, A. A.: Algebraic K -theory and the norm-residue homomorphism, *J. Soviet. Math.* **30** (1985), 2556–2611.
- [Su2] Suslin, A. A.: K -theory and \mathcal{K} -cohomology of certain group varieties. *Adv. in Soviet. Math.*, 4, Amer. Math. Soc., Providence, 1991, pp. 53–74.
- [T1] Tits, J.: Classification of algebraic semisimple groups, *Proc. Sympos. Pure Math* (1966), 33–62.

- [T2] Tits, J.: Normalisateurs de tores I, *J. Algebra* **4** (1966), 96–116.
- [T3] Tits, J.: Représentations linéaires irréductibles d'un groupe réductif sur un corps quelconque, *J. Reine Angew Math.* **247** (1971), 196–220.
- [T4] Tits, J.: Strongly inner anisotropic forms of simple algebraic groups, *J. Algebra* **131** (1990), 648–677.
- [T5] Tits, J.: *Résumé des cours du Collège de France 1991–92*, Annuaire du Collège de France.
- [T6] Tits, J.: Sur les degrés des extensions de corps déployant les groupes algébriques simples, *C.R. Acad. Sci. Paris* **315** (1992), 1131–1138.
- [V] Voskresenskiĭ, V. E.: Algebraic groups and their birational invariants, *Trans. Math. Monogr.* 179, Amer. Math. Soc., Providence, 1998.