MÉMOIRES DE LA S. M. F.

FRANÇOIS MURAT

Compacité par compensation

Mémoires de la S. M. F., tome 60 (1979), p. 125-127
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1979__60__125_0>

Analyse non convexe [*1977. Pau*]
Bull. Soc. math. France,
Mémoire 60, 1979, p. 125-127.

COMPACITE PAR COMPENSATION

François MURAT[*]

Soient Ω un ouvert (borné ou non) de $\mathbb{R}^N$ et $A_i (i = 1,2 ,\ldots N)$ des matrices appartenant à $\mathcal{L}(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^{m'})$. Définissons Λ par :

$$\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{C}^m \mid \exists\, \xi \in \mathbb{R}^N , \ (\sum_{i=1}^{N} \xi_i A_i) \lambda = 0 , \ \xi \neq 0\}$$

Le résultat principal de cet exposé, qui présente des résultats obtenus en collaboration avec Luc Tartar, est le suivant :

THEOREME.

Si une matrice M *appartenant à* $\mathcal{L}(\mathbb{C}^m,\mathbb{C}^m)$ *vérifie*

$$\forall \lambda \in \Lambda \quad \mathrm{Re}(M\lambda,\lambda) \geqslant 0 \tag{1}$$

alors pour toute suite telle que :

$$\left\{\begin{array}{llll} u_n \rightharpoonup u_\infty & \textit{dans} & L^2(\Omega ; \mathbb{C}^m) & \textit{faible} \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{N} A_i \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \rightharpoonup \sum_{i=1}^{N} A_i \frac{\partial u_\infty}{\partial x_i} & \textit{dans} & L^2(\Omega ; \mathbb{C}^{m'}) & \textit{faible} \\ (M\, u_n,u_n) \rightharpoonup \mu_\infty & \textit{dans} & \mathcal{D}'(\Omega ; C) & \end{array}\right. \tag{2}$$

on a

$$\mathrm{Re}\ \mu_\infty \geqslant \mathrm{Re}(Mu_\infty,u_\infty) \quad \blacksquare \tag{3}$$

---

* Université P. et M. Curie (Paris VI) et CNRS ,
Laboratoire d'Analyse Numérique,
Tour 55-65, 5ème étage, 4 Place Jussieu,
75230 PARIS CEDEX 05.

Il s'agit là d'un résultat de semi-continuité inférieure faible de la forme bilinéaire $u \longrightarrow (Mu,u)$.

Ce théorème a une réciproque (Condition de Legendre-Hadamard) :

Si une matrice M est telle que pour toute suite vérifiant (2), on ait la propriété (3), alors la matrice M vérifie (1).

Du théorème on déduit comme cas particuliers les propriétés suivantes :

PROPOSITION 1.

Soit Ω *un ouvert (borné ou non) de* $\mathbb{R}^N$ *et* u_n *et* v_n *deux suites telles que :*

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u_\infty & \textit{dans } L^2(\Omega\ ;\ \mathbb{C}^N) \textit{ faible} \\ v_n \rightharpoonup v_\infty & \textit{dans } L^2(\Omega\ ;\ \mathbb{C}^N) \textit{ faible} \\ \operatorname{div} u_n \textit{ et } \operatorname{rot} v_n & \textit{bornés dans } L^2(\Omega\ ;\ \mathbb{C}) \textit{ et } L^2(\Omega\ ;\ \mathbb{C}^{N^2}) \end{cases}$$ (1)

alors les produits scalaires $(u_n,v_n) = \sum_{i=1}^{N} (u_n)_i\,(v_n)_i$ *vérifient :*

$$(u_n,v_n) \rightharpoonup (u_\infty,v_\infty) \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega\ ;\ \mathbb{C}) \qquad \blacksquare$$

PROPOSITION 2.

Soit Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^2$, *et* u_n *et* v_n *deux suites telles que :*

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u_\infty & \textit{dans } L^2(\Omega\ ;\ \mathbb{C}) \\ v_n \rightharpoonup v_\infty & \textit{dans } L^2(\Omega\ ;\ \mathbb{C}) \\ \dfrac{\partial u_n}{\partial x_1} \textit{ et } \dfrac{\partial v_n}{\partial x_2} & \textit{bornés dans } L^2(\Omega\ ;\ \mathbb{C}) \end{cases}$$

alors les produits $u_n v_n$ *vérifient :*

$$u_n v_n \rightharpoonup u_\infty v_\infty \quad \textit{dans } \mathcal{D}'(\Omega\ ;\ C)\ . \qquad \blacksquare$$

---

(1) si $\varphi \in (\mathcal{D}'(\Omega))^N$, on définit $\operatorname{rot} \varphi \in (\mathcal{D}'(\Omega))^{N^2}$ par :

$$(\operatorname{rot} \varphi)_{ij} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \qquad 1 \leqslant i,j \leqslant N$$

APPLICATION

La proposition 1 a d'importantes applications en théorie de l'homogénéisation (cf. par exemple [3]).

D'autre part ce type de résultats permet d'obtenir des théorèmes d'existence de solutions pour certains problèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaires. Ainsi, on déduit de la proposition 2 que si $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, où $\Omega = \,]a_1,b_1[\, \times \,]a_2,b_2[\, \subset R^2$, le système

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + u_1 + \left(\displaystyle\int_\Omega \varphi\, u_1 u_2\right) u_2 = f_1 \quad \text{dans } \Omega \\[2ex] -\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + u_2 - \left(\displaystyle\int_\Omega \varphi\, u_1 u_2\right) u_1 = f_2 \quad \text{dans } \Omega \\[2ex] \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0 \quad \text{si} \quad x_1 = a_1 \text{ ou } b_1 \;,\; a_2 < x_2 < b_2 \\[2ex] \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0 \quad \text{si} \quad x_2 = a_2 \text{ ou } b_2 \;,\; a_1 < x_1 < b_1 \end{cases}$$

a une solution unique telle que u_1 , $\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}$, u_2 , $\dfrac{\partial u_2}{\partial x_2}$ appartiennent à $L^2(\Omega)$.

Enfin, ce type de résultats permet de montrer que l'infimum de certaines fonctionnelles non convexes est atteint. On trouvera un exemple relatif à un problème d'élasticité non linéaire dans [1].

BIBLIOGRAPHIE.

[1] John M. BALL

Convexity Conditions and Existence Theorems in Non Linear Elasticity .
Archiv for Rational Mechanics and Analysis 63 , (4) , 337-403.

[2] François MURAT

Compacité par Compensation .
Publications du Laboratoire d'Analyse Numérique de l'Université Paris VI , 1976, n°14.
A paraître dans Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa (1978).

[3] Luc TARTAR

Cours Peccot au Collège de France, (1977), rédigé par F. MURAT.
A paraître.