

УДК 004.67

ДМИТРО ЛАНДЕ,
ОЛЬГА СУЛЕМА**ПОРІВНЯЛЬНА ОЦІНКА КРИТЕРІЇВ ЦЕНТРАЛЬНОСТІ В ІЄРАРХІЧНИХ МЕРЕЖАХ**

В даній статті викладено дослідження центральності в ієрархічних мережах. Наведено та проаналізовано деякі характеристики центральності графів. Сформульовано основні критерії центральності. Запропоновано багатокритеріальну оцінку вузлів графа. В рамках проведеного дослідження розроблено відповідне математичне та програмне забезпечення. Проведено експериментальне дослідження ефективності сформульованих критеріїв.

Ключові слова: центральність, ієрархічні мережі, характеристики центральності, критерії центральності, багатокритеріальна оптимізація.

Вступ. У багатьох прикладних галузях та сферах науки і техніки задачі аналізу топології мережі та дослідження особливостей її вузлів мають досить важливе значення. Зокрема, до таких галузей можна віднести інформаційну безпеку [1], організаційне управління, термінологічні онтології, генеалогічні дослідження тощо.

У різних задачах графи можуть відображати організаційну структуру певної компанії чи корпорації, генеалогічне дерево, мережу інформаційних потоків, схему повноважень доступу суб'єктів до об'єктів тощо. Останній приклад ілюструє зв'язок задачі аналізу графів та задачі безпеки, зокрема, інформаційної і кібернетичної безпеки. Саме тому задачі, пов'язані з аналізом графів мереж, є та залишатимуться актуальними ще на довгий період часу.

Постановка задачі. Метою дослідження, результати якого викладені у даній статті, є визначення та оцінювання критеріїв центральності для графів ієрархічних мереж.

Для досягнення даної мети необхідно вирішити наступні підзадачі:

- визначення характеристик центральності у графах;
- аналіз алгоритмів та підходів обчислення визначених характеристик центральності;
- розроблення власних критеріїв центральності відповідно до практичних задач;
- постановка та розв'язання задачі багатокритеріальної оптимізації з метою оцінювання різних критеріїв.

Критерії класифікації графів. У теорії графів існує досить велика кількість різних характеристик центральності. Кожна з них може розглядатись залежно від поставленої практичної задачі. Відповідно, можна виділити групи таких характеристик, які будуть давати найкращий аналітичний результат з точки зору задачі, що розглядається.

Авторами було розглянуто та проаналізовано характеристики центральності вузлів графа ієрархічної структури, з яких для подальшого дослідження було виділено наступні їх властивості (характеристики):

- центроїдність;
- центральність за ексцентриситетом;
- мінімальний середній шлях;
- максимальний степінь;
- мінімальна кількість рівнів.

Для обчислення характеристик вузлів графа необхідно обчислювати матрицю відстаней, для чого існує багато алгоритмів пошуку на графах, серед яких найвідоміші – алгоритм Дейкстри, Беллмана-Форда, Флойда-Уоршелла, Джонсона [2, 3].

Для подальшої роботи було обрано алгоритм Флойда-Уоршалла, оскільки він, по-перше, дозволяє ефективно працювати з незваженими графами, які саме і досліджуються у цій роботі, а по-друге, знаходить найкоротші шляхи між всіма вершинами, на виході даючи зведену матрицю відстаней.

Доцільно також зазначити, що матриця суміжності для ієрархічного графа має східчастий вигляд (див. рис. 1).

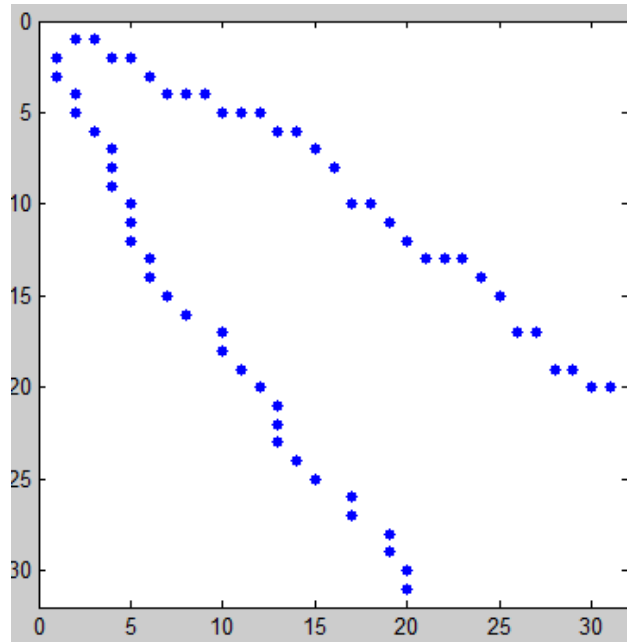


Рисунок 1 – Матриця суміжності ієрархічного графа

Першою характеристикою, яка потенційно може бути одним з необхідних критеріїв центральності вузла, є центроїдність [4]. За означенням, центроїд графа складається з множини центроїдних вершин. Вершина U називається центроїдною відносно до дерева T , якщо U має найменшу вагу. Для її обчислення було розроблено алгоритм визначення ваги вершини шляхом знаходження всіх піддерев заданого дерева, псевдокод якого викладений у лістингу 1. За означенням, вагою вершини U називається найбільша кількість ребер по всім гілкам до даної вершини, де гілкою до вершини U є максимальне піддерево вихідного дерева T , що містить U як висячу вершину.

Лістинг 1 – Пошук ваги вершини

```

 $N$  ← розмірність матриці суміжності  $g$ 
 $vw$  ←  $\emptyset$                                 ► ваги вершин
 $q$  ← 1
for  $i$  from 1 to  $N$  do
     $w$  ←  $\emptyset$                                 ► ваги піддерев
     $k$  ← сума по всім елементам  $i$ -го рядка у матриці суміжності  $g$ 
    if  $k \neq 1$  then
         $vw(1, q)$  ←  $i$ 

```

Продовження лістингу 1

```

for  $j$  from 1 to  $N$  do
    if  $g(i, j) = 1$  then
         $p \leftarrow$  вага піддерева
         $w \leftarrow w \cup \{p\}$ 
    end if
end for

 $vw(2, q) \leftarrow \max(w)$ 

 $q \leftarrow q + 1$ 
end if
end for

```

Другим розглянутим критерієм центральності є характеристика центральності за ексцентриситетом. Для її обчислення визначаються ексцентриситети всіх вершин дерева. За означенням, ексцентриситет – це максимальна з відстаней від даної вершини до всіх інших вершин [4]. Для обчислення ексцентриситетів застосовується матриця відстаней. За означенням, центральною вершиною графа G є така вершина U , для якої виконується вираз $e(U) = r(G)$, тобто ексцентриситет даної вершини дорівнює радіусу графа, що розглядається. Центр графа складається з множини центральних вершин, яких може бути одна чи дві.

Третім розглянутим критерієм центральності є значення мінімального середнього шляху [5]. Для обчислення даної характеристики також застосовується матриця відстаней, знаходиться середній шлях для всіх вершин заданого графа шляхом підрахунку середнього арифметичного для кожного рядка матриці відстаней. Ознакою центральності у цьому випадку є найменша середня відстань від деякої вершини U до всіх інших вершин графа, тобто мінімум з множини усіх середніх шляхів.

Четвертим критерієм центральності, що розглядався, є максимальний степінь вершини. Для його обчислення у матриці суміжності підраховується кількість одиниць у рядку, що відповідає заданій вершині. Остаточоно обирається вершина, що відповідає максимуму у множині степенів всіх вершин графу.

П'ятим із розглянутих критеріїв центральності є кількість рівнів у графі. Дана характеристика обчислюється як максимальний із шляхів від кореня графа до всіх висячих вершин. Для його обчислення для кожного рядка матриці відстаней визначається максимальна відстань, а серед множини отриманих значень – мінімальне з них. Таким чином, вершина, для якої максимальна відстань є мінімальною, є найоптимальнішою вершиною за цим критерієм.

Аналіз критеріїв. Другий та п'ятий критерії можуть бути розглянуті як один критерій, оскільки їх математичний зміст є еквівалентним. Сформулюємо це як теорему.

Теорема: критерій центральності за ексцентриситетом та критерій мінімальної кількості рівнів є еквівалентними.

Покажемо це. Критерій центральності за ексцентриситетом передбачає обчислення ексцентриситетів кожної вершини графа, тобто максимальної відстані від вершини до всіх інших вершин графа, що аналізується. Аналогічно, кількість рівнів – це максимальний шлях з вершини, що аналізується, до всіх вершин. Тобто, розрахунково дані критерії є математично еквівалентними. Потрібно зазначити, що критерій центральності завжди показуватиме вершини, які дають найменшу кількість рівнів, що впливає з визначення центру, в той час як застосування критерію кількості рівнів залежить від практичної задачі,

що розглядається. Залежно від цього даний критерій може бути пристосований до знаходження вершин, що даватимуть найменшу кількість рівнів або найбільшу.

Таким чином, оскільки критерій центральності за ексцентриситетом та критерій мінімальної кількості рівнів є еквівалентними, але критерій мінімальної кількості рівнів може бути пристосований для ширшого кола задач, доцільніше обрати критерієм характеристику кількості рівнів.

Також слід зазначити, що критерій центроїдності може бути застосований лише для ієрархічного графа, оскільки в такому графі немає циклів. Тобто для дослідження графів квазіієрархічної структури даний критерій не призначений. Але результат проведення 117 експериментів показав, що значення критеріїв центроїдності та мінімального середнього шляху завжди співпадають.

Таким чином, можна зробити припущення про те, що дані два критерії в загальному випадку можуть вважатись еквівалентними, а отже критерієм центроїдності можна знехтувати.

Таким чином, із розглянутих критеріїв центральності у полі зору авторів залишилося три основні:

- критерій мінімального середнього шляху;
- критерій максимального степеня;
- критерій мінімальної кількості рівнів.

Наведемо результати експериментальних досліджень ієрархічних графів невеликої розмірності, що підтверджують нерівнозначність даних критеріїв.

Експерименти проводились над групою ієрархічних графів, яка складається з 13 псевдовипадкових графів різної розмірності у діапазоні 15-33. Для кожного графу були застосовані критерії, в результаті чого була отримана множина оптимальних вершин за кожним з критеріїв. Результати наведені у табл. 1.

Таблиця 1 – Результати обчислення критеріїв для ієрархічних графів

Назва графа	Кількість вершин	Радіус	Діаметр	Критерії		
				Мінімальний середній шлях	Максимальний ступінь вершини	Мінімальна кількість рівнів
g1	22	5	10	7, 10	2, 13, 15	4
g2	25	6	11	10	16, 18	8, 9
g3	25	6	11	6	16	1, 2
g4	18	5	10	3, 6	11	1
g5	15	3	6	5	8	3
g6	15	3	6	5	7	3
g7	15	3	6	6	8	4
g8	21	5	10	5	12	3
g9	23	5	9	4	6, 12	2, 3
g10	23	6	11	8	10, 14, 15	6, 7
g11	33	7	13	5	11	2, 4
g12	30	6	11	4	6, 17	1, 2
g13	29	5	10	7	12	6

На основі аналізу отриманої таблиці можна зробити висновок, що запропоновані критерії дійсно є рівноправними: у вибірці з 13 графів для кожного з них результати критеріїв (оптимальна за даним критерієм вершина) є різними, а отже дані критерії не є еквівалентними одне одному.

Отже, у загальному випадку критерії центральності дають різні результати для графу, що аналізується. Одночасно вони є рівнозначними з точки зору пріоритетності, тому при отриманні декількох різних оптимальних вершин за даними критеріями неможна виділити один критерій, просто відкинувши інші. Тому для отримання єдиного розв'язку поставленої практичної задачі можуть бути методи багатокритеріальної оцінки, зокрема, метод пошуку оптимуму за Парето [6].

Підхід Парето полягає у наступному. Визначаються критерії, за якими відбуватиметься оцінка вершин графа. Складається таблиця, рядки якої – це відповідні критерії, а стовпці – номери вершин. Комірki даної таблиці заповнюються відповідними значеннями критеріїв для кожної вершини графа, що аналізується. Демонстраційний приклад такої таблиці наведений у табл. 2.

Таблиця 2 – Таблиця Парето

Вершина	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
AveragePath	2,04	2,29	2,39	1,96	1,83	1,72	1,41	1,14	1,41	1,49	1,49
VertexDegree	2	2	3	3	2	2	2	1	1	1	1
LevelsNumber	0,25	0,25	0,2	0,17	0,17	0,2	0,17	0,14	0,14	0,14	0,14

При порівнянні вершин за критеріями замість принципу «краще» використовується принцип «не гірше» за всіма критеріями. Формально, даний процес можна описати наступним чином.

Якщо i -та вершина гірша за j -ту вершину хоча б за одним критерієм при однакових інших, то дана i -та вершина викреслюється. Але у випадку, якщо хоча б за одним критерієм i -та вершина гірша за j -ту при тому, що за одним чи декількома іншими вона краща, то залишаються обидві вершини. В результаті, множина таких невикреслених вершин й складатиме множину Парето.

Як правило, отримана множина Парето складається з двох чи більше вершин. Для остаточного розв'язку підзадачі вибору кореня ієрархії необхідно визначити вершину, найоптимальнішу для практичної задачі, що розв'язується. Для цього можуть бути застосовані інші, орієнтовані на дану прикладну задачу методи.

Зокрема, можуть бути застосовані «наївні» методи багатокритеріальної оптимізації, одним з яких є об'єднання всіх критеріїв в одну функцію пристосованості *Fitness* за допомоги лінійного співвідношення (1).

$$Fitness(i) = \alpha \cdot LevelsNumber(i) + \beta \cdot AveragePath(i) + \gamma \cdot VertexDegree(i), \quad (1)$$

де i – вершина із множини Парето,

$\alpha, \beta, \gamma \in [0;1]$ – ваги критеріїв, тобто коефіцієнти оцінки, що обираються відповідно до прикладної задачі,

LevelsNumber, AveragePath, VertexDegree – відповідні критерії, що оцінюються.

Таким чином, на заключному етапі оптимізації необхідно визначити якість остаточного розв'язку у вигляді зваженої суми, що характеризує задовільність критеріїв відповідно до практичної задачі, що розв'язується. Для цього було розглянуто три групи ваг критеріїв – для кожного з критеріїв.

Для отримання результату за критерієм мінімального середнього шляху були обрані коефіцієнти $\alpha = 1, \beta = 0,05, \gamma = 0,01$. Результати показані у відповідному стовпці табл. 3. Для критерію максимального степеня вершини були підібрані коефіцієнти $\alpha = 0,06, \beta = 1, \gamma = 0,02$. Оптимальний результат за критерієм мінімальної кількості рівнів був отриманий при коефіцієнтах $\alpha = 0,01, \beta = 0,01, \gamma = 1$.

Таблиця 3 – Оптимізація за функцією пристосованості

Назва графа	Кількість вершин	Оптимальна вершина за критерієм		
		Мінімальний середній шлях	Максимальний степінь вершини	Мінімальна кількість рівнів
g1	22	7	2	4
g2	25	10	18	9
g3	25	6	16	1
g4	18	3	11	1
g4	15	5	8	3
g6	15	5	7	3
g7	15	6	8	4
g8	21	5	12	3
g9	23	4	6	2
g10	23	8	10	7
g11	33	5	11	2
g12	30	4	6	2
g13	29	7	12	6

Висновки. В результаті проведеного дослідження було визначено характеристики центральності у ієрархічному графі та проведено аналіз алгоритмів і підходів до обчислення цих характеристик центральності. Було розглянуто деякі з критеріїв центральності вершин та проаналізовано окремі графи, на прикладах показано, що не всі критерії є еквівалентними у випадку ієрархічних графів. Разом з цим, математично доведено, що для ієрархічних графів критерій центральності за ексцентриситетом і критерій мінімальної кількості рівнів, а також критерій центроїдності і критерій мінімального середнього шляху можна вважати в загальному випадку еквівалентними. Були визначені методи багатокритеріального оцінювання центральності з метою отримання оптимального результату, що відповідає прикладній задачі.

Практичним результатом проведеного дослідження є реалізація математичного та програмного забезпечення для дослідження графів, зокрема, визначення параметрів центральності вузлів, візуалізації ієрархічних графів у середовищі MATLAB.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Гайворонський М. В. Безпека інформаційно-комунікаційних систем / М. В. Гайворонський, О. М. Новіков. – К. : Видавнича група BHV, 2009. – 608 с.
2. Bellman R. On a Routing Problem / R. Bellman // Quarterly of Applied Mathematics. – 1958. – Vol. 16, No. 1. – P. 87-90.
3. Левитин А. В. Алгоритмы : введение в разработку и анализ / А. В. Левитин; пер. с англ. С. Г. Тригуб, И. В. Красикова. – М. : Издательский дом «Вильямс», 2006. – С. 345-353.
4. Харари Ф. Теория графов / Ф. Харари; пер. с англ. и предисл. В. П. Козырева; под ред. Г. П. Гаврилова; изд. 2-е. – М. : Едиториал УРСС, 2003. – С. 51-53.
5. Зябиров Э. В. Методы определения кратчайшего пути между вершинами графа / Э. В. Зябиров, С. П. Токарев, Л. И. Федосеева // Успехи современного естествознания. – 2011. – № 7 – С. 113-114.
6. Luke S. Essentials of Metaheuristics. A Set of Undergraduate Lecture Notes. Zeroth / S. Luke; пер. с англ. Ю. Цой // Edition. Online Version 0.5. – 2009. – P. 1-4.

Стаття надійшла до редакції 26.10.2015.

REFERENCE

1. Haivoronskyi, M. V., Novikov, O. M. (2009), *Bezpeka informatsiino-komunikatsiinykh system* [Safety information and communication systems], BHV Publ., Kyiv, 608 p.
2. Bellman, R. (1958), *On a Routing Problem*, Quarterly of Applied Mathematics, Vol. 16, No. 1., pp. 87-90.
3. Levitin, A. V. (2006), *Algoritmy : vvedenie v razrabotku i analiz* [Introduction to the design & analysis of algorithms], Viliams Publ., Moskow, pp. 345-353.
4. Kharari, F. (2003), *Teoriia grafov* [Graph theory], Editorial URSS Publ., Moskow, pp. 51-53.
5. Ziabirov, E. V., Tokarev, S. P., Fedoseeva, L. I. (2011), *Metody opredeleniia kratchaishego puti mezhdu verшинami grafa* [Methods for determining the shortest path between the vertices of the graph], Uspekhi sovremennogo estestvoznaniia, No. 7, pp. 113-114.
6. Luke, S. (2009), *Essentials of Metaheuristics. A Set of Undergraduate Lecture Notes. Zeroth*, Edition. Online Version 0.5, pp. 1-4.

ДМИТРИЙ ЛАНДЕ,
ОЛЬГА СУЛЕМА

СРАВНИТЕЛЬНАЯ ОЦЕНКА КРИТЕРИЕВ ЦЕНТРАЛЬНОСТИ В ИЕРАРХИЧЕСКИХ СЕТЯХ

В данной статье изложено исследование центральности в иерархических сетях. Приведено и проанализировано некоторые характеристики центральности графов. Сформулированы основные критерии центральности. Предложено многокритериальную оценку узлов графа. В рамках проведенного исследования разработано соответствующее математическое и программное обеспечение. Проведено экспериментальное исследование эффективности определенных критериев.

Ключевые слова: центральность, иерархические сети, характеристики центральности, критерии центральности, многокритериальная оптимизация.

DMYTRO LANDE,
OLGA SULEMA

COMPARATIVE EVALUATION OF CENTRALITY CRITERION IN A HIERARCHICAL NETWORK

The research of centrality in hierarchical networks is presented in the paper. The characteristics of graph centrality are analyzed and discussed. The basic centrality criteria are defined. The multi-objective assessment of graph nodes is proposed. The appropriate mathematical support and software have been developed within the framework of conducted research. The experimental research of the formulated criteria efficiency has been carried out as well.

Keywords: centrality, hierarchical networks, characteristics of centrality, centrality criteria, multi-objective assessment.

Дмитро Володимирович Ланде, доктор технічних наук, старший науковий співробітник, завідувач відділом спеціалізованих засобів моделювання, Інститут проблем реєстрації інформації Національної академії наук України, Київ, Україна.

E-mail: dwlande@gmail.com.

Ольга Костянтинівна Сулема, магістрант, Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна.

E-mail: olga.sulema@hotmail.com.

Дмитрий Владимирович Ланде, доктор технических наук, старший научный сотрудник, заведующий отделом специализированных средств моделирования, Институт проблем регистрации информации Национальной академии наук Украины, Киев, Украина.

Ольга Константиновна Сулема, магистрант, Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт», Киев, Украина.

Dmytro Lande, doctor of technical science, senior researcher, head of the specialized modeling tools department, Institute of problems of information registration of National academy of science of Ukraine, Kyiv, Ukraine.

Olga Sulema, master program student, National technical university of Ukraine «Kyiv polytechnic institute», Kyiv, Ukraine.