

JEAN CEA

**Conception optimale ou identification de formes,
calcul rapide de la dérivée directionnelle
de la fonction coût**

M2AN. Mathematical modelling and numerical analysis - Modélisation mathématique et analyse numérique, tome 20, n° 3 (1986), p. 371-402

http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1986__20_3_371_0

© AFCET, 1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « M2AN. Mathematical modelling and numerical analysis - Modélisation mathématique et analyse numérique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>



CONCEPTION OPTIMALE OU IDENTIFICATION DE FORMES CALCUL RAPIDE DE LA DÉRIVÉE DIRECTIONNELLE DE LA FONCTION COÛT (*)

Jean CEA (1)

1. Introduction

2. Le cas discret

- 2.1 Le problème de COF discrétisé
- 2.2 Le calcul du gradient de la fonction coût
- 2.3 Un exemple assez général
- 2.4 Écriture explicite d'une matrice $A(x)$

3. Le cas continu

- 3.1 Variation de Ω
- 3.2 Conception optimale et champ de vitesses
- 3.3 Les 2 dérivées classiques
- 3.4 Conception optimale et dérivation rapide
- 3.5 Exemple 1
- 3.6 Exemple 2
- 3.7 Exemple 3

4. Dérivation par rapport aux « vrais » paramètres dans le cas continu

- 4.1 Généralités
- 4.2 La frontière Γ est définie par un graphe en coordonnées polaires
- 4.3 La frontière Γ est définie par un graphe en coordonnées cartésiennes
- 4.4 La frontière Γ est définie à l'aide d'un nombre fini de paramètres
- 4.5 La frontière Γ est définie par une SPLINE

(*) Reçu en juin 1985

(1) Université de Nice, Parc Valrose, 06034 Nice Cedex.

1. INTRODUCTION

Le problème de la conception optimale d'une forme ou de l'identification d'une forme existante peut être symbolisé de la manière suivante :

$$\Omega \rightarrow y_\Omega \rightarrow j(\Omega) = J(\Omega, y_\Omega)$$

$$\text{Inf}_\Omega j(\Omega)$$

où :

- Ω est un ouvert de \mathbb{R}^n de frontière Γ ;
- y_Ω décrit l'état d'un système : en général, y_Ω est l'unique solution d'une équation aux dérivées partielles posée dans Ω : l'équation d'état ; mais dans certains cas y_Ω est un ensemble de valeurs propres associées à un opérateur d'équations aux dérivées partielles défini dans Ω ;
- la fonction coût $J(\Omega, y)$ est de nature différente selon qu'il s'agisse de rechercher une forme optimale ou d'identifier une forme existante ;
- le problème de minimisation $\text{Inf} j(\Omega)$ est posé dans une classe donnée d'ouverts.

Dans de nombreux cas pratiques, Ω est défini à partir d'un « vrai » paramètre u si bien que le schéma devient :

$$u \rightarrow y_u = y_{\Omega_u} \rightarrow \hat{j}(u) = j(\Omega_u) = J(\Omega_u, y_{\Omega_u}).$$

Nous allons exposer une méthode qui permet d'obtenir rapidement une dérivée directionnelle de j ou de \hat{j} ; cela se fera d'abord dans le cas discret : on suppose qu'on a discrétisé les équations aux dérivées partielles et la fonction coût à l'aide de, par exemple, la méthode des éléments finis. Ensuite nous traiterons le cas continu et nous obtiendrons la dérivée directionnelle de $j(\Omega)$ et enfin nous appliquerons ces résultats à quelques exemples significatifs ; dans le cas continu, il apparaîtra clairement qu'il vaut mieux calculer une dérivée directionnelle en toute généralité comme dans le n° 2 avant de prendre en considération le fait que le domaine Ω dépend en réalité d'un paramétrage particulier.

2. LE CAS DISCRET (Discrétisation par éléments finis)

2.1. Le problème de conception optimale de formes discrétisé

Il se présente comme un problème de contrôle :

Équation d'état : on donne :

$$E : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^l$$

$$(x, y) \mapsto E(x, y)$$

et pour x donnée dans \mathbb{R}^m , on cherche $y = y_x$ solution de :

$$E(x, y_x) = 0. \tag{2.1}$$

Ici, x représente l'ensemble des coordonnées des nœuds qui définissent la géométrie, tandis que y représente l'ensemble des degrés de liberté du problème.

Fonction coût : on donne :

$$\begin{aligned} J : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^l &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto J(x, y) \end{aligned}$$

et on pose :

$$\begin{aligned} j : \mathbb{R}^m &\rightarrow \mathbb{R} \\ j(x) &= J(x, y_x). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Le problème qui nous intéresse est le suivant :

$$\inf_x j(x). \tag{2.3}$$

Habituellement, x est soumis à des contraintes, comme par exemple $x \in K$, convexe de \mathbb{R}^m . Ici il y a une *spécificité importante* :

— d'abord les coordonnées x des nœuds de la triangulation doivent décrire une triangulation admissible, avec ce que cela comporte de contraintes non classiques : position relative des nœuds, non écrasement des triangles, ...

— ensuite la solution du problème discret doit représenter une approximation convenable de la solution du problème continu ; cela suppose, au moins, que le pas de la triangulation n'est pas très grand ; dans certains cas, il faudra ajouter des nouveaux nœuds. Ainsi une méthode quelconque de minimisation appliquée à ce problème de contrôle peut conduire à des résultats sans signification, la triangulation ou l'approximation n'étant pas convenables ; on s'efforcera à chaque modification de la triangulation de vérifier la signification des résultats.

2.2. Le calcul du gradient de la fonction coût

Nous allons employer ici une méthode très rapide, basée sur la dualité, pour accéder au gradient de j . Nous considérons l'équation d'état comme une contrainte et nous introduisons le Lagrangien suivant :

$$\mathcal{L}(x, y, p) = J(x, y) + p^t E(x, y). \tag{2.4}$$

Nous supposons que $y, p, E(x, y)$ sont des matrices colonnes à l éléments :

$$\mathcal{L} : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}$$

on obtient alors rapidement les différentes équations et le gradient de j ; en effet :

Équation d'état (direct) : y est solution de :

$$\mathcal{L}'_p(x, y, p) = 0 \quad (2.5)$$

c'est-à-dire :

$$E'(x, y) = 0 \quad \text{donc} \quad E(x, y) = 0.$$

Équation d'état adjoint : p est solution de :

$$\mathcal{L}'_y(x, y_x, p) = 0 \quad (2.6)$$

c'est-à-dire :

$$J'_y(x, y_x) + p^t E'_y(x, y_x) = 0 \quad (2.7)$$

ou encore :

$$E''_y p = -J''_y. \quad (2.7')$$

Fonction coût :

$$j(x) = J(x, y_x) = \mathcal{L}(x, y_x, p_x).$$

Dérivée de la fonction coût; on a :

$$j'_x = \mathcal{L}'_x + \mathcal{L}'_y y'_x + \mathcal{L}'_p p'_x \quad (2.8)$$

mais avec (2.5) et (2.6) il vient :

$$j'_x = \mathcal{L}'_x = J'_x + p^t E'_x. \quad (2.9)$$

Cela suppose bien entendu l'existence des dérivées y'_x et p'_x et une régularité suffisante pour que la formule de dérivation de la fonction composée (2.8) soit valable. Comme dans le cas continu, il est plus commode de travailler avec des dérivées directionnelles, nous allons le faire ici aussi, très brièvement. Rappelons les notations : en toute généralité :

$$F'(A; B) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{F(A + \rho B) - F(A)}{\rho}$$

$$F'_{A,B} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{F_{A+\rho B} - F_A}{\rho}.$$

Alors à partir de

$$\mathcal{L}(x, y, p) = J(x, y) + (E(x, y), p)_{\mathbb{R}^l}$$

il vient successivement

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_p(x, y, p, \Phi) &= 0 \quad \forall \Phi \quad (\text{état direct}) \\ \mathcal{L}'_y(x, y, p, \Psi) &= 0 \quad \forall \Psi \quad (\text{état adjoint}) \\ J'(x, \bar{x}) &= \mathcal{L}'_x(x, y_x, p_x, \bar{x}) + \mathcal{L}'_{y'}(x, y_x, p_x, y'_{x, \bar{x}}) \\ &\quad + \mathcal{L}'_p(x, y_x, p_x, p'_{x, \bar{x}}) \\ &= \mathcal{L}'_x(x, y_x, p_x, \bar{x}) = J'_x(x, y_x, \bar{x}) + (E'_y(x, y_x) \bar{x}, p_x)_{\mathbb{R}^l} \\ &= (J'' + E''_x p_x, \bar{x})_{\mathbb{R}^m} \end{aligned}$$

d'où

$$j' = J'_x + p^t E'_x$$

Retrouvons ce résultat par une méthode classique, l'équation $E(x, y) = 0$ définit implicitement une fonction $x \mapsto y_x$ et on a

$$E'_x dx + E'_y dy = 0$$

Si E'_y est inversible, on démontre (Théorème des fonctions implicites) que dy/dx existe (c'est une matrice $l \times m$) et est solution du système linéaire

$$E'_y \frac{dy}{dx} + E'_x = 0$$

En désignant par $\underline{x} \in \mathbb{R}^m$ un élément quelconque de \mathbb{R}^m , on a

$$j'(x) \underline{x} = J'_x \underline{x} + J'_y \frac{dy}{dx} \underline{x}$$

L'élimination de dy/dx va se faire en multipliant l'avant-dernière équation à gauche par p^t et à droite par \underline{x} , il vient par addition avec la dernière équation

$$j'(x) \underline{x} = (J'_x + p^t E'_x) \underline{x} + (J'_y + p^t E'_y) \frac{dy}{dx} \underline{x}$$

Si on choisit p solution de l'équation d'état adjoint

$$J'_y + p^t E'_y = 0$$

il vient l'expression cherchée pour $j'(x)$

2.3. Un exemple

On suppose que :

$$E(x, y) = A(x) y - B(x)$$

l'équation d'état est donc un *système linéaire* de l équations à l inconnues :

$$A(x) y_x = B(x). \quad (2.10)$$

La fonction *coût* est *quadratique* par rapport à y :

$$J(x, y) = \frac{1}{2} (C(x) y, y)_{\mathbb{R}^l} - (D(x), y)_{\mathbb{R}^l} \quad (2.11)$$

la matrice C est symétrique.

Dans ces conditions, le Lagrangien est défini par :

$$\mathcal{L}(x, y, p) = \frac{1}{2} (C(x) y, y)_{\mathbb{R}^l} - (D(x), y)_{\mathbb{R}^l} + (A(x) y - B(x), p)_{\mathbb{R}^l}$$

L'état adjoint par :

$$\mathcal{L}'_y(x, y_x, p_x; \Psi) = 0 \quad \forall \Psi$$

ou :

$$(C(x) y_x, \Psi) - (D(x), \Psi) + (A(x) \Psi, p_x) = 0 \quad \forall \Psi$$

ou :

$$A'(x) p_x = - (C(x) y_x - D(x)). \quad (2.12)$$

La dérivée de j s'obtient par :

$$\begin{aligned} j'(x; \bar{x}) &= \mathcal{L}'_x(x, y_x, p_x; \bar{x}) \\ j'(x; \bar{x}) &= \frac{1}{2} (C'(x; \bar{x}) y_x, y_x) - (D'(x; \bar{x}), y_x) \\ &\quad + (A'(x; \bar{x}) y_x - B'(x; \bar{x}), p_x) \end{aligned} \quad (2.13)$$

on sait que :

$$j'(x, \bar{x}) = (\nabla j(x), \bar{x})_{\mathbb{R}^m}$$

l'identification du coefficient de \bar{x} dans (2.13) conduit au gradient de j . Le calcul de la dérivée de j au point x dans la direction \bar{x} nécessite la connaissance des dérivées de C, D, A, B en x dans la direction \bar{x} .

Remarque 2.1 : Si les nœuds frontaliers sont fixes, la technique précédente permet d'optimiser, dans un certain sens, la place des nœuds intérieurs, afin que pour un type d'approximation choisi, la fonction coût soit minimum par rapport à la triangulation.

Remarque 2.2 : Le calcul de C', D', A', B' peut être coûteux en toute généralité; en fait, il suffira souvent de se limiter au calcul des dérivées par rapport aux nœuds frontaliers; dans d'autres cas les coordonnées des nœuds sont définies à partir d'un nombre restreint de « vrais » paramètres u par exemple; alors $x = x_u$ et dans (2.13) il faut remplacer $C'(x, \bar{x})$ par $C'_x(x_u, \bar{x}_{u, \bar{u}}) \equiv C'_u(u; \bar{u})$ et de même pour D', A', B' ; cela limitera les calculs; nous détaillerons cette technique dans le cas continu.

2.4. Écriture explicite d'une matrice $A(x)$

Nous allons expliciter la matrice $A(x)$ associée aux opérateurs $-\Delta$ et I (Identité) dans le cas des fonctions de 2 variables; il s'agit donc de calculer la matrice de rigidité K et la matrice de masse M associées aux formes bilinéaires $\int \nabla u \cdot \nabla v$ et $\int uv \, dx$; plus précisément nous allons faire le calcul des matrices élémentaires K^τ et M^τ associées au triangle τ ; le triangle τ appartient à l'espace réel de point générique $x = (x_1, x_2)$ tandis que le triangle de référence T est dans l'espace de référence de point générique $X = (X_1, X_2)$; x et X sont liés par des relations du type :

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x_1(X) = \sum_{i=1}^{NG} \bar{x}_1^i \bar{N}_i(X) \\ x_2 &= x_2(X) = \sum_{i=1}^{NG} \bar{x}_2^i \bar{N}_i(X) \end{aligned} \right\} \tag{2.14}$$

où les \bar{N}_i sont les fonctions de formes (données) et les \bar{x}^i sont les points (donnés) qui définissent le triangle τ (éventuellement curviligne); une fonction u définie sur τ est du type :

$$\left. \begin{aligned} u(x) &= \sum_{i=1}^{NI} u_i N_i(x) \\ x, X &\text{ liés par (2.14)} \end{aligned} \right\} \tag{2.15}$$

Les N_i sont les fonctions d'interpolation (données), les u_i sont les degrés de liberté de u .

Si $v = \sum_{i=1}^{NI} v_i N_i$, alors K^τ et M^τ sont définies par :

$$\sum_{i,j} K_{i,j}^\tau u_i v_j = \int_{\tau} \nabla_x u(x) \cdot \nabla_x v(x) dx \quad (2.16)$$

$$\sum_{i,j} M_{i,j}^\tau u_i v_j = \int_{\tau} u(x) v(x) dx. \quad (2.17)$$

Nous allons exprimer les intégrales par rapport aux éléments de référence ; une notation matricielle sera commode :

$$\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} \bar{x}_1^1 \\ \vdots \\ \bar{x}_1^{NG} \end{pmatrix} \quad \bar{x}_2 = \begin{pmatrix} \bar{x}_2^1 \\ \vdots \\ \bar{x}_2^{NG} \end{pmatrix} \quad \bar{x} = (\bar{x}_1 \quad \bar{x}_2) = \begin{pmatrix} \bar{x}_1^1 & \bar{x}_2^1 \\ \vdots & \vdots \\ \bar{x}_1^{NG} & \bar{x}_2^{NG} \end{pmatrix}$$

$$\bar{N} = (\bar{N}_1 \dots \bar{N}_{NG})$$

$$\bar{N}'_i = \left(\frac{\partial \bar{N}_1}{\partial X_i} \dots \frac{\partial \bar{N}_{NG}}{\partial X_i} \right) \quad i = 1, 2$$

$$\nabla \bar{N} = \nabla_x \bar{N} = \begin{pmatrix} \bar{N}'_1 \\ \bar{N}'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{N}_1}{\partial X_1} \dots \frac{\partial \bar{N}_{NG}}{\partial X_1} \\ \frac{\partial \bar{N}_1}{\partial X_2} \dots \frac{\partial \bar{N}_{NG}}{\partial X_2} \end{pmatrix}$$

$$N = (N_1 \dots N_{NI})$$

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{NI} \end{pmatrix}.$$

Dans ces conditions (2.14) et (2.15) deviennent :

$$x(X) = (x_1(X), x_2(X)) = \bar{N}(X) \bar{x} \quad (2.18)$$

ou encore :

$$x = \bar{N} \bar{x} \quad (2.18')$$

et :

$$u(x) = N(X) \underline{u} \quad (2.19)$$

ou encore :

$$u = N \underline{u} \quad (2.19')$$

On pose :

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} \end{pmatrix}. \tag{2.20}$$

Ce qui s'écrit avec les notations précédentes :

$$J = \nabla \bar{N}_x. \tag{2.20}$$

Maintenant, si $U(X) = u(x)$, x et X liés par (2.14) alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial X_1} &= \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial X_1} \\ \frac{\partial U}{\partial X_2} &= \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial X_2} \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\nabla_x U = J \nabla_x u$$

ou

$$\nabla_x u = J^{-1} \nabla_x U. \tag{2.21}$$

Enfin, dans les changements de variables dans les intégrales, on aura :

$$dx = \det.J dX \tag{2.22}$$

qu'on notera aussi :

$$dx = |J| dX. \tag{2.22'}$$

Les formules (2.16) et (2.17) s'écrivent :

$$\underline{v}^t K^r \underline{u} = \int_T (J^{-1}(X) \nabla_x N(X) \underline{v})^t (J^{-1}(X) \nabla_x N(x) \underline{u}) |J| dX \tag{2.23}$$

$$\underline{v}^t M^r \underline{u} = \int_T (N(X) \underline{v})^t (N(X) \underline{u}) |J| dX. \tag{2.24}$$

Il nous faut exprimer J^{-1} en fonction des données ; on a :

$$J = \nabla \bar{N}_x = \begin{pmatrix} \bar{N}'_1 \\ \bar{N}'_2 \end{pmatrix} (\bar{x}_1 \ \bar{x}_2) = \begin{pmatrix} \bar{N}'_1 \bar{x}_1 & \bar{N}'_1 \bar{x}_2 \\ \bar{N}'_2 \bar{x}_1 & \bar{N}'_2 \bar{x}_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det J &= \bar{N}'_1 \bar{x}_1 (\bar{N}'_2 x_2)^t - \bar{N}'_1 \bar{x}_2 (\bar{N}'_2 \bar{x}_1)^t \\ &= \bar{N}'_1 \bar{x}_1 \bar{x}_2^t \bar{N}'_2{}^t - \bar{N}'_1 \bar{x}_2 \bar{x}_1^t \bar{N}'_2{}^t \\ &= \bar{N}'_1 (\bar{x}_1 \bar{x}_2^t - \bar{x}_2 \bar{x}_1^t) \bar{N}'_2{}^t. \end{aligned}$$

Notation : Si $w = (w_1, w_2)$ alors $\check{w} = \begin{pmatrix} w_2 \\ -w_1 \end{pmatrix}$ et dans ces conditions :

$$\check{x}\check{x}^t = \bar{x}_1 \bar{x}_2^t - \bar{x}_2 \bar{x}_1^t$$

et :

$$\det J = \bar{N}'_1 \check{x}\check{x}^t \bar{N}'_2{}^t = \bar{N}'_1 \bar{x}_1 (\bar{N}'_2 \check{x}_2)^t \quad (2.25)$$

On a maintenant :

$$\begin{aligned} J^{-1} &= \frac{1}{|J|} \begin{pmatrix} \bar{N}'_2 \bar{x}_2 & -\bar{N}'_1 \bar{x}_2 \\ -\bar{N}'_2 \bar{x}_1 & \bar{N}'_1 \bar{x}_1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{|J|} \begin{pmatrix} \bar{x}_2^t \\ -\bar{x}_1^t \end{pmatrix} (\bar{N}'_2{}^t - \bar{N}'_1{}^t). \end{aligned}$$

Soit :

$$J^{-1} = \frac{\check{x}^t \nabla \check{N}^t}{|J|} = \frac{(\nabla \check{N} \check{x})^t}{|J|}. \quad (2.26)$$

On dispose maintenant des éléments nécessaires au calcul de K^t et M^t via (2.23) et (2.24); cependant des intégrations dans T sont nécessaires, pour cela nous allons introduire une formule de quadrature :

$$\int_T F(X) dX \simeq \sum_{k=1}^{NQ} \omega_k F(\check{X}^k).$$

où les points d'intégration \check{X}^k et les poids ω_k sont donnés; on posera :

$$\bar{N}_k = \bar{N}(X^k), \quad \bar{N}'_{1,k} = \bar{N}'_1(X^k) \dots J_k = J(X^k).$$

On a donc :

$$\underline{v}^t K^t \underline{u} = \int_T \underline{v}^t \nabla N(X)^t J^{-1t} J^{-1} \nabla N(X) \underline{u} |J| dX$$

d'où :

$$\begin{aligned} K^t &= \int_T \nabla N^t J^{-1t} J^{-1} \nabla N |J| dX \\ &= \int_T \nabla N^t \nabla \check{N} \check{x}\check{x}^t \nabla \check{N}^t \nabla N \frac{1}{|J|} dX \end{aligned}$$

et avec la formule de quadrature :

$$K^\tau = \sum_{k=1}^{NQ} \omega_k \frac{\nabla N_k^t \nabla \bar{N}_k \bar{x} \bar{x}^t \nabla \bar{N}_k^t \nabla N_k}{\bar{N}'_{1,k} \bar{x} \bar{x}^t \bar{N}'_{2,k}}$$

mais $\bar{x} \bar{x}^t = \bar{x} \bar{x}^t$, d'où finalement :

$$K^\tau = \sum_{k=1}^{NQ} \omega_k \frac{\nabla N_k^t \nabla \bar{N}_k \bar{x} \bar{x}^t \nabla \bar{N}_k^t \nabla N_k}{\bar{N}'_{1,k} \bar{x} \bar{x}^t \bar{N}'_{2,k}} \tag{2.27}$$

on obtiendrait de même :

$$M^\tau = \sum_{k=1}^{NQ} \omega_k N_k^t \bar{N}'_{1,k} \bar{x} \bar{x}^t \bar{N}'_{2,k} \bar{N}_k. \tag{2.28}$$

Remarque 2.3 : On a obtenu des expressions explicites de K^τ et M^τ en fonction des coordonnées des nœuds de la triangulation ; à partir de là on peut calculer les dérivées de K^τ et M^τ par rapport à ces coordonnées.

Remarque 2.4 : Comme on vient de le voir sur un cas particulièrement simple, l'écriture explicite des matrices $A(X)$, $B(X)$, $C(X)$, $D(X)$ est assez complexe ; dans la dérivée $j'(X; \bar{X})$ (cf. (2.13)) on n'a besoin que de $A'(X; \bar{X})$, ..., $D(X; \bar{X})$. On peut y accéder via les différences finies, par exemple :

$$A'(X; \bar{X}) \simeq \frac{A(X + \zeta \bar{X}) - A(X)}{\zeta}.$$

Notons que si \bar{X} ne prend en charge que des variations des coordonnées d'un point i alors les coefficients des matrices $A(X)$ et $A(X + \zeta \bar{X})$ sont les mêmes à l'exception de ceux qui font intervenir le point i .

3. LE CAS CONTINU

Rappelons le schéma général :

$$\Omega \rightarrow y_\Omega \rightarrow j(\Omega) \equiv J(\Omega, y_\Omega)$$

où :

- Ω est un ouvert de \mathbb{R}^n de frontière Γ ;
- y_Ω est la solution d'une équation d'Etat (souvent une équation aux dérivées partielles) ;
- de plus, la fonction coût $J(\Omega, y)$ prend en charge le caractère contrôle ou identification du problème.

Remarque 3.1 : Naturellement à Ω on peut aussi associer des valeurs propres d'un opérateur donné, la fonction coût peut aussi dépendre de ces valeurs propres.

3.1. Variation de Ω

Nous allons chercher la « dérivée de $j(\Omega)$ par rapport à Ω ». Pour cela il faut faire varier Ω ; nous le ferons de la manière suivante : soit Ω donné de point générique X , on transforme Ω en Ω_t par la donnée d'une fonction \mathcal{F} :

$$x = \mathcal{F}(X, t) \quad x \in \Omega, t \geq 0 \quad (3.1)$$

alors :

$$\Omega_t = \mathcal{F}(\Omega, t)$$

on suppose que pour $t = 0$ $x = X$ c'est-à-dire que :

$$X = \mathcal{F}(X, 0) \quad \forall X \in \Omega$$

ou encore :

$$\Omega_0 = \Omega$$

et :

$$\mathcal{F}(., 0) = I \quad \text{dans } \Omega.$$

Pour t assez voisin de 0 on a :

$$x = \mathcal{F}(X, 0) + t\mathcal{F}'_t(X, 0) + \dots$$

si l'on pose :

$$V(X) = \mathcal{F}'_t(X, 0)$$

on a :

$$x = X + tV(X) + \dots \quad (3.2)$$

Dans la suite t sera appelé le temps (fictif s'il y a déjà un temps) et V le champ des vitesses à l'instant $t = 0$. Notons que la donnée d'un champ de vitesses $V(x, t)$ permet de construire \mathcal{F} par :

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} x_X(t) &= V(x_X(t), t) \\ x_X(0) &= X \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

et :

$$\mathcal{F}(X, t) = x_X(t).$$

Notons que les transformations $\mathcal{F}(X, t)$ et $X + tV(X)$ peuvent être qualifiées de tangentes à l'origine; J. P. Zolesio [85] a montré que 2 transformations

tangentes engendrent les mêmes résultats de dérivation à l'origine, c'est la raison pour laquelle dans les formules que nous allons obtenir, seul interviendra le champ des vitesses $V(X)$ à l'origine

3.2. Conception optimale et champ de vitesses

En introduisant le temps t , on s'est ramené au schéma

$$\Omega_t \rightarrow y_t \equiv y_{\Omega_t} \rightarrow j(t) \equiv j(\Omega_t) = J(\Omega_v, y_t)$$

on peut alors chercher la dérivée

$$\dot{j}(t) = \frac{d}{dt} j(t)$$

et plus particulièrement $\dot{j}(0)$, en général, on trouvera un résultat du type

$$\dot{j}(0) = L(V) \tag{3 4}$$

où $L(V)$ est une forme linéaire et continue en V , dans un espace convenable cela pourra s'écrire en introduisant un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$

$$\dot{j}(0) = L(V) = \langle G, V \rangle$$

G apparaît alors comme le *gradient* de j , alors que $L(V)$ est la *dérivée directionnelle* de j en Ω dans la direction V

Puisque

$$j(t) = j(0) + tL(V) +$$

si l'on veut faire décroître $j(j(t) < j(0))$ il faudra choisir V tel que $L(V) < 0$ L'obtention de la formule (3 4) permet de choisir V et donc de changer Ω en Ω_v , t convenable, de façon que $j(t) < j(0)$ [ou $j(\Omega_v) < j(\Omega)$]

La formule (3 4) est donc essentielle pour créer des méthodes de descente dans ce problème d'optimisation où la variable est un domaine Ω

3.3. Les 2 dérivées classiques

On donne $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ de frontière Γ , on suppose construits les Ω_t par la donnée de \mathcal{F} ou de V , on suppose connue une fonction f définie dans un voisinage de

$\bigcup_{t \in [0, T]} \Omega_t$ et de $[0, T]$, on pose $f_t(x) = f(x, t)$ et

$$J_1(t) = J_1(\Omega_v, f_t) = \int_{\Omega_t} f(x, t) dx \tag{3 4}$$

et :

$$j_2(t) = J_2(\Omega_p, f_t) = \int_{\Gamma_t} f(x, t) d\sigma. \quad (3.5)$$

Sous des hypothèses convenables, faisant intervenir la régularité de Ω, \mathcal{F}, f , on démontre que :

$$\left. \begin{aligned} j_1(0) &\equiv D_\Omega J_1(\Omega, f; V) = \left[\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} f(x, t) dx \right]_{t=0} \\ &= \int_\Omega f'_t(x, 0) dx + \int_\Gamma f(x, 0) V \cdot n d\sigma \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

et :

$$\left. \begin{aligned} j_2(0) &\equiv D_\Omega J_2(\Omega, f; V) = \left[\frac{d}{dt} \int_{\Gamma_t} f(x, t) dx \right]_{t=0} \\ &= \int_\Gamma f'_t(x, 0) d\sigma + \int_\Gamma \left[\frac{\partial f}{\partial n}(x, 0) + fH \right] V \cdot n d\sigma \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

où la notation $D_\Omega J(\Omega, f; V)$ rappelle qu'il s'agit d'une dérivée directionnelle, n est la normale unitaire extérieure à Γ , H la courbure moyenne sur la surface Γ , $X \cdot Y$ désigne le produit scalaire des vecteurs X et Y de \mathbb{R}^n .

Pour la démonstration de ces formules, ainsi que pour l'obtention de formules équivalentes, cf. Murat-Simon [60] et aussi, Germain [38], Joseph [48], Rousselet [76], Zolesio [89].

Si maintenant, on suppose que f est constante par rapport à t , ou si l'on ne tient pas compte de la dépendance de f par rapport à Ω_p , on obtient des dérivées partielles de j en Ω dans la direction V :

$$\partial_\Omega J_1(\Omega, f; V) = \int_\Gamma f V \cdot n d\sigma \quad (3.8)$$

$$\partial_\Omega J_2(\Omega, f; V) = \int_\Gamma \left[\frac{\partial f}{\partial n} + Hf \right] V \cdot n d\sigma \quad (3.9)$$

3.4. Conception optimale et dérivation « rapide » par rapport au domaine

Équation d'état :

$$y_\Omega \in Y \quad a_\Omega(y, p) = L_\Omega(p) \quad \forall p \in P \quad (3.10)$$

où :

$$a_{\Omega}(y, p) = \int_{\Omega} A(y) p \, dx + \int_{\Gamma} B(y) p \, d\sigma \tag{3.11}$$

et :

$$L_{\Omega}(p) = \int_{\Omega} Cp \, dx + \int_{\Gamma} Dp \, d\sigma . \tag{3.12}$$

Les espaces Y et P peuvent être les mêmes ou différents.

Fonction coût :

$$J(\Omega, y) = \int_{\Omega} E(y) \, dx + \int_{\Gamma} F(y) \, d\sigma \tag{3.13}$$

on posera :

$$j(\Omega) = J(\Omega, y_{\Omega}) . \tag{3.14}$$

Bien entendu, des données peuvent intervenir dans A, B, \dots, F .

Le Lagrangien :

$$\mathcal{L}(\Omega, y, p) = J(\Omega, y) + a_{\Omega}(y, p) - L_{\Omega}(p) .$$

Équation d'état (direct) : Il est clair que la dérivée partielle de \mathcal{L} par rapport à p dans la direction φ vérifie :

$$\partial_p \mathcal{L}(\Omega, y, p; \varphi) \equiv a_{\Omega}(y, \varphi) - L_{\Omega}(\varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in P \tag{3.15}$$

si $y = y_{\Omega}$

Équation d'état adjoint : $p = p_{\Omega}$ est solution de

$$\partial_y \mathcal{L}(\Omega, y_{\Omega}, p; \Psi) = 0 \quad \forall \Psi \in Y \tag{3.16}$$

c'est-à-dire de :

$$\left. \begin{aligned} \int_{\Omega} A'_y(y; \Psi) p \, dx + \int_{\Gamma} B'_y(y; \Psi) p \, d\sigma = - \int_{\Omega} E'_y(y; \Psi) \, dx \\ - \int_{\Gamma} F'_y(y; \Psi) \, d\sigma \end{aligned} \right\} \tag{3.17}$$

$\forall \Psi \in Y; p \in P$.

On reprend alors le raisonnement fait dans le cas discret avec la dérivation de la fonction composée $\mathcal{L}(\Omega, y_{\Omega}, p_{\Omega})$; puisque :

$$j(\Omega) = J(\Omega, y_{\Omega}) = \mathcal{L}(\Omega, y_{\Omega}, p_{\Omega})$$

on a :

$$\left. \begin{aligned} Dj(\Omega, V) &= D_{\Omega} \mathcal{L}(\Omega, y_{\Omega}, p_{\Omega}; V) \\ &= \partial_{\Omega} \mathcal{L}(\Omega, y_{\Omega}, p_{\Omega}; V) + \partial_y \mathcal{L}(\Omega, y_{\Omega}, p_{\Omega}; y'_{\Omega, V}) \\ &\quad + \partial_p \mathcal{L}(\Omega, y_{\Omega}, p_{\Omega}; p'_{\Omega, V}) \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

et avec (3.15) et (3.16) cela entraîne :

$$Dj(\Omega; V) = \partial_{\Omega} \mathcal{L}(\Omega, y_{\Omega}, p_{\Omega}; V). \quad (3.19)$$

Bien entendu cela suppose l'existence des dérivées y' et p' et la validité de la formule (3.18), ce que nous admettrons ici.

Nous avons :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\Omega, y, p) &= \int_{\Omega} [E(y) + A(y)p - Cp] dx \\ &\quad + \int_{\Gamma} [F(y) + B(y)p - Dp] d\sigma. \end{aligned}$$

Soit en abrégé :

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}(\Omega, y, p) &= \int_{\Omega} L dx + \int_{\Gamma} M d\sigma \\ L &= E(y) + A(y)p - Cp; M = F(y) + B(y)p - Dp. \end{aligned} \right\} \quad (3.20)$$

Alors avec les formules classiques (3.8) et (3.9) on a :

$$\left. \begin{aligned} Dj(\Omega; V) &= \partial_{\Omega} \mathcal{L}(\Omega, y_{\Omega}, p_{\Omega}; V) \\ &= \int_{\Gamma} LV \cdot n d\sigma + \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial M}{\partial n} + MH \right] V \cdot n d\sigma. \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$

Remarque 3.2 : Habituellement, on introduit l'état adjoint afin d'éliminer la dérivée y'_i de l'état direct ; si l'on utilise la méthode classique, on est confronté à y'_i mais aussi à une autre dérivée spécifique aux problèmes d'écoulement : si

$$y_i(x) = y(x, t) = y(\mathcal{F}(X, t), t)$$

alors y_i est définie sur la trajectoire $X \rightarrow \mathcal{F}(X, t)$ et on peut introduire :

$$y_i(x) = (y(\mathcal{F}(X, t), t))'_i$$

ou encore :

$$y_t'(x) = \nabla_x y(\mathcal{F}(X, t), t) \cdot \mathcal{F}'_t(X, t) + \frac{\partial}{\partial t} y(x, t)$$

$$y_t'(x) = \nabla_x y(x, t) \cdot V(x, t) + y_t'(x, t).$$

La méthode proposée courtcircuite l'introduction des dérivées y_t' et y_t' .

3.5. Exemple 1

Équation d'état :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} (\nabla y \nabla p + yp) \, dx = \int_{\Omega} fp \, dx + \int_{\Gamma} gp \, d\sigma \\ \forall p \in H^1(\Omega); y \in H^1(\Omega) \end{array} \right.$$

où $H^1(\Omega)$ est un espace de Sobolev ; ce problème est la formulation variationnelle de :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta y + y = f \quad \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial y}{\partial n} = g \quad \text{dans } \Gamma \end{array} \right.$$

f et g sont données dans des espaces convenables.

La fonction coût :

$$J(\Omega, y) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |y - y_d|^2 \, dx$$

où y_d est donnée.

Le Lagrangien :

$$\mathcal{L}(\Omega, y, p) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |y - y_d|^2 \, dx + \int_{\Omega} (\nabla y \nabla p + yp - fp) \, dx - \int_{\Gamma} gp \, d\sigma.$$

L'État adjoint : Via les formules (3.16) ou (3.17) $\partial_y \mathcal{L}(\Omega, y_{\Omega}, p_{\Omega}; \Psi) = 0 \, \forall \Psi$:
ici :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} (\nabla \Psi \nabla p + \Psi p) \, dx = - \int_{\Omega} (y - y_d) \Psi \, dx \\ \forall \Psi \in H^1(\Omega); p \in H^1(\Omega) \end{array} \right.$$

ou encore :

$$\begin{cases} -\Delta p + p = -(y - y_d) & \Omega \\ \frac{\partial p}{\partial n} = 0 & \Gamma. \end{cases}$$

Dérivée de j :

Alors :

$$\begin{aligned} Dj(\Omega; V) &= DJ(\Omega, y_\Omega; V) = \partial_\Omega \mathcal{L}(\Omega, y_\Omega, p_\Omega; V) \\ &= \int_\Gamma \left[\frac{1}{2} |y_\Omega - y_d|^2 + \nabla y_\Omega \cdot \nabla p_\Omega + y_\Omega p_\Omega - f p_\Omega \right] V \cdot n \, d\sigma \\ &\quad - \int_\Gamma \left[\frac{\partial(gp)}{\partial n} + gpH \right] V \cdot n \, d\sigma. \end{aligned} \quad (3.22)$$

On peut donner des expressions équivalentes à ces intégrales, en utilisant en particulier les relations satisfaites par y et p comme $\frac{\partial p}{\partial n} = 0, \dots$

3.6. Exemple 2

L'équation d'état est :

$$\begin{cases} -\Delta y = f & \Omega \\ y = g & \Gamma \end{cases}$$

et la fonction coût :

$$J(\Omega, y) = \frac{1}{2} \int_\Omega |y - y_d|^2 \, dx.$$

Lagrangien :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\Omega, y, p, \lambda) &= \frac{1}{2} \int_\Omega |y - y_d|^2 \, dx + \int_\Omega (-\Delta y - f) p \, dx \\ &\quad + \int_\Gamma (y - g) \lambda \, d\sigma. \end{aligned}$$

État adjoint : On choisit p et λ tels que :

$$\partial_y \mathcal{L}(\Omega, y, p, \lambda; \varphi) = 0 \quad \forall \varphi.$$

Soit :

$$\int_{\Omega} (y - y_d) \varphi \, dx + \int_{\Omega} (-\Delta\varphi) p \, dx + \int_{\Gamma} \varphi \lambda \, d\sigma = 0$$

mais d'après une formule de Green :

$$\int_{\Omega} (-\Delta\varphi) p \, dx + \int_{\Gamma} \frac{\partial\varphi}{\partial n} p \, d\sigma = \int_{\Omega} \varphi(-\Delta p) \, dx + \int_{\Gamma} \varphi \frac{\partial p}{\partial n} \, d\sigma$$

d'où p et λ doivent vérifier :

$$\int_{\Omega} (y - y_d) \varphi \, dx + \int_{\Omega} \varphi(-\Delta p) \, dx + \int_{\Gamma} \varphi \frac{\partial p}{\partial n} \, d\sigma - \int_{\Gamma} \frac{\partial\varphi}{\partial n} p \, d\sigma + \int_{\Gamma} \varphi \lambda \, d\sigma = 0 \quad \forall \varphi.$$

Il est clair que les choix suivants conviennent :

$$\begin{cases} -\Delta p = -(y - y_d) & \Omega \\ p = 0 & \Gamma \\ \lambda = -\frac{\partial p}{\partial n}. \end{cases}$$

Dérivées de j : Alors :

$$\begin{aligned} D_{\Omega} j(\Omega, V) &= D_{\Omega} J(\Omega, y_{\Omega}; V) = \partial_{\Omega} \mathcal{L}(\Omega, y_{\Omega}, p_{\Omega}, \lambda_{\Omega}; V) \\ &= \int_{\Gamma} \left[\frac{1}{2} |y - y_d|^2 + (-\Delta y - f) p \right] V \cdot n \, d\sigma \\ &\quad + \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial(y - g) \lambda}{\partial n} + (y - g) \lambda H \right] V \cdot n \, d\sigma. \end{aligned}$$

En tenant compte de $p = 0, y - g = 0$ sur Γ , et de $\lambda = -\frac{\partial p}{\partial n}$, il vient :

$$D_{\Omega} j(\Omega, V) = \int_{\Gamma} \left[\frac{1}{2} |y - y_d|^2 - \frac{\partial p}{\partial n} \cdot \frac{\partial(y - g)}{\partial n} \right] V \cdot n \, d\sigma. \quad (3.23)$$

3.7. Exemple 3

Dans cet exemple, il s'agit d'un domaine donné mais à épaisseur u variable; u joue le rôle ici d'un « contrôle ». L'équation d'état est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} (u \nabla y \nabla \varphi + y \varphi) dx = \int_{\Omega} f \varphi dx \\ \forall \varphi \in H^1(\Omega); \quad y \in H^1(\Omega) \end{array} \right.$$

et la fonction coût :

$$J(u, y) = \int_{\Omega} f \cdot y dx .$$

Naturellement, il y a des contraintes sur u ; on pourrait en inclure certaines dans le Lagrangien, qui est ici :

$$\mathcal{L}(u, y, p) = \int_{\Omega} f y dx + \int_{\Omega} (u \nabla y \nabla p + y p - f p) dx .$$

État adjoint : On choisit p tel que :

$$\partial_y \mathcal{L}(u, y_w, p; \varphi) = 0 \quad \forall \varphi$$

soit ici :

$$\int_{\Omega} f \varphi dx + \int_{\Omega} (u \nabla \varphi \nabla p + \varphi p) dx = 0 \quad \forall \varphi .$$

On remarque que $p_u = -y_w$.

Dérivée de : $j(u) (= J(u, y_u) = \mathcal{L}(u, y_u, p_u))$:

$$\begin{aligned} Dj(u; v) &= D_u \mathcal{L}(u, y_w, p_u; v) \\ &= \int_{\Omega} v \nabla y_u \nabla p_u dx = - \int_{\Omega} v |\nabla y_u|^2 dx . \end{aligned}$$

Pour cet exemple cf. Cea-Malanowski [18].

4. DÉRIVATION PAR RAPPORT AUX « VRAIS » PARAMÈTRES DANS LE CAS CONTINU

4.1. Généralités

En pratique Ω est très souvent défini comme l'image d'un domaine fixe $\hat{\Omega}$ à l'aide d'une transformation F qui dépend d'un paramètre u ; si X et \hat{X} sont les points génériques de $\Omega = \Omega_u$ et de $\hat{\Omega}$ on a :

$$\begin{aligned} F : \hat{\Omega} &\rightarrow \Omega_u = F(\hat{\Omega}, u) \\ \hat{X} &\rightarrow X = F(\hat{X}, u) . \end{aligned}$$

Le problème est donc paramétré par u : la fonction coût ne dépend que de u : on peut écrire :

$$\hat{j}(u) = j(\Omega_u) = J(\Omega_u, y_u)$$

le calcul de la dérivée de \hat{j} au point u dans la direction v conduit à :

$$D\hat{j}(u, v) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\hat{j}(u + tv) - \hat{j}(u)}{t}$$

c'est-à-dire :

$$D\hat{j}(u, v) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{j(\Omega_{u+tv}) - j(\Omega_u)}{t} . \tag{4.1}$$

On s'est ramené à une famille d'ouverts qui dépend d'un paramètre t ; on peut rejoindre la théorie du n° 2 de la façon suivante :

On pose :

$$\begin{aligned} \Omega_t &\equiv \Omega_{u+tv} \equiv F(\hat{\Omega}, u + tv) \\ \Omega_0 &\equiv \Omega \equiv \Omega_u \equiv F(\hat{\Omega}, u) . \end{aligned}$$

On a naturellement :

$$\begin{aligned} X &= F(\hat{X}, u) \text{ dans } \Omega, \text{ ou encore } \hat{X} = F^{-1}(X, u) \\ x &= F(\hat{X}, u + tv) \text{ dans } \Omega_t \end{aligned}$$

d'où :

$$x = F(F^{-1}(X, u), u + tv)$$

on pose donc :

$$\mathcal{F}(X, t) = F(F^{-1}(X, u), u + tv)$$

donc, comme dans le cadre général :

$$V(X) = \mathcal{F}'_t(X, 0)$$

ici :

$$V(X) = \nabla_u F(F^{-1}(X, u), u) \cdot v$$

relation de la forme :

$$V = \alpha v$$

qui exprime la vitesse de déformation de la géométrie Ω en fonction de la vitesse de déformation v du vrai paramètre u . D'après la formule (4.1) on a :

$$\begin{aligned} D\hat{j}(u; v) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{j(\Omega_{u+tv}) - j(\Omega_u)}{t} \\ &\equiv \lim_{t \rightarrow 0} \frac{j(t) - j(0)}{t} \equiv D_{\Omega} j(\Omega_u; V) \end{aligned}$$

mais $V = \alpha v$ donc :

$$D\hat{j}(u; v) = D_{\Omega} j(\Omega_u; \alpha v)$$

avec le Lagrangien cela donne :

$$D\hat{j}(u; v) = \partial_{\Omega} \mathcal{L}(\Omega_u, y_u, p_u; \alpha v). \quad (4.2)$$

Notons que dans le cas de l'existence d'un gradient de \hat{j} on a :

$$D\hat{j}(u; v) = \langle \nabla j(u), v \rangle.$$

Si bien que ce gradient se calculera à partir de :

$$\langle \nabla j(u), v \rangle = \partial_{\Omega} \mathcal{L}(\Omega_u, y_u, p_u; \alpha v). \quad (4.3)$$

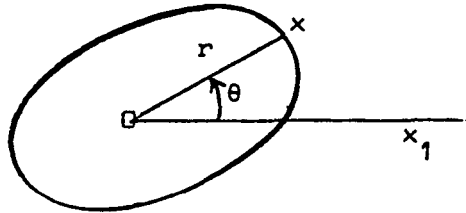
Remarque 4.1 : Dans de nombreux cas pratiques, u représente un nombre fini de paramètres ; cela peut induire une régularité convenable sur la fonction Γ et, par suite, des états directs et adjoints ; la justification de la formule de la dérivation d'une fonction composée s'en trouvera facilitée.

Nous allons maintenant appliquer les résultats précédents à quelques cas particuliers significatifs : pour simplifier, nous nous limiterons au cas où :

$$Dj(\Omega; V) = \int_{\Gamma} LV \cdot n \, d\sigma$$

L étant calculé par ailleurs ; la vitesse de la géométrie sera toujours désignée par V , par contre les noms des paramètres u, v varieront avec les exemples.

4.2. La fonction Γ est définie par un graphe en coordonnées polaires



Si $x = (x_1, x_2)$ sur Γ on a :

$$x = (f(\theta) \cos \theta, f(\theta) \sin \theta) \quad \text{ou encore}$$

$$\begin{cases} x = f(\theta) u(\theta) \\ u(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta). \end{cases}$$

Dans ce cas $\Omega = \Omega_f$:

$$\hat{j}(f) = j(\Omega_f) = J(\Omega_f, y_f).$$

Avec $\Omega_t = \Omega_{f+tg}$ on est conduit à :

$$X = f(\theta) u(\theta)$$

$$x = (f(\theta) + tg(\theta)) u(\theta) \equiv \mathcal{F}(X, t)$$

et :

$$V(X) = \mathcal{F}'_t(X, 0) = g(\theta) u(\theta).$$

De plus :

$$n = \frac{fu - f' u'}{\sqrt{f^2 + f'^2}}$$

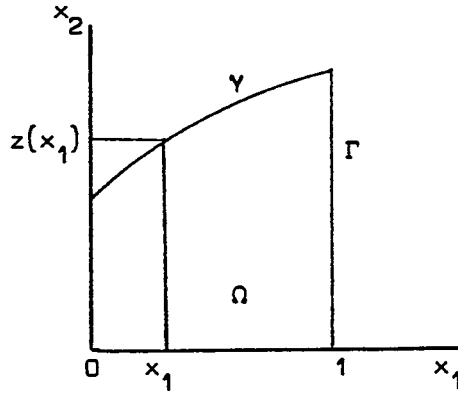
$$\partial\sigma = \sqrt{f^2 + f'^2} d\sigma$$

par suite :

$$D\hat{j}(f; g) = \int_{\Gamma} LV \cdot n d\sigma = \int_0^{2\pi} L(\theta) g(\theta) f(\theta) d\theta. \quad (4.4)$$

Ainsi Lf apparaît comme le gradient de \hat{j} en f .

4.3. La frontière Γ est définie par un graphe en coordonnées cartésiennes



Nous supposons que seule une partie γ de Γ est variable; γ est l'image de $[0, 1]$ par z :

$$x_2 = z(x_1) \quad x_1 \in [0, 1].$$

Pour simplifier, nous supposons que $z(0) = z_0, z(1) = z_1$ où z_0 et z_1 sont fixes positifs.

Alors $\Omega = \Omega_z$ et :

$$\hat{j}(z) = j(\Omega_z) = J(\Omega_z, y_z)$$

avec :

$$\Omega_t = \Omega_{z+tz}, \quad \Omega = \Omega_0 = \Omega_z$$

et :

$$X = (X_1, X_2) \in \Omega$$

$$x = \left(X_1, X_2 \frac{z(X_1) + tZ(X_1)}{z(X_1)} \right) \in \Omega_t$$

il vient :

$$V(X_1, z(X_1)) = (0, Z(X_1)) \quad \forall X_1 \in [0, 1]$$

où :

$$V = (0, Z) \text{ sur } \gamma \text{ et } V = 0 \text{ ailleurs sur } \Gamma.$$

On a :

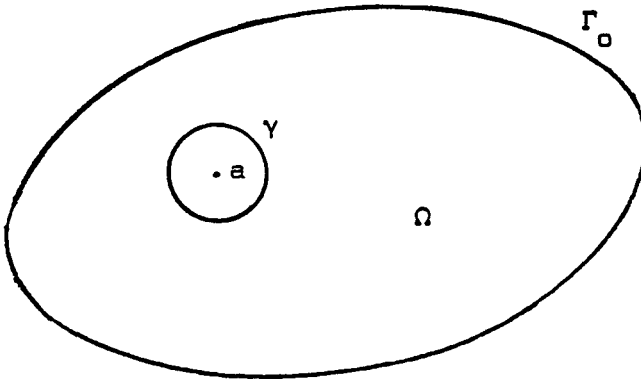
$$n = \left(\frac{-z'}{\sqrt{1+z'^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+z'^2}} \right)$$

$$d\sigma = \sqrt{1+z'^2} dx_1$$

et donc :

$$\begin{aligned}
 D\hat{j}(z; Z) &= \int_{\Gamma} LV \cdot n \, d\sigma = \int_{\gamma} LV \cdot n \, d\sigma \\
 D\hat{j}(z; Z) &= \int_0^1 L(x_1) Z(x_1) \, dx_1.
 \end{aligned}
 \tag{4.5}$$

4.4. La frontière Γ est définie à l'aide d'un nombre fini de paramètres



Dans cet exemple

$$\Gamma = \Gamma_0 \cup \gamma$$

γ est le bord d'un disque $B(a, r)$ de centre $a = (a_1, a_2)$ et de rayon r . On suppose que seul a est variable.

— Alors $\Omega = \Omega_a$ et :

$$\hat{j}(a) = j(\Omega_a) = J(\Omega_a, y_a).$$

Ici $\Omega_t = \Omega_{a+ib}$, $b = (b_1, b_2)$.

Le disque en mouvement de translation a une vitesse b donc $V = b$ sur γ . On pourrait construire une vitesse « admissible » définie partout par :

$$\begin{aligned}
 \vec{\Delta}V &= 0 && \Omega \\
 V &= b && \text{sur } \gamma \\
 V &= 0 && \text{sur } \Gamma_0.
 \end{aligned}$$

Sur γ on a

$$\begin{cases} x(\theta) = (a_1 + r \cos \theta, a_2 + r \sin \theta) \\ V = (b_1, b_2) \\ n = -(\cos \theta, \sin \theta) \\ d\sigma = r d\theta \end{cases}$$

d'où :

$$\begin{aligned} D\hat{j}(a, b) &= \int_{\gamma} LV \cdot n d\sigma = - \int_0^{2\pi} L(\theta) [b_1 \cos \theta + b_2 \sin \theta] r d\theta \\ D\hat{j}(a, b) &= -b_1 r \int_0^{2\pi} L(\theta) \cos \theta d\theta - b_2 r \int_0^{2\pi} L(\theta) \sin \theta d\theta \quad (4.6) \end{aligned}$$

et donc :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \hat{j}}{\partial a_1} &= -r \int_0^{2\pi} L(\theta) \cos \theta d\theta \\ \frac{\partial \hat{j}}{\partial a_2} &= -r \int_0^{2\pi} L(\theta) \sin \theta d\theta . \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

Remarque 4.5 : Le cas où la frontière variable est une courbe de niveau, donc ne dépend que d'un paramètre, entre tout à fait dans ce cadre ; cf. J. P. Zolesio [85].

4.5. La frontière Γ est définie par une courbe de type SPLINE

Cf. par exemple Cox [22], De Boor [24], Reisenfeld [71], Schoenberg [79]. Bien entendu, le cas d'une courbe de Bezier entre dans ce cadre.

La frontière Γ est définie comme l'ensemble des points X suivants :

$$X(s) = \sum_{i=1}^N X^i B_i(s) \quad s \in [0, l]$$

où :

$$\begin{aligned} X(s) &= (X_1(s), X_2(s)) \\ X^i &= (X_1^i, X_2^i) . \end{aligned}$$

Les points X^i sont donnés, ainsi que l et les fonctions B_i ; on pose alors :

$$[X] = (X^1, \dots, X^N) \in \mathbb{R}^{2N} .$$

Dans ce cas $\Omega = \Omega_{[X]}$ et :

$$\hat{j}([X]) = j(\Omega_{[X]}) = J(\Omega_{[X]}, \mathcal{Y}_{[X]})$$

Alors si $[Y] = (Y^1, Y^2, \dots, Y^N)$ on a :

$$\Omega_t = \Omega_{[X+tY]}$$

Ce qui conduit sur Γ_t à :

$$\begin{aligned} x_t(s) &= \sum_{j=1}^N (X^j + tY^j) B_j(s) \\ &= X(s) + t \sum_{j=1}^N Y^j B_j(s) \end{aligned}$$

d'où :

$$V(s) = \sum_{j=1}^N Y^j B_j(s)$$

on a aussi :

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{X'_s}{|X'_s|} = \left(\frac{X'_1}{|X'_s|}, \frac{X'_2}{|X'_s|} \right) \\ n &= \left(\frac{X'_2}{|X'_s|}, -\frac{X'_1}{|X'_s|} \right) \\ n &= \frac{1}{|X'_s|} \sum_{i=1}^N (X'_2 B'_i(s), -X'_1 B'_i(s)) \\ d\sigma &= |X'_s| ds \end{aligned}$$

par suite :

$$\begin{aligned} \hat{D}_j([X]; [Y]) &= \int_{\Gamma} LV \cdot n \, d\sigma \\ &= \int_0^t \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N L(s) [Y^j_1 B_j(s) X^i_2 B'_i(s) - Y^j_2 B_j(s) X^i_1 B'_i(s)] \, ds \end{aligned} \tag{4.8}$$

Si on pose :

$$a_{i,j} = \int_0^t L(s) B_j(s) B'_i(s) \, ds$$

il vient

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \hat{j}}{\partial X^i_1} &= \sum_{j=1}^N a_{i,j} X^j_2 \\ \frac{\partial \hat{j}}{\partial X^j_2} &= -\sum_{i=1}^N a_{i,j} X^i_1 \end{aligned} \right\} \tag{4.9}$$

Remarque 4 3 Le cas des frontières polygonales entre dans ce cadre, on peut aussi supposer qu'une partie seulement de la frontière est du type étudié dans ce n° et est variable

BIBLIOGRAPHIE

- 1 F ANGRAND, R GLOWINSKI, J PERIAUX, P PERRIER, G POIRIER, O PIRONNEAU, *Optimum Design For Potential Flows* Communication to Calgary Conference, June, 1980
- 2 T ALTUZARRA, C KNOPF-LENOIR, C SAYETAT and G TOUZOT *Interactive optimum design system* Preprints, Tucson Symposium, October 1981
- 3 C BAIOCCHI, *Su un Problema a Frontiera Connesso a Questioni di Idraulica* Ann Mat Pura Appl, Vol 92, N° 4, 1972, pp 107-127
- 4 A BAMBERGER, G CHAVENT and P LAILLY, *Étude Mathématique et Numérique d'un Probleme Inverse pour l'Équation des Ondes a une Dimension* Rapport Interne, N° 14, École Polytechnique, January 1977
- 5 N V BANICHUK, *Optimization of Elastic Bars in Torsion* Int J Solids and Structures, Vol 12, 1976, pp 275-286
- 6 N V BANICHUK, *On a Two-Dimensional Optimization Problem in Elastic Bar Torsion Theory* MTT, Vol 11, N° 5, 1976, pp 45-52
- 7 N V BANICHUK, *Optimality Condition in the Problem of Seeking the Hole Shapes in Elastic Bodies* PMM, Vol 41, N° 5, 1977, pp 920-925
- 8 D BEGIS and R GLOWINSKI, *Application de la Methode des Éléments Fins a l'Approximation d'un Probleme de Domaine Optimal* Applied Math and Optimization, Vol 2, N° 2, 1975, pp 130-169
- 9 D C BENSON, *An Elementary Solution of a Variational Problem of Aerodynamics* J of Opt Theory and Appl, Vol 1, N° 2, 1967
- 10 S S BHAIKATTI and C V RAMAKRISHNAN, *Optimum Design of Fillets in flat and Round Tension Bars* ASME paper, N° 77-DET-45, 1977
- 11 J CEA, *Une methode Numerique pour la Recherche d'un Domaine Optimal* Publication IMAN-P2, Nice, 1975
- 12 J CEA, *Identification de Domaines* Springer-Verlag, Lecture Notes in Computer Science, Vol 3, 1973
- 13 J CEA, A GIOAN and J MICHEL, *Quelques Resultats sur l'Identification de Domaines* Calcolo, III-IV, 1973
- 14 J CEA, A GIOAN and J MICHEL, *Adaptation de la Methode du Gradient a un Probleme d'Identification de Domaine* Springer-Verlag, Lecture Notes in Computer Science, Vol 11, 1974
- 15 J CEA, *Quelques méthodes sur la recherche d'un domaine optimal* Springer-Verlag, Lecture notes in Physics, Vol 85, 1978, pp 135-146
- 16 J CEA, *Numerical Methods of Shape Optimal Design* Optimization of Distributed Parameter Structures (Eds E J Haug and J Cea) Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn, Netherlands, 1981
- 17 J CEA, *Lectures on Optimization Theory and Algorithms* Springer-Verlag, 1978
- 18 J CEA and K MALANOWSKI, *An example of a Max-Min Problem in Partial Differential Equations* SIAM J Control, Vol 8, N° 3, 1970, pp 305-316

- 19 G CHAVENT, *Analyse Fonctionnelle et Identification de Coefficients Repartis dans les Équations aux Dérivées Partielles* These de Doctorat, Paris
- 20 D CHENAIS, *On the Existence of a Solution in a Domain Identification Problem* J Math Anal Appl, Vol 52, N° 2, 1975
- 21 Y W CHUN and E J HAUG, *Two Dimensional Shape Optimal Design* Int J Num Methods in Engrg, Vol 13, 1978, pp 311-336
- 22 M C COX, *The Numerical Evaluation of B-Splines* National Physical Laboratory DNAC 4, August 1971
- 23 I I DANILJUK, *Sur une Classe de Fonctionnelles Integrales a Domaine Variable d'Integration* Actes, Congres Internat Math, 1970, Vol 2, pp 703-715
- 24 C DE BOOR, *On Calculating with B-Splines* J Approx Theory, Vol 6, pp 50-62, 1972
- 25 A DERVIEUX and B PALMERIO, *Une Formule d'Identification dans des Problemes d'Identification de Domaines* C R Acad Sci Paris, Serie A, Vol 280, 1975, pp 1697-1700 and 1761-1764
- 26 A DERVIEUX and B PALMERIO, *Hadamard's Variational Formula for a Mixed Problem and an Application to a Problem Related to a Signorini Like Variational Inequality* Rapport Laboria, IRIA, Rocquencourt, 1979
- 27 A DERVIEUX, B PALMERIO, *Une Formule de Hadamard dans les Problemes d'Optimal Design* Springer-Verlag, Lecture Notes in Computer Science, Vol 40, 1976
- 28 A DERVIEUX, B PALMERIO and B ROUSSELET, *Dessin Optimal d'un Reacteur Nucleaire par une Methode de Gradient* To appear
- 29 H J DEULING and W HELFRICH, *The Curvature Elasticity of Fluid Membranes A Catalogue of Vesicle Shapes* J de Phys, Vol 37, nov 1976, pp 1335-1345
- 30 A FRANCAVILLA, C V RAMAKRISHNAN and O C ZIENKIEWICZ, *Optimization of Shape to Minimize Stress Concentration* J Strain Anal, Vol 10, 1975, pp 63-70
- 31 C FLEURY and V BRAIBANT, *Optimization Methods in Structural Design Edited by H Eshenauer and N Olhoff* Euromech-Colloquim 164, University of Siegen
- 32 C FLEURY and M GERADIN *General Nonlinear Programming Methods* NATO Advanced Study Institute on *Modern Structural Optimization* 4-15 August 1980, University of Liege, Belgium
- 33 A FRIEDMAN, *Free Boundary Problems for Parabolic Equations, (II) Evaporation or Condensation of a Liquid Drop* J Math Mech Vol 9, 1960, pp 19-66
- 34 A FRIEDMAN, *Free Boundary Problems for Parabolic Equations (III) Dissolution of a Gas Bubble in Liquid* J Math Mech, Vol 9, 1960, pp 327-345
- 35 A FRIEDMAN, *The Stefan Problem in Several Space Variables* Trans Amer Math Soc, Vol 133, 1968, pp 51-87
- 36 P R GARABEDIAN and D C SPENCER, *Extremal Methods in Cavitation Flows* J Rat Mech Anal, Vol 1, 1952, pp 359-409
- 37 P R GARABEDIAN and M SCHIFFER, *Convexity of Domain Functionals* J d'Analyse Math, Vol 3, 1953, 246-344
- 38 P GERMAIN, *Cours de mecanique des milieux continus* Paris, Masson 1973
- 39 R GLOWINSKI and A MARROCCO, *Analyse Numerique du Champ Magnetique d'un Alternateur par Éléments Fins et Sur-relaxation Ponctuelle non Lineaire* Comp Math in Appl Mech and Eng, Vol 3, N° 1, Janv 1974
- 40 R GLOWINSKI and A MARROCCO, *Finite Element Approximation and Iterative Methods of Solution for 2-D Nonlinear Magnetostatic Problems* Proceedings of COMPUMAG Conf, Oxford, 1976, pp 112-125

41. R. GLOWINSKI and A. MARROCCO, *Numerical Solution of Two-Dimensional Magnetostatic Problems by Augmented Lagrangian Methods*. Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng., to appear.
42. E. L. GURVITCH, *On Isoparametric Problems for Domains with Partly known boundaries*. J.O.T.A., Vol. 20, N° 1, 1976, pp. 65-79.
43. J. HADAMARD, *Mémoires sur le Problème d'Analyse Relatif à l'Équilibre des Plaques Élastiques Encastrées (1908)*. Œuvre de J. Hadamard, C.N.R.S., Paris 1968.
44. E. J. HAUG, *A review of distributed parameter structural optimization literature* in E.J. Haug and J. Cea (eds.). Optimization of Distributed Parameter structures, Vol. I, Sijthoff-Noordhoff, Alphen aan den Rijn, Netherlands, 1981, pp. 3-74.
45. J. HAUG and B. ROUSSELET, *Design sensivity analysis in structural mechanic I, static responses variations*. J. of Struct. Mech., 1980, 8(1), pp. 17-41.
46. E. J. HAUG and J. S. ARORA, *Applied Optimal Design*. Wiley-Interscience, New-York, 1979.
47. E. J. HAUG and J. CEA, *Optimization of Distributed Paramefer Structures*. Sijthoff & Noordhoff, E-49, 1981.
48. D. D. JOSEPH, *Parameter and Domain Dependence of Eigenvalues of Elliptic Partial Differential Equations*. Arch. Rat. Mech. Anal., Vol. 24, 1967.
49. M. KAC, *Can One Hear the Shape of a Drum ?* Amm. Math. Mthly., Vol. 73, 1966, pp. 1-23.
50. H. H. KAGIWADA and R. E. KALABA, *A Practical Method for Determining Green's Functions Using Hadamard's Variational Formula*. J. of Opt. Theory and Appl., Vol. 1, N° 1, 1967.
51. M. KÆNIG and J. P. ZOLESIO, *Localisation d'un Objet de Forme Convexe Donnée*. C.R. Acad. Sci., Paris, 1972, pp. 276, 880-852.
52. E. S. KRISTENSEN and N. M. MADSEN, *On the Optimal Shape of Fillets in Plates Subjected to Multiple in Plane Loading Cases*. Int. J. for Num. Meth. in Engr., Vol. 10, 1976, pp. 1007-1011.
53. J. L. LIONS, *On the Optimal Control of Distributed Parameter Systems*. Techniques of Optimization (Ed. A. Balakrishnan), Academic Press, New-York, 1972.
54. J. L. LIONS, *Sur quelques Questions d'Analyse, de Mécanique et de Contrôle Optimal*. Les Presses de l'Université de Montréal, 1976.
55. A. MARROCCO and O. PIRONNEAU, *Optimum Design with Lagrangian Finite Elements. Design of an Electro-Magnet*. Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng., Vol. 15, 1978, pp. 217-308.
56. A. MIELE and D. G. HULL, *Sufficiency Proofs for the Problem of the Optimum Transversal Contour*. SIAM J. Appl. Math., Vol. 15, N° 2, 1967, pp. 466-477.
57. F. MIGNOT, F. MURAT and J. P. PUEL, *Variation d'un Point de Retournement par Rapport au Domaine*. Comm. on P.D.E., Vol. 4, N° 11, 1979.
58. F. MURAT and J. SIMON, *Quelques Résultats sur le Contrôle par un Domaine Géométrique*. Publication du L.A. 189, Univ. Paris VI, 1974.
59. F. MURAT and J. SIMON, *Sur le Contrôle par un Domaine Géométrique*. Publication du L.A. 189, Univ. Paris VI, 1976.
60. F. MURAT and J. SIMON, *Étude de Problèmes d'Optimal Design*. Proceedings of the 7th IFIP Conference, Springer-Verlag, Lecture Notes in Computer Sciences, N° 41, 1976, pp. 54-62.
61. P. MOREL, *Utilisation en Analyse Numérique de la Formule de Dérivation d'Hadamard*. RAIRO, R-2, 1973, pp. 115-119.

- 62 P MORICE, *Une Methode d'Optimisation de Forme de Domaine* Proc Congress, IFIP-IRIA, Springer-Verlag, 1974
- 63 O PIRONNEAU, *Optimal Shape Design for Elliptic Systems* Springer Series in computational Physics, Springer-Verlag 1984
- 64 O PIRONNEAU, *Sur les Problemes d'Optimisation de Structure en Mecanique des Fluides* These de Doctorat, Paris VI, 1976
- 65 O PIRONNEAU, *On Optimum Design in Fluid Mechanics* J Fluid Mech , Vol 64, 1974, pp 97-111
- 66 O PIRONNEAU, *Optimum Design with Lagrangian Finite Elements* Design of an Electromagnet Comp Math in Appl Mech and Eng , Vol 15, 1978, pp 207-308
- 67 O PIRONNEAU and C SAGUEZ, *Asymptotic Behaviour of Solutions of P D E with Respect to the Domain* IRIA Laboria Report N° 218, 1977
- 68 W PRAGER and J E TAYLOR, *Problems of Optimal Structural Design* J of Appl Mech , 1968, Vol 35, pp 102-106
- 69 V RAMAKRISHNAN and A FRANCAVILLA, *Structural Shape Optimization Using Penalty Functions* J Struct Mech , Vol 3, N° 4, 1975, pp 403-432
- 70 J W RAYLEIGH, *The Theory of Sound* 2nd Ed , Cambridge University Press, 1894-1896
- 71 R F REISENFELD, *Berstein-Bezier Methods for the Computer-Aided Design of Free-Form Curves and Surfaces* Ph D Thesis, Syracuse University, March 1973
- 72 B ROUSSELET, *Sur les Problemes de Valeurs Propres* C R Acad Sci Paris, Serie A, Vol 283, 1976, p 507
- 73 B ROUSSELET, *Note on the design Differentiability of the static Response of elastic Structure* I struct mech , 10(3), 353-358 (1982-83)
- 74 B ROUSSELET, *Shape sensitivity of a membrane* Jota Vol 40, N° 4, August 1983
- 75 B ROUSSELET, *Dependence of Eigenvalues with respect to Shape* Optimization of Distributed Parameter Structures (Eds E J Haug and J Cea) Sijthoff and Noordhoff Alphen aan den Rijn, Netherlands, 1981, pp 1235-1364
- 76 B ROUSSELET, *Probleme Inverse de Valeurs Propres* Optimization Techniques Springer-Verlag, Lecture Notes in Computer Sciences, Vol 2, N° 41, 1976, pp 77-85
- 77 B ROUSSELET, *These sur la conception optimale de formes* Universite de Nice, 1982
- 78 L I RUBINSTEIN, *The Stefan Problem* A M S , Translations of Mathematical Monographs, Vol 27, Providence, R I , 1971
- 79 I J SCHOENBERG, *Contributions to the Problem of Approximations of Equidistant Data by Analytic Functions* J Appl Math , Vol 4, 1946, pp 45-99, 112-141
- 80 O SERO-GUILLAUME, *Probleme a Frontiere Libre de Type Stefan* These, INP Lorraine, Nancy, France, 1978
- 81 B A TROESCH and H R TROESCH, *Eigenfrequencies of an Elliptic Membrane* Math of Comp , Vol 27, N° 126, 1973, pp 755-772
- 82 V TVERGAARD, *On the Optimum Shape of a Fillet in a Flat Bar with Restrictions* Proc IUTAM Symposium on Structural Design, Warsaw, Springer-Verlag, New-York, 1973
- 83 G VANDERPLAATS, *Approximative Concepts for Numerical Airfoil Optimization* NASA Technical Paper N° 1370, 1979
- 84 O C ZIENKIEWICZ and J S CAMPBELL, *Shape Optimization and Sequential Linear Programming* Optimum Structural Design (Ed R H Gallagher and O C Zienkiewicz), Wiley, New-York, 1973

- 85 J. P. ZOLESIO, *Identification de Domaine par Deformation* These, Universite de Nice, 1979
- 86 J. P. ZOLESIO, *Un resultat d'Existence de Vitesse Convergente* C R Acad Sci Paris, Serie A, Vol 283, 1976, p 855
- 87 J. P. ZOLESIO, *Localisation du Support d'un Contrôle Optimal* C R Acad Sci Paris, Serie A, Vol 284, 1977, p 791
- 88 J. P. ZOLESIO, *An Optimal Design Procedure for Optimal Control Support* Lecture Notes in Economical and Mathematical Systems, N° 14, pp 207-233, 1977
- 89 J. P. ZOLESIO, *The Material Derivative (Or Speed) Method for Shape Optimization* Optimization of Distributed Parameter Structures (Eds. E. J. Haug and J. Cea), Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn, Netherlands, 1981