ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 95 за 2019 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Колесниченко А.В.

Вывод в рамках неэкстенсивной кинетики критерия неустойчивости Джинса для допланетного облака с учетом радиации и магнитного поля

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Колесниченко А.В. Вывод в рамках неэкстенсивной кинетики критерия неустойчивости Джинса для допланетного облака с учетом радиации и магнитного поля // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2019. № 95. 36 с. doi:10.20948/prepr-2019-95
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2019-95

О р д е н а   Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Р о с с и й с к о й   а к а д е м и и   н а у к

А.В. Колесниченко

Вывод в рамках неэкстенсивной кинетики критерия неустойчивости Джинса для допланетного облака с учетом радиации и магнитного поля

Москва — 2019

Колесниченко А.В.

Вывод в рамках неэкстенсивной кинетики критерия неустойчивости Джинса для допланетного облака с учетом радиации и магнитного поля.

Аннотация. В рамках статистики Тсаллиса исследуется влияние неэкстенсивности среды на критерий гравитационной неустойчивости Джинса для самогравитирующего допланетного облака, вещество которого состоит из смеси идеального q-газа и чёрнотельного излучения. Обобщённые критерии неустойчивости Джинса найдены из соответствующих дисперсионных соотношений, полученных как для нейтрального вещества, так и для плазмы. Получен также интегральный обобщённый критерий устойчивости Чандрасекхара для гравитирующего сферического облака. Представленные результаты анализируются для различных значений параметров деформации q, размерности D пространства скоростей и коэффициента β, характеризующего долю излучения в полном давлении системы. Показано, что излучение может стабилизировать рассматриваемые неэкстенсивные чисто газовые системы, а для плазмы критерий неустойчивости Джинса модифицируется магнитным полем и радиационным давлением только в поперечном режиме распространения волны возмущения.

Ключевые слова: критерии Джинса и Чандросикхара, допланетное облако, чёрнотельное излучение, неэкстенсивная кинетика Тсаллиса.

Aleksandr Vladimirovich Kolesnichenko

Conclusion in the framework of nonextensive kinetics of the Jeans instability criterion for protoplanetary cloud taking into account radiation and magnetic field.

Annotation. In the framework of Tsallis statistics, we study the effect nonintensity of medium on the Jeans gravitational instability criterion for a self-gravitating protoplanetary cloud, the substance of which consists of a mixture of ideal q-gas and blackbody radiation. The generalized criteria for Jeans's gravitational instability are found from the corresponding dispersion relations obtained for both neutral matter and plasma. A generalized integral Chandrasekhar stability criterion for a gravitating spherical cloud is also obtained. The presented results are analyzed for various values of the deformation parameters, the fractional dimension of the velocity space and the coefficient, characterizing the fraction of radiation in the total pressure of the system. It is shown that radiation can stabilize the considered nonextensive pure gas systems, and for a plasma the Jeans instability criterion is modified by the magnetic field and radiation pressure only in the transverse mode of propagation of the perturbation wave.

Key words: Jeans and Chandrosikhar criteria, self-gravitating protoplanet cloud, blackbody radiation, non-extensive kinetics of Tsallis.

ВВЕДЕНИЕ

Как теперь стало понятно, статистическая механика Больцмана−Гиббса и стандартная термодинамика не являются вполне универсальными теориями, поскольку они имеют ограниченные области применимости. Это связано, в частности, с тем, что в основе статистики Больцмана−Гиббса лежит постулат о полном перемешивании потока «фазовых точек» в фазовом пространстве (гипотеза молекулярного хаоса). Это означает, что любой выделенный объём приобретает по истечении времени $t \to \infty$ настолько хорошо развитую хаотическую структуру, что его точки могут располагаться в произвольной части фазового пространства. Таким образом, фазовое пространство в классической статистике не содержит запрещённых состояний и обладает обычными свойствами непрерывности, гладкости, евклидовости. При этом стохастический процесс имеет марковский характер, а гипотеза перемешивания, дополненная предположением о бесконечном числе степеней свободы, приводит, в конечном счёте, к каноническому (экспоненциальному) распределению вероятности состояний Больцмана−Гиббса (из которого следует свойство аддитивности экстенсивных термодинамических переменных, таких как внутренняя энергия, энтропия и т.п.), а в случае кинетической теории − к максвелловскому распределению скоростей.

Вместе с тем, в физике и в других естественных науках, использующих методы статистической механики, известны многочисленные примеры аномальных систем с дальним силовым взаимодействием, фрактальным характером фазового пространства и значительными корреляциями между отдельными их частями. Сложная пространственно-временная структура подобных систем приводит к нарушению принципа аддитивности для таких важнейших термодинамических величин, как энтропия или внутренняя энергия.

Описание эволюции подобных систем, обладающих произвольным фазовым пространством, возможно, в частности, в рамках так называемой неэкстенсивной статистической механики Тсаллиса[1)] (см. Tsallis, 1988, 1999, 2009; Curado, Tsallis, 1991; Tsallis и др., 1998; Колесниченко, 2019), которая интенсивно развивается в последнее время в основном зарубежными авторами. Важным преимуществом неэкстенсивной статистики по сравнению с классической статистикой Больцмана−Гиббса является асимптотический степенной закон распределения вероятностей, который не зависит от экспоненциального поведения, обусловленного распределением Гиббса.

[1)] Обзорам исследований в рамках неэкстенсивной статистики Тсаллиса посвящены многочисленные журнальные статьи, сборники и монографии. Кроме этого, имеется постоянно обновляющаяся полная библиография (Nonextensive statistical mechanics and thermodynamics: Bibliography/ http://tsallis.cat.cbpf.br/biblio.htm), которая на сегодняшний день состоит из более 5600 ссылок.

В настоящее время теории разнообразных неэкстенсивных систем существенно развиваются в ускоренном ритме, при котором появляются новые идеи, позволяющие глубже понять их природу, возможности и ограничения. Каждая теория имеет широкий спектр важных приложений, связанных с физикой статистических систем, вероятностные свойства которых описываются не гиббсовыми (не гауссовыми), а степенными распределениями. В частности, неэкстенсивная статистическая механика успешно применяется к космическим системам с дальним силовым взаимодействием, которое и является причиной их аномальности (стататистической и термодинамической неэкстенсивности).

В работе (Kolesnichenko, Chetverushkin, 2013) в рамках формализма деформированной статистики Тсаллиса была сконструирована на основе модифицированного кинетического уравнения (с интегралом столкновений в форме Бхатнагара−Гросса−Крука) обобщённая гидродинамика (так называемая q-гидродинамика Навье-Стокса), пригодная для моделирования подобных систем. Именно на основе этой гидродинамики в данной работе мы рассмотрим проблему гравитационной неустойчивости Джинса для протяжённого газопылевого облака, заполнявшего всё пространство современной солнечной системы, с учётом чёрнотельной радиации и влияния магнитного поля на критическую длину волны возмущения, ведущей к неустойчивости.

Гравитационная неустойчивость является фундаментальным процессом фрагментации гравитирующего космического вещества. Она вызывает формирование устойчивых астрофизических объектов, таких как звезды, туманности, допланетные пылевые сгущения, аккреционные диски и т. д. (см., Джинс, 1902, 2009; Чандрасекар, 1981; Сафронов, 1969; Горькавый, Фридман, 1994; Фридман, Хоперсков, 2011). Хорошо известно, что самогравитирующая космическая среда становится гравитационно-неустойчивой, если возникшие в ней сколь угодно малые возмущения плотности неограниченно растут со временем вследствие тяготения и равновесие нарушается, если соответствующие длины волн превышают определенное значение. Проблеме гравитационной неустойчивости в последнее время посвящено большое число публикаций, среди которых можно выделить следующие работы (Chandrasekhar, Fermi, 1953; Bonnor, 1957; Hunter, 1972; Goldreich., Lynden-Bell, 1965; Low, Lynden-Bell, 1976; Shakura., Sunyaev, 1976; Camenzind и др., 1986; Cadez, 1990; Pandey, Avinash, 1994; Owen и др.,1997; Tsiklauri, 1998; Mace и др., 1998; Lima и др., 2002; Trigger и др., 2004; Sakagami, Taruya, 2004; Shukla, Stenflo, 2006; Tsintsadze и др., 2008; Masood и др., 2008; Cadez, 2010; Dhiman, Dadwal, 2012; Fridman., Polyachenko,1984, 2012; Kaothekar, Chhajlani, 2013; Joshi, Pensia, 2017; Pensia и др., 2018; Kumar и др.,2018; Колесниченко, 2015, 2016, 2018, 2019; Kolesnichenko, Marov, 2014, 2016). Во всех этих работах рассмотрены различные аспекты джинсовской неустойчивости самогравитирующих космических сред как в рамках классических уравнений Навье−Стокса и МГД-уравнений, так и на основе бесстолкновительного уравнения Больцмана при наличии гравитационных полей, уравнения Пуассона.

Известно, что в случае нормальных звёзд большую роль играет давление излучения как фактор их гидростатического равновесия. Имея это в виду, в представленной работе выполнено в рамках неэкстенсивной кинетики Тсаллиса рассмотрение влияния чёрнотельной радиации на гравитационную неустойчивость солнечного допланетного облака (точнее его центральной части, в которой практически всё излучение является длинноволновым, поскольку оно уже успело пройти через многократное поглощение и переизлучение частицами среды). Именно там возможно существование локального термодинамического равновесия, при котором температура частиц практически совпадает с температурой чёрного тела. В работе найдена функциональная зависимость критического значения длины возмущающей волны от энтропийного индекса деформации q и параметра размерности D пространства скоростей. Эти свободные параметры должны определяться в каждом конкретном случае эмпирическим путём из статистических или экспериментальных данных. В работе также исследуется влияние магнитного поля на гравитационную неустойчивость неэкстенсивного допланетного облака.

1. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ q- ГИДРОДИНАМИКИ

Рассмотрим далее газообразную динамическую неэкстенсивную систему с нормированным распределением частиц $f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{c},t)$ в геометрическом пространстве $\boldsymbol{r}$ и в пространстве скоростей $\boldsymbol{c}$ с размерностью D. Предлагаемое Тсаллисом обобщение статистической механики (в случае статистики Курадо−Тсаллиса) лучше всего описывается следующими двумя аксиомами (Curado, Tsallis,1991**;** Колесниченко, 2018):

Аксиома 1. Функционал энтропии, связанный с нормированным распределением функции вероятностей $f(z,t)$, равен

$$\mathcal{S}_q\left[f\right]=\frac{k}{q-1}\int dz\left\{f(z)-\left[f(z)\right]^q\right\}, \tag{1}$$

где q − параметр энтропийной деформации – число, связанное с фрактальной размерностью, а для неэкстенсивных систем, являющееся мерой их неаддитивности (Tsallis, 2009); $\boldsymbol{z}=(\boldsymbol{r},\boldsymbol{c})$ − элемент объёма фазового пространства; $d\boldsymbol{z}\equiv d\boldsymbol{r}d^D\boldsymbol{c}$, где D − размерность пространства скоростей; k − постоянная Больцмана.

Аксиома 2. Экспериментально измеряемое значение любой макроскопической величины $\langle\mathcal{A}\rangle_q$ (термодинамической характеристики q-системы) задаётся соотношением

$$\langle \mathcal{A} \rangle_q \equiv \int dz \mathcal{A}(\boldsymbol{r},t) \left[f(z) \right]^q, \tag{2}$$

где $\mathcal{A}(\boldsymbol{r},t)$ − соответствующая микроскопическая величина.

Важно подчеркнуть, что энтропия $\mathcal{S}_q(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$ не является аддитивной термодинамической переменной при $q \neq 1$, поскольку

$$\mathcal{S}_q(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = \mathcal{S}_q(\mathcal{A}) + \mathcal{S}_q(\mathcal{B}) + k^{-1}(1-q)\mathcal{S}_q(\mathcal{A})\mathcal{S}_q(\mathcal{A}).$$

Несмотря на это обстоятельство, в литературе было показано, что существует значительное количество обычных статистических и термодинамических свойств, которые q-инвариантны, т. е. справедливы для любого q. К ним, в частности, относятся свойство выпуклости энтропии, структура равновесных канонических ансамблей, неаддитивная термодинамика, структура преобразования Лежандра и многое другое (см. Bibliography/ http: //tsallis.cat. cbpf.br/biblio.htm).

Определение q-гидродинамических параметров. Энтропия Тсаллиса влечёт за собой не только обобщение статистической физики и термодинамики, но и обобщение физической кинетики и гидродинамики (Oliveira, Galvao, 2018). Простейшей макроскопической величиной является q-плотность числа частиц, которая определяется соотношением

$$n_q(\boldsymbol{r},t) \equiv \int \left[f(z) \right]^q d^D \boldsymbol{c}. \tag{3}$$

Тогда массовая q-плотность равна $\rho_q(\boldsymbol{r},t) \equiv m n_q(\boldsymbol{r},t)$. Поскольку частица, движущаяся со скоростью $\boldsymbol{c}$, обладает импульсом $m\boldsymbol{c}$, то выражение

$$\boldsymbol{u}_q(\boldsymbol{r},t) \equiv \int m\boldsymbol{c} \left[f(z) \right]^q d^D \boldsymbol{c} \,/\, \rho_q(\boldsymbol{r},t) \tag{4}$$

определяет гидродинамическую скорость элемента объёма. Величина

$$\varepsilon_q(\boldsymbol{r},t) = \rho_q^{-1} \int \tfrac{m}{2} \left| \boldsymbol{c} - \boldsymbol{u}_q \right|^2 [f(z)]^q d^D \boldsymbol{c} \tag{5}$$

является удельной внутренней q-энергией (на единицу массы) неэкстенсивной системы. Потоки

$$\mathcal{P}_q(\boldsymbol{r},t) = m\int(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{u}_q)(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{u}_q)[f(\boldsymbol{z})]^q d^D\boldsymbol{c}, \tag{6}$$

$$\mathcal{J}_q(\boldsymbol{r},t) \equiv \tfrac{1}{2}m\int\left|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{u}_q\right|^2(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{u}_q)[f(\boldsymbol{z})]^q d^D\boldsymbol{c} \tag{7}$$

представляют собой соответственно тензор давлений и поток тепла. Гидростатическое q-давление определяется как

$$p_q(\boldsymbol{r},t) = \tfrac{1}{3}\mathcal{P}:\mathcal{I} = \tfrac{1}{3}m\int\left|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{u}_q\right|^2\left[f(\boldsymbol{z})\right]^q d^D\boldsymbol{c}, \tag{8}$$

где $\mathcal{I}$ − единичный тензор второго ранга. В частности, если сдвиговые напряжения равны нулю, а нормальные напряжения равны между собой, то $\mathcal{P}_q = p_q\mathcal{I}$.

Система уравнений q гидромеханики. В работах (Boghosian,1998; Kolesnichenko, Chetverushkin, 2014) в рамках неэкстенсивной статистической механики Тсаллиса было проведено методом моментов конструирование гидродинамических и квазигидродинамических уравнений на основе модифицированного кинетического уравнения Больцмана[2)] (с учетом самогравитации) с интегралом столкновений в форме Бхатнагара−Гросса− Крука):

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{c}\cdot grad + \boldsymbol{\mathcal{F}}_q\cdot grad_{\boldsymbol{c}}\right)\left[f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{c},t)\right]^q = -\frac{\left[f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{c},t)\right]^q - \left[f^{(0)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{c},t)\right]^q}{\tau}. \tag{9}$$

Здесь $grad_{\boldsymbol{c}} \equiv \boldsymbol{i}_x\partial/\partial c_x + \boldsymbol{i}_y\partial/\partial c_y + \boldsymbol{i}_z\partial/\partial c_z$; $\boldsymbol{\mathcal{F}}_q(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{f}/m - grad\,\Psi_q(\boldsymbol{r},t)$ − не зависящая от скорости внешняя сила (сила тяжести), отнесённая к единице массы; $\boldsymbol{f}$ − сила негравитационного происхождения (например, электромагнитная сила Лоренца); $\Psi_q(\boldsymbol{r},t) \equiv -G\int\frac{m}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}[f(\boldsymbol{z}',t)]^q d\boldsymbol{z}'$ − гравитационный потенциал, удовлетворяющий уравнению Пуассона $\Delta\Psi_q(\boldsymbol{r}) = 4\pi G\int mf^q d^D\boldsymbol{c}$; G − гравитационная постоянная; τ − положительный параметр, который интерпретируется

2) В цитируемой работе кинетическая теория была основана на операторе столкновений Бхатнагера─Гросса─Крука (BGK), который был обобщён для произвольного значения параметра q.

как характерное время релаксации произвольной функции распределения f к обобщённому локально- максвелловскому распределению (величина τ совпадает по порядку величины со средним временем свободного пробега частиц в системе). Равновесное распределение $f^{(0)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{c})$, в случае когда $q>1$, определяется следующей формулой (см., например, Колесниченко, 2019)

$$f^{(0)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{c})=\left\{c_{q,D}\frac{\rho_q}{m}\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{D/2}\right\}^{1/q}\left\{1-(1-q)\frac{m(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{u}_q)^2}{2kT}\right\}^{1/(1-q)}, \qquad (10)$$

где $c_{q,D}=\dfrac{(1-q)^{D/2}\Gamma(\frac{q}{1-q})}{\Gamma(\frac{q}{1-q}-\frac{D}{2})}$; $\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}dt$ – Гамма-функция.

В результате были получены следующие моментные уравнения q- гидродинамики, которые являются обобщением на произвольное q обычных гидродинамических уравнений Навье-Стокса:

$$\frac{\partial\rho_q}{\partial t}+div(\rho_q\boldsymbol{u}_q)=0, \qquad (11)$$

$$\frac{\partial(\rho_q\boldsymbol{u})}{\partial t}+Div\left(\boldsymbol{\mathcal{P}}_q+\rho_q\boldsymbol{uu}\right)=n_q\boldsymbol{f}-\rho_q\,grad\psi_q\ , \qquad (12)$$

$$\frac{\partial(\rho_q\varepsilon_q)}{\partial t}+div\left\{\boldsymbol{\mathcal{J}}_q+\rho_q\varepsilon_q\boldsymbol{u}_q\right\}+\boldsymbol{\mathcal{P}}_q:Grad\,\boldsymbol{u}_q=0. \qquad (13)$$

Уравнения (11)-(13) не является в общем случае замкнутыми, поскольку отсутствует необходимая связь (определяющие соотношения) потоковых величин ($\boldsymbol{\mathcal{P}}_q$ и $\boldsymbol{\mathcal{J}}_q$) и скалярных характеристик течения (ρ_q, $\boldsymbol{u}_q$ и T). Эта связь может быть найдена с помощью решения модельного кинетического уравнения (9) методом Чепмена− Энскога при использовании общего асимптотического разложения функции распределения по числу Кнудсена. Этот метод был использован в работе (Kolesnichenko, Chetverushkin, 2013), в результате чего были найдены определяющие соотношения, замыкающие систему (11)-(13). В частности, в случае приближения нулевого порядка, когда распределение $f\equiv f^{(0)}$ (т.е. является обобщённым локально-максвелловским распределением (10)), было показано, что тензор напряжения $\mathcal{P}_q$ сводится к шаровому тензору $\mathcal{P}_q^{(0)} \equiv p_q \mathcal{I}$, а поток тепла $\mathcal{J}_q = 0$. При этом внутренняя энергия ε_q и гидростатическое давление p_q задаются соотношениями

$$\varepsilon_q = \frac{DkT}{2m}[1+(1-q\tfrac{D}{2})]^{-1}, \tag{14}$$

$$p_q = \frac{\rho_q kT}{m[1+(1-q)\frac{D}{2}]} = \frac{2}{D}\rho_q \varepsilon_q. \tag{15}$$

Поскольку определение температуры в q-статистике достаточно произвольно (оно зависит от довольно произвольного определения температуры с точки зрения множителей Лагранжа), то далее мы будем интерпретировать величину $T_{eff} \equiv T / \left[1+(q-1)\frac{D}{2}\right]$ как обобщённую температуру сложной неаддитивной системы. Естественно, что эта температура в корне отличается от абсолютной термодинамической температуры T, характеризующей интенсивность хаотизации (беспорядочного движения) частиц системы. Заметим, что если записать через эффективную температуру T_{eff} выражение для внутренней энергии (14), то для величины ε_q получим соотношение $\varepsilon_q = DkT_{eff}/2m$, которое совпадает при $q \to 1$ и $D = 3$ с определением внутренней энергии в статистике Больцмана–Гиббса, соответствующее равному распределению энергии идеального газа по степеням свободы. Если сохранить обычные представления об обобщённой температуре T_{eff}, то тогда неравенство $\varepsilon_q > 0$ накладывает жёсткое ограничение на величину параметра деформации q: в этом случае энтропийный индекс удовлетворяет неравенству $1 < q < 1 + 2/D$.

В приближении первого порядка были найдены следующие определяющие уравнения для потока тепла $\mathcal{J}_q$ и тензора вязких напряжений $\mathcal{T}_q$:

$$\mathcal{J}_q(\boldsymbol{r},t) = -\lambda_q \, gradT, \tag{16}$$

$$\mathcal{T}(\boldsymbol{r},t) \equiv \mathcal{P}_q - p_q \mathcal{I} = \mu_q \left(Grad\boldsymbol{u} + (Grad\boldsymbol{u})^T - \frac{2}{3}\mathcal{I} div\boldsymbol{u} \right), \tag{17}$$

где $\lambda_q = \tau \frac{k p_q}{m} \frac{1 + D/2}{1 + (1-q)(1 + D/2)}$, $\mu_q = \tau p_q = \tau \frac{\rho_q k T}{m[1 + (1-q)\frac{D}{2}]}$ – соответственно коэффициенты теплопроводности и сдвиговой вязкости.

2. ЗАМКНУТАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ q-ГИДРОДИНАМИКИ ДЛЯ ДОПЛАНЕТНОГО ОБЛАКА С РАВНОВЕСНЫМ ИЗЛУЧЕНИЕМ

В эволюции многих астрофизических объектов большую роль играет давление излучения, как фактор их гидростатического равновесия. Впервые анализ неустойчивости в аккреционных дисках относительно осесимметричных возмущений с учетом давления излучения был проведен в работе Шакуры и Сюняева (Shakura, Sunyaev, 1976). В последующих работах рассматривались общие политропные модели (Camenzind и др.,1986), учитывались неосесимметричные возмущения (McKee, 1990), звуковые и эпициклические колебания (Хоперсков, Храпов,1995; Фридман, Хоперсков, 2011) и т.д.

Ниже мы используем приведенную выше систему уравнений q-гидродинамики для моделирования неустойчивости околосолнечного допланетного облака (толстого диска), вещество которого состоит из смеси идеального q-газа и чёрнотельного изотропного излучения при температуре T, распространяющегося по всем направлениям. Будем предполагать, что допланетное облако оптически толстое и распределение поля излучения близко к равновесному. Подчеркнём также, что облако в значительной мере обладает осевой симметрией, что является следствием его вращения вокруг центральной звезды. Далее будем также предполагать, что облако - самогравитирующее, для которого вертикальная структура (вдоль оси вращения) определяется балансом сил давления и гравитации самого диска.

В случае пренебрежения гидродинамическими диссипативными процессами и нагревом космического вещества, обусловленным диссипацией и процессами ионизации и возбуждения, исходная система q-уравнений, состоящая из аналога уравнений Эйлера и уравнения Пуассона, имеет вид[3] (см., например, Колесниченко, 2019):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \boldsymbol{u}) = 0, \tag{18}$$

[3]) Далее индекс "q" у ряда гидродинамических и термодинамических переменных мы будем опускать.

$$\rho\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}=-gradP-\rho grad\psi, \tag{19}$$

$$\Delta\psi=4\pi G\rho, \tag{20}$$

$$\rho\frac{d\mathcal{E}}{dt}=-Pdiv\boldsymbol{u}+\rho\frac{dQ}{dt}. \tag{21}$$

где соотношением $d\mathcal{A}/dt\equiv\partial\mathcal{A}/dt+(\boldsymbol{u}\cdot grad)\mathcal{A}$ определяется полная производная структурной величины $\mathcal{A}(\boldsymbol{r},t)$ по времени. Здесь

$$P(\boldsymbol{r},t)=p_q+p_{rad}\equiv p_q+aT^4/3, \tag{22}$$

$$\mathcal{E}(\boldsymbol{r},t)=\varepsilon_q+\varepsilon_{rad}\equiv\varepsilon_q+aT^4/\rho \tag{23}$$

− соответственно полное давление и полная внутренняя энергия (на единицу массы) смеси идеального q-газа и чёрнотельного излучения; $\rho dQ/dt=-div\boldsymbol{\mathcal{J}}_Q$; $\boldsymbol{\mathcal{J}}_Q$ − суммарный вектор теплового потока, учитывающий в принципе все термодинамически обратимые процессы, которые могут уносить тепло из элемента среды при его движении; $\varepsilon_{rad}=aT^4/\rho$ − энергия излучения чёрного тела, находящаяся в единице массы; $\varepsilon_q(\boldsymbol{r},t)=c_{vq}T(\boldsymbol{r},t)=\frac{D}{2+(1-q)D}\frac{kT(\boldsymbol{r},t)}{m}$ − внутренняя энергия (на единицу массы газовой составляющей допланетного диска); T − абсолютная температура; $p_q(\boldsymbol{r},t)=\frac{2}{2+(1-q)D}\frac{k}{m}T(\boldsymbol{r},t)\rho(\boldsymbol{r},t)=\frac{2}{D}\rho\varepsilon_q$ − газовое давление в неэкстенсивной дисковой системе (аналог закона состояния в кинетической теории идеальных газов); $p_{rad}\equiv aT^4/3$ − лучевое давление; k − постоянная Больцмана; a − постоянная излучения Стефана−Больцмана; $\psi(\boldsymbol{r},t)=-G\int_V\frac{\rho(\boldsymbol{r}',t)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}d\boldsymbol{r}'$ − гравитационный потенциал, являющийся решением уравнения Пуассона (8) (интеграл здесь берётся по всему объёму V, занимаемому допланетным облаком); G − гравитационная постоянная; $c_{vq}=\frac{D}{2+(1-q)D}\frac{k}{m}$ − удельная изохорная теплоёмкость газовой составляющей смеси. Определим также показатель адиабаты газового вещества диска как отношение $\gamma_q \equiv \gamma_{gas} = c_{pq} / c_{vq}$. Тогда

$$\gamma_q \equiv \gamma_{gas} = 2 - q + 2 / D, \quad \gamma_1 = (2 + D) / D.$$

Уравнение для полной внутренней энергии (21) удобно переписать, используя уравнение неразрывности (18), в обычной форме первого начала термодинамики $dQ / dt = d\mathcal{E} / dt + Pdv / dt$ (где $v(\boldsymbol{r}, t) = 1 / \rho$ − удельный объём), или в виде соотношения Гиббса

$$Td\mathcal{S} / dt \equiv dQ / dt = d\mathcal{E} / dt + Pdv / dt, \tag{24}$$

выражающего скорость $d\mathcal{S} / dt$ изменения энтропии $\mathcal{S}$ (на единицу массы) дискового вещества и излучения при движении элемента среды вдоль его траектории.

Изоэнтропические изменения в среде, содержащей q-газ и радиацию. Далее мы будем рассматривать такие движения космического вещества (находящегося в состоянии идеального q-газа) и чёрнотельного излучения, для которых энтропия каждой частицы среды остается в первом приближении постоянной на протяжении всего пути частицы, т.е. $d\mathcal{S} / dt \equiv \partial\mathcal{S} / \partial t + \boldsymbol{u} \cdot grad\mathcal{S} = 0$. Подобные обратимые и адиабатические движения являются изоэнтропическими. Для них энергетическое уравнение (21) сводится к уравнению

$$\rho d\mathcal{E} / dt + Pdiv\,\boldsymbol{u} = 0, \tag{25}$$

выражающему тот факт, что скорость изменения полной внутренней энергии движущегося элемента среды равна работе по сжатию этого элемента, совершаемой окружающей средой.

Вместе с тем для астрофизических целей часто удобно использовать другие формы уравнения (25) (которые впервые были выведены Эддингтоном (Eddington, 1988) и Чандрасекхаром (Chandrasekhar, 1950)). Эти формы справедливы, когда давление P и внутреннюю энергию $\mathcal{E}$ можно вычислить из соответствующих уравнений состояния как функций от удельного объёма v и температуры T (или энтропии $\mathcal{S}$) в зависимости от исследуемого процесса. Для «медленного» процесса, характеризуемого временем, много большим времени теплопередачи, любые возмущения профиля температуры будут успевать релаксировать. Следовательно, этот процесс можно рассматривать как изотермический, при котором $P = P(v, T_0) = P(v)$. «Быстрый» процесс (по сравнению с процессом теплопереноса) можно считать адиабатическим в силу нехватки времени для обмена теплом двух соседних областей: $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 = const$ и $P = P(v, \mathcal{S}_0) = P(v)$.

Из энергетического уравнения (25) для квазистатического процесса следует

$$\left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial T}\right)_v \delta T + \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial v}\right)_T \delta v + Pd\delta =$$

$$= \frac{v}{T}\left(12 p_{rad} + \frac{c_{vq}}{c_{pq} - c_{vq}} p_q\right)\delta T + (4 p_{rad} + p_q)\delta v. \tag{26}$$

Следовательно, для изоэнтропических изменений имеем

$$\left(12 p_{rad} + \frac{1}{\gamma_q - 1} p_q\right)\delta lnT + (4 p_{rad} + p_q)\delta \ln v = 0. \tag{27}$$

Введём теперь адиабатические показатели смеси вещества и излучения Γ_1, Γ_2 и Γ_3 соотношениями

$$d\,lnP / dt = \Gamma_1 d\,ln\rho / dt, \tag{28}$$

$$\frac{d}{dt} lnT = (\Gamma_3 - 1)\frac{d}{dt} ln\,\rho = \frac{\Gamma_2 - 1}{\Gamma_2}\frac{d}{dt} ln\,P, \tag{29}$$

которые могут быть использованы вместо энергетического уравнения (25). С учётом уравнения состояния «идеального q-газа» (15) можно записать

$$\delta P = \delta(p_{rad} + p_q) = (4 p_{rad} + p_q)\delta lnT - p_q \delta \ln v. \tag{30}$$

Следовательно, (28) есть не что иное, как

$$(4 p_{rad} + p_q)\delta lnT + [\Gamma_1 (p_{rad} + p_q) - p_q]\delta \ln v = 0. \tag{31}$$

Из (27) и (31) следует, что

$$\frac{12p_{rad}+(\gamma_q-1)^{-1}p_q}{4p_{rad}+p_q}=\frac{4p_{rad}+p_q}{\Gamma_1(p_{rad}+p_q)-p_q}. \qquad (32)$$

Введём теперь в рассмотрение величину $\beta = p_{gas}/P$ − коэффициент, характеризующий долю вещества в полном давлении системы[4)]. При использовании этого параметра соотношение (32) можно переписать в виде:

$$\Gamma_1=\beta+\frac{(4-3\beta)^2(\gamma_q-1)}{\beta+12(\gamma_q-1)(1-\beta)}, \quad (\gamma_q-1=1-q+2/D). \qquad (33)$$

Можно легко показать, что имеют место следующие соотношения

$$\Gamma_2=\frac{(4-3\beta)\Gamma_1}{\beta+3(1-\beta)\Gamma_1}=1+\frac{(4-3\beta)(\gamma_q-1)}{3(\gamma_q-1)(1-\beta)(4+\beta)},$$

$$\Gamma_3=1+\frac{\Gamma_1-\beta}{4-3\beta}=1+\frac{\Gamma_1(\Gamma_2-1)}{\Gamma_2}=1+\frac{(4-3\beta)(\gamma_q-1)}{\beta+12(\gamma_q-1)(1-\beta)}.$$

Если $p_{rad} \ll p_q$, то все обобщённые показатели адиабаты Γ для «q-газа +излучение» совпадают с показателем адиабаты чистого q-газа $\left(\gamma_q = 2/D + 2 - q\right)$, а когда присутствует одно лишь излучение абсолютно чёрного тела ($p_q \ll p_{rad}$), то они равны $4/3$. Таким образом, для смеси «идеального q−газа» и радиации обобщенные показатели адиабаты принимают промежуточные значения от $4/3$ до γ_q.

3. ДЖИНСКОВСКАЯ ГРАВИТАЦИОННАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ В НЕЭКСТЕНСИВНОЙ КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ

Рассмотрим теперь простейшую задачу возникновения неустойчивости в бесконечной покоящейся сферически однородной среде. Напомним, что при

[4)] На особую важность отношения $(1-\beta)$ для теории звездной структуры впервые указал Эддингтон. В известном отрывке из его книги «Внутреннее строение звезд» Эддингтон связывал это отношение с «явлением звезды» («happening of the stars»).

рассмотрении гравитационной неустойчивости Дж. Джинс рассматривал однородное состояние самогравитирующей среды в состоянии покоя, что не совсем корректно, так как такое состояние не является состоянием равновесия. Тем не менее, его вывод критерия неустойчивости можно рассматривать как первое приближение, которое в наиболее простых случаях даёт правильный порядок нижней критической длины волны возмущения, ведущего к неустойчивости (см., например, Сафронов, 1969; Фридман, Хоперсков, 2011).

Линеаризованные основные дифференциальные уравнения (18)-(21) для случая чисто радиального сферически симметричного движения с учётом допущений, что невозмущённое состояние является равновесным $(u = u_0 + u',\ u_0 = 0)$ и что уравнение Пуассона (20) можно применить лишь к возмущениям плотности (условие $\psi_0 \cong 0$ называют иногда «мошенничеством» Джинса (см. Jeans, 1909)), имеют вид:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \frac{\partial \rho_0 u}{\partial r} = 0, \tag{33}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P'}{\partial r} - \frac{\rho'}{\rho_0^2}\frac{\partial P_0}{\partial r} - \frac{\partial \psi'}{\partial r}, \tag{35}$$

$$\frac{dP'}{dt} = \Gamma_{1,0}\frac{P_0}{\rho_0}\frac{d\rho'}{dt}, \tag{36}$$

$$\frac{\partial^2 \psi'}{\partial r^2} = 4\pi G \rho'. \tag{37}$$

Уравнение (36) тривиально интегрируется. Выбирая постоянную интегрирования так, чтобы $P' = 0$ при $\rho' = 0$, получим

$$P'/P_0) = \Gamma_{1,0}\,\rho'/\rho_0. \tag{38}$$

Допустим теперь, что характерная длина, связанная с пространственными изменениями величин P_0 и ρ_0, велика по сравнению с другими характерными длинами задачи (это так называемое приближение коротковолновой акустики), т.е. можно пренебречь производными $\partial P_0 / \partial r$ и $\partial \rho_0 / \partial r$. При этих дополнительных упрощающих предположениях уравнение неразрывности, импульса и энергии легко объединить в одно уравнение для адиабатической звуковой волны[5] (см., например, Ландау, Лифшиц, 1954)

$$\frac{\partial^2\rho'}{\partial t^2}+v_{S,0}^2\frac{\partial^2\rho'}{\partial r^2}-4\pi G\rho_0\rho'=0\,. \tag{39}$$

Здесь возмущённая производная давления $\partial P'/\partial r$ выражается, согласно (38), через возмущённую производную плотности $\partial\rho'/\partial r$ в виде

$$\frac{\partial P'}{\partial r}=\frac{P_0}{\rho_0}\Gamma_{1,0}\frac{\partial\rho'}{\partial r}=v_{S,0}^2\frac{\partial\rho'}{\partial r},$$

где

$$v_{S,0}\equiv\sqrt{\frac{P_0}{\rho_0}\Gamma_{1,0}}=\left\{\frac{p_{q0}}{\rho_0}\left[1+(\Gamma_{3,0}-1)\frac{4-3\beta_0}{\beta_0}\right]\right\}^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\left\{\frac{1}{(\gamma_q-1)D/2}\frac{kT_0}{m}\left[1+\frac{(4-3\beta_0)^2(\gamma_q-1)}{\beta_0^2+12\beta_0(\gamma_q-1)(1-\beta_0)}\right]\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{40}$$

– адиабатическая (или лапласова) скорость звука. При написании (40) учтено, что

$$\frac{P_0}{\rho_0}=\frac{p_{q,0}+p_{rad,0}}{\rho_0}=\frac{1}{\beta_0}\frac{p_{q,0}}{\rho_0}=\frac{1}{\beta_0}\frac{1}{1+(1-q)D/2}\frac{kT_0}{m}=\frac{1}{\beta_0}\frac{2}{(\gamma_q-1)D}\frac{kT_0}{m}. \tag{41}$$

Заметим, что в частном случае, когда $q=1$ и $D=3$, имеем $\gamma_1=5/3$ (классический идеальный газ). Отсюда следует, что

$$v_{S,0}\equiv\left\{\frac{k}{m}T_0\left[1+\frac{2(4-3\beta_0)^2}{3\beta_0(8-7\beta_0)}\right]\right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{40*}$$

---

[5] При изучении возмущённых состояний самогравитирующего космического вещества часто приходится иметь дело с разновидностью звуковых волн.

Когда излучение также отсутствует ($\beta_0 = 1$), $v_{S,0} \equiv v_{gas,0} \equiv \sqrt{\gamma_1 kT_0 / m}$ – адиабатическая скорость звука в идеальном газе.

Если $q \neq 1$ (идеальный q-газ) и излучение отсутствует ($\beta_0 = 1$), то

$$v_{S,0} = \left(\frac{kT_0}{m} \frac{2\gamma_q}{(\gamma_q - 1)D} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{kT_0}{m} \frac{2 - q + 2/D}{(1-q)D/2 + 1} \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{40**}$$

Уравнение (39) является линейным и однородным уравнением в частных производных, следовательно, к нему применим метод нормальных колебаний (метод мод). Решая уравнения (39) для возмущённой плотности в виде $\rho' \sim exp(-i\omega t + i\mathrm{k}r)$, описывающем волны с угловой частотой ω, волновым вектором k в направлении r[6)] и длиной волны $\lambda_r = 2\pi / \mathrm{k}$, получим следующее дисперсионное уравнение для бегущей волны

$$\omega^2 - \mathrm{k}^2 \frac{p_{q,0}}{\rho_0} \left\{ 1 + \frac{\Gamma_{1,0} - \beta_0}{4 - 3\beta_0} \left(1 + 4\frac{1-\beta_0}{\beta_0} \right) \right\} + 4\pi G\rho_0 = 0, \tag{42}$$

которое с учетом соотношений (40) и (41) принимает «стандартный» вид

$$\omega^2 = \mathrm{k}^2 v_{S,0}^2 - 4\pi G\rho_0. \tag{42*}$$

Здесь адиабатическая скорость звука $v_{S,0}$ определяется формулой (40).

Для устойчивых волн с частотами ω имеем $\omega^2 > 0$, тогда как неустойчивость соответствует условию $\omega^2 < 0$. Эти два класса разделяет случай нейтральной устойчивости $\omega^2 = 0$, что соответствует модам с критической длиной волны возмущения

$$\lambda_{cr} = 2\pi / \mathrm{k}_{cr}, \quad \mathrm{k}_{cr}^2 = \omega_{cr}^2 / v_{S0}^2, \quad \omega_{cr}^2 = 4\pi G\rho_0. \tag{43}$$

---

[6]) Следует заметить, что линеаризованное уравнение импульса требует, чтобы скорость $\boldsymbol{u}$ была параллельна волновому вектору $\pm\mathbf{k}$ (см. Ландау, Лифшиц, 1954). Следовательно, скорости частиц жидкости, связанные с адиабатическими звуковыми волнами, параллельны направлению распространения волн.

Из уравнения (42*) следует, что граничное значение $\mathrm{k}=\mathrm{k}_{cr}$ разделяет устойчивые $(\mathrm{k}>\mathrm{k}_{cr})$ и неустойчивые $(\mathrm{k}<\mathrm{k}_{cr})$ пульсации плотности. При малых k (длинные волны,) пульсации будут расти со временем и появляется нестабильность Джинса, а коротковолновые пульсации плотности (большие k, малые длины волн) колеблются, т.е. распространяются в виде звуковых волн.

Таким образом, критическая длина волны возмущения

$$\lambda_{cr}=\frac{2\pi v_{S0}}{\omega_{cr}}=\sqrt{\frac{\pi v_{S0}^2}{G\rho_0}}=\left\{\frac{2\pi kT_0}{mG\rho_0 D}\left[\frac{1}{\gamma_q-1}+\frac{(4-3\beta_0)^2}{\beta_0^2+12\beta_0(\gamma_q-1)(1-\beta_0)}\right]\right\}^{\frac{1}{2}} \quad (44)$$

является размером мельчайших «капель» рассматриваемой «фрактальной» газовой среды с излучением, которые могут удерживаться вместе собственным гравитационным притяжением. Следовательно, модифицированный в рамках неэкстенсивной кинетической теории критерий неустойчивости Джинса для смеси q -газа и чёрнотельной радиации будет выглядеть следующим образом: длина неустойчивой волны возмущения λ_r должна удовлетворять неравенству

$$\lambda_r\geq\lambda_{cr}=v_{S0}\sqrt{\frac{\pi}{G\rho_0}}=\left\{\frac{\pi kT_0}{mG\rho_0}\frac{2}{(\gamma_q-1)D}\left[1+\frac{(4-3\beta_0)^2(\gamma_q-1)}{\beta_0^2+12\beta_0(\gamma_q-1)(1-\beta_0)}\right]\right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (45)$$

Заметим, что в традиционной литературе длину

$$\lambda_{\mathcal{J}}=\left(\frac{\pi v_{gas,0}^2}{G\rho_0}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{\gamma_1\pi kT_0}{mG\rho_0}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (46)$$

соответствующую размеру области сжатия самогравитирующего газа, называют длиной Джинса. С учётом (45) критерий неустойчивости Джинса в неэкстенсивной кинетике может быть переписан в виде:

$$\frac{\lambda_r}{\lambda_{\mathcal{J}}}\geq\frac{v_{S0}}{v_{gas,0}}=\left\{\frac{1}{\gamma_1}\frac{2}{(\gamma_q-1)D}\left[1+\frac{(4-3\beta_0)^2(\gamma_q-1)}{\beta_0^2+12\beta_0(\gamma_q-1)(1-\beta_0)}\right]\right\}^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\left\{\frac{1}{\gamma_1}\frac{2/D}{(1-q+2/D)}\left[1+\frac{(4-3\beta_0)^2(1-q+2/D)}{\beta_0^2+12\beta_0(1-q+2/D)(1-\beta_0)}\right]\right\}^{\frac{1}{2}}\equiv\Xi_q. \tag{46}$$

Отсюда следует:

1. Если $q=1$ (при этом $\gamma_1=1+2/D$), то фактор

$$\Xi_1\equiv\sqrt{\frac{1}{\gamma_1}}\left\{1+\frac{(4-3\beta_0)^2 2/D}{\beta_0^2+24\beta_0(1-\beta_0)/D}\right\}^{1/2}>1. \tag{47}$$

Следовательно, критическая длина волны возмущения в рассматриваемом случае больше джинсовской, т.е. благодаря давлению излучения система стабилизируется.

2. Если $q\neq 1$, но излучение отсутствует $\beta_0=1$, то фактор

$$\Xi_q=\left\{\frac{1}{\gamma_1}\left(2/D+\frac{2/D}{1-q+2/D}\right)\right\}^{1/2},\quad 0<q<1+2/D. \tag{48}$$

В этом случае критерий гравитационной неустойчивости зависит от численных значений параметров деформации q и размерности пространства скоростей D. При этом возможна ситуация, при которой гравитационно-устойчивое (на основе классической статистики Больцмана–Гиббса) облако газа, будет неустойчивым согласно неэкстенсивной статистике Тсаллиса (см. Kolesnichenko, Marov, 2014, 2016).

Связанная с λ_{cr} критическая масса (масса, содержащаяся внутри сферы диаметром λ_{cr}) определяется соотношением

$$\mathcal{M}_{cr}=(\pi/6)\rho_0\lambda_{cr}^3=\mathcal{M}_{\mathcal{J}}\Xi^3, \tag{49}$$

где $\mathcal{M}_{\mathcal{J}}\equiv(\pi/6)\rho_0\lambda_{\mathcal{J}}^3=(\pi/6)\rho_0\left(\gamma_1\pi kT_0/mG\rho_0\right)^{3/2}$ – критическая масса Джинса. Возмущения с массой $\mathcal{M}_r$, превышающей критическую массу Джинса $\mathcal{M}_{\mathcal{J}}$ ($\Xi>1$) могут расти, формируя гравитационно-ограниченные структуры, в то время как возмущения с массой $\mathcal{M}_r$ меньше $\mathcal{M}_{\mathcal{J}}$ не растут и ведут себя как акустические волны. При этом для самогравитирующих неэкстенсивных сред с излучением критические значения длины волны и массы явно зависят от энтропийного индекса q, размерности пространства скоростей D и коэффициента β, которые, являясь свободными параметрами, должны определяться в каждом конкретном случае эмпирическим путём из экспериментальных данных. Это позволяет при исследовании неустойчивости самогравитирующих космических объектов в рамках неэкстенсивной статистики более обоснованно моделировать реально складывающуюся ситуацию.

Заметим, что дальнейшее развитие предложенного здесь подхода может быть связано с учётом влияния на джинсовскую неустойчивость вращения среды, магнитного поля, вязкости и других диссипативных эффектов.

4. ИНТЕГРАЛЬНОЕ УСЛОВИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ СФЕРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕЩЕСТВА И ИЗЛУЧЕНИЯ В НЕЭКСТЕНСИВНОЙ КИНЕТИКЕ ТСАЛЛИСА

В этом разделе мы будем исходить из гипотезы Ф. Хойла (Hoyle,1960) о совместном образовании звезды (Солнца) и допланетного облака из вещества единой вращающейся звёздной туманности. Существует интегральная теорема для находящейся в гравитационном равновесии сферической конфигурации из вещества (газа) и чёрнотельного излучения, гласящая, что давление P_{ce} в центре притяжения гравитирующего облака массы $\mathcal{M}$, в котором плотность $\rho(r)$ в точке, находящейся на расстоянии r от центра, не превышает средней плотности $\overline{\rho}(r)$ внутренней части радиуса r, должно удовлетворять неравенству (см. Чандрасекхар,1950; *Теорема 6* на стр.111)

$$\frac{1}{2}G\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3}\overline{\rho}^{4/3}\mathcal{M}^{2/3} \le P_{ce} \le \frac{1}{2}G\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3}\rho_{ce}^{4/3}\mathcal{M}^{2/3}. \tag{50}$$

Здесь $\overline{\rho}$, ρ_{ce} — соответственно средняя плотность и её плотность в центре. Это означает, что давление, действующее в центре облака массы $\mathcal{M}$, должно быть промежуточным между давлениями в центрах двух конфигураций с однородной плотностью — одна с плотностью, равной средней плотности $\overline{\rho}$ конфигурации, а другая с плотностью, равной плотности ρ_{ce} в центре. В случае, когда имеются некоторые области, в которых преобладают противоположные градиенты плотности, неравенство (51) нарушается, а это означает неустойчивость. Таким образом, можно считать, что неравенство (51) эквивалентно интегральному условию устойчивости «материнской» звёздной туманности.

Получим теперь обобщение этого условия устойчивости на случай неэкстенсивной сферической массы с излучением. Используя определения параметра

β и уравнения состояния для лучевого давления, а также формулу (15) для давления q-газа, получим

$$P = \frac{1}{\beta}\frac{1}{1+(1-q)D/2}\frac{k}{m}T\rho = \frac{1}{1-\beta}\frac{1}{3}aT^4. \tag{51}$$

Отсюда следует, что

$$T = \left[\frac{3(1-\beta)}{a\beta}p_q\right]^{1/4} = \left[\frac{3}{a}\frac{1}{1+(1-q)D/2}\frac{(1-\beta)}{\beta}\right]^{1/3}\rho^{1/3}. \tag{52}$$

Теперь

$$P(\rho,q,\beta) = \left[\left(\frac{k}{m}\right)^4\frac{3(1-\beta)}{a\beta^4}\right]^{1/3}\left[\frac{1}{1+(1-q)D/2}\right]^{4/3}\rho^{4/3}. \tag{53}$$

Следовательно, в центре газовой конфигурации

$$P_{ce} = \left[\left(\frac{k}{m}\right)^4\frac{3(1-\beta_{ce})}{a\beta_{ce}^4}\right]^{1/3}\left[\frac{1}{1+(1-q)D/2}\right]^{4/3}\rho_{ce}^{4/3}. \tag{54}$$

С другой стороны, согласно неравенству (50), имеем

$$P_{ce} \le \frac{1}{2}G\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3}\mathcal{M}^{2/3}\rho_{ce}^{4/3}. \tag{55}$$

Сравнивая (55) и (50), получим:

$$\left[\left(\frac{k}{m}\right)^4\frac{3(1-\beta_{ce})}{a\beta_{ce}^4}\right]^{1/3}\left[\frac{2}{2+(1-q)D}\right]^{4/3} \le \left(\frac{\pi}{6}\right)^{1/3}G\mathcal{M}^{2/3}, \tag{56}$$

или

$$\mathcal{M} \geq \left[\frac{2}{2+(1-q)D}\right]^2 \left(\frac{6}{\pi}\right)^{1/2} \left(\frac{k}{m}\right)^2 \left[\frac{3}{a}\frac{(1-\beta_{ce})}{\beta_{ce}^4}\right]^{1/2} G^{-3/2}. \qquad (57)$$

В предыдущих неравенствах β_{ce} есть величина β в центре газовой конфигурации.

Подставляя в (57) численное значение постоянной Стефана— Больцмана $a = 8\pi^5 k^4 / 15 h^3 c^3$ (где h – постоянная Планка, c – скорость света в вакууме), будем иметь:

$$\mu^2 \mathcal{M} \left[\frac{2+(1-q)D}{2}\right]^2 \left(\frac{\beta_{ce}^4}{1-\beta_{ce}}\right)^{1/2} \geq 0.1873 \left(\frac{hc}{G}\right)^{3/2} m_H^{-2} \cong 5.48 M_\odot. \qquad (58)$$

Здесь использованы соотношения $m = \mu m_H$, где μ — средний молекулярный вес, m_H — масса атома водорода; $\left(hc/G\right)^{3/2} m_H^{-2} \approx 29.2 \mathcal{M}_\odot$; $\mathcal{M}_\odot$ — масса Солнца. Тогда правая часть неравенства

$$\mathcal{M} \geq 5.48 M_\odot \mu^{-2} \left(\frac{1-\beta_{ce}}{\beta_{ce}^4}\right)^{1/2} \left[\frac{2}{2+(1-q)D}\right]^2, \; 0 < q < 1 + 2/D \qquad (59)$$

даёт нижний предел устойчивости гравитирующего облака (сферической газовой конфигурации) с массой $\mathcal{M}$ в рамках неэкстенсивной кинетики Тсаллиса.

Заметим, что если ввести параметр β_*, который однозначно определяется массой $\mathcal{M}$ газовой конфигурации и средним молекулярным весом μ при помощи уравнения четвертого порядка[7)] (см. Чандрасекхар, 1983,1984)

$$\mu^2 \mathcal{M} \equiv \left(\frac{6}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\left(\frac{k}{m_H}\right)^4 \frac{3}{a}\frac{(1-\beta_*)}{\beta_*^4}\right]^{\frac{1}{2}} G^{-3/2} = 5.48 \left(\frac{(1-\beta_*)}{\beta_*^4}\right)^{\frac{1}{2}} \mathcal{M}_\odot, \qquad (60)$$

[7)] Из формулы (60) следует, в частности, что для звезды с массой, равной солнечной, и со средним молекулярным весом, равным единице, давление излучения в центре не может превышать трех процентов от общего давления, т.е. $1-\beta_* \cong 0.03$

то неравенство (59) можно переписать в виде

$$\frac{(1-\beta_*)}{\beta_*^4} \geq \frac{1-\beta_{ce}}{\beta_{ce}^4}\left[\frac{2}{2+(1-q)D}\right]^4, \quad (0<q<1+D/2),$$

или, поскольку функция $(1-\beta)\beta^{-4}$ монотонно увеличивается с увеличением $(1-\beta)$, так:

$$(1-\beta_{ce})\left[1+(1-q)D/2\right]^{-4} \leq (1-\beta_*). \tag{61}$$

Таким образом, для устойчивости неэкстенсивного сферического газового облака с излучением численные значения параметров β_{ce}, D и q должны удовлетворять неравенству (61).

5. ГРАВИТАЦИОННАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ДЖИНСА ДЛЯ НАМАГНИЧЕННОЙ ПЛАЗМЫ С ЧЁРНОТЕЛЬНЫМ ИЗЛУЧЕНИЕМ

Поскольку во всём космосе нет такого места, где не присутствуют магнитные поля, то уместно и в рамках неэкстенсивной гидродинамики рассмотреть гравитационную неустойчивость намагниченной плазмы с радиационными процессами. Исходные бездиссипативные уравнения в этом случае состоят из следующих уравнений: уравнений Эйлера для идеальной q-жидкости, уравнения Пуассона и уравнения магнитной индукции в магнитной гидродинамике:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+div(\rho\boldsymbol{u})=0, \tag{62}$$

$$\rho\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}=\frac{1}{c}\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{\mathcal{B}}-gradP-\rho grad\psi, \tag{63}$$

$$\frac{dT}{dt}-(\Gamma_3-1)\frac{T}{\rho}\frac{d\rho}{dt}=0, \quad \Gamma_3=1+\frac{\Gamma_1-\beta}{4-3\beta}=1+\frac{(4-3\beta)(\gamma_q-1)}{\beta+12(\gamma_q-1)(1-\beta)}, \tag{64}$$

$$\Delta\psi=4\pi G\rho, \tag{65}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{B}}}{\partial t} = rot(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{\mathcal{B}}), \quad div\boldsymbol{\mathcal{B}} = 0\,. \tag{66}$$

Здесь $\boldsymbol{\mathcal{B}} = \boldsymbol{\mathcal{B}}_0 \equiv \mathcal{B}_0 \boldsymbol{i}_z$ — магнитное поле; c — скорость света; $\boldsymbol{j} = \frac{c}{4\pi} \nabla \times \boldsymbol{\mathcal{B}}$ — сила тока; $\gamma_q - 1 = 1 - q + 2/D$.

Линеаризуем уравнения (62)-(66), предполагая, что невозмущённое состояние среды является однородным и равновесным $(\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_0 + \boldsymbol{u}',\ \boldsymbol{u}_0 = 0)$ и что $\psi_0 \cong 0$; тогда, в случае цилиндрически симметричного движения $(\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}_x x + \boldsymbol{i}_z z)$, получим[8]:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 div\boldsymbol{u} = 0\,, \tag{67}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \frac{\beta_0 P_0}{\rho_0}\left[grad\left(\frac{\rho'}{\rho_0}\right) + \frac{4 - 3\beta_0}{\beta_0} grad\left(\frac{T'}{T_0}\right)\right] +$$

$$+ grad\psi' + \frac{1}{4\pi\rho_0} \boldsymbol{\mathcal{B}}_0 \times rot\boldsymbol{\mathcal{B}}' = 0\,, \tag{68}$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} - (\Gamma_{3,0} - 1)\frac{T_0}{\rho_0}\frac{\partial \rho'}{\partial t} = 0\,, \tag{69}$$

---

[8]) Известно, что проблему устойчивости самогравитирующего двумерного газового облака в принципе нельзя описывать в рамках двумерного приближения, поскольку оно заведомо является сильно неустойчивым (см., например, Фридман, Хоперсков, 2011). Однако при наличие сильного внешнего гравитационного поля с цилиндрической геометрией и с образующей вдоль оси вращения облака возможно обеспечить его устойчивость в случае, когда угловая скорость вращения достаточно велика. В этом случае структура допланетного облака вдоль оси вращения будет определяться исключительно его самогравитацией. Разумеется, этот случай искусственный, поскольку в реальных астрофизических системах такие цилиндрические поля если и встречаются, то без вложенных дисков. Вместе с тем, рассмотрение такого вложенного в цилиндр самогравитирующего газового диска представляет определённый математический интерес, поскольку только в этом случае можно выделить эффекты, к которым приводит самогравитация в чистом виде. Именно такие модели рассматривались в большинстве классических работ по астрофизическим дискам (см., например, Goldreich, Lynden-Bell, 1965**;** Hunter ,1972; Toomre, 1964).

$$\nabla^2\psi' - 4\pi G\rho' = 0\,, \tag{70}$$

$$\frac{\partial \mathcal{B}'}{\partial t} - rot(\boldsymbol{u}\times \mathcal{B}_0) = 0\,, \quad div\mathcal{B}' = 0\,, \tag{71}$$

где $\dfrac{\beta_0 P_0}{\rho_0} = \dfrac{p_{q0}}{\rho_0} = \dfrac{k}{m_0}\dfrac{T_0}{1+(1-q)D/2}$.

Заметим, что уравнения (68) и (69) можно объединить; в результате будем иметь

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \left\{\frac{p_{q0}}{\rho_0}\left[1+(\Gamma_{3,0}-1)\frac{4-3\beta_0}{\beta_0}\right]\right\} grad\,\rho' - grad\,\psi' + \frac{1}{4\pi\rho_0}\mathcal{B}_0 \times rot\mathcal{B}' = 0\,. \tag{72}$$

Получим теперь в рамках неэкстенсивной механики Тсаллиса дисперсионное уравнение для определения критерия неустойчивости однородной плазмы с учётом воздействия радиационного давления. Используем для этого метод нормальных колебаний при условии экспоненциального возмущения всех пульсирующих параметров: ρ', u, T', ψ' и $\mathcal{B}'$, т. е. когда они пропорциональны $\sim exp(-i\,\omega t + i\,\mathrm{k}_x\,x + i\,\mathrm{k}_z\,z)$. Здесь ω — частота гармонических колебаний, $\mathrm{k}=\sqrt{\mathrm{k}_x^2+\mathrm{k}_z^2}$ — волновое число. В результате будем иметь:

$$-\omega\rho' + \rho_0 \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{u} = 0\,, \tag{73}$$

$$-\omega\rho_0\boldsymbol{u} + v_{S,0}^2\rho'\boldsymbol{k} - \rho_0\boldsymbol{k}\psi' + \frac{\mathcal{B}_0}{4\pi}\left[\boldsymbol{i}_x(\mathrm{k}_x\,\mathcal{B}_z' - \mathrm{k}_z\,\mathcal{B}_x') - \boldsymbol{i}_y\,\mathrm{k}_z\,\mathcal{B}_y'\right] = 0\,, \tag{74}$$

$$\mathrm{k}^2\,\psi' - 4\pi G\rho' = 0, \tag{75}$$

$$-\omega\mathcal{B}_x' = \mathcal{B}_0 k_z u\,, \quad -\omega\mathcal{B}_y' = \mathcal{B}_0 k_z v\,, \quad -k_x\mathcal{B}_x' = k_z\mathcal{B}_z'\,. \tag{76}$$

Из этой системы уравнений вытекает следующее алгебраическое соотношение

$$\omega^2\boldsymbol{u} - v_{S,0}^2(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{u})\boldsymbol{k} + \boldsymbol{k}\frac{4\pi G\rho_0}{\mathrm{k}^2}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{u}) - V_{Alf}^2\left(\boldsymbol{i}_x k^2 u + \boldsymbol{i}_y k_z^2 v\right) = 0\,, \tag{77}$$

где $V_{Alf} = \mathcal{B}_0 / \sqrt{4\pi\rho_0}$ – альфвеновская скорость плазмы.

Рассмотрим два простых случая:

1. Для поперечного распространения волн возмущения (когда $\mathrm{k}_x = \mathrm{k}$, $\mathrm{k}_z = 0$) уравнение (77) сводится к простому дисперсионному соотношению (сравни с (42^*))

$$\omega^2 - V_{Alf}^2\,\mathrm{k}_x^2 - v_{S,0}^2\,\mathrm{k}_x^2 + 4\pi G\rho_0 = 0, \tag{78}$$

для которого, с учётом (40), критерий гравитационной неустойчивости самогравитирующей плазмы с магнитным полем и радиационным давлением принимает вид:

$$\mathrm{k}_x^2\left\{V_{Alf}^2 + \frac{1}{(\gamma_q - 1)D/2}\frac{kT_0}{m}\left[1 + \frac{(4-3\beta_0)^2(\gamma_q - 1)}{\beta_0^2 + 12\beta_0(\gamma_q - 1)(1-\beta_0)}\right]\right\} > 4\pi G\rho_0. \tag{79}$$

2. В случае продольного (к направлению магнитного поля) распространения пульсационных волн (для которых $\mathrm{k}_z = \mathrm{k}$, $\mathrm{k}_x = 0$) уравнение (71) записывается следующим образом:

$$\omega^2\boldsymbol{u} - v_{S,0}^2(k_z^2 w)\boldsymbol{i}_z + \boldsymbol{i}_z 4\pi G\rho_0 w + V_{Alf}^2 k_z^2\left(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{i}_z w\right) = 0\,. \tag{80}$$

Отсюда для волны возмущения, направленной вдоль направления вектора магнитного поля $(\boldsymbol{u} = \boldsymbol{i}_z w)$, получим дисперсионное соотношение

$$\omega^2 - v_{S,0}^2 k_z^2 + 4\pi G\rho_0 = 0\,. \tag{81}$$

Если же $w = 0$, т.е. волна возмущения лежит в плоскости перпендикулярной к вектору магнитного поля($\boldsymbol{u} = \boldsymbol{i}_x u + \boldsymbol{i}_y v$), то из (80) следует

$$\omega^2 - V_{Alf}^2 k_z^2 = 0\,. \tag{82}$$

Таким образом, в поперечном режиме распространения волны возмущения критерий неустойчивости Джинса для плазмы модифицируется магнитным полем и радиационным давлением. В случае продольного режима на джинсовский критерий не влияет магнитное поле, поскольку этот режим обеспечивает Альфвен-режим движения отдельно от гравитационного режима.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Известно, что при неустойчивости неравновесных систем (в частности, различных астрофизических объектов) возникает динамический хаос, что делает возможным образование более сложных упорядоченных (в общем случае фрактальных) структур. Возникновение фрактальных структур подтверждается для многих астрофизических систем, в частности, у звезд, межзвездных молекулярных облаков, аккреционных допланетных дисков и т.д. При учете действия сильного гравитационного поля в моделях фрактальных космических структур возникают принципиальные трудности, поскольку для них традиционные газодинамические методы описания часто неприменимы. Преодоление этих трудностей требует нового подхода к решению эволюционных задач в космической газодинамике. Один из возможных подходов к моделированию эволюции подобных аномальных систем может быть основан на методах неэкстенсивной статистической механики Тсаллиса, как раз и предназначенной для исследования эволюции систем с сильным гравитационным взаимодействием (см., например, Kolesnichenko, Marov, 2013, 2014).

Имея в виду большое космогоническое значение проблемы гравитационной неустойчивости, в представленной работе в рамках неэкстенсивной кинетики исследовано влияние неэкстенсивности среды на критерий гравитационной неустойчивости Джинса для самогравитирующего допланетного облака, вещество которого состоит из смеси идеального q-газа и чёрнотельного излучения. Выведены дисперсионные уравнения, на основе которых выполнен анализ осесимметричных колебаний космических самогравитирующих объектов с излучением и размерностью пространства скоростей. Получены модифицированные критерии гравитационной неустойчивости Джинса как для бесконечной покоящейся сферически однородной среды, состоящей из идеального q-газа и излучения, так и для без диссипативной намагниченной плазмы с учётом радиационного давления. Кроме этого, получено модифицированное в рамках неэкстенсивной кинетики *интегральное* условие устойчивости Чандрасекхара для сферической массы q-газа и излучения. Для указанных самогравитирующих космических объектов найдены критические значения длин волн и масс, которые явно зависят от свободных параметров задачи: энтропийного индекса деформации q, размерности D пространства скоростей и коэффициента β, характеризующего долю вещества в полном давлении смеси. Это позволяет более обоснованно моделировать реальные астрофизических газо-пылевые структуры и находить соответствующие критерии их гравитационной неустойчивости.

Полученные результаты помогут, по мнению автора, лучше понять некоторые астрофизические проблемы, связанные, в частности, с моделированием процессов образования разнообразных звезд и экзопланет из звездных туманностей.

Завершая заключение, заметим, что физический смысл и численные значения параметра деформации q играют существенную роль во многих астрофизических приложениях неэкстенсивной статистики Тсаллиса. К сожалению проблема их определения всё-ещё остаётся открытой. Вместе с тем, в настоящее время имеются серьёзные успехи в современной гелиосейсмологии, которая надёжно исследует внутреннюю структуру и динамику Солнца (см. Gough, 2012). В солнечной атмосфере установлены и изучены почти 10 миллионов резонансных мод колебаний. Их частоты измерены с достаточно большой точностью, что позволяет исследовать внутреннюю структуру Солнца на больших глубинах (Gough, Hindman, 2010). Эти результаты позволяют решить не только некоторые известные проблемы космологии, но и поднимают ряд теоретических вопросов, ответы на которые необходимы для понимания того, как на самом деле эволюционирует обычная звезда. Поскольку гелиосейсмология позволяет, вообще говоря, найти экспериментальные доказательства присутствия неэкстенсивных эффектов в недрах звезды (в частности, по найденным скоростям звука), то есть надежда, что она сможет в самое ближайшее время предоставить астрономические или экспериментальные данные по численным значениям параметра q, отличным от единицы.

Работа выполнена при частичной поддержке Программы Президиума РАН № 9 и гранта РФФИ №18-01-00064.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Горькавый Н.Н., Фридман А.М. Физика планетных колец. М.: Наука. 1994. 348 с.

Колесниченко А.В. Модификация в рамках статистики Тсаллиса критериев гравитационной неустойчивости астрофизических дисков с фрактальной структурой фазового пространства // Mathematica Montisnigri. 2015. Т. 32. С. 93-118.

Колесниченко А.В. Модификация в рамках неаддитивной статистики Тсаллиса критериев гравитационной неустойчивости астрофизических дисков // Матем. Моделирование. 2016. Т. 28. № 3. С. 96-118.

Колесниченко А.В. К построению неаддитивной термодинамики сложных систем на основе статистики Курадо–Тсаллиса // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2018. № 25. 40 с.

Колесниченко А.В. Статистическая механика и термодинамика Тсаллиса неаддитивных систем. Введение в теорию и приложения. М.: ЛЕНАНД. (Синергетика: от прошлого к будущему. № 87). 2019. 360 с.

Колесниченко А.В., Маров М.Я. Модификация критерия джинсовской неустойчивости астрофизических объектов с фрактальной структурой в рамках неэкстенсивной статистики //Астроном. Вестн. 2014. Т. 48. № 5. С. 383–395.

ЛандауЛ.Д., Лифшиц Е.М. Статистическая механика. Ч. I. М.: Наука. 1976. 588 с.

Сафронов В.С. Эволюция допланетного облака и образование Земли и планет. М.: Наука. 1969. 244 с.

Фридман А.М., Хоперсков А.В. Физика галактических дисков. М.: Физматлит. 2011. 640 с.

Хоперсков А.В., Храпов С.С. Неустойчивость звуковых волн в тонком газовом диске // Письма в АЖ. 1995. Т. 21. С. 388-393.

Чандрасекхар С.Введение в учение о строении звезд. М.: Изд-во ИЛ. 1950. 476 с.

Чандрасекхар С. О звездах, их эволюции и устойчивости // УФН. 1985. Т.145. № 3. С. 489-506.

Boghosian B. M. Navier-Storts Equations for Generalized Thermostatistics // Bras. J. Phys**.** 1999. V. 29**.** № 1. P. 91-107.

Bonnor W. B. Jeans' Formula for Gravitational Instability // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 1957. V. 117. № 1. P. 104-117. (https://doi.org/10.1093/mnras/117.1.104).

Cadez V.M. Applicability problem of Jeans criterion to a stationary self-gravitating cloud // Astron. Astrophys. 1990. V. 235. P. 242-244.

Cadez V. M. Instabilities in stratified magnetized Stellar atmospheres // Publ. Astron. Obs. Belgrade. 2010. V. 90. P. 121-124.

Camenzind M., Demole F., Straumann N. The stability of radiation–pressure–dominated accretion discs // Astron.Astrophys. 1986. V. 158. P. 212-216.

Chandrasekhar S., Fermi E. Problems of gravitational stability in the Presence of a magnetic field // Astrophysical Journal. 1953. V. 118. P. 116-141.

Chandrasekhar S. Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability. Dover Publications. New York. 1981. 704 s.

Curado E.M.F., Tsallis C. Generalized statistical mechanics: connection with thermodynamics // J. Phys. 1991. A 24. P. L69-72.

Dhiman J.S., Dadwal R. On the Jeans Criterion of a Stratified Heat Conducting Gaseous Medium in the Presence of Non-uniform Rotation and Magnetic Field // Journal of Astrophysics and Astronomy. 2012.V. 33. № 4. P. 363-373.

Eddington A. S. The Internal Constitution of the Stars. Cambridge. England: Cambridge University Press. 1988. 407 p.

Fridman A.M, Polyachenko V.L. Physics of gravitating system- N.Y.: Springer-Verlag. 1984. V. 1. 468 p.; V. 2. 358 p.

Fridman A.M., Polyachenko V.L. Physics of Gravitating Systems I: Equilibrium and Stability. Springer Science & Business Media. 2012. 468 s

Goldreich P., Lynden-Bell D. I. Gravatational stability of uniformly rotating disks // MNRAS, 1965. V. 130. P. 97-124.

Gough D. O., Hindman B. Helioseismic Detection of Deep Meridional Flow // J. Astroph. 2010. V. 714. № 1.P. 960-970.

Gough D. O Heliophysics Gleaned from Seismology // Progress in solar/stellar Physics with Helio- and Asteroseismology, Proc. 65th Fujihara Seminar, Astron. Soc. Pacific Conf. Ser., 2011. V. 462. P. 429-454 (arXiv:1210.1114v1 [astro-ph.SR]. 2012).

Hunter C. Self-gravitating gaseous disks // Ann. Rev. Fluid Mech. 1972. V.4. P. 219-242.

Hoyle F. On the origin of the solar nebula // Quart. J. Roy. Astron. Soc. 1960. V.1 P. 28-55.

Jeans J.H. The stability of a spherical nebula **199** // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A. Containing Papers of a Mathematical or Physical Character. 1902. V.199 P. 1-53.

Jeans J. H. Astronomy and Cosmogony, Cambridge Univ. Press. 2009. 476 p.

Joshi H., Pensia R. K. Effect of rotation on Jeans instability of magnetized radiative quantum plasma // Physics of plasmas. 2017. V. 24. P. 032113 -1 — 032113-8.

Kaothekar S., Chhajlani R.K Jeans Instability Of Self Gravitating Partially Ionized Hall Plasma With Radiative Heat Loss Functions And Porosity // AIP Conference Proceedings **1536.** 2013**.** P.1288-1289

Kolesnichenko A.V., Chetverushkin B.N. Kinetic derivation of a quasi-hydrodinamic system of equations on the base of nonextensive statistics. RJNAMM (Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling). 2013. V.28. № 6. P. 547-576.

Kolesnichenko A.V., Marov M.Ya. Modification of the jeans instability criterion for fractal-structure astrophysical objects in the framework of nonextensive statistics // Solar System Research. 2014. V. 48. № 5. P. 354-365.

Kolesnichenko A. V., Marov M. Ya. Modification of the Jeans and Toomre instability criteria for astrophysical fractal objects within nonextensive statistics // Solar System Research. 2016. V. 50. № 4. P. 251-261.

Kumar V., Sutar D. L., Pensia, R. K., Sharma S. Effect of fine dust particles and finite electron inertia of rotating magnetized plasma // 2nd International Conference on Condensed Matter and Applied Physics (ICC 2017).AIP Conf. Proc. **1953.** 2018. P. 060036-1–060036-4;

Lima J.A. S., Silva R., Santos J. Jeans' gravitational instability and nonextensive kinetic theory // Astronomy and Astrophysics. 2002. V. 396. P. 309-313.

Low C., Lynden-Bell D. The minimum Jeans mass or when fragmentation must Ssop.// Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 1976. V. 176. № 2. P. 367-390.

Mace R. L., Verheest, Frank; Hellberg M. A. Jeans stability of dusty space plasmas // Physics Letters A. 1998. V. 237. P 146-151.

Masood W., Salimullah M., Shah H. A. A quantum hydrodynamic model for multicomponent quantum magnetoplasma with Jeans term // Physics Letters A, **372.** 2008. V.45. P. 6757-6760.

McKee M.R. The radial-azimuthal stability of accretion disks around black holes // Astron. Astrophys. 1990. V. 235. P. 521-525.

Nonextensive statistical mechanics and thermodynamics: Bibliography/ http://tsallis.cat.cbpf.br/biblio.htm.

Oliveira D. S., Galvao R. M. O. Transport equations in magnetized plasmas for non-Maxwellian distribution functions // Physics of plasmas. 2018. V. 25. P. 102308-1—102308-13.

Owen J. M., Villumsen J. Baryons V.. Dark Matter, and the Jeans Mass in Simulations of Cosmological Structure Formation //.J. Astroph. 1997. V. 481. № 1. P. 1-21.

Pandey B.P., Avinash K. Jeans instability of a dusty plasma **//** Physical Review E (Statistical Physics, Plasmas, Fluids, and Related Interdisciplinary Topics). 1994 .V. 49. № 6. P. 5599-5606.

Pensia R. K., Sutar D. L., Sharma S. Analysis of Jeans Instability of Optically Thick Quantum Plasma under the Effect of Modified Ohms law //
2nd International Conference on Condensed Matter and Applied Physics (ICC 2017).AIP Conf. Proc. **1953**, 2018. P. 060044-1–060044-4.

Sakagami M., Taruya A. Self-gravitating stellar systems and non-extensive thermostatistics // Continuum Mechanics and Thermodynamics. 2004. V. 16. № 3. P. 279-292.

Shakura N.I., Sunyaev R.A. A theory of the instability of disk accretion onto black holes and the variability of binary X-ray sources, galactic nuclei and quasars // Mon.Not.RAS, astr.Soc. 1976. V. 175. P. 613–632.

Shukla P. K., Stenflo L. Jeans instability in a self-gravitating dusty plasma // Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Scienc-es **462**. 2006. P. 403-407.

Trigger S. A., Ershkovich A. I., van Heijst G. J. F., Schram P. P. J. M. Ki-netic theory of Jeans instability // Phys. Rev. E **69**, 2004. P. 066403 –066405.

Toomre A. On the gravitational stability of a disk of stars // J. Astroph. 1964. V.139. P. 1217-1238.

Tsiklauri D. Jeans Instability of Interstellar Gas Clouds in the Background of Weakly Interacting Massive Particles // J. Astroph. 1998. V. 507. № 1. P. 226-228.

Tsintsadze N. L., Chaudhary R., Shah H. A., Murtaza G. Jeans instability in a magneto-radiative dusty plasma // Journal of Plasma Physics. 2008.V. 74. № 6. P. 847-853.

Tsallis C. Possible Generalization of Boltzmann-Gibbs-Statistics // J. Stat. Phys. 1988. V. 52. № 1/2. P. 479–487.

Tsallis C. Nonextensive Statistic: Theoretical, Experimental and Computational Evi-dences and Connections // Brazilian J. Phys. 1999. V. 29. № 1. P. 1-35.

Tsallis C. Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics. Approaching a Complex World. New York: Springer. 2009. 382 p.

Tsallis C., Mendes R.S., Plastino A.R. The role of constraints within general-ized Nonextensive statistics // Physica A. 1998. V. 261. P. 534-554.

ОГЛАВЛЕНИЕ