



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 53 за 2019 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Гаврикова Н.М., [Голубев Ю.Ф.](#)

Построение траектории
возврата с орбиты ИСП к
точке входа в атмосферу
Земли

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Гаврикова Н.М., Голубев Ю.Ф. Построение траектории возврата с орбиты ИСП к точке входа в атмосферу Земли // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2019. № 53. 39 с. doi:[10.20948/prepr-2019-53](https://doi.org/10.20948/prepr-2019-53)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2019-53>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Российской академии наук**

Н.М. Гаврикова, Ю.Ф. Голубев

**Построение траектории возврата
с орбиты ИСЛ к точке входа
в атмосферу Земли**

Москва — 2019

УДК 629.78.015:52

Гаврикова Н.М., Голубев Ю.Ф.

Построение траектории возврата с орбиты ИСЛ к точке входа в атмосферу Земли

Представлен практически полезный алгоритм для построения траектории возврата к Земле с орбиты ИСЛ с использованием трехимпульсной схемы маневрирования в рамках задачи трех тел (Земля-Луна-КА) с учетом нецентральности гравитационных полей и реальных эфемерид. Алгоритм обеспечивает выполнение терминальных условий в точке входа в атмосферу Земли.

Ключевые слова: траектория возврата, многоимпульсная схема маневрирования, задача Ламберта в постановке Бэттина

Gavrikova N.M., Golubev Yu.F.

Construction of the return trajectory from the lunar parking orbit to the Earth's atmosphere reentry point

The practically useful algorithm for construction of the return trajectory from the lunar parking orbit to the Earth's atmosphere reentry point using three-impulse maneuvering scheme for the three-body problem (the Earth, the Moon, the spacecraft) under non-central gravity field is presented. The algorithm provides fulfillment of the boundary conditions at the Earth's atmosphere reentry point.

Key words: return trajectory, multi-impulse transfer sequence, Battin's formulation of the Lambert problem

Оглавление

Введение	3
1. Системы координат	4
2. Задача о построении траектории возвращения	6
3. Алгоритм построения траектории	7
4. Определение краевых условий на правом конце	8
5. Задача Ламберта в постановке Бэттина	10
6. Северная и южная схемы перелета	13
7. Определение параметров в условном перигее	15
8. Целевой вектор состояния на границе СД Луны	20
9. Выбор начального приближения	21
10. Выбор схемы маневрирования	22
11. Одноимпульсная схема маневрирования	24
12. Трехимпульсная схема маневрирования	26
13. Решение краевой задачи	31
14. Результаты моделирования	33
Выводы	36
Библиографический список	36

Введение

Задача построения траектории возврата к Земле от Луны начала рассматриваться уже в 1960-х годах. Первые возвратные лунные миссии в СССР предполагали облет Луны («Зонд-5» – «Зонд-8»). Одной из целей этих миссий являлась отработка безопасной посадки на территорию СССР, т.е. на сушу. В миссиях «Аполло» осуществлялся возврат уже с орбиты искусственного спутника Луны (ИСЛ), а траектории возврата предполагали совершение одного маневра внутри сферы действия Луны и коррекцию траектории вне ее сферы действия. Следует отметить, что в миссиях «Аполло» предполагалось приводнение, что значительно упрощало построение траектории. Так как миссии «Аполло» были пилотируемыми, то рассматривался и вариант совершения двух маневров внутри сферы действия Луны в случае возникновения нештатных ситуаций (при такой схеме затраты топлива меньше, чем с использованием одного импульса): экипаж должен был самостоятельно рассчитать и ввести в бортовой компьютер необходимую информацию. В миссиях «Луна-16», «Луна-20» и «Луна-24», целью которых являлся возврат лунного грунта на Землю, траектория возврата строилась по схеме, аналогичной схеме проекта «Аполло»: один маневр внутри сферы действия Луны и одна коррекция траектории вне ее.

Таким образом, на текущий момент были реализованы исключительно одноимпульсные схемы маневрирования при возврате от Луны к Земле. Задача выбора оптимальной (с точки зрения затрат топлива) схемы маневрирования для подобных траекторий рассматривается с 1950-х годов, однако она до сих пор окончательно не решена (более подробно этот вопрос рассмотрен в п. 10 работы).

В российской лунной программе предусмотрена миссия «Луна-Грунт», связанная с доставкой лунного грунта на Землю. При проектировании миссии требуется учитывать возможное возникновение нештатных ситуаций. В случае если имеется возможность вывести КА на целевую орбиту ожидания, допустимо использование одноимпульсной схемы маневрирования [1]. Однако при возникновении нештатной ситуации затраты характеристической скорости при использовании одноимпульсной схемы будут значительно возрастать, что, при условии ограниченного запаса топлива, может привести к неблагоприятному исходу. Тогда проблема может быть решена с использованием многоимпульсной схемы маневрирования.

В работе рассматривается алгоритм построения траектории возврата к Земле с орбиты ИСЛ с применением одноимпульсной и трехимпульсной схем маневрирования. Основное внимание уделено алгоритму построения траектории возврата к точке входа в атмосферу, удовлетворяющей заданным ограничениям, с учетом нецентральности гравитационных полей Луны и Земли. Хотя в рамках работы не производится полноценное сравнение одноимпульсной и трехимпульсной схем маневрирования (эта задача требует отдельного рассмотрения), приведенные результаты моделирования позволяют

сделать некоторые предварительные выводы относительно целесообразности применения той или иной схемы.

1. Системы координат

В качестве инерциальных систем координат рассматриваются геоцентрическая система координат EJ2000.0 и селеноцентрическая система координат MJ2000.0 (оси этих систем параллельны осям СК J2000.0), а также Гринвичская инерциальная система координат на момент времени t (далее – ГИСК(t)), представляющая собой Гринвичскую систему координат, зафиксированную в этот момент времени.

Из неинерциальных систем координат рассматривается Гринвичская система координат (ГСК) – геоцентрическая система координат, связанная с земным эллипсоидом, нулевым меридианом которой считается меридиан, проходящий через Гринвичскую обсерваторию [5].

Если некоторый радиус-вектор или вектор скорости задан в СК, связанной с Луной, он будет обозначаться как \mathbf{p} или \mathbf{u} соответственно. Если же некоторый радиус-вектор или вектор скорости задан в СК, связанной с Землей, для него будет использоваться обозначение \mathbf{r} или \mathbf{v} соответственно.

Отметим некоторые общие обстоятельства, связанные с переходом между системами координат, которые будут использоваться ниже.

Пусть известен некоторый вектор \mathbf{p} в СК MJ2000.0 в некоторый момент времени t . Тогда соответствующий ему вектор \mathbf{r} в СК EJ2000.0 определяется как $\mathbf{r} = \mathbf{r}_M + \mathbf{p}$, где \mathbf{r}_M – это радиус-вектор центра Луны в СК EJ2000.0, который может быть вычислен с использованием эфемерид [19] (например, JPL DE 405). Аналогично осуществляется обратный переход.

Для осуществления перехода между ГСК (или ГИСК на некоторый момент времени) и EJ2000.0 необходимо рассчитывать матрицу прецессии-нутаии [5]. Расчет можно осуществлять либо самостоятельно по отчетам IERS (International Earth Rotation and Reference Systems Service) и IAU (International Astronomical Union), либо при помощи библиотеки SOFA, созданной IAU и поддерживаемой для Fortran 77 и ANSI C, либо при помощи Python-обертки для этой библиотеки (библиотека pysofa).

Наконец, отметим, что все описанные выше переходы можно осуществлять при помощи инструмента GMAT (General Mission Analysis Tool [21]) производства NASA с открытым исходным кодом. В статье [14] содержится описание как самого инструмента, так и верификации и валидации его алгоритмов. К этому инструменту в комплекте идет математическое описание (например, [13]) с формулами (либо с ссылками на источники с формулами), по которым производятся расчеты.

В расчетах, приводимых в работе, используется предположение о том, что для поиска первого приближения наклонение i_{J2000} в СК EJ2000.0 несущественно отличается от наклонения $i_{ГИСК}$ в ГИСК, зафиксированной на

некоторый момент времени t , близкий к эпохе J2000.0 (даты до 2100 года). Действительно, максимальная разница между наклонениями равна углу между базовыми плоскостями СК EJ2000.0 и ГИСК, а этот угол в рассматриваемой ситуации составляет менее 1° (на рис. 1 можно наблюдать зависимость этого угла от момента времени, для которого определена ГИСК).

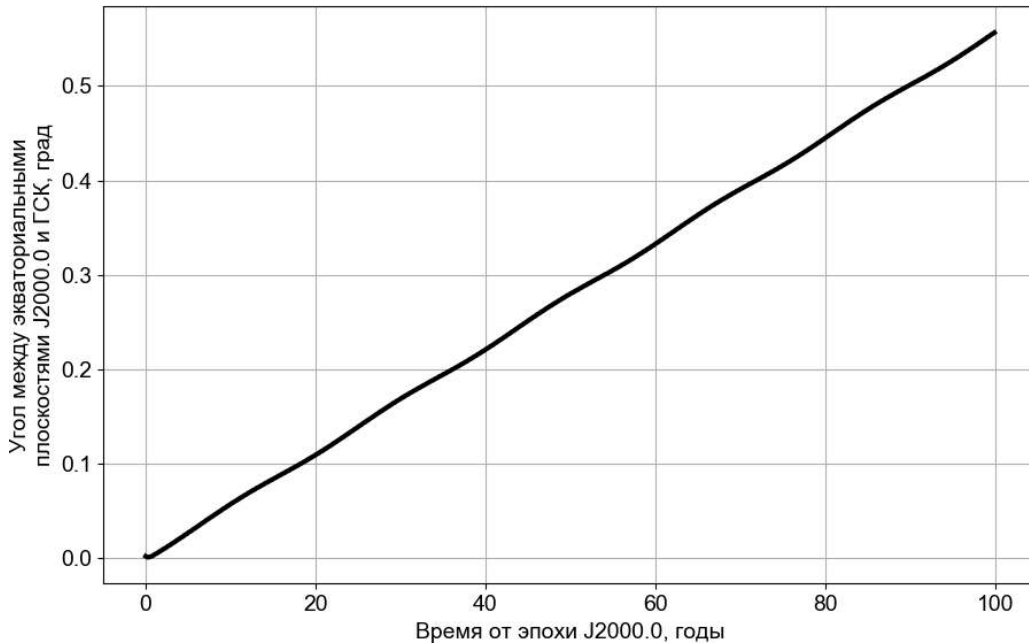


Рис. 1. Изменение угла между экваториальными плоскостями в зависимости от времени, отсчитываемого от эпохи J2000

Приведем более точные формулы для вычисления наклонения. Пусть в СК EJ2000.0 определен единичный вектор \mathbf{e} (например, нормированный радиус-вектор положения на некоторой орбите), а также задано наклонение i_{J2000} орбиты. Тогда, чтобы вычислить наклонение $i_{ГИСК}$ орбиты в ГИСК, можно воспользоваться следующим алгоритмом.

Вычисляется аргумент широты

$$u = \arcsin \frac{e_z}{\sin i_{J2000}} \quad (1)$$

и долгота восходящего узла

$$\Omega = \arctan 2 \left(e_y \cos u - e_x \cos i_{J2000} \sin u, e_x \cos u + e_y \cos i_{J2000} \sin u \right), \quad (2)$$

после чего вычисляется вектор нормали к плоскости движения

$$\mathbf{n}^{J2000} = \begin{pmatrix} \sin \Omega \sin i_{J2000} \\ -\cos \Omega \sin i_{J2000} \\ \cos i_{J2000} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

После перевода вектора \mathbf{n}^{J2000} в ГИСК из его компонент вычисляется наклонение $i_{ГИСК}$.

Аналогичным будет алгоритм для случая, если вектор \mathbf{e} и наклонение орбиты определены в ГИСК и требуется вычислить наклонение в СК EJ2000.0.

Если же вектор \mathbf{e} определен в СК EJ2000.0, а наклонение орбиты $i_{ГИСК}$ определено в ГИСК, то вектор \mathbf{e} переводится в ГИСК, и задача сводится к предыдущей.

2. Задача о построении траектории возвращения

Пусть в некоторый момент времени t_0 в системе координат MJ2000.0 задан вектор состояния КА $(\mathbf{p}_0, \mathbf{u}_0)$.

Требуется определить последовательность импульсных маневров, выполняемых внутри сферы действия (СД) Луны и приводящих КА в некоторую точку входа в атмосферу Земли при условии, что следующие параметры считаются заданными:

- широта φ_{ex} и долгота λ_{ex} точки входа в атмосферу;
- высота точки входа в атмосферу h_{ex} ;
- наклонение траектории возврата в точке входа в атмосферу i_{ex} ;
- высота условного перигея h_{π} .

При этом необходимо учитывать нецентральность гравитационных полей Луны и Земли.

Указанные параметры однозначно задают орбиту КА и точку входа относительно ГСК, однако не учитывают вращение и орбитальное движение Земли.

Уравнения движения КА в СК EJ2000.0 можно записать в следующем виде

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{f}_E(\mathbf{r}, t) + \mathbf{f}_L(\mathbf{r}, t), \quad t \in [t_0, t_{ex}], \quad (4)$$

где $\mathbf{f}_E(\mathbf{r}, t)$ – ускорение, возникающее из-за действия силы гравитационного притяжения Земли, $\mathbf{f}_L(\mathbf{r}, t)$ – ускорение, возникающее из-за действия силы гравитационного притяжения Луны, t_{ex} – момент времени достижения точки входа в атмосферу.

Если задана последовательность n импульсных маневров $\Delta \mathbf{v}_i(t_i)$, $i = \overline{1, n}$, то уравнения (4) последовательно интегрируются на отрезках $[t_0, t_1], \dots, [t_{n-1}, t_n], [t_n, t_{ex}]$ при следующих начальных условиях

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t_0) &= \mathbf{r}_0, \quad \dot{\mathbf{r}}(t_0) = \mathbf{v}_0, \\ \mathbf{r}(t_i) &= \mathbf{r}_i, \quad \dot{\mathbf{r}}(t_i) = \mathbf{v}_i + \Delta \mathbf{v}_i, \quad i = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $(\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i)$ – вектор состояния непосредственно перед совершением i -го маневра.

3. Алгоритм построения траектории

Основной задачей является построение траектории в поле притяжения Луны и Земли с учетом нецентральности гравитационных полей. Для этого в нулевом приближении удобно использовать метод игнорирования возмущений (или метод сфер влияния – МСВ [4]), который состоит в том, что при построении траектории внутри сферы действия Луны исключается гравитационное притяжение Земли, а вне ее – гравитационное притяжение Луны. Таким образом, в центральной постановке после маневрирования внутри сферы действия Луны КА должен совершать движение относительно Луны по гиперболической траектории [2] с фокусом в центре Луны (гипербола возврата), а вне ее – относительно Земли по эллиптической траектории с большим эксцентриситетом с фокусом в центре Земли.

Алгоритм построения траектории возврата можно представить в виде последовательности следующих этапов.

Первый этап (см. п. 6) – вычисление вектора состояния $(\mathbf{r}_\pi, \mathbf{v}_\pi)$ в условном перигее и времени перелета Δt от момента t_0 старта с орбиты искусственного спутника Луны до достижения условного перигея. На этом этапе используется решение задачи Ламберта в постановке Бэттина, которое подробно рассмотрено в п. 5.

Второй этап (см. п. 8) – определение однопараметрического семейства гипербол возврата к Земле, обеспечивающих достижение краевых условий в точке входа в атмосферу Земли (параметром является время попадания на границу сферы действия Луны). Каждая гипербола возврата определяется селеноцентрическим вектором состояния на момент времени ее пересечения со сферой действия Луны. Необходимость определения такого семейства гипербол обусловлена следующим. В предлагаемом алгоритме по фиксированному времени старта с околорунной орбиты t_0 вычисляется нулевое приближение целевого вектора состояния $(\mathbf{p}_{CD,0}, \mathbf{u}_{CD,0})$, соответствующее моменту достижения границы сферы действия Луны $t_{CD,0}$. Затем строится первое приближение для маневров $\{\Delta \mathbf{u}_i, t_i\}, i = \overline{1, n}$. После того как эти маневры будут учтены, момент времени достижения границы сферы действия Луны $t_{CD,1}$ и получившийся вектор состояния $(\mathbf{p}_{CD,1}, \mathbf{u}_{CD,1})$ уже не будут совпадать со значениями, выбранными для нулевого приближения, вследствие чего схему маневрирования необходимо пересчитывать.

Третий шаг (см. разделы 9–12) – вычисление начального приближения последовательности импульсных маневров и соответствующей им целевой гиперболы возврата, определяемой своим вектором состояния $(\mathbf{p}_{CD}, \mathbf{u}_{CD})$.

Наконец, последний шаг (см. п. 13) – окончательное уточнение траектории возврата, т.е. вычисление последовательности импульсных маневров $\Delta v_i(t_i)$, $i = \overline{1, n}$, обеспечивающих с некоторой точностью $(\varepsilon_\varphi, \varepsilon_i, \varepsilon_\pi)^T$ достижение параметров $(\varphi_{ex}, i_{ex}, h_\pi)^T$ при последовательном интегрировании уравнений движения (4) с начальными условиями (5).

4. Определение краевых условий на правом конце

Краевые условия, задаваемые в точке входа в атмосферу, должны быть согласованы с точкой старта от Луны с учетом движений Земли и Луны. Рассмотрим некоторые соображения, которые позволят рационально выбрать краевые условия на правом конце (в момент достижения входа в атмосферу), обеспечивающие существование решения задачи о построении траектории возвращения. Речь пойдет о следующих параметрах:

- широта φ_{ex} и долгота λ_{ex} точки входа в атмосферу;
- высота точки входа в атмосферу h_{ex} ;
- наклонение траектории возврата в точке входа в атмосферу i_{ex} ;
- высота условного перигея h_π .

Начнем с высоты условного перигея. Под условным перигеем понимается перигей упомянутой выше эллиптической траектории возврата с фокусом в центре Земли. Перигей называется условным, т.к. он, как правило, располагается на высоте менее 100 км относительно поверхности Земли, т.е. в атмосфере, и фактически не достигается. Высота условного перигея (см. [3], [7]) накладывает ограничения на значения скоростей входа v_{ex} и углов входа ϑ_{ex} в атмосферу:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \vartheta_{ex} &= -\frac{1}{1 + \sqrt{A(v_{ex})}} \sqrt{\frac{A(v_{ex})}{r_\pi / r_{амм}} - \left(1 + \sqrt{A(v_{ex})} - \frac{1}{r_\pi / r_{амм}}\right)^2}, \\ r_{амм} &= h_{амм} + R_3, \quad r_\pi = h_\pi + R_3, \\ A(v_{ex}) &= 1 + \left(v_{ex}^2 - \frac{2\mu_3}{r_{ex}}\right) C^2 / \mu_3^2, \\ C &= r_{ex} v_{ex} \cos \vartheta_{ex}, \end{aligned} \tag{6}$$

где r_{ex} – расстояние от центра Земли до точки входа (как правило, соответствует высоте 100 км над поверхностью Земли), $r_{амм}$ – расстояние от центра Земли до условной границы атмосферы Земли (как правило, соответствует высоте $h_{амм} = 100$ км), r_π – расстояние от центра Земли до условного перигея, $\mu_3 = 398600.4 \text{ км}^3/\text{с}^2$ – гравитационный параметр Земли,

$R_3 = 6371$ км – средний радиус Земли. График изолиний высоты условного перигея (в километрах) в зависимости от угла входа и скорости входа представлен на рис. 2.

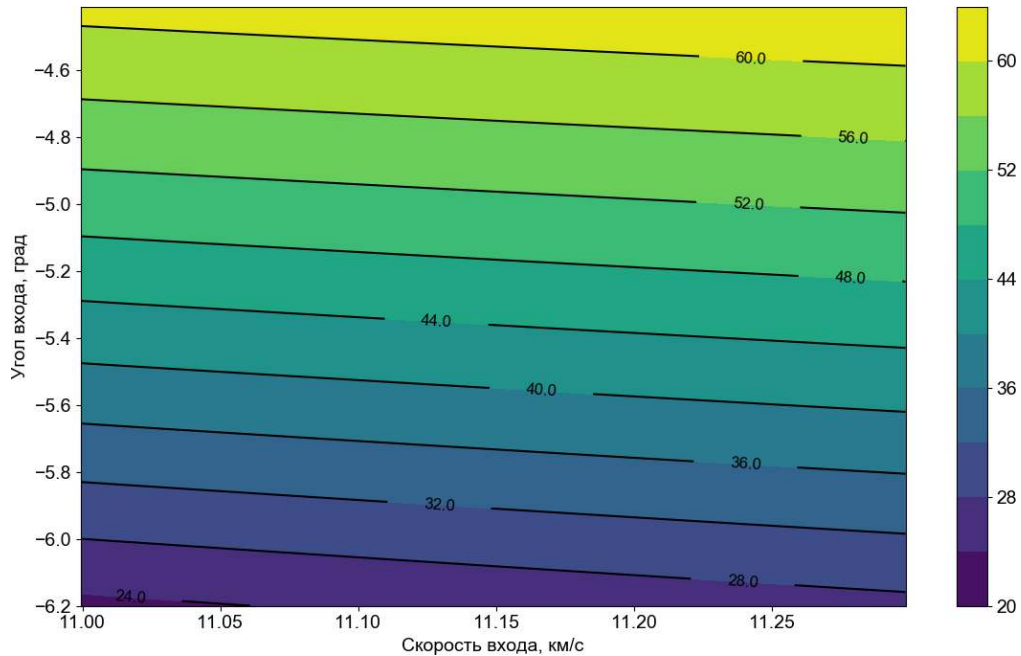


Рис. 2. Высота условного перигея (км) для различных значений параметров углов входа и скоростей входа

Наклонение траектории возврата $i_{вх}$ должно быть согласовано с широтой точки входа в атмосферу, т.к. в противном случае траектория возврата может при спуске в атмосфере не попасть в область допустимых точек посадки на поверхность Земли, находящихся на заданной широте. При спуске в атмосфере траектория искажается, а Земля вращается. Поэтому традиционно [7] принимается, что плоскость траектории возврата должна проходить не через центр полигона посадки (целевая точка) на Земле, а через некоторую упрежденную точку прицеливания, координаты которой рассчитываются по формуле

$$\lambda_u(L_\Sigma) = \lambda_u' + \Delta\lambda(L_\Sigma), \quad \varphi_u = \varphi_u', \quad (7)$$

где $\Delta\lambda(L_\Sigma) = 4.09^\circ + 0.5456 \cdot 10^{-3} \cdot (L_\Sigma - 5000)$ – параметр, характеризующий поворот Земли для достижения заданной в километрах дальности спуска в атмосфере L_Σ , λ_u', φ_u' – географические координаты центра полигона посадки.

В выражении для $\Delta\lambda$ коэффициенты определяются эмпирически [7], а задание дальности спуска в атмосфере L_Σ эквивалентно заданию долготы точки

входа в атмосферу λ_{ex} в ГИСК. Связь последних двух параметров устанавливается формулой (8) [7]:

$$\lambda_{ex} = \lambda_u(L_\Sigma) - \arccos \frac{\cos(L_\Sigma / R_E) - \sin \varphi_{ex} \sin \varphi_u}{\cos \varphi_{ex} \cos \varphi_u}. \quad (8)$$

Плоскость траектории возврата должна проходить через две точки, координаты которых известны: через точку входа в атмосферу и через упрежденную точку прицеливания. Тогда наклонение траектории возврата в ГИСК, зафиксированной на момент входа в атмосферу, вычисляется по формуле

$$i_{ex} = \arccos \frac{\sin(\lambda_u - \lambda_{ex}) \cos \varphi_{ex} \cos \varphi_u}{\sin(L_\Sigma / R_E)}, \quad (9)$$

которая справедлива только в предположении отсутствия бокового маневра на атмосферном участке. В настоящем препринте для расчета наклонения орбиты применялись формулы (7), (8), (9).

5. Задача Ламберта в постановке Бэттина

Пусть для некоторой эллиптической орбиты относительно притягивающего центра известны радиус r_π ее перицентра, радиус некоторой точки на орбите r_0 , а также время перелета Δt от перицентра до этой точки. Требуется найти параметры орбиты и истинную аномалию \mathcal{G}_0 точки r_0 при условии, что $\mathcal{G}_0 \leq 180^\circ$ (т.е. движение происходит в одной полуплоскости относительно линии апсид эллипса).

Решение задачи находится из уравнения (10), например, при помощи метода Ньютона.

$$\Delta t = \sqrt{\frac{a^3}{\mu_E}} \{(\varepsilon - \sin \varepsilon - \pi) - (\delta - \sin \delta)\}, \quad (10)$$

$$\varepsilon = 2 \arcsin \sqrt{\frac{r_0 + r_\pi + c}{4a}}, \quad \delta = 2 \arcsin \sqrt{\frac{r_0 + r_\pi - c}{4a}}, \quad (11)$$

$$c = \sqrt{r_0^2 + r_\pi^2 - 2r_0 r_\pi \cos \mathcal{G}_0}, \quad a = \frac{r_\pi \cdot (r_\pi - r_0 \cos \mathcal{G}_0)}{2r_\pi - r_0(1 + \cos \mathcal{G}_0)}. \quad (12)$$

В формуле (12) представлены выражения для вычисления большой полуоси a орбиты и хорды c (см. рис. 3), соединяющей два положения на орбите (перицентр и точку r_0).

Решение, вообще говоря, существует не для любых соотношений параметров r_0 , r_π и Δt . Укажем необходимые условия для существования решения, а также область, в которой его следует искать.

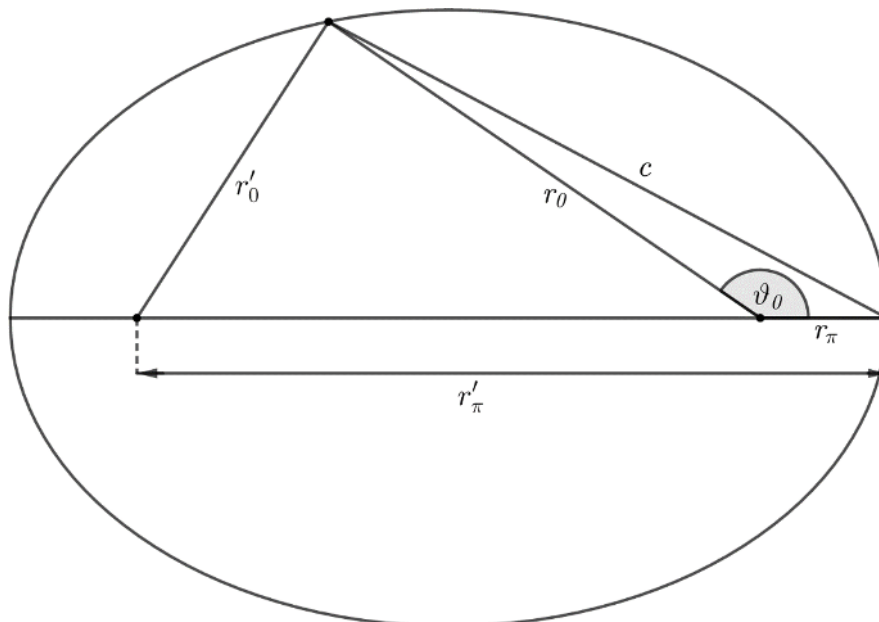


Рис. 3. Задача Ламберта в постановке Бэттина

Пусть $r'_0 = 2a - r_0$ и $r'_\pi = 2a - r_\pi$ – радиусы соответствующих положений относительно второго фокуса. Из неравенства $r'_0 + r'_\pi \geq c$ следует

$$a \geq \frac{c + r_0 + r_\pi}{4}, \quad (13)$$

которое служит необходимым условием для существования эллиптической орбиты, проходящей через точки с радиусами r_π и r_0 .

Найдем области, в которых может находиться решение \mathcal{G}_0 . Для этого, исходя из (10), представим неравенство $a > 0$ в следующем виде (фигурная скобка обозначает совместное выполнение двух условий, квадратная – выполнение хотя бы одного из условий):

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} r_\pi - r_0 \cos \mathcal{G}_0 > 0 \\ 2r_\pi - r_0(1 + \cos \mathcal{G}_0) > 0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} r_\pi - r_0 \cos \mathcal{G}_0 < 0 \\ 2r_\pi - r_0(1 + \cos \mathcal{G}_0) < 0 \end{array} \right. \end{array} \right], \quad (14)$$

что равносильно следующей группе неравенств

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \cos \vartheta_0 < r_\pi / r_0 \\ \cos \vartheta_0 < 2r_\pi / r_0 - 1 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \cos \vartheta_0 > r_\pi / r_0 \\ \cos \vartheta_0 > 2r_\pi / r_0 - 1 \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (15)$$

Учитывая, что $\vartheta_0 \in [0, \pi]$ и $\frac{r_\pi}{r_0} \leq 1$, в результате получим следующие неравенства

$$\left[\begin{array}{l} \arccos(2r_\pi / r_0 - 1) \leq \vartheta_0 \leq \pi \\ 0 \leq \vartheta_0 \leq \arccos(r_\pi / r_0) \end{array} \right. \quad (16)$$

При изменении истинной аномалии в интервале $0 \leq \vartheta_0 \leq \arccos(r_\pi / r_0)$ большая полуось будет изменяться в интервале $a \in [0, r_\pi / 2]$, уменьшаясь от $r_\pi / 2$ до 0 (пример зависимости большой полуоси от истинной аномалии для движения в окрестности Земли приведен на рис. 4). Однако условие (13) не выполняется на интервале $0 \leq \vartheta_0 \leq \arccos(r_\pi / r_0)$, так что этот интервал следует исключить из рассмотрения.

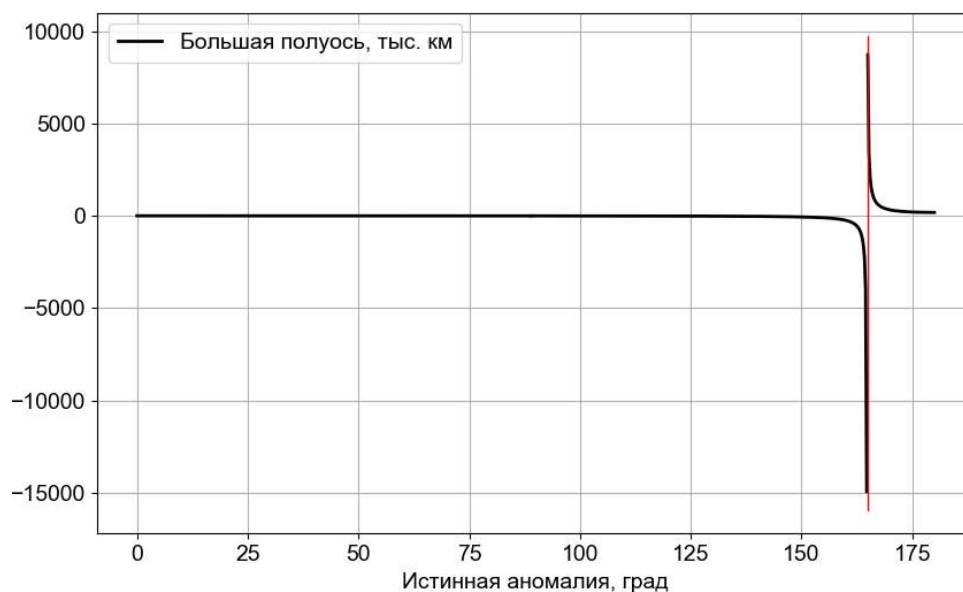


Рис. 4. Зависимость большой полуоси от истинной аномалии

Решение задачи лежит в интервале $\arccos(2r_\pi / r_0 - 1) \leq \vartheta_0 \leq \pi$, в нем большая полуось уменьшается от $+\infty$ до $(r_\pi + r_0) / 2$, а необходимое условие (13) существования орбиты выполняется для всех значений истинной аномалии.

Наконец, исследуем ограничения на время движения Δt . Характерная зависимость времени перелета от истинной аномалии для области, в которой может существовать решение, представлена на рис. 5. Как видно из рисунка,

функция $\Delta t(\mathcal{G}_0)$ монотонно возрастает на полуинтервале $(\arccos(2r_\pi/r_0 - 1), \pi]$ (в этом несложно убедиться, сделав несложные аналитические преобразования). При этом в точке $\mathcal{G}_0 = \arccos(2r_\pi/r_0 - 1)$ величина большой полуоси стремится к $+\infty$, и эту точку следует исключить из рассмотрения.

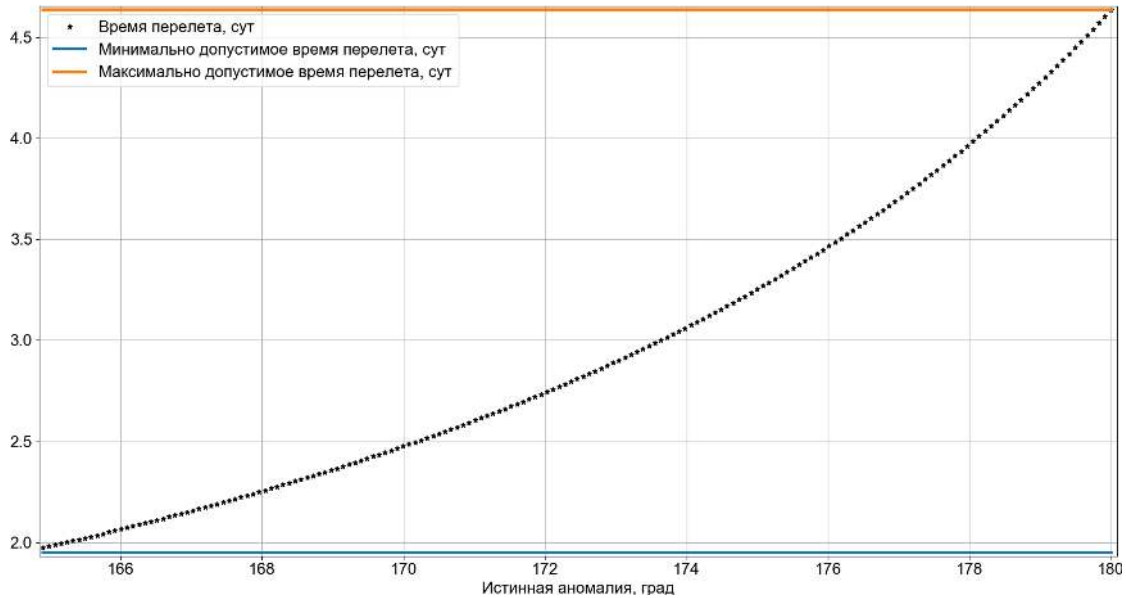


Рис. 5. Зависимость времени перелета от истинной аномалии

Таким образом, ограничения на время перелета определяются в соответствии с формулами:

$$\Delta t_{\min} \leq \Delta t \leq \Delta t_{\max},$$

$$\Delta t_{\min} = \Delta t(\arccos(2r_\pi/r_0 - 1) + \nu), \quad (17)$$

$$\Delta t_{\max} = \Delta t(\pi) = \pi \sqrt{\frac{(r_\pi + r_0)^3}{8\mu}},$$

где ν – это некоторый малый параметр (к примеру, $\nu = 0.001^\circ$), позволяющий избавиться от неопределенности функции $\Delta t(\mathcal{G}_0)$ в точке $\mathcal{G}_0 = \arccos(2r_\pi/r_0 - 1)$.

Таким образом, решение задачи Ламберта в постановке Бэттина существует на полуинтервале $\arccos(2r_\pi/r_0 - 1) < \mathcal{G}_0 \leq \pi$, при этом для существования решения должно выполняться условие (17), а также, очевидно, должно быть $r_0 \geq r_\pi$.

6. Северная и южная схемы перелета

Рассмотрим орбиту возвращения к Земле, заданную в некоторой инерциальной геоцентрической СК OXYZ, ось OZ которой направлена на

Север, а плоскость OXY является экваториальной. Пусть она проходит через некоторую точку A , имеющую в этой СК широту φ , долготу λ и наклонение i .

Долгота Ω восходящего узла орбиты определяется в зависимости от схемы перелета [18].

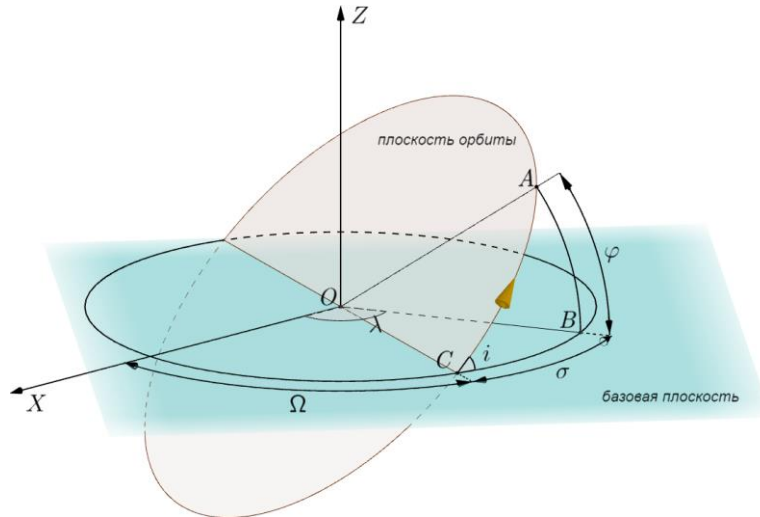


Рис. 6. Вычисление долготы восходящего узла для северной схемы

Если перелет происходит по северной схеме (т.е. подлет к точке посадки осуществляется в направлении с юга на север, см. рис. 6), то $\Omega = \Omega_N(\varphi, \lambda, i)$ вычисляется по формуле

$$\Omega_N(\varphi, \lambda, i) = \lambda - \sigma, \quad (18)$$

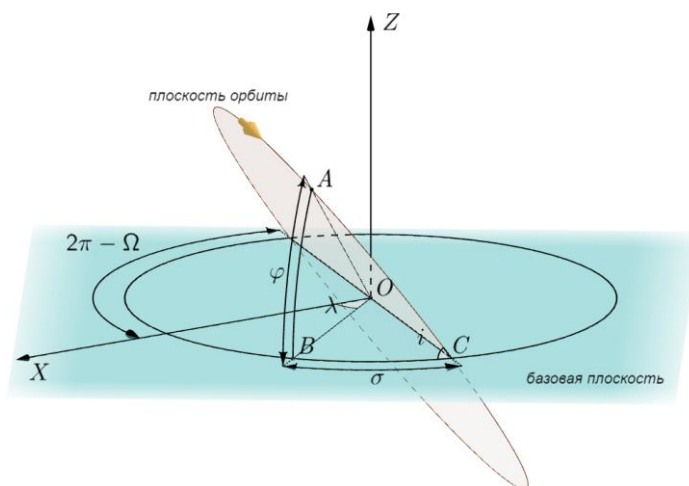


Рис. 7. Вычисление долготы восходящего узла для южной схемы

а если по южной схеме (т.е. подлет к точке осуществляется в направлении с севера на юг, см. рис. 7), то $\Omega = \Omega_S(\varphi, \lambda, i)$ вычисляется по формуле

$$\Omega_s(\varphi, \lambda, i) = \lambda + \sigma + \pi, \quad (19)$$

где σ – это вспомогательный угол, определяющийся из сферического прямоугольного треугольника ABC по формуле $\sin \sigma = \operatorname{tg} \varphi / \operatorname{tg} i$.

7. Определение параметров в условном перигее

Рассмотрим задачу двух тел (Земля, КА), в которой КА движется к Земле по эллиптической орбите. Обозначим Δt время движения КА от начального положения в момент времени t_0 до условного перигея. Пусть известны:

- географические широта φ_{ex} и долгота λ_{ex} точки входа в атмосферу в ГИСК($t_0 + \Delta t$), соответствующей моменту времени $t_0 + \Delta t$;
- наклонение i_{ex} орбиты возврата к точке входа в ГИСК($t_0 + \Delta t$);
- высота условного перигея h_π ;
- момент времени начала движения t_0 ;
- радиус-вектор ρ_0 КА в СК MJ2000.0 в момент времени t_0 .

Требуется найти вектор состояния $(\mathbf{r}_\pi, \mathbf{v}_\pi)$ в условном перигее в СК EJ2000.0, а также оценить время перелета Δt от момента t_0 до достижения условного перигея.

По радиус-вектору ρ_0 КА в СК MJ2000.0 в момент времени t_0 , определяется радиус-вектор \mathbf{r}_0 КА в СК EJ2000.0 на этот же момент времени. Таким образом, орбита содержит как известное положение \mathbf{r}_0 , так и пока неизвестное положение перицентра \mathbf{r}_π .

К моменту t_0 центр Луны должен находиться приблизительно в апоцентре искомой эллиптической орбиты (см. рис. 8), а начальное положение \mathbf{r}_0 должно быть очень близким к апоцентру. Учитывая, что движение будет происходить в одной полуплоскости эллипса относительно линии апсид, а начальное положение очень близко к апоцентру, то, как показывают предварительные расчеты, время перелета от \mathbf{r}_0 до \mathbf{r}_π окажется в интервале $\Delta t \in [4, 5.5]$ сут. Нижняя граница этого интервала чуть меньше половины периода рассматриваемой эллиптической орбиты в случае, если расстояние между Землей и Луной минимально (порядка 358000 км), а верхняя граница соответствует половине периода в случае максимального расстояния между Землей и Луной (порядка 418000 км).

Для уточнения значения времени перелета Δt используется метод долготной привязки концов траектории перелета [4]. При использовании этого метода долгота восходящего узла орбиты $\Omega^{ГИСК}$ вычисляется в ГИСК($t_0 + \Delta t$) двумя способами.

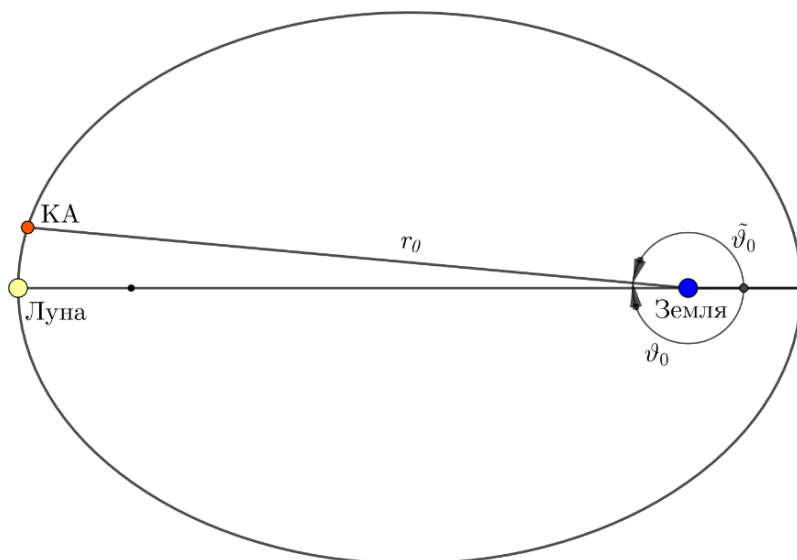


Рис. 8. Движение в прямом и обратном времени

По первому способу долгота восходящего узла $\Omega_1^{ГИСК}$ определяется непосредственно с помощью известных широты φ_{ex} , долготы λ_{ex} и наклона i_{ex} либо как $\Omega_1^{ГИСК} = \Omega_N(\varphi_{ex}, \lambda_{ex}, i_{ex})$, либо как $\Omega_1^{ГИСК} = \Omega_S(\varphi_{ex}, \lambda_{ex}, i_{ex})$ – в зависимости от схемы перелета.

По второму способу долгота восходящего узла $\Omega_2^{ГИСК}(\Delta t)$ рассчитывается в зависимости от времени перелета Δt . Для этого сначала требуется найти долготу восходящего узла орбиты в СК EJ2000.0. Она определяется в соответствии с той схемой перелета, которая была выбрана для расчета $\Omega_1^{ГИСК}$: либо $\Omega_2^{J2000} = \Omega_N(\varphi_0, \lambda_0, i_0)$, либо $\Omega_2^{J2000} = \Omega_S(\varphi_0, \lambda_0, i_0)$. Здесь φ_0 и λ_0 – географические широта и долгота околорунного положения в СК EJ2000.0, определяемые из соотношений

$$\lambda_0 = \arctan 2(r_{0y}, r_{0x}), \quad \varphi_0 = \arcsin \frac{r_{0z}}{\sqrt{r_{0x}^2 + r_{0y}^2}}, \quad (20)$$

а i_0 – наклонение траектории возврата в СК EJ2000.0. Так как рассматриваемые даты старта близки к эпохе J2000.0, допустимо принять i_0 равным наклону i_{ex} , определенному в ГИСК($t_0 + \Delta t$) (см. п. 4).

Найдем единичный вектор нормали к плоскости орбиты в СК EJ2000.0:

$$\mathbf{n}^{J2000} = \begin{pmatrix} \sin \Omega_2^{J2000} \sin i_{ex} \\ -\cos \Omega_2^{J2000} \sin i_{ex} \\ \cos i_{ex} \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Для вычисления долготы восходящего узла $\Omega_2^{\text{ГИСК}}$ необходимо перевести вектор \mathbf{n} в ГИСК($t_0 + \Delta t$), после чего несложно найти долготу

$$\Omega_2^{\text{ГИСК}}(\Delta t) = \arctan 2(n_x^{\text{ГИСК}}(\Delta t), -n_y^{\text{ГИСК}}(\Delta t)). \quad (22)$$

Время перелета определяется из уравнения $\Omega_1^{\text{ГИСК}} = \Omega_2^{\text{ГИСК}}(\Delta t)$ с учетом условия $\Delta t \in [4, 5.5]$ суток. Рассмотрим эту процедуру подробнее.

Выберем некоторое промежуточное значение Δt_0 , например $\Delta t_0 = 4.5$ суток, и вычислим $\Omega_2^{\text{ГИСК}}(\Delta t_0)$. Если $\Omega_2^{\text{ГИСК}}(\Delta t_0) \neq \Omega_1^{\text{ГИСК}}$ (в противном случае $\Delta t = \Delta t_0$ и задача решена), то требуется найти поправку τ к времени Δt_0 , чтобы определить истинное время перелета как $\Delta t = \Delta t_0 + \tau$. Обозначим ω_E скорость вращения Земли. Возможны две ситуации:

1. $\Omega_2^{\text{ГИСК}}(\Delta t_0) > \Omega_1^{\text{ГИСК}}$. Если выполняется $\Omega_2^{\text{ГИСК}}(\Delta t_0) - \Omega_1^{\text{ГИСК}} < \pi$, то подлет произошел раньше нужного момента (см. рис. 9, цветом обозначены секторы, соответствующие углам, на которые надо изменить $\Omega_2^{\text{ГИСК}}(\Delta t_0)$, красным цветом – больший угол, зеленым цветом – меньший) и $\tau = \frac{\Omega_2^{\text{ГИСК}}(\Delta t_0) - \Omega_1^{\text{ГИСК}}}{\omega_E}$.

В противоположном случае (см. рис. 10) подлет произошел позже нужного момента и тогда $\tau = -\frac{2\pi + \Omega_1^{\text{ГИСК}} - \Omega_2^{\text{ГИСК}}(\Delta t_0)}{\omega_E}$.

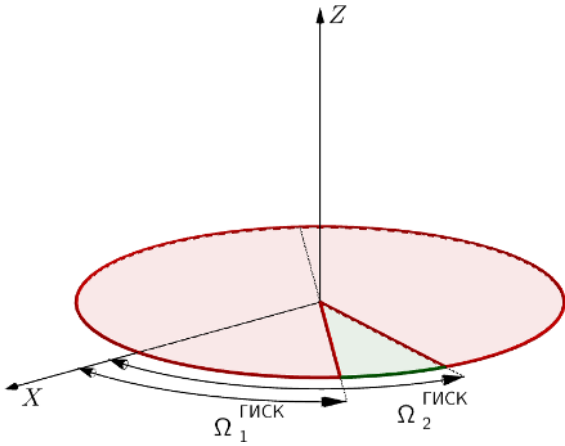


Рис. 9. Вычисление поправки (а)

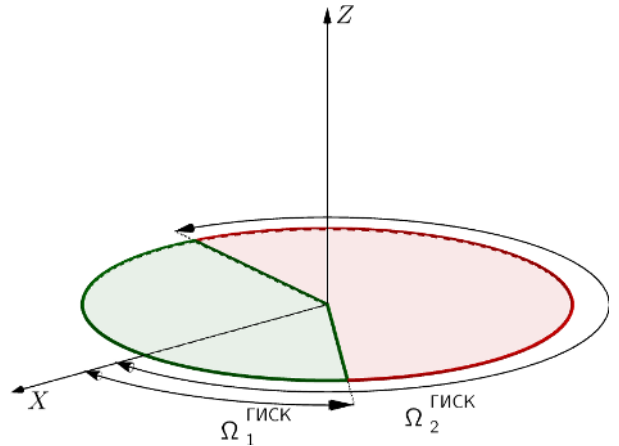


Рис. 10. Вычисление поправки (б)

2. $\Omega_2^{\text{ГИСК}}(\Delta t_0) < \Omega_1^{\text{ГИСК}}$. Если выполнено $\Omega_1^{\text{ГИСК}} - \Omega_2^{\text{ГИСК}}(\Delta t_0) < \pi$, то подлет произошел позже нужного момента (см. рис. 11) и $\tau = -\frac{\Omega_1^{\text{ГИСК}} - \Omega_2^{\text{ГИСК}}(\Delta t_0)}{\omega_E}$. В

противоположном случае подлет произошел раньше нужного момента (см. рис. 12) и $\tau = \frac{2\pi + \Omega_2^{\text{ГИСК}}(\Delta t_0) - \Omega_1^{\text{ГИСК}}}{\omega_E}$.

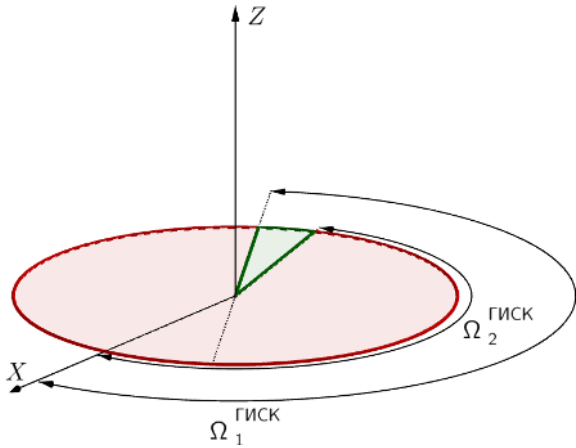


Рис. 11. Вычисление поправки (в)

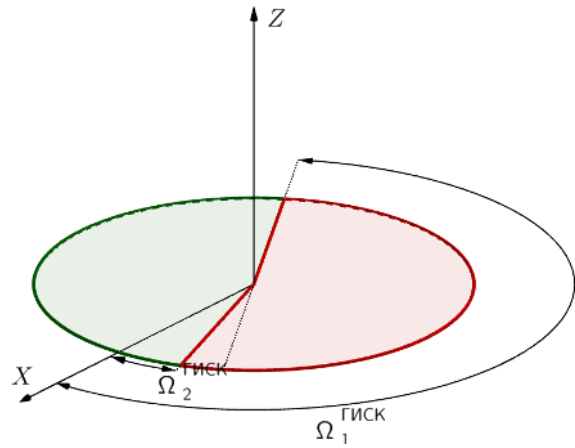


Рис. 12. Вычисление поправки (г)

После того как для эллиптической орбиты определены долгота восходящего узла и наклонение, можно найти остальные параметры. Сначала необходимо вычислить истинную аномалию \mathcal{G}_0 точки \mathbf{r}_0 . Для этого решается задача Ламберта в постановке Бэттина (см. пункт 5): используются заданное расстояние r_0 от центра Земли, расстояние от центра Земли до условного перигея (т.е. до перицентра этой орбиты) $r_\pi = h_\pi + R_E$ и найденное время перелета Δt . Напомним, что при стандартном решении задачи Ламберта в постановке Бэттина рассматривается движение от перицентра к точке, а при возвращении к Земле движение происходит от точки к перицентру, т.е. истинная аномалия $\mathcal{G}_0 > \pi$. Другими словами, стандартное решение задачи Ламберта в постановке Бэттина $\tilde{\mathcal{G}}_0$ соответствует движению по эллиптической орбите в обратном времени (см. рис. 8), т.е. $\mathcal{G}_0 = 2\pi - \tilde{\mathcal{G}}_0$. Наконец, по найденной истинной аномалии \mathcal{G}_0 согласно формуле (12) вычисляется большая полуось a .

Зная истинную аномалию \mathcal{G}_0 и аргумент широты орбиты [6]:

$$u = \arctan \frac{r_{0z} / \sin i_{ex}}{r_{0x} \cos \Omega^{J2000} + r_{0y} \sin \Omega^{J2000}}, \quad (23)$$

можно определить аргумент перигея орбиты $\omega = u - \mathcal{G}_0$.

После того как стали известны все параметры орбиты, можно найти вектор состояния $(\mathbf{r}_\pi, \mathbf{v}_\pi)$ по формулам [6]

$$\mathbf{r}_\pi = r_\pi \cdot \mathbf{r}^0, \mathbf{v}_\pi = \sqrt{\mu \left(\frac{2}{r_\pi} - \frac{1}{a} \right)} \cdot \mathbf{n}^0, \quad (24)$$

$$\mathbf{r}^0 = \begin{pmatrix} \cos u \cos \Omega^{J2000} - \cos i_{ex} \sin u \sin \Omega^{J2000} \\ \cos u \sin \Omega^{J2000} + \cos i_{ex} \sin u \cos \Omega^{J2000} \\ \sin i_{ex} \sin u \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{n}^0 = \begin{pmatrix} -\sin u \cos \Omega^{J2000} - \cos i_{ex} \cos u \sin \Omega^{J2000} \\ -\sin u \sin \Omega^{J2000} + \cos i_{ex} \cos u \cos \Omega^{J2000} \\ \sin i_{ex} \cos u \end{pmatrix}.$$

Итак, для вычисления вектора состояния в условном перигее используется следующая процедура:

1. методом долготной привязки вычисляются время перелета и два элемента орбиты (долгота восходящего узла и наклонение);
2. решается задача Ламберта в постановке Бэттина, и по времени перелета находятся истинная аномалия окололунного положения, эксцентриситет и большая полуось орбиты;
3. по всем полученным параметрам определяется вектор состояния в условном перигее.

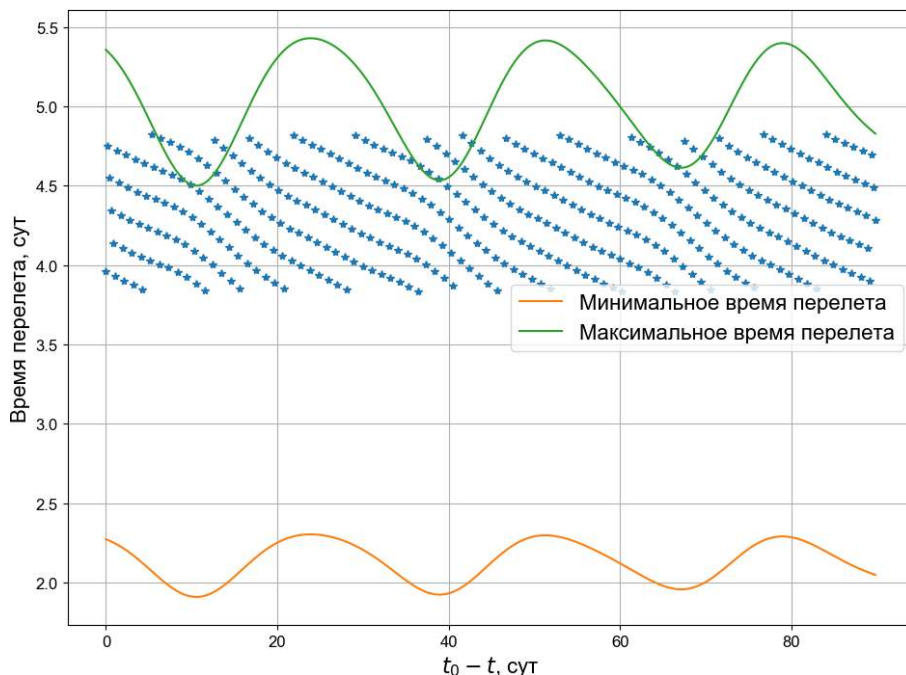


Рис. 13. Зависимость времени перелета от времени старта

Следует отметить, что не для любого момента времени старта t_0 существует эллиптическая орбита, обеспечивающая попадание в условный перигей. Зададим некоторое опорное время t и будем изменять момент времени старта в интервале $T = [t, t + 90 \text{сут}]$, выполняя первые два этапа

описанной выше процедуры. Ширина интервала выбрана из соображения наглядности демонстрируемых результатов. Для каждого момента времени $t_0 \in T$ вычисляется геоцентрическое начальное положение $\mathbf{r}_0(t_0)$, после чего вычисляется время перелета Δt . На рис. 13 синими точками показаны значения времени перелета, а также границы допустимого времени перелета (нижняя граница обозначена оранжевым цветом, верхняя граница – зеленым), определенные в соответствии с формулами (17). В случае если время перелета превышает максимально допустимое значение, задача Ламберта в постановке Бэттина не имеет решения.

8. Целевой вектор состояния на границе СД Луны

Предположим, что известны целевой вектор состояния в условном перигее $(\mathbf{r}_\pi, \mathbf{v}_\pi) = (\mathbf{r}_\pi(t_0), \mathbf{v}_\pi(t_0))$, момент времени старта t_0 и время перелета по эллиптической орбите, описанной в п. 6, $\Delta t = \Delta t(t_0)$. Тогда КА должен оказаться в условном перигее в момент времени $t_0 + \Delta t$. Пользуясь методом игнорирования возмущений, представим траекторию возврата составленной из двух частей: части, расположенной внутри СД Луны, и части траектории, расположенной вне СД Луны. Относительно Луны часть траектории, расположенная внутри СД Луны, является ветвью гиперболы с притягивающим центром в центре Луны. Часть траектории, расположенная вне СД Луны, является дугой эллипса с притягивающим центром в центре Земли. При этом для указанной эллиптической траектории вектор состояния в перицентре равен $(\mathbf{r}_\pi, \mathbf{v}_\pi)$, а момент времени прохождения перицентра равен $t_0 + \Delta t$. Требуется определить вектор состояния на границе СД Луны описанной выше гиперболической траектории (гиперболы возврата).

Проинтегрируем траекторию в обратном времени от момента $t_0 + \Delta t$ и вектора состояния $(\mathbf{r}_\pi, \mathbf{v}_\pi)$ до момента достижения границы сферы действия Луны t_{CD} (т.е. до выполнения условия $\rho_{CD} = 66000$ км [6]). Пусть в момент времени t_{CD} КА имеет вектор состояния $(\mathbf{r}_{CD}, \mathbf{v}_{CD})$ в СК EJ2000.0. Вычислим соответствующий ему вектор состояния $(\mathbf{p}_{CD}, \mathbf{u}_{CD})$ в СК MJ2000.0.

Таким образом, для каждого момента времени t_0 будут определены вектор состояния на границе сферы действия $(\mathbf{p}_{CD}(t_0), \mathbf{u}_{CD}(t_0))$ и момент времени попадания на границу сферы действия $t_{CD}(t_0)$. Варьируя момент времени t_0 (при этом сохраняя вектор состояния КА в начальный момент времени) в некотором интервале $t_0 \in [t', t'']$, можно определить как зависимости $(\mathbf{p}_{CD}(t_0), \mathbf{u}_{CD}(t_0))$, $t_{CD}(t_0)$, так и зависимость $(\mathbf{p}_{CD}(t_{CD}), \mathbf{u}_{CD}(t_{CD}))$.

Чтобы достичь вектора состояния $(\mathbf{r}_\pi(t_0), \mathbf{v}_\pi(t_0))$ в условном перицентре у Земли в момент времени $t_0 + \Delta t$, КА должен оказаться на границе СД Луны в момент времени $t_{CD}(t_0)$ и иметь вектор состояния $(\boldsymbol{\rho}_{CD}(t_{CD}), \mathbf{u}_{CD}(t_{CD}))$. Следовательно, если КА оказался на границе СД Луны в какой-либо из моментов времени $t_{CD}(t_0)$, $t_0 \in [t', t'']$ и в этот момент времени имеет вектор состояния $(\boldsymbol{\rho}_{CD}(t_{CD}), \mathbf{u}_{CD}(t_{CD}))$, то траектория КА удовлетворяет краевым условиям на правом конце.

9. Выбор начального приближения

Предположим, что известны зависимости $t_{CD}(t_0)$ и $(\boldsymbol{\rho}_{CD}(t_{CD}), \mathbf{u}_{CD}(t_{CD}))$ для t_0 , принадлежащего некоторому отрезку $[t', t'']$. Вообще говоря, вектор состояния $(\boldsymbol{\rho}_{CD}(t_{CD}), \mathbf{u}_{CD}(t_{CD}))$ на границе СД Луны на момент времени $t_{CD}(t_0)$ может быть недостижим для одноимпульсной схемы. Действительно, если от этих вектора состояния и момента времени проинтегрировать траекторию в обратном времени, она может не пересечь орбиту ожидания. Поэтому для одноимпульсной схемы в качестве вектора целевых параметров на границе СД Луны рассматривается не вектор состояния в момент времени t_{CD} , а вектор $\mathbf{y}(t_{CD}) = (\mathbf{u}_{CD}(t_{CD}), \hat{\mathbf{h}}_f(t_{CD}))$, где $\hat{\mathbf{h}}_f(t_{CD})$ – направление кинетического момента гиперболы возврата, определенное формулой

$$\hat{\mathbf{h}}_f(t_{CD}) = \frac{[\boldsymbol{\rho}_{CD}(t_{CD}), \mathbf{u}_{CD}(t_{CD})]}{\|[\boldsymbol{\rho}_{CD}(t_{CD}), \mathbf{u}_{CD}(t_{CD})]\|}. \quad (25)$$

Расчеты показывают, что подобный выбор вектора целевых параметров обеспечивает попадание в точку на границе СД Луны, близкую к положению $\boldsymbol{\rho}_{CD}(t_{CD})$. Для трехимпульсной схемы в качестве вектора целевых параметров рассматривается вектор состояния $\mathbf{y}(t_{CD}) = (\boldsymbol{\rho}_{CD}(t_{CD}), \mathbf{u}_{CD}(t_{CD}))$ на границе СД Луны в момент времени t_{CD} .

Зафиксируем момент времени старта t_0 и определим для него из соответствующих зависимостей раздела 8 время попадания на границу СД Луны $t_{CD,0} = t_{CD}(t_0)$ и целевой вектор $\mathbf{y}_0 = \mathbf{y}(t_{CD,0})$. Предположим также, что выбрана схема маневрирования (в качестве такой схемы может быть использована схема из разделов 11, 12), т.е. по вектору \mathbf{y}_0 определена некоторая последовательность маневров $\{t_i(\mathbf{y}_0), \Delta \mathbf{u}_i(\mathbf{y}_0)\}_{i=1}^n$ в СД Луны.

При интегрировании уравнений движения с учетом заданной схемы маневрирования $\{t_i(\mathbf{y}_0), \Delta \mathbf{u}_i(\mathbf{y}_0)\}_{i=1}^n$ до достижения границы СД Луны в нецентральной поле определяется момент времени \tilde{t}_{CD} попадания КА на границу СД Луны. При этом, вообще говоря, окажется $\tilde{t}_{CD} \neq t_{CD,0}$. Следовательно, необходимо найти такой вектор $\mathbf{y}_* = \mathbf{y}_*(t'_{CD})$, чтобы для определенной по нему последовательности маневров $\{t_i(\mathbf{y}_*), \Delta \mathbf{u}_i(\mathbf{y}_*)\}_{i=1}^n$, приводящей КА на границу СД Луны в момент времени t''_{CD} , выполнялось условие $t'_{CD} = t''_{CD}$.

Процедура определения \mathbf{y}_* осуществляется посредством минимизации невязки $\Delta t = \Delta t(t^*_{CD}) = t^*_{CD} - t_{CD}(\{t_i(\mathbf{y}_*), \Delta \mathbf{u}_i(\mathbf{y}_*)\}_{i=1}^n)$ (зависимость от момента времени старта t_0 и начального вектора состояния опускается, т.к. эти параметры зафиксированы), где $t_{CD}(\{t_i, \Delta \mathbf{u}_i\}_{i=1}^n)$ – это момент времени, в который КА оказывается на границе СД Луны с использованием схемы $\{t_i, \Delta \mathbf{u}_i\}_{i=1}^n$, а $\mathbf{y}_* = \mathbf{y}(t^*_{CD})$. Задачу минимизации подобной невязки можно представить как задачу нелинейного программирования (подробно описана в п. 13), в которой нелинейной функцией, подлежащей минимизации, будет $F(t^*_{CD}) = |\Delta t(t^*_{CD})|$, $t^*_{CD} \in \mathbb{R}$, при этом должно выполняться ограничение $t^*_{CD} - t_0 > 0$.

Таким образом, определяется целевой момент времени пересечения границы сферы действия $t_{CD,*}$ и вектор целевых параметров $\mathbf{y}_* = \mathbf{y}(t_{CD,*})$, для которого выбранная схема маневрирования (начальное приближение для последующих вычислений) в нецентральной поле Луны приводит КА на границу сферы действия Луны в момент времени $t_{CD,*}$ (с заданной точностью). Кроме того, будет найден целевой вектор состояния на границе сферы действия $(\mathbf{p}_{CD,*}, \mathbf{u}_{CD,*}) = (\mathbf{p}_{CD}(t_{CD,*}), \mathbf{u}_{CD}(t_{CD,*}))$.

10. Выбор схемы маневрирования

Задача выбора оптимальной с точки зрения затрат характеристической скорости схемы маневрирования для траекторий возврата к Земле с орбиты ИСЛ в импульсной постановке изучается начиная с 1950-х годов. В статье [10] сделан общий обзор проведенных исследований (актуальный на 1969 г.), посвященных траекториям перелета между орбитами, построенным при помощи различных многоимпульсных схем маневрирования. В работе [12] дано сравнение одноимпульсной и двухимпульсной схем маневрирования и

показано, что в ряде случаев использование последней оказывается более выигрышным с точки зрения затрат характеристической скорости. В статье [11] отмечено, что трехимпульсная схема обеспечивает меньшие затраты характеристической скорости, чем двухимпульсная, а также доказано, что обе схемы в предельном случае сводятся к одноимпульсной. Там же показано, что в случае компланарного перелета (плоскость орбиты ожидания совпадает с плоскостью гиперболы возврата) оптимальной будет одноимпульсная схема маневрирования. Также в этой статье рассматриваются более общие схемы маневрирования, в частности схема маневрирования с использованием шести импульсов для перехода с гиперболы на гиперболу. Следует отметить, что к этому моменту было уже опубликовано значительное число работ, в которых рассматривалась трехимпульсная схема маневрирования, например, работа [9], где изучена подобная схема для построения траектории перелета на Марс. В работе [11] показывается, что помимо трехимпульсных схем маневрирования следует также рассмотреть и четырехимпульсные схемы, которые при определенных условиях приводят к меньшим затратам характеристической скорости. Во всех упомянутых выше статьях рассматривалось построение траектории перелета КА с окололунной орбиты на гиперболу возврата, определенную своим вектором асимптотической скорости, с учетом центрального гравитационного поля Луны.

Разумеется, в СССР также проводились исследования на эту тему. В первом томе книги «Механика в СССР за 50 лет» [8] сказано, что задача оптимальных импульсных перелетов между орбитами (в частности, некомпланарными) рассматривалась В.И. Чарным (1963 г.), В.С. Новоселовым (1963 г., 1965 г.), С.Н. Кирпичниковым (1964 г.), В.А. Ильиным (1964 г., 1967 г.), В.С. Вожаевым (1967 г.), Г.Е. Кузмаком (1965 г., 1967 г.), Н.И. Лавренко (1965 г., 1967 г.), Л.В. Закотеевой и В.В. Поляченко (1965 г.), С.В. Дубовским (1964 г.), В.В. Ивашкиным (1965 г.) и др. Однако в связи с труднодоступностью этих материалов их анализ не проводился. Кроме того, трехимпульсные схемы маневрирования, судя по информации в книге [8], в них практически не рассматривались (описаны только одноимпульсные и двухимпульсные схемы маневрирования). Следует отдельно отметить книгу [4], в которой, несмотря на то что рассматриваются только одноимпульсные схемы построения траектории возврата, содержится большое количество важных замечаний, которые полезны при решении рассматриваемой задачи.

После некоторого перерыва (порядка 20 лет) эта задача вновь начала исследоваться: [15], [16], [20]. В этих работах производилось сравнение одноимпульсных и трехимпульсных схем маневрирования. Несмотря на то что задача решалась с учетом нецентрального гравитационного поля Луны, построение траектории перелета снова ограничивалось выведением на гиперболу возврата и достижением вектора асимптотической скорости. Результаты, приведенные в статьях, подтверждают выводы, сделанные в статьях Edelbaum-а. В частности, подтверждается преимущество

трехимпульсной схемы маневрирования перед двухимпульсной с точки зрения затрат характеристической скорости. Также Осамро вводит в качестве критерия, определяющего необходимое количество импульсов (один или три), относительное склонение вектора асимптотической скорости: наклон вектора асимптотической скорости к плоскости орбиты ожидания. В целом этот параметр является совершенно естественным, и его введение перекликается с тем, что описывал Edelbaum в своих статьях. В статье [16] Осамро пишет о том, что интерес представляет также рассмотрение четырехимпульсной схемы маневрирования, которая теоретически может приводить к меньшим затратам характеристической скорости по сравнению с трехимпульсной схемой.

В предлагаемом препринте ограничимся сравнением одноимпульсной и трехимпульсной схем маневрирования. В разделах 11, 12 представлены соответствующие алгоритмы построения схем маневрирования.

11. Одноимпульсная схема маневрирования

Пусть для выведения КА с орбиты ожидания на гиперболу возврата с заданным вектором целевых параметров $\mathbf{y} = (\mathbf{u}_{CD}, \hat{\mathbf{h}}_f)$ используется один импульсный маневр.

Известный вектор состояния (ρ_0, \mathbf{u}_0) полностью определяет все параметры орбиты ожидания. Приблизненно вектор асимптотической скорости \mathbf{u}_∞^+ гиперболы возврата [6] можно найти по формуле

$$\mathbf{u}_\infty^+ \approx u_\infty^+ \frac{\mathbf{u}_{CD}}{\|\mathbf{u}_{CD}\|}, \quad u_\infty^+ = \sqrt{u_{CD}^2 - 2 \frac{\mu_M}{\rho_{CD}}}, \quad (26)$$

где μ_M – гравитационный параметр Луны

Большая полуось гиперболы возврата выражается равенством

$$a_f = \frac{\mu_M}{(u_\infty^+)^2}. \quad (27)$$

Определим истинную аномалию места совершения маневра на орбите ожидания. Вообще говоря, плоскость гиперболы возврата может пересекать орбиту ожидания в двух точках. Единичный вектор направления радиус-

вектора положения для совершения маневра вычисляется как $\hat{\rho}_1 = \pm \frac{[\hat{\mathbf{h}}_0, \hat{\mathbf{h}}_f]}{\|[\hat{\mathbf{h}}_0, \hat{\mathbf{h}}_f]\|}$,

где $\hat{\mathbf{h}}_0 = \frac{[\rho_0, \mathbf{u}_0]}{\|[\rho_0, \mathbf{u}_0]\|}$ – направление кинетического момента орбиты ожидания.

Одно положение соответствует ситуации, когда после маневра КА будет

совершать движение по гиперболе возврата, минуя ее перицентр, а второе – ситуации, когда КА не пройдет через перицентр. Дальнейшие вычисления следует производить для обоих вариантов. В случае если решение существует для обоих знаков, следует выбрать тот, для которого затраты характеристической скорости меньше.

К началу маневра КА находится на орбите ожидания, поэтому истинная аномалия определяется как $\vartheta_{1,0} = \text{sgn}(\hat{\mathbf{h}}_0, [\hat{\boldsymbol{\rho}}_{p,0}, \hat{\boldsymbol{\rho}}_1]) \cdot \arccos(\hat{\boldsymbol{\rho}}_{p,0}, \hat{\boldsymbol{\rho}}_1)$, где $\hat{\boldsymbol{\rho}}_{p,0}$ – направление на перицентр орбиты ожидания. Радиус-вектор $\boldsymbol{\rho}_1$ места совершения маневра и вектор скорости $\mathbf{u}_{1,0}$ определяются по известным элементам орбиты ожидания и служат уточнением для радиус-вектора $\boldsymbol{\rho}_0$.

Осталось найти истинную аномалию места совершения маневра ϑ_{1f} на гиперболе возврата. Вычислим угол между вектором $\boldsymbol{\rho}_1$ и вектором $\hat{\mathbf{u}}_\infty^+$:

$$\Delta\vartheta = \left(\text{sgn}(\hat{\mathbf{h}}_f, [\hat{\boldsymbol{\rho}}_1, \hat{\mathbf{u}}_\infty^+]) \right) \arccos(\hat{\boldsymbol{\rho}}_1, \hat{\mathbf{u}}_\infty^+). \quad (28)$$

Из уравнения орбиты

$$\rho_1 = \frac{a_f(1 - e_f^2)}{1 + e_f \cos \vartheta_{1f}} \quad (29)$$

получаются формулы для вычисления эксцентриситета гиперболы возврата и истинной аномалии места совершения маневра на гиперболе возврата в случае, если $\text{sgn}(\Delta\vartheta) = 1$:

$$e_f = \frac{\sqrt{2k^2 + \sin^2 \Delta\vartheta + 2k(1 - \cos \Delta\vartheta) + \sin \Delta\vartheta \sqrt{\sin^2 \Delta\vartheta + 4k(1 - \cos \Delta\vartheta)}}}{\sqrt{2k}}, \quad (30)$$

$$k = a_f / \rho_1, \quad (31)$$

$$\vartheta_{1f} = \vartheta_\infty - \Delta\vartheta, \quad (32)$$

где $\vartheta_\infty = \arccos(-1/e_f)$ – предельный угол гиперболы возврата [6], и в случае, если $\text{sgn}(\Delta\vartheta) = -1$:

$$e_f = \frac{\sqrt{2k^2 + \sin^2 |\Delta\vartheta| + 2k(1 - \cos |\Delta\vartheta|) - \sin |\Delta\vartheta| \sqrt{\sin^2 |\Delta\vartheta| + 4k(1 - \cos |\Delta\vartheta|)}}}{\sqrt{2k}}, \quad (33)$$

$$\vartheta_{1f} = \vartheta_{\infty} + |\Delta\vartheta| - 2\pi. \quad (34)$$

После вычисления угла раствора гиперболы возврата

$$\delta = 2 \arcsin \frac{1}{e_f} \quad (35)$$

можно найти направление вектора асимптотической скорости, соответствующего прилетной ветви гиперболы

$$\hat{\mathbf{u}}_{\infty}^{-} = \hat{\mathbf{u}}_{\infty}^{+} \cos \delta + \left[\hat{\mathbf{u}}_{\infty}^{+}, \hat{\mathbf{h}}_f \right] \sin \delta, \quad (36)$$

а затем можно определить направление на перицентр гиперболы возврата и направление скорости в перицентре

$$\hat{\mathbf{p}}_{pf} = \frac{\hat{\mathbf{u}}_{\infty}^{-} - \hat{\mathbf{u}}_{\infty}^{+}}{\|\hat{\mathbf{u}}_{\infty}^{-} - \hat{\mathbf{u}}_{\infty}^{+}\|}, \quad \hat{\mathbf{v}}_{pf} = \frac{\hat{\mathbf{u}}_{\infty}^{-} + \hat{\mathbf{u}}_{\infty}^{+}}{\|\hat{\mathbf{u}}_{\infty}^{-} + \hat{\mathbf{u}}_{\infty}^{+}\|}. \quad (37)$$

Вектор скорости непосредственно после совершения маневра определяется как

$$\mathbf{u}_1^{+} = \sqrt{\frac{\mu_M}{a_f(e_f^2 - 1)}} \left(-\sin \vartheta_{1,f} \hat{\mathbf{p}}_{p,f} + (e_f + \cos \vartheta_{1,f}) \hat{\mathbf{u}}_{p,f} \right), \quad (38)$$

а вектор скорости непосредственно перед совершением маневра есть $\mathbf{u}_1^{-} = \mathbf{u}_{1,0}$, приращение скорости во время маневра определяется как $\Delta \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_1^{+} - \mathbf{u}_1^{-}$.

Так как истинная аномалия места совершения маневра известна, то путем решения уравнения Кеплера для орбиты ожидания определяется момент времени t_1 совершения маневра, уточняющий параметр t_0 .

12. Трехимпульсная схема маневрирования

Рассмотрим теперь ситуацию, когда для выведения КА с орбиты ожидания на гиперболу возврата с заданным вектором целевых параметров $\mathbf{y} = (\mathbf{r}_{cd}, \mathbf{u}_{cd})$ используется трехимпульсная схема маневрирования.

Если при помощи маневра в случае с одноимпульсной схемой КА сразу переводится на гиперболу возврата (т.е. маневр изменяет плоскость орбиты), то в случае рассматриваемой ниже трехимпульсной схемы первый маневр изменяет только форму орбиты, второй маневр изменяет плоскость орбиты (до плоскости гиперболы возврата), третий маневр также изменяет только форму орбиты. Очевидно, что трехимпульсная схема маневрирования как частный

случай может перейти в одноимпульсную схему [11], т.е. множество трехимпульсных траекторий содержит множество одноимпульсных траекторий. Вместе с тем при реализации трехимпульсной схемы маневрирования вводятся некоторые ограничения: либо ограничение на время перелета, либо ограничения на геометрические параметры промежуточных орбит. При введении этих ограничений может получиться усеченное множество трехимпульсных траекторий, не содержащее одноимпульсных траекторий. Обычно затраты характеристической скорости для трехимпульсной схемы маневрирования не превышают затрат характеристической скорости для одноимпульсной схемы маневрирования [11], при этом в случае компланарного перелета затраты одинаковы и минимальны по сравнению перелетами, в которых требуется изменение плоскости орбиты. С введением ограничений для трехимпульсной схемы маневрирования в некоторых ситуациях затраты характеристической скорости могут быть чуть больше, чем для одноимпульсной схемы (для одних и тех же начальных условий). Иллюстрацию этого эффекта можно увидеть в п. 14.

Перейдем к построению схемы маневрирования. Введем следующую нумерацию орбит: орбита 0 – это орбита ожидания; орбита 1 – это эллиптическая орбита, получающаяся после первого маневра и лежащая в плоскости орбиты 0; орбита 2 – либо эллиптическая, либо гиперболическая орбита, получающаяся после второго маневра; орбита 3 – гиперболическая орбита возврата, плоскость которой совпадает с плоскостью орбиты 2.

Первый маневр осуществляется в перицентре орбиты 0 и преобразует ее в эллиптическую орбиту, переводя КА в перицентр орбиты 1. Это делается для того, чтобы маневр изменял только величину скорости, не изменяя при этом направления. В случае, если орбита 0 близка к круговой, истинная аномалия $\vartheta_{1,0}$ места схода с орбиты ожидания варьируется, при этом после маневра КА по-прежнему оказывается в перицентре орбиты 1. Вторым маневром осуществляется на линии пересечения плоскостей орбиты ожидания и гиперболы возврата и изменяет плоскость орбиты. Третий маневр осуществляется в общем перицентре орбит 2 и 3, т.е. радиус-векторы перицентров этих орбит совпадают: $\mathbf{r}_{p,2} = \mathbf{r}_{p,3}$.

Так как вектор целевых параметров $\mathbf{y} = (\mathbf{r}_{cd}, \mathbf{u}_{cd})$ полностью определяет гиперболу возврата, а перицентр у орбит 2 и 3 общий, то остается определить радиус апоцентра $\rho_{a,1}$ орбиты 1 (геометрическое ограничение). Значение этого параметра определяется из соображений, чтобы период орбиты 1 находился в диапазоне 1-2 суток. Так как вторым маневром, изменяющим плоскость движения, совершается на орбите 1, то за счет увеличения расстояния до апоцентра орбиты 1 уменьшается модуль скорости на ней в месте совершения маневра, что приведет к уменьшению величины импульса при маневре. Изменяя радиус апоцентра орбиты 1 и определяя последовательность маневров по алгоритму,

представленному ниже, вычисляется параметр $\rho_{a,1}$, обеспечивающий минимальные затраты характеристической скорости для рассматриваемого алгоритма построения схемы и для заданных начальных условий в центральном поле притяжения Луны. Если орбита ожидания круговая, то помимо параметра $\rho_{a,1}$ варьируется также истинная аномалия места схода с орбиты ожидания $\vartheta_{1,0}$.

Алгоритм построения трехимпульсной схемы выполняется следующим образом.

1. Определяется направление $\hat{\mathbf{h}}_f$ кинетического момента гиперболы возврата по формуле (25).
2. По известному вектору состояния $\mathbf{y} = (\boldsymbol{\rho}_{cd}, \mathbf{u}_{cd})$ определяются элементы гиперболы возврата (например, по формулам из [6]), после чего по формулам, аналогичным формулам (24), вычисляется вектор состояния $(\boldsymbol{\rho}_{p,3}, \mathbf{u}_{p,3})$.
3. Определяется первый импульсный маневр.

Так как орбита ожидания полностью определена, а также определено место совершения первого маневра (либо перицентр орбиты ожидания, либо, если орбита ожидания круговая, некоторое положение $\vartheta_{1,0}$), то несложно вычислить направление $\hat{\boldsymbol{\rho}}_1 = \hat{\boldsymbol{\rho}}_{p,0}$ радиус-вектора места совершения первого маневра, а также скорость на орбите ожидания непосредственно перед маневром \mathbf{u}_1^- . Осталось определить скорость на орбите 1 непосредственно после маневра. Расстояние до перицентра орбиты 1 равно расстоянию до перицентра орбиты ожидания, т.е. $\rho_{p,1} = \rho_{p,0}$, расстояние $\rho_{a,1}$ до апоцентра орбиты 1 задано (геометрическое ограничение), большая полуось орбиты 1 определяется по формуле $a_1 = (\rho_{a,1} + \rho_{p,1})/2$. Учитывая, что первый маневр переводит КА из перицентра орбиты ожидания в перицентр орбиты 1, определим скорость после совершения первого маневра по формуле

$$\mathbf{u}_1^+ = \sqrt{\mu_M \left(\frac{2}{\rho_{p,1}} - \frac{1}{a_1} \right)} [\hat{\mathbf{h}}_0, \hat{\boldsymbol{\rho}}_{p,1}]. \quad (39)$$

Таким образом, первый импульсный маневр равен $\Delta \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_1^+ - \mathbf{u}_1^-$.

4. Второй импульсный маневр изменяет плоскость движения. Следовательно, он осуществляется на пересечении плоскостей гиперболы возврата и орбиты ожидания. Направление радиус-вектора места его совершения выражается формулой

$$\hat{\rho}_2 = \pm \frac{[\hat{\mathbf{h}}_0, \hat{\mathbf{h}}_f]}{\|[\hat{\mathbf{h}}_0, \hat{\mathbf{h}}_f]\|}, \quad (40)$$

где $\hat{\mathbf{h}}_0$ – направление кинетического момента орбиты ожидания. Дальнейшие вычисления следует производить для обоих вариантов знака в формуле (40). В случае, если решение существует для обоих знаков, выбирается та схема маневрирования, для которой затраты характеристической скорости меньше. Истинная аномалия места совершения второго маневра на орбите 1 имеет вид

$$\vartheta_{2,1} = \left(\text{sgn}(\hat{\mathbf{h}}_0, [\hat{\rho}_{p,1}, \hat{\rho}_2]) \right) \arccos(\hat{\rho}_{p,1}, \hat{\rho}_2), \quad (41)$$

эксцентриситет орбиты 1 задается формулой $e_1 = (\rho_{a,1} - \rho_{p,1}) / (\rho_{a,1} + \rho_{p,1})$, после чего из уравнения орбиты вычисляется расстояние до места совершения второго маневра:

$$\rho_2 = \frac{a_1(1 - e_1^2)}{1 + e_1 \cos \vartheta_{2,1}} \quad (42)$$

и его радиус-вектор $\rho_2 = \rho_2 \cdot \hat{\rho}_2$.

Скорость непосредственно перед совершением второго маневра рассчитывается следующим образом

$$\mathbf{u}_2^- = \sqrt{\mu_M \left(\frac{2}{\rho_2} - \frac{1}{a_1} \right)} [\hat{\mathbf{h}}_0, \hat{\rho}_2]. \quad (43)$$

Чтобы найти скорость непосредственно после совершения второго маневра, необходимо знать истинную аномалию $\vartheta_{2,2}$ места совершения второго маневра на орбите 2:

$$\vartheta_{2,2} = \left(\text{sgn}(\hat{\mathbf{h}}_f, [\hat{\rho}_{p,2}, \hat{\rho}_2]) \right) \arccos(\hat{\rho}_{p,2}, \hat{\rho}_2), \quad (44)$$

где $\hat{\rho}_{p,2} = \hat{\rho}_{p,3}$ – направление на перицентр орбиты 2 (совпадает с направлением на перицентр гиперболы возврата). Эксцентриситет орбиты 2 определяется по формуле:

$$e_2 = \frac{\rho_2 - \rho_{p,2}}{\rho_{p,2} - \rho_2 \cos \vartheta_{2,2}}. \quad (45)$$

Если $e_2 > 1$ и $\vartheta_{2,2} > 0$, то решения для рассматриваемой схемы не существует, т.к. в этом случае КА совершает движение по гиперболической орбите 2, удаляясь от ее перицентра, а третий маневр должен производиться именно в ее перицентре. В этом случае следует выбрать другой знак в формуле (40) и заново произвести все вычисления.

Так как орбита 2 может быть как эллиптической, так и гиперболической, то определение дальнейших параметров зависит от величины эксцентриситета. Если $e_2 < 1$, то после нахождения большой полуоси орбиты $a_2 = \rho_{p,2}/(1 - e_2)$ скорость непосредственно после совершения второго маневра выражается формулой

$$\mathbf{u}_2^+ = \sqrt{\frac{\mu_M}{a_2(1 - e_2^2)}} \left(-\sin \vartheta_{2,2} \hat{\boldsymbol{\rho}}_{p,2} + (e_2 + \cos \vartheta_{2,2}) \hat{\mathbf{u}}_{p,2} \right), \quad (46)$$

где $\hat{\mathbf{u}}_{p,2} = [\hat{\mathbf{h}}_f, \hat{\boldsymbol{\rho}}_{p,2}]$ – направление вектора скорости в перицентре орбиты 2. Если $e_2 > 1$, то после нахождения большой полуоси орбиты $a_2 = \rho_{p,2}/(e_2 - 1)$ скорость непосредственно после совершения второго маневра имеет вид

$$\mathbf{u}_2^+ = \sqrt{\frac{\mu_M}{a_2(e_2^2 - 1)}} \left(-\sin \vartheta_{2,2} \hat{\boldsymbol{\rho}}_{p,2} + (e_2 + \cos \vartheta_{2,2}) \hat{\mathbf{u}}_{p,2} \right). \quad (47)$$

Таким образом, второй импульс равен $\Delta \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_2^+ - \mathbf{u}_2^-$.

5. Третий маневр осуществляется в перицентре орбиты 2 и переводит КА в перицентр орбиты 3. Поэтому скорость непосредственно перед импульсным маневром вычисляется по формуле

$$\mathbf{u}_3^- = \sqrt{\mu_M \left(\frac{2}{\rho_{p,2}} - \frac{1}{a_2} \right)} \hat{\mathbf{u}}_{p,3}, \quad (48)$$

а скорость после совершения маневра определяется как $\mathbf{u}_3^+ = \mathbf{u}_{p,3}$. Таким образом, третий импульс равен $\Delta \mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_3^+ - \mathbf{u}_3^-$.

Так как истинные аномалии мест совершения маневров известны, а все орбиты полностью определены, то путем решения соответствующих уравнений Кеплера определяются моменты времени t_1, t_2, t_3 . При этом момент времени t_1 уточняет параметр t_0 , а радиус-вектор $\boldsymbol{\rho}_1$ уточняет параметр $\boldsymbol{\rho}_0$.

13. Решение краевой задачи

Рассмотрим краевую задачу, для которой заданы следующие краевые условия:

- вектор состояния КА $(\mathbf{p}_0, \mathbf{u}_0)$, заданный на начальный момент времени t_0 ;
- условия на правом конце: достижение параметров $(\varphi_{ex}(h_{ex}), i_{ex}(h_{ex}), h_{\pi})^T$ с точностью $(\varepsilon_{\varphi}, \varepsilon_i, \varepsilon_{\pi})^T$.

Требуется найти последовательность маневров $\{t_i, \Delta \mathbf{u}_i\}_{i=1}^n$, которая обеспечивает достижение условий на правом конце при последовательном интегрировании уравнений (4) с начальными условиями (5).

В качестве начального приближения будем использовать решение $\{t_i^0, \Delta \mathbf{u}_i^0\}_{i=1}^n$, полученное в п. 9, 11, 12. Использование данного начального приближения с учетом нецентральности гравитационного поля Луны и нецентральности гравитационного поля Земли приводит КА на границу сферы действия Луны с ошибкой \mathbf{c}_{CD} по вектору \mathbf{u} целевых параметров (в случае одноимпульсной схемы маневрирования $\mathbf{c}_{CD} = (|\Delta t_{CD}|, \|\Delta \mathbf{u}_{CD}\|, \|\Delta \hat{\mathbf{h}}_f\|)^T$, а в случае трехимпульсной схемы маневрирования $\mathbf{c}_{CD} = (|\Delta t_{CD}|, \|\Delta \mathbf{p}_{CD}\|, \|\Delta \mathbf{u}_{CD}\|)^T$). Для достижения целевых параметров в точке входа в атмосферу необходимо устранить сначала указанные выше ошибки посредством коррекции имеющегося начального приближения последовательности манёвров.

После минимизации невязок \mathbf{c}_{CD} (процедура минимизации невязок описана ниже) и получения некоторой схемы $\{t_i^{CD}, \Delta \mathbf{u}_i^{CD}\}_{i=1}^n$ гипербола возврата будет близка к целевой, однако краевые условия на правом конце все же будут выполняться с некоторой ошибкой, т.е. необходимо также минимизировать невязку $\mathbf{c}_{ex} = (|\Delta \varphi_{ex}(h_{ex})|, |\Delta i_{ex}(h_{ex})|, |\Delta h_{\pi}|)^T$. Для минимизации этой невязки в качестве начального приближения принимается схема $\{t_i^{CD}, \Delta \mathbf{u}_i^{CD}\}_{i=1}^n$.

В случае одноимпульсной схемы параметрами для минимизации невязок \mathbf{c}_{CD} и \mathbf{c}_{ex} служат параметры схемы маневрирования $\{t_1, \Delta \mathbf{u}_1\}$ (т.е. 4 параметра), в случае же трехимпульсной схемы параметрами для минимизации будут $\{t_i, \Delta \mathbf{u}_i\}_{i=1}^3$ (т.е. 12 параметров).

Задачу минимизации вектора невязок \mathbf{c} (индекс пока опустим) можно представить в виде задачи нелинейного программирования (NLP). Обозначим \mathbf{X} вектор параметров, по которым осуществляется минимизация невязок. В зависимости от схемы маневрирования он имеет вид

$$\mathbf{x} = (t_1, \Delta \mathbf{u}_1^T)^T \text{ или } \mathbf{x} = (t_1, \Delta \mathbf{u}_1^T, t_2, \Delta \mathbf{u}_2^T, t_3, \Delta \mathbf{u}_3^T)^T. \quad (49)$$

Вектор невязок зависит от схемы маневрирования: $\mathbf{c} = \mathbf{c}(\mathbf{x})$. Выберем некоторый вектор положительных коэффициентов \mathbf{k} той же размерности, что и вектор \mathbf{c} , определим с его помощью нелинейную функцию:

$$F(\mathbf{x}) = \mathbf{k}^T \mathbf{c}(\mathbf{x}). \quad (50)$$

Тогда задача минимизации вектора невязок \mathbf{c} сводится к поиску минимума

$$\min_{\mathbf{x}} F(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (51)$$

где $n=4$ или $n=12$. При этом должны выполняться s ограничений на компоненты вектора \mathbf{x} :

$$g_j(\mathbf{x}) \geq 0, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, j = 1, \dots, s. \quad (52)$$

Для одноимпульсной схемы маневрирования в терминах $\{t_1, \Delta \mathbf{u}_1\}$ целесообразно задать, например, следующие $s = 3$ ограничения:

$$\begin{cases} t_1 - t_0 \geq 0 \\ t_{\max} - t_1 \geq 0 \\ u_{\max} - \|\Delta \mathbf{u}_1\| \geq 0 \end{cases}, \quad (53)$$

а для трехимпульсной схемы в терминах $\{t_i, \Delta \mathbf{u}_i\}_{i=1}^3$ – следующие $s = 9$ ограничений

$$\begin{cases} t_i - t_{i-1} \geq 0 \\ t_{\max, i} - t_{i-1} \geq 0 \\ u_{\max, i} - \|\Delta \mathbf{u}_i\| \geq 0 \end{cases}, i = 1, 2, 3. \quad (54)$$

Параметры t_{\max} , $t_{\max, i}$, u_{\max} , $u_{\max, i}$ задаются эмпирически (например, $t_{\max} = 6$ сут. $t_{\max, i} = 0.25$ сут. $u_{\max} = 3$ км/с, $u_{\max, i} = 2$ км/с).

Для решения задачи нелинейного программирования (51) с ограничениями (53) или (54) был применен метод последовательного квадратичного программирования (SLSQP), который является одним из наиболее распространенных и эффективных методов решения такого класса задач. Этот метод подробно описан в статье [17]. Программный комплекс, созданный

автором статьи [17] на языке Fortran, часто используется в различных приложениях.

14. Результаты моделирования

Рассмотрим в СК MJ2000.0 околокруговую орбиту ожидания высоты 100 км с долготой восходящего узла 20° , аргументом перицентра 0° и эксцентриситетом, равным 0.001 [20]. Наклонение орбиты ожидания i_0 в СК MJ2000.0 будет варьироваться.

Координаты центра полигона посадки (космодром Восточный) равны $\varphi_{ц}' = 50.3^\circ$, $\lambda_{ц}' = 128.5^\circ$, дальность спуска в атмосфере составляет $L_{\Sigma} = 9000$ км, широта точки первого входа равна $\varphi_{вх} = -7.5^\circ$, угол входа в атмосферу $\vartheta_{вх} = -5^\circ$, скорость входа в атмосферу равна $v_{вх} = 11.199$ км/с, а высота точки первого входа равна $h_{вх} = 100$ км. Этим параметрам соответствуют высота условного перигея $h_{\pi} = 51.7$ км и наклонение траектории возврата в точке входа в атмосферу $i_{вх} = 54.14^\circ$.

Пример траектории, являющейся решением задачи, и ее начального приближения можно видеть на рис. 14: желтой линией обозначена траектория движения Луны, крестиками обозначены точки пересечения сферы действия Луны, голубой точкой обозначена Земля.

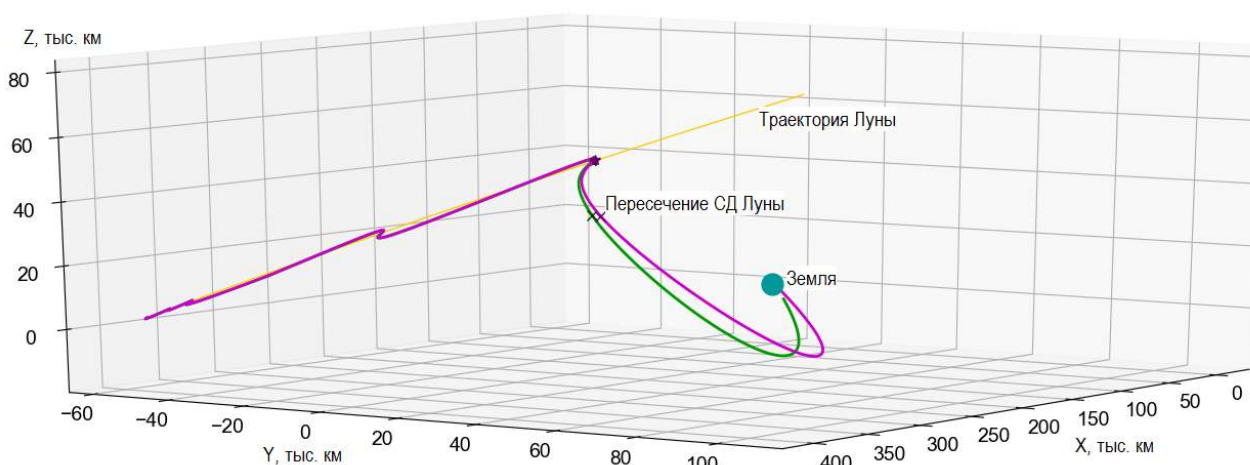


Рис. 14. Траектория, соответствующая решению задачи (фиолетовая), и траектория, соответствующая его начальному приближению (зеленая) в СК EJ2000.0

Пример маневрирования внутри СД Луны до выхода на гиперболу возврата в СК MJ2000.0 можно видеть на рис. 15. Голубым цветом показана траектория Земли (для наглядности расстояние от Луны до Земли было уменьшено, направление на Землю сохранялось). Точкой отмечено положение

Земли на момент пересечения СД Луны, звездочкой отмечено положение Земли в момент достижения целевой точки входа в атмосферу.

Важным параметром, оказывающим влияние на затраты характеристической скорости, является угол между плоскостями орбиты ожидания и гиперболы возврата α .

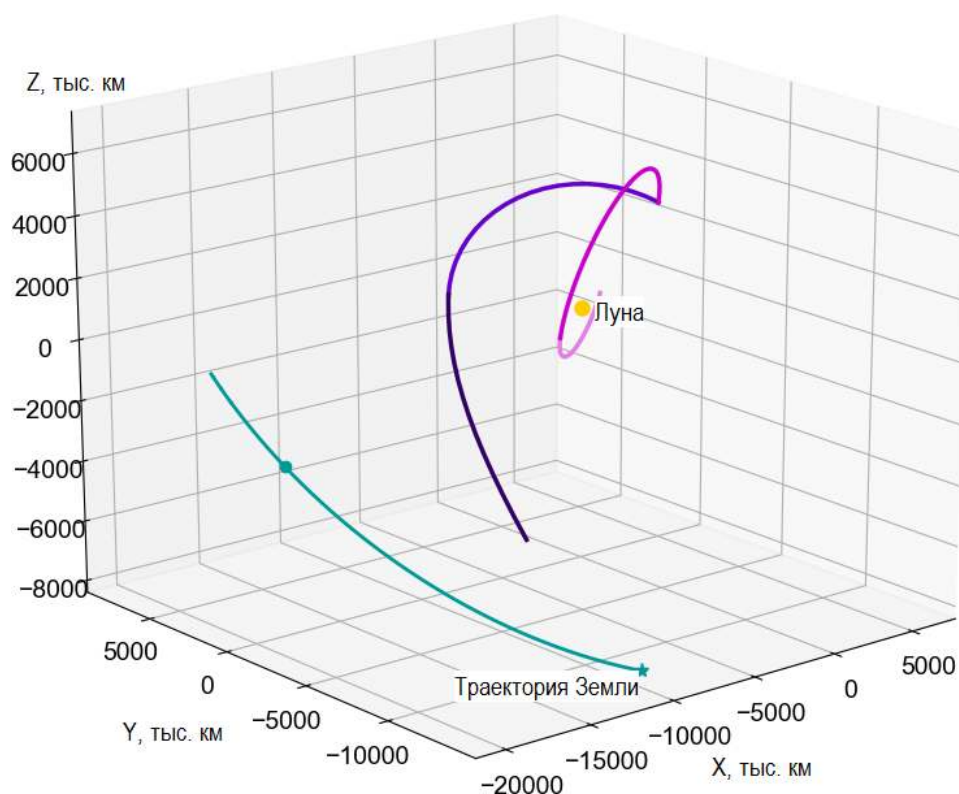


Рис. 15. Маневрирование внутри сферы действия Луны (СК MJ2000.0)

Результаты работы алгоритма с использованием одноимпульсной и трехимпульсной схем маневрирования для склонения Луны к экваториальной плоскости Земли в начальный момент времени 0.56° приведены в таблице 1. В таблице цветом выделены строки, соответствующие ситуациям, когда использование одноимпульсной схемы лучше с точки зрения затрат характеристической скорости. Этот эффект означает, что либо из-за введения ограничений не существует трехимпульсной схемы, имеющей меньшие затраты, чем одноимпульсная схема, либо рассматриваемая трехимпульсная схема не является оптимальной. Подобный результат является ожидаемым, т.к. в этих ситуациях величина угла α для одноимпульсной схемы очень мала, т.е. изменение плоскости движения практически не требуется.

В таблице 2 для того же склонения Луны, что и в таблице 1, приведены затраты характеристической скорости на каждый маневр для трехимпульсной схемы маневрирования, а также время совершения каждого маневра от начала движения. Каждому наклонению орбиты ожидания соответствуют результаты

для начального приближения (верхняя строка) и для решения задачи (нижняя строка).

Таблица 1

$i_0, \text{град}$	Одноимпульсная схема			Трехимпульсная схема		
	$\Delta V, \text{км/с}$	$\alpha, \text{град}$	$\Delta t, \text{сут}$	$\Delta V, \text{км/с}$	$\alpha, \text{град}$	$\Delta t, \text{сут}$
0	1.17 (1.30)	22.95	4.18 (0.01)	1.25 (1.22)	18.59	5.27 (0.50)
30	1.43 (1.48)	23.13	4.28 (0.03)	1.30 (1.31)	26.93	5.16 (0.39)
60	2.22 (2.25)	47.85	4.70 (0.04)	1.68 (1.61)	60.13	7.82 (0.60)
90	2.43 (2.45)	78.21	3.16 (0.08)	1.72 (1.74)	82.20	4.95 (0.34)
120	2.52 (2.53)	104.46	6.04 (0.04)	1.83 (1.88)	111.16	6.61 (0.33)
150	2.80 (2.88)	132.61	4.73 (0.03)	2.04 (1.99)	138.67	5.38 (0.72)
180	3.05 (3.09)	159.32	4.39 (0.07)	2.14 (2.16)	161.56	5.39 (0.53)

Таблица 2

$i_0, \text{град}$	$t_1 - t_0, \text{сут}$	$\Delta V_1, \text{км/с}$	$t_2 - t_0, \text{сут}$	$\Delta V_2, \text{км/с}$	$t_3 - t_0, \text{сут}$	$\Delta V_3, \text{км/с}$
0	0.013	0.410	0.154	0.376	0.495	0.437
	0.012	0.396	0.157	0.408	0.499	0.455
30	0.031	0.413	0.172	0.429	0.392	0.472
	0.030	0.416	0.170	0.414	0.392	0.474
60	0.080	0.308	0.143	0.818	0.600	0.486
	0.078	0.299	0.145	0.852	0.601	0.532
90	0.035	0.413	0.175	0.863	0.343	0.463
	0.035	0.415	0.176	0.834	0.342	0.476
120	0.035	0.412	0.174	0.999	0.336	0.470
	0.037	0.418	0.178	0.902	0.327	0.512
150	0.075	0.415	0.200	1.089	0.720	0.493
	0.072	0.427	0.192	1.068	0.721	0.547
180	0.065	0.415	0.194	1.207	0.530	0.546
	0.064	0.410	0.198	1.175	0.534	0.558

Заметим, что отклонение суммарных затрат характеристической скорости, найденных для начального приближения, от суммарных затрат для траектории, являющейся решением поставленной задачи, не превосходит 150 м/с.

Выводы

Представлен практически полезный алгоритм для построения траектории возврата к Земле с орбиты ИСЛ с использованием многоимпульсной схемы маневрирования в рамках задачи трех тел (Земля-Луна-КА) с учетом нецентральности гравитационных полей и реальных эфемерид. Алгоритм обеспечивает выполнение терминальных условий в точке входа в атмосферу Земли. Как элемент алгоритма исследована задача Ламберта в постановке Бэттина, и получены условия существования ее решения. Для построения начального приближения разработан метод формирования трехимпульсной схемы маневрирования, обеспечивающий достижение целевого вектора состояния на границе сферы действия Луны.

Результаты компьютерного моделирования для различных ориентаций окололунных орбит и для различных дат старта демонстрируют приемлемую точность работы алгоритма. Установлено, что при значительных отклонениях плоскости орбиты ожидания от плоскости орбиты возвращения затраты характеристической скорости при использовании трехимпульсной схемы маневрирования оказываются меньше, чем при использовании одноимпульсной схемы. В остальных случаях расходы характеристической скорости являются сопоставимыми.

Полученные траектории свидетельствуют о заметных преимуществах трехимпульсной схемы возврата по сравнению с одноимпульсной схемой для значительного числа наборов начальных условий. Они могут служить начальным приближением для поиска траекторий, обеспечивающих минимум характеристической скорости при возврате КА от Луны к заданному району Земли с учетом реальных эфемерид.

Библиографический список

1. Боровин Г.К. [и др.]. Баллистико-навигационное обеспечение полетов автоматических космических аппаратов к телам Солнечной системы / Г.К. Боровин, Ю.Ф. Голубев, А.В. Грушевский, Г.С. Заславский, М.В. Захваткин, [и др.], под ред. А.Г. Тучин, Химки: АО «НПО Лавочкина», 2018. 336 с.
2. Голубев Ю.Ф. [и др.]. Основное свойство интеграла Якоби для гравитационных маневров в Солнечной системе // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2019. № 34. С. 1–24.

3. Евдокимов С.Н. [и др.]. Обеспечение посадки спускаемого аппарата на космодром “Восточный” после возвращения от Луны // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2014. № 6 (2014). С. 136–152.
4. Егоров В.А., Гусев Л.И. Динамика перелетов между Землей и Луной / В.А. Егоров, Л.И. Гусев, Москва: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1980. 544 с.
5. Жаров В.Е. Сферическая астрономия, Век-2 / В.Е. Жаров, Фрязино: Век-2, 2006. 480 с.
6. Охоцимский Д.Е., Сихарулидзе Ю.Г. Основы механики космического полета / Д.Е. Охоцимский, Ю.Г. Сихарулидзе, Москва: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. 448 с.
7. Самотохин А.С., Тучин А.Г. Оптимизация одноимпульсных траекторий возврата с орбиты искусственного спутника Луны // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2016. № 56. С. 1–24.
8. Седов Л.И. Механика в СССР за 50 лет. Том 1. Общая и прикладная механика. / Л.И. Седов, Москва: Наука, 1968. 416 с.
9. Bean W.C. Minimum ΔV , three-impulse transfer onto a trans-mars asymptotic velocity vector // NASA Technical Note TN D-5757. 1970. С. 1–26.
10. Doll J.R., Gobetz F.W. A survey of impulsive trajectories. // AIAA Journal. 1969. № 5 (7). С. 801–834.
11. Edelbaum T. How many impulses? New York, NY, U.S.A.: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1966. 1–12 с.
12. Gunther P. Asymptotically optimum two-impulse transfer from lunar orbit. // AIAA Journal. 1966. № 2 (4). С. 346–352.
13. Hughes S. General Mission Analysis Tool (GMAT) Mathematical Specifications / S. Hughes, Greenbelt MD: NASA Goddard Space Flight Center, 2007. 210 с.
14. Hughes S.P. [и др.]. Verification and Validation of the General Mission Analysis Tool (GMAT) // AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference. 2014. С. 1–32.
15. Jones D., Ocampo C. Optimal Impulsive Escape Trajectories from a Circular Orbit to a Hyperbolic Excess Velocity Vector // AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference. 2010. С. 1–25.
16. Jones D.R., Ocampo C. Optimization of Impulsive Trajectories from a Circular Orbit to an Excess Velocity Vector // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2012. № 1 (35). С. 234–244.

17. Kraft D. A software package for sequential quadratic programming // Forschungsbericht- Deutsche Forschungs- und Versuchsanstalt für Luft- und Raumfahrt. 1988. С. 1–33.
18. Li J. [и др.]. Launch window for manned Moon-to-Earth trajectories // Aircraft Engineering and Aerospace Technology. 2012. № 5 (84). С. 344–356.
19. Montenbruck O., Gill E. Satellite Orbits Models, Methods and Applications / O. Montenbruck, E. Gill, Berlin: Springer Berlin, 2013. 369 с.
20. Ocampo C., Saudemont R.R. Initial Trajectory Model for a Multi-Maneuver Moon-to-Earth Abort Sequence // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2010. № 4 (33). С. 1184–1194.
21. General Mission Analysis Tool (GMAT) [Электронный ресурс]. URL: <https://software.nasa.gov/software/GSC-17177-1> (дата обращения: 19.03.2019).