ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

A. CASSA

Coomologia separata sulle varietà analitiche complesse

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 25, nº 2 (1971), p. 291-323

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1971_3_25_2_291_0>

COOMOLOGIA SEPARATA SULLE VARIETÀ ANALITICHE COMPLESSE

A. CASSA

Introduzione.

In questo lavoro sono studiate alcune delle proprietà del passaggio da uno spazio vettoriale topologico al suo « spazio separato » ; in particolare è studiata la possibilità di passare, separando, da una successione esatta ad una ancora esatta o ad una debolmente esatta (cioè ad una successione in cui l'immagine di ogni applicazione è densa nel nucleo della successiva).

Queste considerazioni permettono di stabilire un teorema di dualità per l'omologia degli spazi di Fréchet-Schwartz.

Con queste premesse si può dimostrare il seguente teorema di dualità per le varietà analitiche complesse:

Sia X una varietà analitica complessa numerabile all'infinito, di dimensione complessa n, e sia V uno spazio fibrato analitico a fibra vettoriale di base X; per ogni coppia di interi $q \geq 1$ e $p \geq 0$ esiste un isomorfismo topologico tra lo spazio separato di $H^q(X, \Omega^p(V))$ ed il duale forte di $H_k^{n-q}(X, \Omega^{n-p}(V^*))$.

Questo teorema generalizza il teorema di dualità di Serre che compare nei Commentari Mathematici Helvetici Vol. 19 anno 1953 e costituisce una nuova e più semplice dimostrazione di un risultato già ottenuto da Laufer e pubblicato in Transactions of the American Mathematical Society Vol. 128 No. 3, anno 1967.

Infine è dato un esempio di come si può utilizzare il fatto che il primo spazio di coomologia a valore in un fascio abbia il separato nullo e sono riportate due famiglie di varietà complesse per le quali questa proprietà è vera per alcuni o per tutti i fasci analitici coerenti.

Pervenuto alla Redazione il 23 Giugno 1970.

§ 0. Generalità sugli spazi di Fréchet-Schwartz e sui loro duali forti.

DEFINIZIONE. Si dice *spazio di Fréchet-Schwartz* uno spazio vettoriale topologico completo la cui topologia è generata da una successione crescente di seminorme $\{p_n\}_{n\geq 0}$ tali che la sfera unitaria di ogni seminorma p_n (con $n \geq 1$) è relativamente compatta rispetto alla topologia data sullo spazio dalla seminorma precedente.

Per tutto quello che è detto sugli spazi di Fréchet-Schwartz vedi [3].

Uno spazio di Fréchet-Schwartz sarà detto brevemente uno spazio (FS) ed uno che è duale forte di uno spazio di Fréchet-Schwartz sarà detto uno spazio (DFS).

Per gli spazi (FS) e (DFS) valgono le seguenti proprietà:

— Ogni sottospazio chiuso ed ogni quoziente separato di uno spazio (FS) è uno spazio (FS).
— Lo spazio prodotto di una famiglia numerabile di spazi (FS) è uno spazio (FS).
— Quindi il limite inverso di una successione di spazi (FS) e applicazioni continue è uno spazio (FS).
— Ogni spazio (FS) è riflessivo (lo spazio è naturalmente isomorfo topologicamente con il suo biduale forte), ogni spazio (DFS) è uno spazio (DF) (vedi [3]) completo, di Schwartz bornologico e riflessivo.
— Ogni sottospazio chiuso ed ogni quoziente separato di uno spazio (DFS) è uno spazio (DFS).
— La somma diretta di una famiglia numerabile di spazi (DFS) è uno spazio (DFS).
— Quindi il limite diretto di una successione di spazi (DFS) e applicazioni continue se è separato è uno spazio (DFS)

Vale inoltre il seguente:

TEOREMA: *Siano H, K due spazi* (FS) *oppure* (DFS) *e* $\varphi : H \to K$ *un'applicazione continua, le seguenti proprietà sono equivalenti:*

1) $\varphi : H \to K$ *è un omomorfismo topologico.*
2) $\varphi(H)$ *è chiuso in* K.
3) $\varphi' : K'_\beta \to H'_\beta$ *è un omomorfismo topologico.*
4) $\varphi'(K')$ *è chiuso in* H'_β.

DIMOSTRAZIONE: 1) $\Longrightarrow$ 2) poiché $\operatorname{im} \varphi \cong H/\operatorname{Ker} \varphi$, $\operatorname{im} \varphi$ è completo e quindi chiuso in K.

2) $\Longrightarrow$ 1) poiché H è uno spazio di Ptak (vedi [7] pagg. 162-166) e $\operatorname{im} \varphi$ è « barreled » (è riflessivo), φ è un omomorfismo topologico.

Analogamente 3) $\Longleftrightarrow$ 4).

1) $\Longrightarrow$ 4) Poiché nella successione

$$0 \to \operatorname{Ker}\varphi \xrightarrow{i} H \xrightarrow{\varphi} K \xrightarrow{q} K/\operatorname{im}\varphi \to 0$$

i, φ, q sono omomorfismi topologici, la successione duale

$$0 \leftarrow (\operatorname{Ker}\varphi)'_\beta \xleftarrow{i'} H'_\beta \xleftarrow{\varphi'} K'_\beta \xleftarrow{q'} (K/\operatorname{im}\varphi)'_\beta \leftarrow 0.$$

è esatta (vedi [8] lemma 3 pag. 64) e quindi $\varphi'(K')$ è chiuso in H'_β.

3) $\Longrightarrow$ 2) Come sopra poiché $\varphi'' = \varphi$;

Esempi: 1) Sia U un aperto di una varietà reale di tipo $\mathcal{C}^\infty$ lo spazio $\mathcal{E}(U)$ delle funzioni infinitamente differenziabili su U con la topologia della convergenza uniforme sui compatti delle funzioni e di tutte le loro derivate è uno spazio (FS).

2) Sia U un aperto di una varietà analitica complessa lo spazio $\mathcal{H}(U)$ delle funzioni olomorfe su U con la topologia della convergenza uniforme sui compatti è uno spazio (FS).

3) Sia X una varietà analitica complessa, $\mathcal{F}$ un sottofascio analitico coerente del fascio strutturale $\mathcal{O}$ su X, U un aperto di X, lo spazio $\Gamma(U, \mathcal{F})$ con la topologia della convergenza uniforme sui compatti di U è uno spazio (FS); le applicazioni di restrizione sono continue.

4) Sia X una varietà reale di tipo $\mathcal{C}^\infty$, U un aperto di X, il duale forte dello spazio $\mathcal{E}(U)$, lo spazio delle distribuzioni a supporto compatto su U (vedi [6] pag. 89 teor. XXV), è uno spazio (DFS).

1. Separazione di spazi vettoriali topologici.

Sia E uno spazio vettoriale topologico (s. v. t.) (su $\mathbb{C}$ come corpo di base), indicheremo con E_0 il minimo sottospazio chiuso di E. Si verificano facilmente le proprietà seguenti:

— $E_0 = \overline{\{0\}}$

— se $\mathcal{U}$ è un sistema fondamentale d'intorni di 0 in E, allora $E_0 = \bigcap_{U \in \mathcal{U}} U$.

— E è di Hausdorff se e solo se $E_0 = \{0\}$.

— per ogni sottoinsieme X di E vale che $X + E_0 \subset \overline{X}$

$$(X + E_0 = X + \bigcap_{\mathcal{V} \in \mathcal{U}} U \subset \bigcap_{U \in \mathcal{U}} (X + U) = \overline{X})$$

perciò se X è chiuso in E, $X + E_0 = X$

— se A è un sottoinsieme aperto di E, $A + E_0 = A$

— se X è un sottoinsieme localmente chiuso, allora $X + E_0 = X$.

Lo spazio quoziente E/E_0 è di Hausdorff e sarà detto ***spazio separato*** di E, useremo la notazione E_s (oppure $S(E)$) per indicarlo; $S_E : E \longrightarrow E_s$ indicherà la proiezione canonica (*applicazione di separazione*).

Dalle proprietà richiamate sopra risulta che i sottoinsiemi aperti, oppure chiusi, oppure localmente chiusi di E sono tutti saturati rispetto alla proiezione $S_E : E \longrightarrow E_s$.

Nei confronti di E_s valgono una serie di proprietà immediatamente ricavabili che enunciamo:

— $E_s = \{0\}$ se e solo se E ha la topologia banale

— se F è un complementare algebrico di E_0, allora $E = E_0 \oplus F$ in senso topologico (vd. [7] es. 2 (a) pag. 34) e F è isomorfo con E_s; per mezzo di questo isomorfismo la proiezione $S_E : E \longrightarrow E_s$ diviene la proiezione naturale di $E \cong E_0 \oplus E_s$ sul secondo addendo.

L'applicazione $S_E : E \longrightarrow E_s$ è un'applicazione continua ed aperta, essa inoltre:

— è un'applicazione chiusa

— se X è un sottoinsieme di E, l'applicazione ristretta $S_E|_X : X \longrightarrow S_E(X)$ è ancora aperta è chiusa.

— in particolare se G è un sottospazio vettoriale di E, $S_E|_G$ è un omomorfismo topologico di G su $S_E(G)$.

Siano E, F due s. v. t. ogni applicazione lineare continua $\varphi : E \longrightarrow F$ induce canonicamente un'applicazione lineare $\varphi_s : E_s \longrightarrow F_s$. Più precisamente si ha la:

PROPOSIZIONE 1: *Siano E, F due* s. v. t. *e $\varphi : E \longrightarrow F$ un'applicazione lineare, continua, esiste una ed una sola applicazione lineare $\varphi_s : E_s \longrightarrow F_s$ (applicazione separata di φ) che rende commutativo il diagramma :*

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\varphi} & F \\ {\scriptstyle S_E}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle S_F} \\ E_s & \xrightarrow{\varphi_s} & F_s \end{array}$$

L'applicazione φ_s risulta continua.

DIMOSTRAZIONE. Innanzitutto $\varphi(E_0) \subset F_0$, infatti $\varphi(E_0) = \varphi(\overline{\{0\}}) \subset \subset \overline{\{\varphi(0)\}} = F_0$ e da questo segue l'esistenza e l'unicità dell'applicazione φ_s. La continuità è una conseguenza del fatto che S_E è aperta.

— Se φ è surgettiva anche φ_s lo è (più in generale $\varphi_s(E_s) = S_F(\varphi(E))$.
— Non è vero in generale che se φ è iniettiva, anche φ_s lo sia (consideriamo ad esempio uno spazio di Hausdorff $E \neq \{0\}$ e sia $\widehat{E}$ lo stesso spazio vettoriale con la topologia banale, l'applicazione identica $i : E \longrightarrow \widehat{E}$ è iniettiva ma non lo è la sua separata $i_s : E \longrightarrow \{0\}$).
— Se φ è un omomorfismo topologico, l'applicazione separata φ_s è ancora un'omomorfismo topologico (è una conseguenza della proprietà di S_F di restare un omomorfismo topologico se la si considera ristretta a $\varphi(E)$).

In particolare se F è un sottospazio di E, possiamo considerare in modo naturale F_s come un sottospazio di E_s.

Per ogni sottospazio F di E risulta inoltre $\overline{(F_s)} = (\overline{F})_s$, onde si potrà usare senza ambiguità la notazione $\overline{F}_s$.
— Se φ è un'applicazione continua chiusa, anche φ_s lo è.
— se $i : E \longrightarrow E$ è l'applicazione identica, la sua separata $i_s : E_s \longrightarrow E_s$ è l'applicazione identica.
— se $\varphi : E \longrightarrow F$ e $\psi : F \longrightarrow G$ sono due applicazioni lineari continue, la separata della applicazione composta è la composizione delle applicazioni separate, cioè:

$$(\psi\,\varphi)_s = \psi_s\,\varphi_s\,;$$

infatti ambedue queste applicazioni completano in modo commutativo il diagramma

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\psi\,\varphi"] \arrow[d, "S_E"'] & G \arrow[d, "S_G"] \\ E_s \arrow[r] & G_s \end{tikzcd}$$

Queste due ultime osservazioni dicono, in altre parole, che se indichiamo con $\mathcal{V}$ la categoria degli s. v. t. su $\mathbb{C}$ e con $\mathcal{S}$ la sottocategoria degli spazi di Hausdorff, l'applicazione $S : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{S}$ definita $S(E) = E_s$ per ogni s. v. t. di $\mathcal{V}$ e $S(\varphi) = \varphi_s$ per ogni applicazione lineare continua φ tra s. v. t., risulta un funtore covariante (funtore di *separazione*).

Osserviamo due importanti proprietà di questo funtore:

PROPOSIZIONE 2: *Sia* $\{E_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *una famiglia di* s. v. t. *si ha un isomorfismo topologico canonico :*

$$S\left(\prod_{\alpha \in A} E_\alpha\right) \cong \prod_{\alpha \in A} S(E_\alpha).$$

DIMOSTRAZIONE. Poichè

$$(\underset{\alpha}{\Pi}\; E_\alpha)_0 = \overline{\{0\}}^{\Pi E_\alpha} = \Pi_\alpha\; \overline{\{0\}}^{E_\alpha} = \underset{\alpha}{\Pi}\,(E_\alpha)_0$$

si ha che:

$$S\,(\underset{\alpha}{\Pi}\; E) = (\underset{\alpha}{\Pi}\; E_\alpha)/(\underset{\alpha}{\Pi}\,(E_\alpha)_0) \cong \underset{\alpha}{\Pi}\,(E_\alpha/(E_\alpha)_0) = \underset{\alpha}{\Pi}\; S\,(E_\alpha)$$

e questo isomorfismo è topologico in quanto le proiezioni $E_\alpha \longrightarrow E_\alpha/(E_\alpha)_0$ sono aperte.

PROPOSIZIONE 3: *Sia E uno* s. v. t. *ed F un suo sottospazio vettoriale si hanno degli isomorfismi topologici canonici:*

$$S\,(E/F) \cong E/\overline{F} \cong E_s/\overline{F}_s.$$

DIMOSTRAZIONE: Sia $\pi : E \longrightarrow E/F$ la proiezione canonica e sia $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un sistema fondamentale di intorni aperti in 0 in E.

Allora:

$$(E/F)_0 = \bigcap_{i \in I} \pi\,(U_i) = \pi\pi^{-1} \bigcap_{i \in I} \pi\,(U_i) =$$

$$= \pi \bigcap_{i \in I} \pi^{-1}\,\pi\,(U_i) = \pi \bigcap_{i \in I} (U_i + F) = \pi\,(\overline{F}) \cong \overline{F}/F.$$

Perciò

$$S\,(E/F) \cong (E/F)/(\overline{F}/F) \cong E/\overline{F}$$

e

$$E/\overline{F} \cong (E/E_0)/(\overline{F}/E_0) \cong E_S/S_E(\overline{F}) \cong E_s/\overline{F}_s.$$

Poiché, come si è visto, non è vero in generale che l'applicazione separata di una applicazione iniettiva è ancora iniettiva, il funtore S non trasforma in generale successioni esatte in successioni esatte.

Se esaminiamo una successione esatta

$$E' \xrightarrow{\varphi'} E \xrightarrow{\varphi''} E''$$

di s. v. t. e applicazioni lineari continue, poiché in generale vale che im $(\varphi'_s) = S_E$ (im φ'), si vede che condizione necessaria e sufficiente affinchè si abbia la esattezza della successione separata:

$$E'_s \xrightarrow{\varphi'_s} E_s \xrightarrow{\varphi''_s} E''_s$$

è che valga Ker $(\varphi''_s) = S_E$(Ker φ'').

Tradurremo questa condizione in una condizione equivalente e più maneggevole, ma verificheremo contemporaneamente che essa è soddisfatta da una classe piuttosto ristretta di successioni; ad esempio anche se si suppone che φ'' sia un omomorfismo topologico, questo non basta a garantire che $\operatorname{Ker}(\varphi_s'') = S_E(\operatorname{Ker}\varphi'')$. Tuttavia in questo caso vale una proprietà più debole, esattamente che

$$\operatorname{Ker}(\varphi_s'') = \overline{S_E(\operatorname{Ker}\varphi'')}$$

per questo motivo ci soffermeremo ad indagare per quali applicazioni φ'' vale quest'ultima proprietà.

Tornando alla successione esatta $E' \to E \to E''$ questo significa che indagheremo per quali applicazioni φ'' si può passare ad una successione.

$$E_s' \xrightarrow{\varphi_s'} E_s \xrightarrow{\varphi_s''} E_s''$$

per cui si abbia $\operatorname{Ker}\varphi_s'' = \overline{\operatorname{im}\varphi_s'}$, cioè ad una successione che chiameremo *debolmente esatta.*

Proposizione 4: *Siano* E, E'' *due* s. v. t. *e* $\varphi'' : E \to E''$ *un'applicazione lineare continua, si ha:*

$$\operatorname{Ker}\varphi_s'' = \overline{S_E(\operatorname{Ker}\varphi'')}$$

se e solo se

$$\varphi''(\overline{\operatorname{Ker}\varphi''}) = E_0'' \cap \operatorname{im}\varphi''.$$

Dimostrazione: Supponiamo φ'' iniettiva, in questo caso si tratta di dimostrare che φ_s'' è iniettiva se e solo se $\varphi''(E_0) = E_0'' \cap \operatorname{im}\varphi''$; ed infatti: φ_s'' è iniettiva se e solo se per ogni $x \in E$, $\varphi''(x) \in E_0''$ equivale a $\varphi''(x) \in \varphi''(E_0)$ che è un altro modo di dire $\varphi''(E_0) = E_0'' \cap \operatorname{im}\varphi''$.

In generale dal diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd}
E_s \arrow[rr, "\varphi_s''"] \arrow[d, "\pi_s"'] & & E_s'' \\
(E/\operatorname{Ker}\varphi'')_s \arrow[urr, "\sigma_s"'] & &
\end{tikzcd}$$

si vede che $\mathrm{Ker}\,(\varphi''_s) = \mathrm{Ker}\,\pi_s$ se e solo se σ_s è iniettiva; poichè d'altra parte per la proposizione 3 $\mathrm{Ker}\,\pi_s = \overline{S_E(\mathrm{Ker}\,\varphi'')}$ risulta: $\mathrm{Ker}(\varphi''_s) = \overline{S_E(\mathrm{Ker}\,\varphi'')}$ se e solo se $\sigma\,[(E/\mathrm{Ker}\,\varphi'')_0] = E''_0 \cap \mathrm{im}\,\sigma$ cioè se e solo se $\sigma\,\pi\,\overline{(\mathrm{Ker}\,\varphi'')} =$ $= \varphi''\,\overline{(\mathrm{Ker}\,\varphi'')} = E''_0 \cap \mathrm{im}\,\varphi''$.

Proposizione 5: *Siano E, E'' due* s. v. t. *e $\varphi'' : E \longrightarrow E''$ un'applicazione lineare continua si ha:*

$$\mathrm{Ker}\,\varphi''_s = S_E(\mathrm{Ker}\,\varphi'')$$

se e solo se

$$\varphi''(E_0) = E''_0 \cap \mathrm{im}\,\varphi''.$$

Dimostrazione: Possiamo utilizzare la proposizione precedente osservando che $\mathrm{Ker}\,\varphi''_s = S_E(\mathrm{Ker}\,\varphi'')$ se e solo se accadono le due seguenti cose: 1) $\mathrm{Ker}\,\varphi''_s = \overline{S_E(\mathrm{Ker}\,\varphi'')}$ e 2) $\mathrm{Ker}\,\varphi'' + E_0$ è chiuso in E; poiché dire $\mathrm{Ker}\,\varphi'' + E_0$ chiuso in E equivale a dire $\mathrm{Ker}\,\varphi'' + E_0 = \overline{\mathrm{Ker}\,\varphi''}$, 1) e 2) implicano $\varphi''(\mathrm{Ker}\,\varphi'' + E_0) = E''_0 \cap \mathrm{im}\,\varphi''$, cioè appunto $\varphi''(E_0) =$ $= E''_0 \cap \mathrm{im}\,\varphi''$.

Infine se $\varphi''(E_0) = E''_0 \cap \mathrm{im}\,\varphi''$, $\mathrm{Ker}\,\varphi'' + E_0 = (\varphi'')^{-1}(E''_0)$ è chiuso, cioè vale la 2), e $\varphi''(E_0) = \varphi''(\mathrm{Ker}\,\varphi'' + E_0) = \varphi''\,\overline{(\mathrm{Ker}\,\varphi'')} = E''_0 \cap \mathrm{im}\,\varphi''$, cioè vale la 1).

— Un caso in cui l'ultima proposizione è banalmente vera si ha quando lo spazio E'' è separato.

Proposizione 6: *Se $\varphi'' : E \longrightarrow E''$ è un omomorfismo topologico allora* $\mathrm{Ker}\,\varphi''_s = \overline{S_E(\mathrm{Ker}\,\varphi'')}$.

Dimostrazione: Chiaramente la tesi vale se φ'' è bigettiva.

In ogni altro caso dal diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} E_s \arrow[rr, "\varphi''_s"] \arrow[d, "\pi_s"'] & & (\mathrm{im}\,\varphi'')_s \\ (E/\mathrm{Ker}\,\varphi'')_s \arrow[urr, "\sigma_s"'] & & \end{tikzcd}$$

in cui l'applicazione σ_s è iniettiva dato che σ è un isomorfismo topologico, segue che

$$\mathrm{Ker}\,\varphi''_s = \mathrm{Ker}\,\pi_s = \overline{S_E(\mathrm{Ker}\,\varphi'')}.$$

Possiamo perciò concludere con la:

PROPOSIZIONE 7 : *Sia* $E' \xrightarrow{\varphi'} E \xrightarrow{\varphi''} E''$ *una successione esatta di* s. v. t. *e applicazioni continue. La successione separata*:

$$E'_s \xrightarrow{\varphi'_s} E_s \xrightarrow{\varphi''_s} E''_s$$

è :

i) *debolmente esatta se e solo se* $\varphi''(\overline{\mathrm{Ker}\,\varphi''}) = E''_0 \cap \mathrm{im}\,\varphi''$ (*quindi in particolare se* φ'' *è un omomorfismo topologico*)

ii) *esatta se e solo se* $\varphi''(E_0) = E''_0 \cap \mathrm{im}\,\varphi''$.

Il seguente esempio mostra che esistono effettivamente dei casi in cui da una successione esatta si passa separando ad una successione debolmente esatta ma non esatta.

Sia E uno s. v. t. separato ed F un suo sottospazio proprio denso, la successione

$$0 \to F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} E/F \to 0$$

è esatta e la successione separata

$$0 \to F \xrightarrow{i} E \to 0 \to 0$$

è debolmente esatta ma non esatta.

Se E è uno s. v. t. il duale topologico di E si identifica con il duale topologico di E_s. Anzi con una facile dimostrazione, si può vedere che $(E_s)'_\beta \cong E'_\beta$, quindi in particolare che il duale forte (anche quello debole) di ogni s. v. t. localmente convesso è di Hausdorff. Osserviamo infine che se E è localmente convesso allora $E'_\beta = \{0\}$ se e solo se $E_s = \{0\}$.

§ 2. **Omologia separata di spazi vettoriali topologici.**

In questo paragrafo studieremo la possibilità di passare dalla successione esatta di omologia generata da una successione esatta di complessi

$$0 \to E' \xrightarrow{\varphi'} E \xrightarrow{\varphi''} E'' \to 0$$

muniti di una struttura di spazi vettoriali topologici alla successione dei separati degli spazi di omologia in modo che o si conservi l'esattezza o si possa stabilire almeno la debole esattezza.

A proposito di quest'ultimo problema studieremo sotto quali ipotesi si può affermare che l'applicazione naturale $\delta : H(E'') \to H(E')$ è un omomorfismo topologico.

La seguente proposizione è una risposta a questo quesito.

PROPOSIZIONE 1: *Siano* (E', d'), (E, d), (E'', d'') *tre complessi con* E', E, E'' s. v. t. *e* d', d, d'' *applicazioni lineari continue.*

Siano $\varphi' : E' \to E$ *e* $\varphi'' : E \to E''$ *due applicazioni lineari continue che commutano con gli operatori di bordo e tali che la successione:*

$$0 \to E' \xrightarrow{\varphi'} E \xrightarrow{\varphi''} E'' \to 0$$

sia esatta.

Sia $\delta : H(E'') \to H(E')$ *l'applicazione lineare che rende esatto il diagramma:*

$$\begin{tikzcd} H(E') \arrow[rr, "\varphi'^*"] & & H(E) \arrow[dl, "\varphi''^*"] \\ & H(E'') \arrow[ul, "\delta"] & \end{tikzcd}$$

e che è data $\delta = \pi' \varphi'^{-1} d \varphi''^{-1} \pi''^{-1}$ *(dove* $\pi' : Z' \to H(E')$, $\pi : Z \to H(E)$, $\pi'' : Z'' \to H(E'')$ *sono le proiezioni naturali).*

Allora α) φ'^* *e* φ''^* *sono continue.*

β) *se* φ' *e* φ'' *sono omomorfismi topologici* δ *è continuo.*

γ) *se* d *è un omomorfismo topologico,* δ *manda aperti di* $H(E'')$ *in aperti della sua immagine in* $H(E')$ *(e quindi se* φ', φ'', d *sono omomorfismi topologici, anche* δ *è un omomorfismo topologico).*

DIMOSTRAZIONE: α) è evidente.

β) Poiché $\delta^{-1} = \pi'' \varphi'' d^{-1} \varphi' \pi'^{-1}$ si tratta di dimostrare che preso comunque un aperto A' di $H(E')$, $\pi'' \varphi'' d^{-1} \varphi' \pi'^{-1}(A')$ è un aperto di $H(E'')$.

Intanto poiché φ' è un omomorfismo topologico iniettivo

$d^{-1} \varphi' \pi'^{-1}(A')$ è un aperto di $d^{-1}(\varphi'(Z'))$.

Poiché $d^{-1} \varphi'(Z') \supset \operatorname{Ker} \varphi''$, allora $\varphi'' d^{-1} \varphi' \pi'^{-1}(A')$ è un aperto di $\varphi'' d^{-1} \varphi'(Z')$ e analogamente poiché $\varphi'' d^{-1} \varphi'(Z') \supset \operatorname{Ker} \pi''$ allora $\delta^{-1}(A') = \pi'' \varphi'' d^{-1} \varphi' \pi'^{-1}(A')$ è un aperto di $\pi'' \varphi'' d^{-1} \varphi'(Z') = \delta^{-1}(H(E')) = H(E'')$.

γ) Dimostriamo ora che se A'' è un aperto di $H(E'')$ allora $\delta(A'')$ è un aperto di $\delta(H(E''))$.

Cioè dimostriamo che $\pi' \varphi'^{-1} d \varphi''^{-1} \pi''^{-1}(A'')$ è un aperto di $\pi' \varphi'^{-1} \cdot d \varphi''^{-1} \pi''^{-1}(H(E''))$.

Intanto $\varphi''^{-1}\,\pi''^{-1}(A'')$ è un aperto di $\varphi''^{-1}(Z'')$ e poiché $\varphi''^{-1}(Z'') \supset \operatorname{Ker} d$ allora $d\varphi''^{-1}\pi''^{-1}(A'')$ è un aperto di $d\varphi''^{-1}(Z'')$ e quindi $\varphi'^{-1}d\varphi''^{-1}\pi''^{-1}(A'')$ è un aperto di $\varphi'^{-1}\,d\varphi''^{-1}(Z'')$, infine poiché $\varphi'^{-1}\,d\varphi''^{-1}(Z'') \supset B'$ allora $\delta(A'') = \pi'\,\varphi'^{-1}\,d\varphi''^{-1}\,\pi''^{-1}(A'')$ è un aperto di $\pi'\,\varphi'^{-1}\,d\varphi''^{-1}(Z'') = \delta(H(E''))$.

— È chiaro che se E', E, E'' sono tre spazi di Fréchet le applicazioni φ' e φ'' sono degli omomorfismi topologici e quindi l'applicazione $\delta : H(E'') \longrightarrow H(E')$ è continua.

Inoltre affinché δ sia un omomorfismo topologico basta che d sia un omomorfismo topologico, cioè che $H(E)$ sia uno spazio di Hausdorff (e quindi di Fréchet).

PROPOSIZIONE 2: *Nelle ipotesi della prop.* 1 *se* E', E, E'' *sono spazi di Fréchet e* $H(E)$ *è di Hausdorff (e quindi di Fréchet) la successione* (*)

$$\begin{tikzcd}
H_s(E') \arrow[rr, "\varphi_s'^{*}"] & & H(E) \arrow[dl, "\varphi_s''^{*}"] \\
& H_s(E'') \arrow[ul, "\delta_s"] &
\end{tikzcd}$$

è esatta in $H_s(E')$ *e debolmente esatta in* $H_s(E'')$.

COROLLARIO. *Nella ipotesi della prop.* 1 *se* $H(E)$ *e* $H(E'')$ *sono di Hausdorff (e quindi di Fréchet) la successione è esatta in* $H_s(E')$ *e* $H(E)$ *e*

$$\begin{tikzcd}
H_s(E') \arrow[rr, "\varphi_s'^{*}"] & & H(E) \arrow[dl, "\varphi''^{*}"] \\
& H(E'') \arrow[ul, "\delta_s"] &
\end{tikzcd}$$

debolmente esatta in $H(E'')$.

(*) D'ora in poi, se non ci sarà pericolo di confusioni scriveremo $H_s(E)$ in luogo di $(H(E))_s$.

— Queste considerazioni possono estendersi ad ogni categoria di spazi v.t. per cui rimanga valido il teorema che afferma: ogni applicazione lineare continua ad immagine chiusa è un omomorfismo topologico (Teorema di omomorfismo). Ad esempio per gli spazi (DFS) (duali di Fréchet-Schwartz: vedi § 0).

Se particolarizziamo queste considerazioni al caso della coomologia e della omologia graduata otteniamo i seguenti enunciati (la cui dimostrazione è analoga a quella delle proposizioni 1 e 2):

PROPOSIZIONE 3: *Siano* (E', d') (E, d) (E'', d'') *tre complessi coomologici* $(E' = \prod_{q \geq 0} E'^q,\ E = \prod_{q \geq 0} E^q,\ E'' = \prod_{q \geq 0} E''^q)$ *tali che* E', E, E'' *siano* s.v.t. *e* d', d, d'' *applicazioni lineari continue.*

Siano $\varphi' : E' \to E$ *e* $\varphi'' : E \to E''$ *due applicazioni lineari continue compatibili con le graduazioni, che commutano con gli operatori di cobordo e tali che la successione*

$$0 \to E' \xrightarrow{\varphi'} E \xrightarrow{\varphi''} E'' \to 0$$

sia esatta.

Siano, per tutti i $q \geq 0$

$$\delta^q : H^q(E'') \to H^{q+1}(E')$$

le applicazioni lineari che rendono esatta la successione

$$0 \to H^0(E') \to H^0(E) \to H^0(E'') \xrightarrow{\delta^0} H^1(E') \to H^1(E) \to \ldots$$

$$\ldots \to H^q(E') \to H^q(E) \to H^q(E'') \xrightarrow{\delta^q} H^{q+1}(E') \to H^{q+1}(E) \to \ldots$$

e che sono date da $\delta^q = \pi'^{q+1} (\varphi'^{q+1})^{-1} d^q (\varphi''^q)^{-1} (\pi''^q)^{-1}$.

Le applicazioni φ'^{*q} *e* φ''^{*q} *sono continue per ogni* $q \geq 0$.

Se φ'^{q+1} e φ''^q *sono omomorfismi topologici allora* δ^q *risulta continua.*

Se d^q *è un omomorfismo topologico, l'applicazione* δ^q *manda aperti di* $H^q(E'')$ *in aperti della sua immagine* $H^{q+1}(E')$. (*e quindi se* φ'^{q+1}, φ''^q *e* d^q *sono omomorfismi topologici* δ^q *è un omomorfismo topologico.*

— Se E', E, E'' sono tre spazi di Fréchet, tutte le applicazioni φ'^q, φ''^q per ogni $q \geq 0$ sono omomorfismi topologici e di conseguenza tutte le applicazioni δ^q sono continue.

PROPOSIZIONE 4: *Nelle ipotesi della* prop. 3, *se* E, E', E'' *sono spazi di Fréchet e* $H^{q+1}(E)$ *è uno spazio di Hausdorff (di Fréchet), la successione* *per* $q \geq 1$

$$H_s^q(E) \to H_s^q(E'') \xrightarrow{\delta_s^q} H_s^{q+1}(E') \to H^{q+1}(E)$$

è esatta in $H_s^{q+1}(E')$ *e debolmente esatta in* $H_s^q(E'')$.

Per $q = 0$, *la successione:*

$$0 \to H^0(E') \to H^0(E) \to H^0(E'') \xrightarrow{\delta_s^0} H_s^1(E') \to H^1(E)$$

è debolmente esatta in $H^0(E'')$ *ed esatta altrove.*

COROLLARIO: *Quindi sempre nelle ipotesi della* prop. 3 *se* $H^{q+1}(E)$ *è di Hausdorff e* $H_s^{q+1}(E') = 0$, *l'applicazione:*

$$\varphi''^{*q}: H_s^q(E) \to H_s^q(E'')$$

ha immagine densa in $H^q(E'')$.

— Al solito queste considerazioni possono estendersi ad ogni categoria di s. v. t. per cui valga il teorema di omomorfismo.

PROPOSIZIONE 5: *Siano* (E', d') (E, d) (E'', d'') *tre complessi omologici graduati* $(E' = \bigoplus_{q \geq 0} E'_q,\ E = \bigoplus_{q \geq 0} E_q,\ E'' = \bigoplus_{q \geq 0} E''_q)$ *tali che* E', E, E'' *siano* s. v. t. *e* d', d, d'' *applicazioni lineari continue.*

Siano $\varphi': E' \to E$ *e* $\varphi'': E \to E''$ *due applicazioni lineari continue compatibili con le graduazioni, che commutano con gli operatori di bordo e tali che la successione*

$$0 \to E' \xrightarrow{\varphi'} E \xrightarrow{\varphi''} E'' \to 0$$

sia esatta.

Siano per tutti i $q \geq 0$

$$\delta_q: H_{q+1}(E'') \to H_q(E')$$

le applicazioni lineari che rendono esatta la successione:

$$\ldots \to H_{q+1}(E') \to H_{q+1}(E) \to H_{q+1}(E'') \xrightarrow{\delta_q} H_q(E') \to H_q(E) \to \ldots$$

$$\ldots \to H_1(E') \to H_1(E) \to H_1(E'') \xrightarrow{\delta_0} H_0(E') \to H_0'(E) \to H_0(E'') \to 0$$

e che sono date da $\delta_q = \pi'_q \varphi'^{-1}_q d_{q+1} \varphi''^{-1}_{q+1} \pi''^{-1}_{q+1}$.

Le applicazioni φ'_{*q} *e* φ''_{*q} *sono continue per ogni* $q \geq 0$.

Se φ'_q *e* φ''_{q+1} *sono omomorfismi topologici allora* δ_q *risulta continua.*

Se d_{q+1} *è un omomorfismo topologico, l'applicazione* δ_q *manda aperti di* $H_{q+1}(E'')$ *in aperti della sua immagine in* $H_q(E')$ (*e quindi se* φ'_q, φ''_{q+1} *e* d_{q+1} *sono omomorfismi topologici,* δ_q *è un omomorfismo topologico*).

— Se E', E, E'' sono di Fréchet, tutte le applicazioni φ'_q, φ''_q sono omomorfismi topologici e quindi tutte le applicazioni δ_q sono continue.

PROPOSIZIONE 6: *Nelle ipotesi della* prop. 5 *se* E', E, E'' *sono spazi di Fréchet e* $H_q(E)$ *è uno spazio di Hausdorff* (*di Fréchet*) *la successione*:

$$(H_{q+1}(E))_s \longrightarrow (H_{q+1}(E''))_s \xrightarrow{(\delta_q)_s} (H_q(E'))_s \longrightarrow H_q(E)$$

è esatta in $(H_q(E'))_s$ *e debolmente esatta in* $(H_{q+1}(E''))_s$.

COROLLARIO. *Quindi sempre nelle ipotesi della* prop. 5 *se* $H_q(E)$ *è di Hausdorff e* $(H_{q+1}(E''))_s = 0$, *l'applicazione* :

$$(\varphi'_{*q})_s : (H_q(E'))_s \longrightarrow H_q(E)$$

è iniettiva.

— Come nei casi precedenti, tutte le considerazioni svolte si possono estendere ad ogni categoria di s. v. t. per cui sia valido il teorema di omomorfismo.

— Diamo ora un esempio di successione di omologia che, separata, è debolmente esatta ma non esatta.

Siano F, G due s. v. t. di Hausdorff e $\varphi : F \longrightarrow G$ una applicazione lineare continua.

Poniamo $E = F \times G \times G$ e $d(x, y, z) = (0, 0, \varphi(x) - y)$ risulta in questo caso $d^2 = 0$ e

$$\operatorname{Ker} d = \{(x, y, z) : y = \varphi(x)\} = \operatorname{Graf}(\varphi) \times G$$

$$\operatorname{im} d = \{(0, 0, \varphi(x) - y)\; x \in F, y \in G\} = \{0\} \times \{0\} \times G$$

perciò $H(E) \cong \operatorname{Graf}(\varphi) \cong F$.

Poniamo poi $E' = F \times \{0\} \times G$ e $d' = d|_{E'}$, cioè $d'(x, 0, z) = (0, 0, \varphi(x))$. Allora

$$\operatorname{Ker} d' = \{(x, 0, z) : \varphi(x) = 0\} = \operatorname{Ker} \varphi \times \{0\} \times G$$

e

$$\operatorname{im} d' = \{(0, 0, \varphi(x))\ x \in F\} = \{0\} \times \{0\} \times \operatorname{im} \varphi$$

perciò $H(E') \cong \operatorname{Ker} \varphi \times \operatorname{Coker} \varphi$.

Poniamo infine $E'' = E/E'$ cioè $E'' \cong G$.

Si verifica che l'unico operatore di bordo d'' su E'' che commuta con la proiezione canonica π di E in E'' (cioè tale che $\pi d = d'' \pi$) è l'operatore nullo, perciò poniamo $d'' = 0$ e quindi risulta $H(E'') \cong G$.

Sia $i : E' \to E$ l'immersione naturale; la successione:

$$0 \to E' \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} E'' \to 0$$

è esatta e le applicazioni i, π commutano con gli operatori di bordo.

Esiste perciò un'applicazione lineare (continua perchè i e π sono omomorfismi topologici) $\delta : H(E'') \to H(E')$ che rende esatto il diagramma:

$$\begin{tikzcd} H(E') \arrow[rr, "i^*"] & & H(E) \arrow[dl, "\pi^*"] \\ & H(E'') \arrow[ul, "\delta"] & \end{tikzcd}$$

Se ora identifichiamo $H(E)$ con F e $H(E'')$ con G e $H(E')$ con $\operatorname{Ker} \varphi \times \times \operatorname{Coker} \varphi$, l'applicazione i^* diviene l'applicazione:

$$p : \operatorname{Ker} \varphi \times \operatorname{Coker} \varphi \to F$$

definita $p(x, y) = x$.

L'applicazione π^* diviene proprio l'applicazione

$$\varphi : F \to G$$

e l'applicazione δ diviene l'applicazione

$$0 \times (-q) : G \to \operatorname{Ker} \varphi \times \operatorname{Coker} \varphi$$

definita $(0 \times (-q))(y) = (0, -q(y))$ dove $q : G \to \operatorname{Coker} \varphi$ è la proiezione canonica.

Il triangolo di omologia si può pertanto riscrivere così :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ker}\,\varphi \times \mathrm{Coker}\,\varphi \arrow[rr, "p"] & & F \arrow[dl, "\varphi"] \\ & G \arrow[ul, "0 \times (-q)"] & \end{tikzcd}$$

Passando al diagramma degli spazi e delle applicazioni separate si ha il diagramma :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ker}\,\varphi \times [G/\overline{\varphi(F)}] \arrow[rr, "p"] & & F \arrow[dl, "\varphi"] \\ & G \arrow[ul, "0 \times (-\widehat{q})"] & \end{tikzcd}$$

dove $\widehat{q}$ è la proiezione naturale di G su $G/\overline{\varphi(F)}$.

Si verifica (direttamente o per mezzo del corollario alla proposizione 2) che questo diagramma è esatto in $\mathrm{Ker}\,\varphi \times [G/\overline{\varphi(F)}]$ ed in F, ed è debolmente esatto in G.

Affinché si abbia l'esattezza anche in G occorre che φ abbia immagine chiusa.

Perciò se si sceglie una applicazione lineare $\varphi : F \to G$ continua che non abbia immagine chiusa si ottiene l'esempio di una successione di omologia che separata è in un suo elemento, debolmente esatta ma non esatta.

— Con ovvie modifiche questo esempio può essere adattato al caso graduato. Ad esempio, se si considera la coomologia, siano $\{F^q\}_{q \geq 0}$ e $\{G^q\}_{q \geq -1}$ $(G^{-1} = \{0\})$ due successioni di spazi vettoriali topologici di Hausdorff e siano per ogni $q \geq 0$ $\varphi^q : F^q \to G^q$ delle applicazioni lineari continue.

Poniamo $E^q = F^q \times G^q \times G^{q-1}$ e $d^q(x, y, z) = (0, 0, \varphi^q(x) - y)$ per ogni $q \geq 0$; si ha che $d^{q+1} d^q = 0$

$$\mathrm{Ker}\, d^q = \mathrm{Graf.}\,(\varphi^q) \times G^{q-1}$$

e

$$\mathrm{im}\, d^{q-1} = \{0\} \times \{0\} \times G^{q-1} \qquad (\text{per } q \geq 1)$$

e quindi

$$H^q(E) \cong \mathrm{Graf}\,(\varphi^q) \cong F^q \qquad \text{per } q \geq 1$$

e

$$H^0(E) \cong F^0.$$

Poniamo poi analogamente al caso trattato sopra

$$E'^q = F^q \times \{0\} \times G^{q-1} \quad \text{e} \quad d'^q = d^q|_{E'^q}$$

si ha che $H^q(E') \cong \operatorname{Ker}\varphi^q \times \operatorname{Coker}\varphi^{q-1} \cong \operatorname{Coker}\varphi^{q-1} \times \operatorname{Ker}\varphi^q$ per ogni $q \geq 1$ e $H^0(E') \cong \operatorname{Ker}\varphi^0$.

Poniamo infine $E''^q = E^q/E'^q \cong G^q$ per ogni $q \geq 0$ e $d''^q = 0$ risulta perciò $H^q(E'') \cong G^q$ per ogni $q \geq 0$.

Se indichiamo con $i^q : E'^q \to E^q$ e $\pi^q : E^q \to E''^q$ rispettivamente l'immersione e la proiezione naturale per ogni $q \geq 0$ otteniamo una sequenza di successioni:

$$0 \to E'^q \xrightarrow{i^q} E^q \xrightarrow{\pi^q} E''^q \to 0$$

esatte ed in cui le i^q e le π^q commutano con gli operatori di cobordo.

In definitiva si può stabilire la successione esatta di coomologia:

$$0 \to H^0(E') \to H^0(E) \to H^0(E'') \xrightarrow{\delta^0} H^1(E') \to H^1(E) \to \dots$$

$$\dots \to H^q(E') \to H^q(E) \to H^q(E'') \xrightarrow{\delta^q} H^{q+1}(E') \to H^{q+1}(E) \to \dots$$

Con le identificazioni $H^q(E) = F^q$, $H^q(E') = \operatorname{Coker}\varphi^{q-1} \times \operatorname{Ker}\varphi^q$. per $q \geq 1$ e $H^0(E') = \operatorname{Ker}\varphi^0$, $H^q(E'') = G^q$ si ottiene la successione esatta:

$$0 \to \operatorname{Ker}\varphi^0 \to F^0 \xrightarrow{\varphi^0} G^0 \to \operatorname{Coker}\varphi^0 \times \operatorname{Ker}\varphi^1 \to F^1 \xrightarrow{\varphi^1} G^1 \to \dots$$

$$\dots \to \operatorname{Coker}\varphi^{q-1} \times \operatorname{Ker}\varphi^q \to F^q \xrightarrow{\varphi^q} G^q \to \dots$$

La successione separata

$$0 \to \operatorname{Ker}\varphi^0 \to F^0 \to G^0 \to [G^0/\overline{\varphi^0(F^0)}] \times \operatorname{Ker}\varphi^1 \to F^1 \to G^1 \to \dots$$

$$\dots \to [G^{q-1}/\overline{\varphi^{q-1}(F^{q-1})}] \times \operatorname{Ker}\varphi^q \to F^q \to G^q \to \dots$$

è esatta in $\operatorname{Ker}\varphi^0$, F^0, G^0 ed in ogni F^q e $G^{q-1}/\overline{\varphi^{q-1}(F^{q-1})}$ ed è debolmente esatta in G^q, ma non è esatta se φ^{q-1} non ha immagine chiusa.

Altri esempi si vedranno nello studio della coomologia delle varietà complesse.

§ 3. Teoremi di Dualità.

TEOREMA 1 : *Sia (E, d) un complesso con E spazio di Fréchet-Schwartz e sia (E'_β, d') il suo complesso duale (forte). Esiste un isomorfismo topologico naturale :*

$$H_s(E'_\beta) \cong (H(E))'_\beta .$$

DIMOSTRAZIONE : Definiamo un'applicazione lineare

$$\alpha : H(E) \longrightarrow (H(E'_\beta))'_\beta$$

in questo modo : sia h un elemento di $H(E)$; sia poi $x \in Z(E)$ un elemento tale che $h = x \bmod (\operatorname{im} d)$ e sia $f_x : E'_\beta \longrightarrow \mathbb{C}$ la forma lineare continua associata ad x. Poiché $d(x) = 0$ si ha che $f_x(\operatorname{im} d') = \{0\}$. Perciò la forma lineare f_x ristretta a $Z(E'_\beta)$ si può passare al quoziente in una forma $\widehat{f_x} : H(E'_\beta) \longrightarrow \mathbb{C}$. Poniamo $\alpha(h) = \widehat{f_x}$. Questa è una buona definizione perché se $x' \bmod (\operatorname{im} d) = h$, cioè se esiste $x'' \in E$ tale che $x' - x = d(x'')$, poiché $f_{d(x'')} = 0$ su $\operatorname{Ker} d'$ allora $f_{x'} = f_x$ su $\operatorname{Ker} d'$ e quindi $\widehat{f_x} = \widehat{f_{x'}}$.

L'applicazione α è surgettiva. Infatti una forma lineare continua $\lambda : H(E'_\beta) \longrightarrow \mathbb{C}$ si rialza ad una forma continua $\lambda' : \operatorname{Ker} d' \longrightarrow \mathbb{C}$. Per il teorema di Hahn-Banach λ' si può estendere ad una forma continua $\tilde{\lambda} : E'_\beta \longrightarrow \mathbb{C}$. Poiché E è riflessivo esiste $x \in E$ tale che $f_x = \tilde{\lambda}$ e si ha che $\alpha(x \bmod (\operatorname{im} d)) = \lambda$. Il nucleo di α è $(H(E))_0$, infatti :

sia $h = x \bmod (\operatorname{im} d)$, $\alpha(h) = 0$ se e solo se $\widehat{f_x} = 0$ cioè se e solo se $f_x = 0$ su $\operatorname{Ker} d'$ vale a dire se e solo se ogni forma lineare continua $l : E \longrightarrow \mathbb{C}$ che si annulla su $\operatorname{im} d$ si annulla anche su x, ma questo avviene se e solo se $x \in \overline{\operatorname{im} d}$, cioè se e solo se $h \in (H(E))_0$.

Perciò passando al quoziente per $(H(E))_0$ si ottiene una applicazione lineare :

$$\alpha_s : H_s(E) \longrightarrow (H(E'_\beta))'_\beta$$

che è un isomorfismo di spazi vettoriali.

Rifacendo le stesse considerazioni per (E'_β, d') in luogo di (E, d), si troverà un isomorfismo di spazi vettoriali

$$\gamma_s : H_s(E'_\beta) \longrightarrow (H((E'_\beta)'_\beta))'_\beta .$$

Poiché $H_s(E'_\beta)$ è riflessivo (è uno spazio (DFS)) si può identificare $H_s(E'_\beta)$ con il biduale forte di $H(E'_\beta)$ e $(H_s(E))'_\beta$ con $(H((E'_\beta)'_\beta))'_\beta$.

Con queste identificazioni γ_s risulta l'applicazione duale di α_s e questo permette di stabilire che α_s è un'applicazione lineare continua (vedi [7], prop. 7.4, pag. 158).

Lo spazio $(H_s(E'_\beta))'_\beta$ come duale forte di uno spazio (DFS) è uno spazio di Fréchet, perciò α_s è un isomorfismo topologico.

Utilizzando la prima parte della dimostrazione appena data si può enunciare il:

TEOREMA 2: *Sia (E, d) un complesso con E spazio semi-riflessivo e sia (E'_β, d') il suo complesso duale (forte) esiste un isomorfismo algebrico naturale:*

$$H_s(E) \simeq (H(E'_\beta))'.$$

TEOREMA 3: *Sia (E, d) un complesso con E spazio di Fréchet-Schwartz e sia (E'_β, d') il complesso duale.*

Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1) *$H(E)$ è di Hausdorff.*
2) *$d: E \longrightarrow E$ è un omomorfismo topologico.*
3) *$d': E'_\beta \longrightarrow E'_\beta$ è un omomorfismo topologico.*
4) *$H(E'_\beta)$ è di Hausdorff.*
5) *esiste un isomorfismo topologico*

$$H(E'_\beta) \cong (H(E))'_\beta.$$

DIMOSTRAZIONE: Le prime quattro proprietà son equivalenti per il Teorema del § 0 e chiaramente 5) implica 4).

Viceversa se $H(E'_\beta)$ è di Hausdorff il teorema 1 dà appunto la 5).

Analogamente ai teoremi precedenti sussistono i corrispondenti teoremi per il caso graduato:

TEOREMA 4. *Sia (E, d) un complesso coomologico $(E = \prod_{q \geq 0} E^q)$ in cui E è uno spazio di Fréchet-Schwartz e sia (E'_β, d') il complesso duale (forte) di (E, d). Esso risulta in maniera naturale un complesso omologico graduato $(E'_\beta \cong \bigoplus_{q \geq 0} (E^q)'_\beta)$. Per ogni $q \geq 0$ si ha un isomorfismo topologico*

$$(H_q(E'_\beta))_s \cong (H^q(E))'_\beta.$$

DIMOSTRAZIONE: Si procede come per il Teor. 1.

TEOREMA 5: *Sia* (E, d) *un complesso coomologico* $(E = \prod_{q \geq 0} E^q)$ *in cui* E *è uno spazio di Fréchet-Schwartz e sia* (E'_β, d') *il complesso omologico graduato duale (forte) di* (E, d).

Per ogni $q \geq 0$ *sono equivalenti le proprietà:*

1) $H_q(E'_\beta)$ *è di Hausdorff.*
2) $(d^q)'$ *è un omomorfismo topologico.*
3) d^q *è un omomorfismo topologico.*
4) $H^{q+1}(E)$ *è di Hausdorff.*
5) *esiste un isomorfismo topologico*

$$H_q(E'_\beta) \cong (H^q(E))'_\beta .$$

DIMOSTRAZIONE: come per il teorema 3.

Un esempio in cui $H(E'_\beta)$ *non è isomorfo a* $(H(E))'$.

Sia G uno spazio (FS) ed F un sottospazio proprio denso in G. Sia $E = F \times G$ e $d: E \to E$ definita $d(x, y) = (0, x)$ si ha $d^2 = 0$, $\operatorname{Ker} d = \{0\} \times G$ e $\operatorname{im} d = \{0\} \times F$ e quindi $H(E) \cong G'/F$ non è di Hausdorff (anzi ha la topologia banale), perciò per il teorema 2 $H(E'_\beta)$ non è isomorfo topologicamente a $(H(E))'_\beta$; non può sussistere neanche un isomorfismo soltanto algebrico perché $(H(E))' = \{0\}$.

TEOREMA 6: *Se la successione*

$$F \xrightarrow{\varphi} G \xrightarrow{\psi} K$$

di spazi (FS) *ad applicazioni continue è debolmente esatta, la successione duale (forte):*

$$F'_\beta \xleftarrow{\varphi'} G'_\beta \xleftarrow{\psi'} K'_\beta$$

è debolmente esatta. Essa è esatta se e solo se l'applicazione ψ *è un omomorfismo topologico.*

DIMOSTRAZIONE: La successione:

$$0 \to \operatorname{Ker} \varphi \to F \xrightarrow{\varphi} G \xrightarrow{\psi} K \to (K/\overline{\operatorname{im} \varphi}) \to 0$$

è debolmente esatta e definisce un complesso di coomologia $E = \{0\} \times \times (\operatorname{Ker} \varphi) \times F \times G \times K \times (K/\overline{\operatorname{im} \varphi}) \times \{0\}$ che ha coomologia separata nulla.

Quindi anche il complesso omologico duale forte $E'_\beta = \{0\} \times (\operatorname{Ker} \varphi)'_\beta \times \times F'_\beta \times G'_\beta \times K'_\beta \times (K/\overline{\operatorname{im} \varphi})'_\beta \times \{0\}$ ha omologia separata nulla, cioè la successione :

$$0 \longleftarrow (\operatorname{Ker}\varphi)'_\beta \longleftarrow F'_\beta \xleftarrow{\varphi'} G'_\beta \xleftarrow{\psi'} K'_\beta \longleftarrow (K/\overline{\operatorname{im}\varphi})'_\beta \longleftarrow 0$$

è debolmente esatta.

Se l'applicazione ψ è un omomorfismo topologico la successione duale è esatta (si procede come nel lemma 3 a pag. 64 di [8]).

Se la successione duale è esatta ψ' ha immagine chiusa e quindi ψ è un omomorfismo topologico.

§ 4. Coomologia a valori in un fascio di Fréchet.

Ricordiamo la definizione ed alcune proprietà dei fasci di Fréchet (per altre informazioni vedi [5]).

DEFINIZIONE 1 : *Sia X uno spazio topologico e sia $\mathcal{F}$ un fascio su X di spazi vettoriali topologici, $\mathcal{F}$ è un* fascio di Fréchet *se, per ogni aperto U di X, $\Gamma(U, \mathcal{F})$ è uno spazio di Fréchet e per ogni coppia di aperti U, V di X con $U \subset V$ l'applicazione*

$$\varrho_U^V : \Gamma(V, \mathcal{F}) \to \Gamma(U, \mathcal{F})$$

è continua.

PROPOSIZIONE 1 : *Sia X uno spazio topologico a base numerabile e sia $\mathcal{F}$ un fascio su X di spazi vettoriali, di Fréchet relativamente ad una base di aperti $\mathcal{B}$ di X, esiste uno ed un solo modo di porre una topologia di spazi vettoriali topologici di Fréchet su $\Gamma(U, \mathcal{F})$ per ogni aperto U di X, in modo che $\mathcal{F}$ risulti un fascio di Fréchet, e che ristretto a $\mathcal{B}$ restituisca il fascio iniziale.*

DEFINIZIONE 2 : *Sia X uno spazio topologico, $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ due fasci di Fréchet su X e $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un omomorfismo di fasci ; φ si dice un* omomorfismo di fasci di Fréchet *se per ogni aperto U di X l'applicazione indotta*

$$\varphi(U) : \Gamma(U, \mathcal{F}) \to \Gamma(U, \mathcal{G})$$

è continua.

— Sia X è uno spazio topologico a base numerabile, $\mathcal{F}$ un fascio di Fréchet su X e $\mathcal{U}$ un ricoprimento numerabile di X.

Su

$$C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \prod_{(i_0, \dots, i_q)} \Gamma(U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_q}) \qquad (q \geq 0)$$

porremo sempre la topologia prodotto (che risulta di Fréchet). Le applicazioni di cobordo

$$\partial^q : C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to C^{q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

risultano continue.

Su $H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = Z^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})/B^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ porremo la topologia quoziente (che se è di Hausdorff è di Fréchet) e su $H^q(X, \mathcal{F}) = \lim\limits_{\overrightarrow{\mathcal{U}}} H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ la topologia del limite diretto.

— Come prima conseguenza delle considerazioni svolte nel § 2, possiamo enunciare la seguente proposizione:

PROPOSIZIONE 2: *Sia X uno spazio topologico di Hausdorff localmente compatto a base numerabile e sia*

$$0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$$

una successione esatta di fasci e di omomorfismi di Fréchet, se $\mathcal{U}$ è un ricoprimento numerabile di X di Leray rispetto a $\mathcal{F}'$ si stabilisce la successione esatta di coomologia:

$$0 \to H^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}') \to H^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to H^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}'') \xrightarrow{\delta^0} H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}') \to$$

$$\ldots \to H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}') \to H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}'') \xrightarrow{\delta^q} H^{q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}') \to \ldots$$

in cui tutte le applicazioni sono continue, inoltre se $H^{q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ è di Hausdorff, δ^q è un omomorfismo topologico.

Sussiste la seguente proposizione (vedi [5] pag. 165).

PROPOSIZIONE 3: *Sia X è uno spazio topologico di Hausdorff localmente compatto a base numerabile, $\mathcal{F}$ un fascio di Fréchet su X e $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ due ricoprimenti aperti numerabili di X che sono di Leray rispetto ad $\mathcal{F}$. Se $\mathcal{V}$ è un raffinamento di $\mathcal{U}$; l'applicazione indotta dall'applicazione di raffinamento $\tau : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$*

$$\tau^* : H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to H^q(\mathcal{V}, \mathcal{F}) \qquad (q \geq 0)$$

è un isomorfismo topologico.

Questa proposizione suggerisce una famiglia di fasci di Fréchet per i quali l'isomorfismo algebrico che esiste tra la coomologia $H^q(X, \mathcal{F})$ e $H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ definita su un ricoprimento di Leray è anche un isomorfismo topologico.

Precisamente diciamo che un fascio di Fréchet $\mathcal{F}$ è *normale* se esiste un ricoprimento $\mathfrak{U}$ di X di Leray per $\mathcal{F}$ tale che per ogni ricoprimento $\mathcal{U}$ di X ne esiste uno $\mathcal{V} \subset \mathfrak{U}$ che raffina $\mathcal{U}$; allora si ha che se $\mathcal{F}$ è normale di Fréchet, se $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ sono due ricoprimenti numerabile di Leray esiste un isomorfismo topologico tra $H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ e $H^q(\mathcal{V}, \mathcal{F})$. Possiamo perciò enunciare la:

PROPOSIZIONE 4: *Se X è uno spazio topologico di Hausdorff localmente compatto e a base numerabile, $\mathcal{F}$ è un fascio di Fréchet normale e $\mathcal{U}$ un ricoprimento numerabile di Leray l'isomorfismo algebrico*

$$H^q(X, \mathcal{F}) \to H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

è un isomorfismo topologico.

DEFINIZIONE 3: *Sia X uno spazio topologico e $\mathcal{F}$ un fascio di Fréchet su X, una risoluzione fine di fasci di Fréchet di $\mathcal{F}$ è una successione esatta di fasci e di omomorfismi di Fréchet*

$$0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{G}_0 \xrightarrow{d_0} \mathcal{G}_1 \xrightarrow{d_1} \dots \to \mathcal{G}_n \xrightarrow{d_n} \mathcal{G}_{n+1} \to$$

in cui $\mathcal{G}_0, \mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_n, \dots$ sono fasci fini.

TEOREMA 1: *Sia X uno spazio topologico di Hausdorff, localmente compatto a base numerabile, $\mathcal{F}$ un fascio di Fréchet normale su X e*

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G}_0 \xrightarrow{d_0} \mathcal{G}_1 \xrightarrow{d_1} \dots \to \mathcal{G}_n \xrightarrow{d_n} \dots$$

una risoluzione fine di fasci di Fréchet.
Sia

$$0 \to \Gamma(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\varepsilon^*} \Gamma(X, \mathcal{G}_0) \xrightarrow{d_0^*} \Gamma(X, \mathcal{G}_1) \xrightarrow{d_1^*} \Gamma(X, \mathcal{G}_2) \to \dots$$

la successione indotta per le sezioni globali, allora: esistono degli isomorfismi topologici:

$$H^0(X, \mathcal{F}) \cong \operatorname{Ker} d_0^*$$

e

$$H^q(X, \mathcal{F}) \cong \operatorname{Ker} d_q^* / \operatorname{im} d_{q-1}^* \qquad (q \geq 1).$$

DIMOSTRAZIONE: Sia $k_q \subset \mathcal{G}_q$ il sottofascio nucleo di d_q. L'esattezza della risoluzione equivale all'esattezza delle successioni:

$$\begin{array}{l} 0 \to k_0 \to \mathcal{I}_0 \to k_1 \quad \to 0 \\ 0 \to k_1 \to \mathcal{I}_1 \to k_2 \quad \to 0 \\ \vdots \qquad \vdots \\ 0 \to k_p \to \mathcal{I}_p \to k_{p+1} \to 0 \end{array}$$

in cui $k_0 = \mathcal{F}$.

Sia $\mathcal{U}$ un ricoprimento aperto di X numerabile e di Leray per $\mathcal{F}$. Se per ogni aperto U di X su $\Gamma(U, k_p)$ si pone la topologia indotta da $\Gamma(U, \mathcal{I}_p)$, poichè $\Gamma(U, k_p) = \operatorname{Ker} d_p^*(U)$ si ha uno spazio di Fréchet, e quindi, ogni fascio k_p è di Fréchet

Per $\sigma \in N(\mathcal{U})$ si stabilisce la successione:

$$H^q(|\sigma|, \mathcal{I}_p) \to H^q(|\sigma|, k_{p+1}) \xrightarrow{\delta^q} H^{q+1}(|\sigma|, k_p) \to H^{q+1}(|\sigma|, \mathcal{I}_p).$$

Per ogni $q \geq 1$ risulta $H^q(|\sigma|, \mathcal{I}_p) = H^{q+1}(|\sigma|, \mathcal{I}_p) = 0$ e perciò

$$\delta^q : H^q(|\sigma|, k_{p+1}) \to H^{q+1}(|\sigma|, k_p)$$

è un isomorfismo algebrico, quindi:

$$H^q(|\sigma|, k_p) \cong H^{q+1}(|\sigma|, k_{p-1}) \cong \dots \cong H^{q-p}(|\sigma|, \mathcal{F}) = 0$$

cioè $\mathcal{U}$ è un ricoprimento di Leray per ogni fascio k_p. (In particolare se $\mathcal{U} = \mathfrak{U}$ è il ricoprimento su cui si è stabilità la normalità di $\mathcal{F}$, si ha che ogni fascio k_p è di Fréchet normale sul ricoprimento $\mathfrak{U}$).

Poichè $H^{q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{I}_p) = 0$ (per $q > 0$) l'applicazione $\delta^q : H^q(\mathcal{U}, k_{p+1}) \to$ $\to H^{q+1}(\mathcal{U}, k_p)$ è un omomorfismo topologico surgettivo, anzi per $q > 0$ è un isomorfismo (vedi la prop. 3 § 2).

Perciò per $q = 0$, la successione esatta:

$$H^0(\mathcal{U}, \mathcal{I}_p) \xrightarrow{d_p^*} H^0(\mathcal{U}, k_{p+1}) \xrightarrow{\delta^0} H^1(\mathcal{U}, k_p) \to 0$$

permette di stabilire un isomorfismo topologico

$$H^1(\mathcal{U}, k_p) \cong H^0(\mathcal{U}, k_{p+1}) / d_p^* H^0(\mathcal{U}, \mathcal{I}_p)$$

cioè

$$H^1(X, k_p) \cong \Gamma(X, k_{p+1}) / d_p^* \, \Gamma(X, \mathcal{I}_p).$$

Mentre per $q \geq 1$ si hanno degli isomorfismi topologici:

$$H^q(X, k_p) \cong H^{q-1}(X, k_{p+1}) \cong \dots \cong H^1(X, k_{p+q-1}) \cong \operatorname{Ker} d_{p+q}^* / \operatorname{im} d_{p+q-1}^*.$$

Poichè per ogni aperto U di X, l'isomorfismo continuo

$$\varepsilon^*(U) : \Gamma(U, \mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(U, k_0)$$

è un isomorfismo topologico, si ha un isomorfismo topologico tra

$$H^q(X, \mathcal{F}) \quad \text{e} \quad H^q(X, k_0)$$

e quindi ponendo $p = 0$ si ottiene

$$H^q(X, \mathcal{F}) \cong H^q(X, k_0) \cong \operatorname{Ker} d_q^* / \operatorname{im} d_{q-1}^* \qquad (\text{per } q \geq 1)$$

e per $q = 0$

$$H^0(X, \mathcal{F}) \cong H^0(X, k_0) \cong \Gamma(X, k_0) \cong \operatorname{Ker} d_0^* .$$

§ 5. Applicazioni agli spazi analitici complessi.

Come prima applicazione dei risultati ottenuti finora daremo una generalizzazione del teorema di dualità di Serre che compare in [9]. Le notazioni sono tratte da quell'articolo.

Sia X una varietà analitica complessa e V uno spazio fibrato analitico a fibra vettoriale di base X.

Poichè la risoluzione

$$0 \longrightarrow \Omega^p(V) \xrightarrow{\ \varepsilon\ } A^{p0}(V) \xrightarrow{\ d''^{p0}\ } A^{p1}(V) \longrightarrow \dots \longrightarrow A^{pn}(V) \longrightarrow 0$$

è una risoluzione fine di fasci di Fréchet-Schwartz di $\Omega^p(V)$ (che è un fascio normale sul ricoprimento di tutti gli aperti di Stein di X per il Teorema 1 del § 4 si ha che esistono degli isomorfismi topologici:

$$H^0(X, \Omega^p(V)) \cong \operatorname{Ker} d''^{p0}_*$$

$$H^q(X, \Omega^p(V)) \cong \operatorname{Ker} d''^{pq}_* / \operatorname{im} d''^{p,q-1}_* \qquad (q \geq 1)$$

dove le applicazioni d''_* sono le applicazioni della successione indotta dalla risoluzione per le sezioni globali:

$$0 \longrightarrow \Gamma(X, \Omega^p(V)) \longrightarrow \Gamma(X, A^{p0}(V)) \xrightarrow{\ d''^{p0}_*\ } \dots \longrightarrow \Gamma(X, A^{pn}(V)) \longrightarrow 0 .$$

Questo risultato migliora il teorema di Dolbault e mostra cosa vuol dire che per una varietà X si abbia $(H^q(X, \Omega^p))_s = 0$: significa che l'immagine di $d_{*}^{p,q-1}$ è un sottospazio denso di $\operatorname{Ker} d_{*}''^{p,q}$, cioè che ogni forma $d''^{p,q}$-chiusa di classe C^{∞} è approssimabile sui compatti, insieme alle derivate di ogni ordine dei coefficienti, con forme $d''^{p,q}$-esatte.

Analogamente considerando la risoluzione:

$$0 \longrightarrow \Omega^{p}(V) \xrightarrow{\ \varepsilon\ } K^{p0}(V) \longrightarrow K^{p1}(V) \longrightarrow \dots \longrightarrow K^{pn}(V) \longrightarrow 0$$

e la coomologia a supporti compatti (che denoteremo con H_k^q) esistono degli isomorfismi algebrici:

$$H_k^0(X, \Omega^p(V^*)) \simeq \operatorname{Ker} d_{*k}''^{p0}$$

e

$$H_k^q(X, \Omega^p(V^*)) \simeq \operatorname{Ker} d_{*k}''^{pq} / \operatorname{Im} d_{*k}''^{p,q-1} \qquad (q \geq 1)$$

dove le applicazioni d_{*k}'' sono tratte dalla successione:

$$0 \longrightarrow \Gamma_k(X, \Omega^p(V^*)) \longrightarrow \Gamma_k(X, K^{p0}(V^*)) \longrightarrow \dots \longrightarrow \Gamma_k(X, K^{pn}(V^*)) \longrightarrow 0$$

e poichè su $\Gamma_k(X, K^{n-p,n-q}(V^*))$ si può porre la topologia duale forte di $\Gamma(X, A^{pq}(V))$, cioè una topologia (DFS), possiamo porre su $H_k^0(X, \Omega^p(V^*))$ la topologia di $\operatorname{Ker} d_{*k}''^{p0}$ e su $H_k^q(X, \Omega^p(V^*))$ con $q \geq 1$ la topologia di $\operatorname{Ker} d_{*k}''^{pq} / \operatorname{im} d_{*k}''^{p,q-1}$ vale a dire delle topologie che se sono separate sono (DFS).

Siamo ora pronti per enunciare il:

TEOREMA 1: *Sia X una varietà analitica complessa, numerabile all'infinito, di dimensione complessa n, e sia V uno spazio fibrato analitico a fibra vettoriale di base X, per ogni $q \geq 1$ e $p \geq 0$ esiste un isomorfismo topologico:*

$$(H^q(X, \Omega^p(V)))_s \cong (H_k^{n-q}(X, \Omega^{n-p}(V^*)))'_\beta$$

e $H^q(X, \Omega^p(V))$ è di Hausdorff se e solo se lo è $H_k^{n-q+1}(X, \Omega^{n-p}(V^*))$.

DIMOSTRAZIONE: I due complessi:

$$0 \to \Gamma(X, A^{p0}(V)) \to \dots \to \Gamma(X, A^{p,q-1}(V)) \to \Gamma(X, A^{pq}(V)) \to \dots \to \Gamma(X, A^{pn}(V)) \to 0$$

e

$$0 \longleftarrow \Gamma_k(X, K^{n-p,n}(V^*)) \longleftarrow \dots \longleftarrow \Gamma_k(X, K^{n-p,(n-q)+1}(V^*)) \longleftarrow$$

$$\longleftarrow \Gamma_k(X, K^{n-p,n-q}(V^*)) \longleftarrow \dots \longleftarrow \Gamma_k(X, K^{n-p,0}(V^*)) \longleftarrow 0$$

sono uno il duale forte dell'altro (a meno dei segni delle applicazioni).

Poniamo $(F_p)^q = \Gamma(X, A^{pq}(V))$ e $(d_p)^q = d_*''^{pq}$ per $q \leq n$, $(F_p)^q = 0$ per $q > n$ e $(D_p)_q = \Gamma_k(X, K^{n-p,\, n-q}(V^*))$, $(d_p)_q = d_{*k}''^{n-p,\, n-q}$ per $q \leq n$ e $(D_p)_q = 0$ per $q > n$.

Il complesso coomologico $F_p = \prod_{q \geq 0} (F_p)^q$ è il duale forte del complesso omologico $D_p = \bigoplus_{q \geq 0} (D_p)_q$, perciò per il teorema di dualità:

$$(H^q(F_p))_s \cong (H_q(D_p))'_\beta$$

e poichè

$$H^q(X, \Omega^p(V)) \cong H^q(F_p)$$

e

$$H_k^{n-q}(X, \Omega^{n-p}(V^*)) \cong H_q(D_p)$$

si ottiene il risultato cercato.

Infine $H^q(X, \Omega^p(V))$, cioè $H^q(F_p)$, è di Hausdorff se e solo se lo è $H_{q-1}(D_p)$ cioè $H_k^{n-q+1}(X, \Omega^{n-p}(V^*))$.

Esempio di varietà per cui $H^1(X, \mathcal{O})$ non è di Hausdorff.

Procedimento come in [9] (esempio a pag. 22).

Sia $Y = \mathbb{C}^2$ e $X = \mathbb{C}^2 - \mathbb{R}$. ($\mathbb{R}$ essendo una qualsiasi retta reale di $\mathbb{C}^2$). Si ha che $H_k^1(X, \mathcal{O}) = H_k^1(X, \Omega^2) = 0$ e quindi $(H^1(X, \mathcal{O}))_s = 0$, ma X non è di Stein perciò $H^1(X, \mathcal{O}) \neq 0$, cfr. ad esempio: Hörmander, Teor. 4.2.9, quindi $H^1(X, \mathcal{O})$ non è di Hausdorff ed è più precisamente uno spazio di dimensione infinita con la topologia banale.

Questo esempio può essere generalizzato come segue: osserviamo preliminarmente che si ha:

$$H^q(\mathbb{C}^n - \mathbb{R}, \mathcal{O}) = 0 \quad \text{per } n > 2 \quad \text{e} \quad q = 1, 2, \ldots, n-2.$$

Consideriamo i tre spazi seguenti, ciascuno sottospazio aperto del precedente:

$X_1 = \mathbb{C}^n$; $X_2 = \mathbb{C}^n - \{z_2 = \ldots = z_n = 0, \operatorname{Im} z_1 = 0\} = \mathbb{C}^n$ — asse reale dell'asse complesso z_1;

$X_3 = \mathbb{C}^n - \{z_2 = z_3 = \ldots = z_n = 0\} = \mathbb{C}^n$ — asse z_1.

Si ha un omomorfismo naturale (di restrizione).

$$J_{2,3} : H^q(X_2, \mathcal{O}) \to H^q(X_3, \mathcal{O})$$

che è iniettivo per $q \leq n-2$. Sia $\alpha \in H^q(X_2, \mathcal{O})$ e si consideri $\beta = J_{2,3}(\alpha) \in H^q(X_3, \mathcal{O})$. Poichè β può estendersi a qualche punto di $X_1 - X_3$ (cioè a tutti i punti di X_2, mediante α), il teorema 4 di Scheja (Riemansche Helbarketssätze fur Kohomologieklassen, Math. Annalen 144, 345-360 (1961)), assicura che β appartiene all'immagine dell'omomorfismo $J_{2,3} \circ J_{1,2} : H^q(X_1, \mathcal{O}) \to$ $\to H^q(X_3, \mathcal{O})$, ossia per l'iniettività di $J_{2,3}$, esiste $\gamma \in H^q(X_1, \mathcal{O})$ tale che $J_{12}(\gamma) = \alpha$.

Ora se $1 \leq q \leq n-2$ si ha $\gamma = 0$ e quindi $\alpha = 0$. Poichè α era arbitrario, ciò prova che $H^q(X_2, \mathcal{O}) = 0$ per $q = 1, \dots, n-2$.

TEOREMA 2 : *$H^{n-1}(\mathbb{C}^n - \mathbb{R}, \mathcal{O})$ non è di Hausdorff e $(H^{n-1}(\mathbb{C}^n - \mathbb{R}, \mathcal{O}))_s = 0$.*

DIMOSTRAZIONE : Poiché $H^1(\mathbb{C}^n - \mathbb{R}, \mathcal{O}), \dots, H^{n-2}(\mathbb{C}^n - \mathbb{R}, \mathcal{O})$ sono nulli non può essere nullo anche $H^{n-1}(\mathbb{C}^n - \mathbb{R}, \mathcal{O})$, perché $\mathbb{C}^n - \mathbb{R}$ non è un aperto di olomorfia di $\mathbb{C}^n$, cfr. il già citato Teor. 4.2.9 di Hörmander.

Dal teorema di dualità segue che :

$$(H^{n-1}(\mathbb{C}^n - \mathbb{R}, \mathcal{O}))_s \cong (H_k^1(\mathbb{C}^n - \mathbb{R}, \Omega^n))'_\beta .$$

Si ha (vedi [9] n. 14 pag. 22) la successione esatta :

$$H_k^0(\mathbb{R}, \mathcal{O}) \to H_k^1(\mathbb{C}^n - \mathbb{R}, \mathcal{O}) \to H_k^1(\mathbb{C}^n, \mathcal{O}).$$

Ora $H_k^0(\mathbb{R}, \mathcal{O})$, nonché $H_k^1(\mathbb{C}^n, \mathcal{O})$ sono nulli (vedi sempre [9]), quindi anche $H_k^1(\mathbb{C}^n - \mathbb{R}, \mathcal{O}) = H_k^1(\mathbb{C}^n - \mathbb{R}, \Omega^n) = 0$.

Perciò $(H^{n-1}(\mathbb{C}^n - \mathbb{R}, \mathcal{O}))_s = 0$ e $H^{n-1}(\mathbb{C}^n - \mathbb{R}, \mathcal{O}) \neq 0$ e quindi non di Hausdorff.

DEFINIZIONE 1 : *Sia X una varietà analitica complessa ed Y una sua sottovarietà chiusa, Y si dirà una sottovarietà di Runge di X se le funzioni olomorfe su Y sono approssimate uniformemente sui compatti di Y dalle restrizioni ad Y delle funzioni olomorfe su X.*

Se $\mathcal{J}_Y$ indica il fascio di ideali di $\mathcal{O}_X$ relativo a Y si stabilisce la successione esatta di fasci

$$0 \to \mathcal{J}_Y \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X/\mathcal{J}_Y \to 0$$

in cui $\mathcal{O}_X/\mathcal{J}_Y$ ristretto ad Y si può identificare con $\mathcal{O}_Y$.

Questi fasci sono dotati naturalmente di una struttura di fasci di Fréchet, per cui nella successione esatta :

$$0 \to \Gamma(X, \mathcal{J}_Y) \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{\text{res}} \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y) \xrightarrow{\delta_0} H^1(X, \mathcal{J}_Y) \to H^1(X, \mathcal{O}_X) \to \dots$$

tutte le applicazioni sono continue e se $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ è di Hausdorff δ^0 è un omomorfismo topologico.

È semplice a questo punto dimostrare il seguente

TEOREMA 3: *Sia X una varietà analitica complessa e Y una sua sottovarietà chiusa.*

Se $H^1(X, \mathcal{O})$ é di Hausdorff e $(H^1(X, \mathcal{I}_Y))_s = 0$ Y è una sottovarietà di Runge di X.

Se in più $H^1(X, \mathcal{O}) = 0$, Y è una sottovarietà di Runge di X se e solo se $(H^1(X, \mathcal{I}_Y))_s = 0$.

DIMOSTRAZIONE: Infatti separando la successione di coomologia si ha la successione:

$$0 \to \Gamma(X, \mathcal{I}_Y) \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{\text{res}} \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y) \to 0 \to H^1(X, \mathcal{O}_X)$$

che è esatta ovunque fuori che in $\Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$ dove è debolmente esatta e questo significa che res $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ è denso in $\Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$.

Supponiamo ora $H^1(X, \mathcal{O}) = 0$. La successione separata della successione di coomologia è:

$$0 \to \Gamma(X, \mathcal{I}_Y) \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{\text{res}} \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y) \xrightarrow{\delta_s^0} (H^1(X, \mathcal{I}_Y))_s \to 0$$

che è esatta ovunque fuori che in $\Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$ dove è debolmente esatta. Poiché δ_s^0 è un omomorfismo topologico surgettivo gli spazi:

$$\Gamma(Y, \mathcal{O}_Y) / \overline{\text{res}\, \Gamma(X, \mathcal{O})} \quad \text{e} \quad (H^1(X, \mathcal{I}_Y))_s$$

sono isomorfi topologicamente e quindi Y è una sottovarietà di Runge di X (cioè $\Gamma(Y, \mathcal{O}_Y) = \overline{\text{res}\, \Gamma(X, \mathcal{O}_X)}$) se e solo se $H^1(X, \mathcal{I}_Y))_s = 0$).

ESEMPIO. Sia X una varietà per cui $H^1(X, \mathcal{O}) = 0$ ed in cui le funzioni olomorfe separano i punti.

Sia $Y = \{x_n\}_{n \geq 0}$ una successione di punti di X senza punti di accumulazione; le funzioni olomorfe su Y sono le successioni $\{a_n\}_{n \geq 0}$ a valori complessi.

Poichè i compatti di Y sono tutti e soli i sottoinsieni finiti si può sempre trovare una funzione olomorfa su X che assuma dei valori prefissati su un compatto di Y, cioè è possibile approssimare sui compatti ogni funzione olomorfa su Y con funzioni globali.

Quindi ogni successione Y di X senza punti di accumulazione è una sottovarietà di Runge di X e si ha $(H^1(X, \mathcal{I}_Y))_s = 0$.

Non è detto però che sia vero in più che $H^1(X, \mathcal{I}_Y) = 0$, perché questo implica in particolare che esiste una funzione olomorfa f su X tale che $f(x_n) = n$.

Per cui se X non è di Stein, per ogni successione Y senza punti di accumulazione per cui non è possibile trovare una funzione olomorfa globale che diverga in valore assoluto su Y si ha che $H^1(X, \mathcal{J}_Y) \neq 0$ e $(H^1(X, \mathcal{J}_Y))_s = 0$.

Tali sono ad esempio in $X = \mathbb{C}^3 - \{0\}$ tutte le successioni di X convergenti a 0 in $\mathbb{C}^3$.

TEOREMA 4: *Sia X uno spazio topologico di Hausdorff localmente compatto a base numerabile, $\mathcal{F}$ un fascio di Fréchet su X normale su ogni aperto di una successione crescente $\{U_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ che ricopre X e sia q un intero positivo tale che $(H^q(U_n, \mathcal{F} \mid U_n))_s = 0$ per ogni $n \geq 0$, allora:*

$$(H^q(X, \mathcal{F}))_s = 0.$$

DIMOSTRAZIONE: Per ogni $n \geq 0$ possiamo trovare un ricoprimento numerabile $\mathcal{U}_n$ di U_n di Leray rispetto a $\mathcal{F} \mid U_n$ facendo in modo che $\mathcal{U}_n \subset \mathcal{U}_{n+1}$.

Quindi $(H^q(\mathcal{U}_n, \mathcal{F} \mid U_n))_s = 0$ per ogni $n \geq 0$. Poniamo $\mathcal{U} = \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{U}_n$, questo è un ricoprimento numerabile di X di Leray rispetto ad $\mathcal{F}$.

Sia $f \in Z^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ e W un intorno aperto di 0 in $C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ individuato dai q-simplessi: $\sigma_1 = (U_{i_{01}}, \dots, U_{i_{q1}})$ $\sigma_2 = (U_{i_{02}}, \dots, U_{i_{q2}}), \dots, \sigma_m = (U_{i_{0m}}, \dots, U_{i_{qm}})$ e dagli intorni aperti di 0 W_1 di $\Gamma(\mid \sigma_1 \mid, \mathcal{F})$, W_2 di $\Gamma(\mid \sigma_2 \mid, \mathcal{F}), \dots, W_m$ di $\Gamma(\mid \sigma_m \mid, \mathcal{F})$.

Si può trovare un intero n_0 tale che l'insieme $S = \{U_{i_{01}}, \dots, U_{i_{q1}}, U_{i_{02}}, \dots, U_{i_{q2}}, \dots, U_{i_{0m}}, \dots, U_{i_{qm}}\}$ sia contenuto in $\mathcal{U}_{n_0}$.

Sia f_{n_0} la restrizione di f a $C^q(\mathcal{U}_{n_0}, \mathcal{F} \mid U_{n_0})$, f_{n_0} è un q-cociclo e poiché $(H^q(\mathcal{U}_{n_0}, \mathcal{F} \mid U_{n_0}))_s = 0$, cioè $\overline{B^q(\mathcal{U}_{n_0}, \mathcal{F} \mid U_{n_0})} = Z^q(\mathcal{U}_{n_0}, \mathcal{F} \mid U_{n_0})$ esiste una $(q-1)$-cocatena $g_{n_0} \in C^{q-1}(\mathcal{U}_{n_0}, \mathcal{F} \mid U_{n_0})$ tale che:

$$(\partial^{q-1}(g_{n_0}) - f_{n_0})(\sigma_r) \in W_r \qquad \text{per} \quad 1 \leq r \leq m.$$

Sia g la $(q-1)$-cocatena di $C^{q-1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ definita per ogni $(q-1)$ simplesso $\sigma = (U_{i_0}, \dots, U_{i_{q-1}})$, $g(\sigma) = g_{n_0}(\sigma)$ se $\{U_{i_0}, \dots, U_{i_{q-1}}\} \subset S$ e $g(\sigma) = 0$ altrimenti.

Si verifica che $(\partial^{q-1}(g) - f)(\sigma_r) = (\partial^{q-1}(g_{n_0}) - f_{n_0})(\sigma_r) \in W_r$ per $1 \leq r \leq m$ e quindi $(\partial^{q-1}(g) - f) \in W$.

Poiché f e W erano arbitrari abbiamo dimostrato che $\overline{B^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})} = Z^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ cioè $(H^q(X, \mathcal{F}))_s \cong (H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}))_s = 0$.

— Come immediata conseguenza di questo teorema si ha il:

TEOREMA 5: *Sia X una varietà analitica complessa numerabile all'infinito e sia $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione crescente di aperti di Stein che ricoprono X.*

Per ogni fascio analitico coerente $\mathcal{F}$ su X si ha che:

$$(H^1(X, \mathcal{F}))_s = 0.$$

— Si ha inoltre (vedi [2]) che $H^q(X, \mathcal{F}) = 0$ per $q \geq 2$, ma non è dimostrato, eccetto che in casi particolari anche se importanti (vedi ad esempio: Kajiwara, On the limit of a monotons sequence of Cousin's domains, **J.** Math. Soc. Japan 17, (1965), che anche $H^1(X, \mathcal{G}) = 0$ (cioè che anche X è di Stein).

— Questo teorema precisa il significato di un teorema ottenuto sullo stesso problema da V. Villani (vedi [10]).

TEOREMA 6: *Siano P_0, P_1 due policilindri di $\mathbb{C}^n$ e $X = P_0 \cup P_1$; per ogni fascio analitico coerente $\mathcal{F}$ su X si ha:*

$$(H^1(X, \mathcal{F}))_s = 0.$$

DIMOSTRAZIONE: Sia $\mathcal{U} = \{P_0, P_1\}$, $\mathcal{U}$ è un ricoprimento di Leray di X rispetto a $\mathcal{F}$ perciò $H^1(X, \mathcal{F}) \cong H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$.

Inoltre se indichiamo con $\widetilde{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ la coomologia di $\mathcal{F}$ sul ricoprimento $\mathcal{U}$ costruita a partire dalle cocatene alternanti, si può dimostrare con un procedimento simile a quello usato da Kaup in [5] pag. 165, che $\widetilde{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \cong H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$.

Sia $f = (f_{01}, -f_{01})$ con $f_{01} \in \Gamma(P_0 \cap P_1, \mathcal{F})$ un 1-cociclo alternante e $W = (W_{01} \times W_{10}) \cap \widetilde{Z}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ un intorno di 0 in $\widetilde{Z}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ con W_{01}, W_{10} intorni di 0 in $\Gamma(P_0 \cap P_1, \mathcal{F})$. La restrizione:

$$\mathrm{res}^{P_1}_{P_0 \cap P_1} : \Gamma(P_1, \mathcal{F}) \to \Gamma(P_0 \cap P_1, \mathcal{F})$$

ha immagine densa in $\Gamma(P_0 \cap P_1, \mathcal{F})$ (cfr. [4] Teor. 11 pag. 241) e quindi si può trovare una sezione $g_1 \in \Gamma(P_1, \mathcal{F})$ tale che:

$$g_1 \in W_{01} \cap W_{10}.$$

Consideriamo la 0-cocatena (alternante) $g = (0, g_1)$ il suo cobordo è $\partial^0(g) = (\mathrm{res}^{P_1}_{P_0 \cap P_1}(g_1), -\mathrm{res}^{P_1}_{P_0 \cap P_1}(g_1))$ e si ha: $(\partial^0(g) - f) \in W$. Per l'arbitrarietà di f e W si ha $\overline{\widetilde{B}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})} = \widetilde{Z}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ cioè $(H^1(X, \mathcal{F}))_s \cong (H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}))_s \cong 0$.

Con opportuni adattamenti la dimostrazione appena data consente di dimostrare più in generale il:

TEOREMA 7: *Sia X una varietà di Stein e $P_0, P_1, \dots, P_n$ dei poliedri analitici di X tali che due poliedri diversi P_i, P_j hanno intersezione non vuota se e solo se i e j sono due interi consecutivi. Posto $A = P_0 \cup P_1 \cup \dots \cup P_n$, per ogni fascio analitico coerente $\mathcal{F}$ su A, si ha che:*

$$(H^1(A, \mathcal{F}))_s = 0.$$

Utilizzando poi il teorema 4 si può dimostrare un risultato più generale. Premettiamo che diremo che un sottoinsieme S di $\mathbb{Z}$ è un *segmento* se ha la proprietà: se m, n sono due interi di S con $m \leq n$ e p è un intero tale che $m \leq p \leq n$, allora anche $p \in S$.

TEOREMA 8: *Sia X una varietà di Stein, S un segmento di $\mathbb{Z}$, $\{P_n\}_{n \in S}$ una famiglia di poliedri analitici di X tali che due poliedri diversi P_i, P_j hanno intersezione non vuota se e solo se i e j sono due interi consecutivi.*

Posto $A = \bigcup_{n \in S} P_n$, per ogni fascio analitico coerente $\mathcal{F}$ su A si ha che:

$$(H^1(A, \mathcal{F}))_s = 0.$$

OSSERVAZIONE: non è vero in generale, anche per un unione di due soli poliedri analitici P_0, P_1 non disgiunti, che $H^1(P_0 \cup P_1, \mathcal{F}) = 0$ per ogni fascio analitico coerente $\mathcal{F}$ non è vero cioè che l'unione di due poliedri analitici non disgiunti è in generale un aperto di Stein.

Consideriamo il seguente esempio:

$$\text{sia} \quad X = \mathbb{C}^2: \quad P_0 = \{z \in \mathbb{C}^2 : |z_1| < 2 \quad \text{e} \quad |z_2| < 1\}$$

$$P_1 = \{z \in \mathbb{C}^2 : |z_1| < 1 \quad \text{e} \quad |z_2| < 2\}.$$

L'aperto $P_0 \cup P_1$ non è di olomorfia in $\mathbb{C}^2$, infatti ogni funzione olomorfa su $P_0 \cup P_1$ può estendersi ad un aperto più grande, perché ogni funzione olomorfa su $P_0 \cup P_1$ è una serie con centro in 0 ed il dominio di convergenza di ognuna di queste serie è un insieme che contiene $P_0 \cup P_1$ e che deve avere immagine convessa secondo l'applicazione:

$$\Phi: \mathbb{C}^2 - (\mathbb{C}_1 \cup \mathbb{C}_2) \to \mathbb{R}^2$$

definita $\Phi(z_1, z_2) = (\log|z_1|, \log|z_2|)$. (vedi [1] pag. 3).

Dato che questo non accade per $P_0 \cup P_1$ il dominio di convergenza di ognuna delle serie contiene propriamente $P_0 \cup P_1$.

Per questo aperto si può concludere perciò che:

$$(H^1(P_0 \cup P_1, \mathcal{O}))_s = 0 \quad \text{ma} \quad H^1(P_0 \cup P_1, \mathcal{O}) \neq 0,$$

$$(\text{anzi } \dim H^1(P_0 \cup P_1, \mathcal{O}) = +\infty).$$

OSSERVAZIONE: Tutto ciò che è stato dimostrato nei teoremi 3, 5, 7, 8 a proposito delle varietà complesse può essere dimostrato, in maniera analoga, per gli spazi complessi.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. ANDREOTTI: *Quelques Points de Théorie elementaire des fonctions analytiques de plusieurs variables complexes.* Leçons faites à Strasbourg - Novembre Dècembre 1961.

[2] A. ANDREOTTI e E. VESENTINI: *Les théorèmes fondamentaux de la théorie des espaces holomorfiquements complets « Seminaire Ehresmann »* 4, 1-31-Paris (1962-63).

[3] A. GROTHENDIECK: *Espaces vectoriels topologiques* - Societate de matematica de S. Paulo - 1958.

[4] GUNNING and ROSSI: *Analytic Functions of several complex variables* (1965) - Prentice Hall Inc. Englewood Cliffs - New York.

[5] L. KAUP: *Eine Künnethformel fur Fréchetgarben.* Math. Zeitschr. 97. (1967).

[6] L. SCHWARTZ: *Théorie des distributions,* Tome I - Hermann (Paris).

[7] H. H. SCHAEFER: *Topological vector spaces* - Macmillan Series in Advanced Mathematics and Theoretical Physics. (1966) - The Macmillan Company, New York.

[8] J. P. SERRE: *Quelques problèmes globaux relativs aux variétés de Stein* - CBRM Colloque de Bruxelles (1953).

[9] J. P. SERRE: *Un Théorème de dualité* - Comm. Math. Helv. 29 (1953).

[10] V. VILLANI: *Un teorema di passaggio al limite per la coomologia degli spazi complessi:* Acc. naz. dei Lincei - Rend. Sc. Fis. Mat. e Nat. - Vol. XLIII - Ferie 1967.