Aplikace matematiky

Karel Drábek

Kurven, welche mit den Geschwindigkeiten der n-dimensionalen Euklidischen Bewegung des starren Systems verbunden sind.

Aplikace matematiky, Vol. 18 (1973), No. 6, 445–451

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/103500`

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1973

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* `http://dml.cz`

KURVEN, WELCHE MIT DEN GESCHWINDIGKEITEN DER n-DIMENSONALEN EUKLIDISCHEN BEWEGUNG DES STARREN SYSTEMS VERBUNDEN SIND

Karel Drábek

(Eingegangen am 10. Februar 1973)

In der kinematischen Synthese ebener Mechanismen, in welcher als gegebene Elemente die Beschleunigungskomponenten vorkommen, spielen die sog. Kreise von Bresse (die Orte der nulligen Tangential-, bzw. Normalbeschleunigung in der gegebenen Phase der Bewegung) eine bedeutsame Rolle. In der vorliegenden Arbeit handelt es sich um eine Verallgemeinerung in zwei Richtungen: Einesteils ist statt der nulligen Beschleunigungskomponenten eine gewisse allgemeinere Beziehung zwischen ihren Komponenten gegeben, andernteils ist die Verallgemeinerung für eine beliebige endliche Dimension durchgeführt. Damit verbreitet sich die Klasse der Aufgaben von diesem Typus der kinematischen Synthese auf allgemeinere Daten sowohl über die Beschleunigungen als auch auf die räumliche Synthese.

Erwägen wir die n-dimensionale Euklidische Bewegung des (starren) Gangraumes (Σ) in dem Rastraume (S). Im Raume (Σ), bzw. (S) wählen wir ein orthonormiertes Koordinatensystem Σ, bzw. S, welches mit dem Ursprung (Ω) und Einheitsvektoren der Basis $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$, bzw. mit dem Ursprung (O) und Einheitsvektoren der Basis $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ festgelegt ist.

Dann gilt für den Punkt (X), welcher einesteils als Punkt (ξ) des Gangraumes, andernteils als Punkt (x) des Rastraumes (S) betrachtet wird, in der gegebenen Phase (d. h. in der bestimmten Zeit $t = t_0$) die Vektorengleichung

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{\xi}\,, \tag{1}$$

wo $\boldsymbol{b}$ der Radiusvektor des Punktes (Ω) in dem System S ist.

Setzen wir voraus, daß der Vektor $\boldsymbol{b}$ und die Basisvektoren $\boldsymbol{\varepsilon}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ Funktionen derselben Veränderlichen (der Zeit) t sind, daß sie auf dem gemeinsamen Definitionsintervall $I(t)$ definiert werden und daß sie auf ihm mindestens der Klasse C_t

sind. Dann bestimmen wir die l-te Ableitung der Gleichung (1) und wir erhalten

$$\mathbf{x}^{(l)} = \boldsymbol{b}^{(l)} + \xi^{(l)}, \tag{2}$$

wo $\boldsymbol{b}^{(l)} = \boldsymbol{b}_{i0}^{(l)} \boldsymbol{\varepsilon}_i$, $\xi^{(l)} = (\xi_i \boldsymbol{\varepsilon}_i)^{(l)}$ ist.

Nach der gestellten Forderung an die Bewegung ist der Punkt (ξ) ein fester Punkt in dem Gangraume (Σ) und also ist

$$\xi^{(l)} = \xi_i \boldsymbol{\varepsilon}_i^{(l)}.$$

Die Gleichung (2) erwirbt nachher die Gestalt

$$\mathbf{x}^{(l)} = b_{i0}^{(l)} \boldsymbol{\varepsilon}_i + \xi_i \boldsymbol{\varepsilon}_i^{(l)} \tag{3}$$

und wir sagen, daß sie die *l-te Geschwindigkeit* des sich bewegenden Punktes ausdrückt.

Suchen wir diejenigen Punkte (X), welche als Punkte (ξ) des Raumes (Σ) in der gegebenen Phase die Eigenschaft haben, daß ihre l-te Geschwindigkeit mit dem Vektor $\boldsymbol{\xi} - {}^0\boldsymbol{\xi}$ kollinear ist; dabei ist der Punkt $({}^0\xi)$ ein beliebig gewählter, aber weiter dann schon fester Punkt des Raumes (Σ).

Für die Punkte mit der verlangten Eigenschaft wird also

$$\mathbf{x}^{(l)} = \lambda(\xi - {}^0\xi)\,; \quad \lambda \text{ reell},$$

gelten.

Deswegen brauchen wir die Ausdrücke für die l-ten Ableitungen der Einheitsvektoren $\boldsymbol{\varepsilon}_i$. Nachdem

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i^{(l)} = {}^l\varphi_{ik} \boldsymbol{\varepsilon}_k\,; \quad i, k = 1, 2, \ldots, n$$

ist, wollen wir die Rekursionsformeln für die Koeffizienten ${}^l\varphi_{ik}$ finden.

Für $l = 1$ folgt (in Betracht des $\boldsymbol{\varepsilon}_i = a_{ij} \mathbf{e}_j$) aus der Beziehung

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i = \dot{a}_{ij} \mathbf{e}_j = \dot{a}_{ij} a_{jk} \boldsymbol{\varepsilon}_k = \omega_{ik} \boldsymbol{\varepsilon}_k, \tag{4}$$

daß

$${}^1\varphi_{ik} = \omega_{ik} = -\omega_{ki} = -{}^1\varphi_{ki}, \quad \text{für} \quad i \neq k, \quad \omega_{ii} = 0,$$
$$i, k = 1, 2, \ldots, n.$$

Für $l = 2$ erhalten wir mit der Benutzung von (4), daß

$$\ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i = ({}^1\varphi_{ik} \boldsymbol{\varepsilon}_k)^{\cdot} = {}^1\dot{\varphi}_{ik} \boldsymbol{\varepsilon}_k + {}^1\varphi_{ik} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k = ({}^1\dot{\varphi}_{ik} + {}^1\varphi_{ij} {}^1\varphi_{jk})\, \boldsymbol{\varepsilon}_k,$$

also daß

$${}^2\varphi_{ik} = {}^1\dot{\varphi}_{ik} + {}^1\varphi_{ij} {}^1\varphi_{jk} = \dot{\omega}_{ik} + \omega_{ij} \omega_{jk}$$

ist.

Aus dem bei der Ausrechnung für $l = 2$ durchgeführten Verfahren ist ersichtlich, daß für $l \geqq 1$ die folgende Rekursionsformel gilt

$$^{l+1}\varphi_{ik} = {}^{l}\dot{\varphi}_{ik} + {}^{l}\varphi_{ij}{}^{1}\varphi_{jk}\,; \quad {}^{1}\varphi_{ij} = \omega_{ij}\,.$$

Für die gesuchten Punkte (X) des Raumes (Σ) bekommen wir dann das System von n Lineargleichungen

$$(\lambda\delta_{ik} - {}^{l}\varphi_{ik})\,\xi_k = b_{i0}^{(l)} + \lambda^0\xi_i\,, \tag{5}$$

$$i, k = 1, 2, \ldots, n\,; \quad \delta_{ik} = 1 \quad \text{für} \quad i = k\,, \quad \delta_{ik} = 0 \quad \text{für} \quad i \neq k\,.$$

Wir setzen voraus, daß die Determinante $Q(\lambda)$ des Systems von Lineargleichungen (5) von Null verschieden ist (und daß wir die Translationen und Rotationen ausgeschlossen haben); dann erhalten wir für die Lösung des Systems

$$\xi_i = P_i(\lambda) : Q(\lambda)\,, \quad i = 1, 2. \ldots, n\,,$$

wo $Q(\lambda)$ ein Polynom in λ n-ten Grades, $P_i(\lambda)$ ein Polynom in λ höchstens n-ten Grades ist. Dann gilt:

Die gesuchten Punkte (ξ) des Raumes (Σ), deren l-te Geschwindigkeiten kollinear mit der Verbindungsgeraden dieser Punkte (ξ) mit dem gewählten Punkte $({}^0\xi)$ sind, erzeugen in der gegebenen Phase allgemein eine algebraische Kurve n-ten Grades.

Aus dem Gleichungssystem (5) kann man für diese Kurve $\binom{n}{2}$ Hyperquadriken (welche allgemein verschieden sind) bestimmen, die diese Kurve enthalten.

Das ganze Verfahren führen wir für den Fall $l = 1$ durch, wo wir zeigen, wie sich die Gleichungen für die Punkte mit der verlangten Eigenschaft durch die Einführung eines neuen Koordinatensystems $'\Sigma$ im Raume (Σ) vereinfachen lassen.

Schreiben wir vorerst die Gleichungen (5) für $l = 1$ in der Matrixform

$$\mathbf{b}^{\cdot} + \boldsymbol{\Omega}\xi = \lambda(\xi - {}^0\xi) \tag{6}$$

wo $\boldsymbol{\Omega}$ die schiefsymmetrische Matrix mit den Elementen ω_{ik} ist.

Zu dem neuen System $'\Sigma$ gehen wir mittels der orthogonalen Koordinatentransformation mit demselben Ursprung $('\Omega) \equiv (\Omega)$

$$\xi = \mathbf{D}'\xi \tag{7}$$

über, wo $\mathbf{D}$ die orthogonale matrix mit (bisher noch nicht bestimmten) konstanten Elementen d_{ij} ist.

Aus der Gleichung (6) erhalten wir

$$\mathbf{b}^{\cdot} + \boldsymbol{\Omega}\mathbf{D}'\xi = \lambda\mathbf{D}('\xi - {}'^0\xi)\,,$$

so daß

$$\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{b}^{\cdot} + \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{D}{}'\xi = \lambda({}'\xi - {}'{}^{0}\xi)$$

ist.

Die Matrix ${}'\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{D}$ ist ebenfalls eine schiefsymmetrische Matrix, denn in der Folge der Orthogonalität der Matrix $\boldsymbol{D}$

$$\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{D} + \boldsymbol{D}^{T}\boldsymbol{\Omega}^{T}(\boldsymbol{D}^{-1})^{T} = \boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\Omega}^{T})\,\boldsymbol{D} = \boldsymbol{0}$$

gilt.

Wenn wir noch

$${}'\boldsymbol{b}^{\cdot} = \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{b}^{\cdot}$$

bezeichnen, hat die Gleichung (6) nach der Transformation (7) die Form

$$\text{(6a)} \qquad {}'\boldsymbol{b}^{\cdot} + {}'\boldsymbol{\Omega}{}'\xi = \lambda({}'\xi - {}'{}^{0}\xi)\,.$$

In der orthogonalen Matrix $\boldsymbol{D}$ haben wir insgesamt $\binom{n}{2}$ konstante Elemente, welche wir wählen können. Machen wir es so, daß (nach dem Weglassen von Akzenten) im Falle des geraden n für $k = 1, 2, \ldots, n/2$, im Falle des ungeraden n für $k = 1, 2, \ldots$ $\ldots, (n-1)/2$

$$\omega_{2k-1,2k} \neq 0\,, \quad \text{andere} \quad \omega_{ij} = 0$$

gilt.

Damit haben wir im Falle des geraden, bzw. des ungeraden n insgesamt $n(n-2)$: : 2, bzw. $(n-1)^2 : 2$ Bedingungen für die Festlegung der Elemente d_{ij} erschöpft, so daß wir noch $n : 2$, bzw. $(n-1) : 2$ Wahlen von Elementen d_{ij} zur vollständigen Bestimmung der Transformation (7) zur Verfügung haben.

Die Gleichungen (6a) erhalten in dem System ${}'\Sigma$ (die Akzente werden auf weiteres weggelassen) für gerades n die Form

$$\text{(8)} \qquad \begin{aligned} \lambda\xi_{2k-1} - \omega_{2k-1,2k}\xi_{2k} &= b^{\cdot}_{2k-1,0} + \lambda^{0}\xi_{2k-1}\,,\\ \omega_{2k-1,2k}\xi_{2k-1} + \lambda\xi_{2k} &= b^{\cdot}_{2k,0} + \lambda^{0}\xi_{2k}\,,\\ k = 1, 2, \ldots, n : 2& \end{aligned}$$

und die Kurve der gesuchten Punkte (ξ) hat parametrische Gleichungen

$$\text{(9)} \qquad \begin{gathered} \xi_{2k-1}(\lambda^2 + \omega^2_{2k-1,2k}) = \\ = \lambda b^{\cdot}_{2k-1,0} + \omega_{2k-1,2k}b^{\cdot}_{2k,0} + \lambda(\lambda^{0}\xi_{2k-1} + \omega_{2k-1,2k}{}^{0}\xi_{2k})\,,\\ \xi_{2k}(\lambda^2 + \omega^2_{2k-1,2k}) = \\ = \lambda b^{\cdot}_{2k,0} - \omega_{2k-1,2k}b^{\cdot}_{2k-1,0} + \lambda(\lambda^{0}\xi_{2k} - \omega_{2k-1,2k}{}^{0}\xi_{2k-1})\,;\\ k = 1, 2, \ldots, n : 2\,. \end{gathered}$$

Die Determinante $Q(\lambda)$ des Gleichungssystems (8) ist

$$(\lambda^2 + \omega_{12}^2)(\lambda^2 + \omega_{34}^2)\dots(\lambda^2 + \omega_{n-1,n}^2) \neq 0$$

und die Lösung (9) existiert also für alle λ und die Kurve (9) ist infolgedessen allgemein eine algebraische Kurve n-ten Grades. Dabei ist

$$\begin{aligned} \xi_{2k-1} &= P_{2k-1}(\lambda) : Q_{2k-1,2k}(\lambda)\,, \\ \xi_{2k} &= P_{2k}(\lambda) : Q_{2k-1,2k}(\lambda)\,, \end{aligned}$$

wo $Q_{2k-1,2k}(\lambda)$ ein Polynom in λ des zweiten Grades, $P_{2k-1}(\lambda)$, bzw. $P_{2k}(\lambda)$ ein Polynom in λ höchstens des zweiten Grades ist.

Aus den Gleichungen (8) folgen allgemein (für $n \geqq 4$) insgesamt $\binom{n}{2}$ Hyperquadriken, auf denen die Kurve (9) liegt, deren Gleichungen die folgenden sind:

$$\begin{aligned} (\omega_{2k-1,2k}\xi_{2k-1} - \dot{b}_{2k,0})(\xi_{2k-1} - {}^0\xi_{2k-1}) &+ \\ + (\omega_{2k-1,2k}\xi_{2k} + \dot{b}_{2k-1,0})(\xi_{2k} - {}^0\xi_{2k}) &= 0\,, \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} (\omega_{2k-1,2k}\xi_{2k} + \dot{b}_{2k-1,0})(\xi_{2j+1} - {}^0\xi_{2j+1}) &- \\ - (\omega_{2j+1,2j+2}\xi_{2j+2} + \dot{b}_{2j+1,0})(\xi_{2k-1} - {}^0\xi_{2k-1}) &= 0\,, \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} (\omega_{2k-1,2k}\xi_{2k} + \dot{b}_{2k-1,0})(\xi_{2j+2} - {}^0\xi_{2j+2}) &+ \\ + (\omega_{2j+1,2j+2}\xi_{2j+1} - \dot{b}_{2j+2,0})(\xi_{2k-1} - {}^0\xi_{2k-1}) &= 0\,, \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} (\omega_{2k-1,2k}\xi_{2k-1} - \dot{b}_{2k,0})(\xi_{2j+1} - {}^0\xi_{2j+1}) &+ \\ + (\omega_{2j+1,2j+2}\xi_{2j+2} + \dot{b}_{2j+1,0})(\xi_{2k} - {}^0\xi_{2k}) &= 0\,, \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} (\omega_{2k-1,2k}\xi_{2k-1} - \dot{b}_{2k,0})(\xi_{2j+2} - {}^0\xi_{2j+2}) &+ \\ + (\omega_{2j+1,2j+2}\xi_{2j+1} - \dot{b}_{2j+2,0})(\xi_{2k} - {}^0\xi_{2k}) &= 0\,. \end{aligned} \tag{14}$$

In der Gleichung (10) läuft $k = 1, 2, \dots, n : 2$ durch, in den Gleichungen (11) bis (14) ist $j \geqq k$ und $j, k = 1, 2, \dots, (n - 2) : 2$. Wir haben also $n : 2$ Hyperquadriken mit der Gleichung (10), Hyperquadriken mit den Gleichungen (11) bis (14) gibt es je $n(n - 2) : 8$.

Für ungerades n tritt zu den Gleichungen (8), welche jetzt für $k = 1, 2, \dots, (n - 1) :$ $: 2$ gelten, noch die Gleichung

$$\xi_n = {}^0\xi_n + \dot{b}_{n0} : \lambda\,; \quad \lambda \neq 0 \tag{8a}$$

hinzu.

Die Determinante $Q(\lambda) = \lambda(\lambda^2 + \omega_{12}^2)\dots(\lambda^2 + \omega_{n-2,n-1}^2)$ ist also für alle $\lambda \neq 0$ von Null verschieden. Die parametrische Darstellung der Kurve von Punkten (ξ) ist durch die Gleichungen (9) für $k = 1, 2, \dots, (n-1) : 2$ und durch die Gleichung (8a) gegeben. Aus denselben Gründen, wie bei geradem n, ist diese algebraische Kurve (allgemein) n-ten Grades.

Dabei liegt sie wieder auf den $\binom{n}{2}$ Hyperquadriken, welche man aus den Gleichungen (8) und (8a) ableiten kann. Ihre Gleichungen für $n \geqq 5$ haben die Form (10), wo $k = 1, 2, \dots, (n-1) : 2$, bzw. (11) bis (14) wo $j \geqq k$, $j, k = 1, 2, \dots, (n-3) : 2$ ist und dazu liegt sie noch auf den Hyperquadriken mit der Gleichung

$$(15)\qquad b^{\bullet}_{n0}(\xi_{2k-1} - {}^0\xi_{2k-1}) - (\omega_{2k-1,2k}\xi_{2k} + b^{\bullet}_{2k-1,0})(\xi_n - {}^0\xi_n) = 0\,,$$

bzw.

$$(16)\qquad b^{\bullet}_{n0}(\xi_{2k} - {}^0\xi_{2k}) + (\omega_{2k-1,2k}\xi_{2k-1} - b^{\bullet}_{2k,0})(\xi_n - {}^0\xi_n) = 0\,;$$

in beiden Gleichungen (15) und (16) ist $k = 1, 2, \dots, (n-1) : 2$.

In diesem Falle haben wir $(n-1) : 2$ Hyperquadriken mit der Gleichung der Form (10), Hyperquadriken mit der Gleichung der Form (11) bis (14) gibt es je $(n-1)$ . . $(n-3) : 8$ und Hyperquadriken mit den Gleichungen (15) und (16) je $(n-1) : 2$.

Es wäre noch möglich die Translation des Ursprunges $({}^{\backprime}\Omega)$ in einen Punkt, in welchem z. B. $b^{\bullet}_{k0} = 0$, $k = 1, 2, \dots, n-1$, aber $b^{\bullet}_{n0} \neq 0$ ist, zu benutzen, aber damit würden wir die parametrische Darstellung der gefundenen Kurve und der Hyperquadriken etwas komplizieren.

Bemerken wir noch, daß für $l = 2$ in dem System ${}^{\backprime}\Sigma$ für ${}^2\varphi_{ij}$ die Beziehungen

$$\begin{gathered} {}^2\varphi_{ij} = -{}^2\varphi_{ji} = \omega^{\bullet}_{ij}\,, \quad i \neq j\,, \\ {}^2\varphi_{2k-1,2k-1} = {}^2\varphi_{2k,2k} = -\omega^2_{2k-1,2k} \end{gathered}$$

für gerades n und $k = 1, 2, \dots, n : 2$ folgen, bzw. für ungerades n und $k = 1, 2, \dots$ $\dots, (n-1) : 2$, wo noch die Beziehung ${}^2\varphi_{nn} = 0$ hinzutritt.

Weil wir noch die Möglichkeit der Wahl von $n : 2$, bzw. $(n-1) : 2$ der Elemente d_{ij} (nach der Dimension des Raumes) in der Matrix $\mathbf{D}$ der Koordinatentransformation (7) haben, können wir die Gleichungen, welche den Gleichungen (5) entsprechen, noch weiter vereinfachen. Z. B. setzen wir ${}^2\varphi_{kn} = 0$ für $k = 1, 2, \dots, n : 2$, bzw. für $k = 1, 2, \dots, (n-1) : 2$.

Leicht überzeugen wir uns davon, daß (in diesem System ${}^{\backprime}\Sigma$) allgemein

$${}^l\varphi_{ij} = -{}^l\varphi_{ji}\,; \quad i \neq j\,, \quad {}^l\varphi_{2k-1,2k-1} = {}^l\varphi_{2k,2k}$$

für $k = 1, 2, \dots, n : 2$ und gerades n, bzw. $k = 1, 2, \dots, (n-1) : 2$ und ungerades n, wenn noch ${}^l\varphi_{nn} = 0$ hinzutritt, gilt. Die Vereinfachung der Gleichungen, welche den

Gleichungen (5) ähnlich sind, durch die ergänzende Wahl der übriggebliebenen freien Elemente d_{ij} in der Matrix $\mathbf{D}$ der Koordinatentransformation (7), können wir genau so wie im Falle $l = 2$ durchführen.

Literaturverzeichnis:

[1] *Müller H. R.:* Zur Bewegungsgeometrie in Räumen höherer Dimension. Monatsh. Math. 70 (1966), 47—57.

[2] *Müller H. R.:* Kinematische Geometrie. Jber. Deutsch. Math.-Verein. 72 (1970), 143—164.

Souhrn

KŘIVKY SPJATÉ S RYCHLOSTMI n-ROZMĚRNÉHO EUKLIDOVSKÉHO POHYBU NEPROMĚNLIVÉHO ÚTVARU

KAREL DRÁBEK

V práci jsou ve fázi vyhledány body pohyblivého (ale neproměnlivého) n-rozměrného euklidovského prostoru, které za daného pohybu mají vlastnost, že jejich l-té rychlosti jsou kolineární s jejich spojnicí s předem pevně zvoleným bodem pohyblivého prostoru. Tyto body leží obecně na algebraické křivce n-tého stupně tohoto prostoru. Pro tuto křivku bylo určeno potom $\binom{n}{2}$ nadkvadrik, které ji obsahují. Zvláště je ukázáno, jak je tomu v případě rychlosti (tj. pro $l = 1$). Přitom bylo nutno rozlišovat sudou a lichou dimenzi prostoru, jak je tomu téměř při všech problémech n-rozměrného euklidovského pohybu.

Anschrift des Verfassers: Doc. Dr. *Karel Drábek* CSc., Katedra matematiky a deskriptivní geometrie fakulty stavební ČVUT, Trojanova 13, 121 34 Praha 2.