

# Das Aehnlichkeitsgesetz bei Reibungsvorgängen in Flüssigkeiten.

Von **H. Blasius**, Hamburg.

## Ueber den Gültigkeitsbereich der beiden Aehnlichkeitsgesetze in der Hydraulik.

### 1) Ansätze der Hydraulik.

Bei den meisten Interpolationsformeln der Hydraulik, die die Druckverteilung in bewegtem Wasser betreffen, wählt man als ersten Ansatz die Proportionalität der Druckhöhe  $h = \frac{p}{\gamma}$  zur Geschwindigkeitshöhe  $p = c\gamma \frac{v^2}{2g}$ :

$$h = c \frac{v^2}{2g}$$

$$\text{oder Kraft} = \int p \times \text{Fläche} = k\gamma F \frac{v^2}{2g},$$

wobei  $p, v, h, F$  die bei der betreffenden Anordnung vorkommenden Drücke, Geschwindigkeiten, Druckhöhen und Flächen sind.

Man geht dabei von der Ueberlegung aus, daß die Trägheitskräfte im Beharrungszustand der Masse  $\frac{\gamma}{g}$  und dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional sind; denn die Beschleunigungen als Geschwindigkeitsunterschiede in der Zeiteinheit sind den Geschwindigkeiten direkt und der Zeit, in der die Teilchen die örtlich vorhandenen Geschwindigkeitswerte durchlaufen, umgekehrt proportional; diese Zeit selbst ist aber wieder der Geschwindigkeit umgekehrt proportional. Das Bestehen der obigen Gesetzmäßigkeit hat dann zur Folge, daß man aus einer Messung, Eichung, die Konstante  $c$  bestimmen kann und daß man damit die Drücke und Kräfte für beliebige Geschwindigkeiten kennt.

In solchen Fällen ferner, wo bei ähnlichen Körpern auch ähnliche Stromlinienbilder entstehen, sind an entsprechenden Stellen die Geschwindigkeitsverhältnisse und damit auch die Druckverteilung bei gleichen Geschwindigkeiten gleich. Hier wird dann der Beiwert  $c$  für ähnliche Körper den gleichen Wert haben und damit durch eine Eichung für alle Abmessungen und für alle Geschwindigkeiten bestimmt sein.

Selbst beim Druckverlust in Rohren ( $p$  Druckverlust,  $l$  Länge,  $d$  Durchmesser,  $v$  Geschwindigkeit) macht man den Ansatz

$$p = \lambda\gamma \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g},$$

obwohl es sich ja hier um das Gleichgewicht zwischen Druck und Reibung und wenigstens äußerlich nicht um eine Beschleunigung handelt. Aber man hat von dem Vorgang bei turbulenter Strömung, für die das Gesetz gelten soll, die Vorstellung, daß es sich um unregelmäßig wirbelnde Strömung handelt, wo das Druckgefälle zunächst doch Beschleunigung der Wasserteilchen zur Folge hat, die sich erst am Rande in einer dünnen Grenzschicht durch Reibung wieder verzögern. Daher steht auch der Durchmesser  $d$  im Nenner obiger Formel, da die Kraft des Druckgefälles dem Querschnitt, die Reibungskraft dem Umfang proportional sein dürfte.

Die Abweichungen von diesen einfachen Grundvorstellungen bringen es nun mit sich, daß diese Größen  $c$ ,  $k$  und  $\lambda$  doch keine Konstanten sind, sondern sich bei der Eichung wieder als Funktionen von  $v$  und  $d$  ergeben. Dies wäre natürlich ein Grund, die obigen Interpolationsformeln zu verwerfen und durch andere zu ersetzen; aber die Tatsache, daß  $c$ ,  $k$  und  $\lambda$  meist wenig veränderlich mit den Längen und Geschwindigkeiten sind, gibt Anlaß, obige Form bestehen zu lassen und sie durch nähere Bestimmung der  $c$ ,  $k$  und  $\lambda$  zu ergänzen. Von den hierbei vorkommenden Gesetzmäßigkeiten handeln die Aehnlichkeitsgesetze.

## 2) Die Aehnlichkeit bei Wellenvorgängen.

Die Aehnlichkeit der Stromlinien bei ähnlichen Körpern bleibt nicht gewahrt, wenn das Wasser, in dem der Körper, z. B. ein Schiff, mit der Geschwindigkeit  $v$  fährt, eine freie Oberfläche besitzt, auf der Wellen entstehen. Nur wenn sich mit den Abmessungen des Schiffes auch die Wellenlängen und Wellenhöhen vergrößern, kann Aehnlichkeit der Stromlinien, Aehnlichkeit der Druckverteilung und Gleichheit der Beiwerte  $c$  und  $k$  vorhanden sein. Dies tritt ein, wenn die Geschwindigkeitshöhe im Längenmaßstabe, die Geschwindigkeit selbst im Maßstabe der Wurzel aus den Längen wächst.

Ob diese notwendige Bedingung auch hinreicht, erfährt man aus der allgemeinen Ueberlegung, daß an jedem Raumelement des Wassers drei Kräfte im Gleichgewicht stehen müssen: die Trägheit, das Druckgefälle und die Schwerkraft. Denkt man sich bei zwei ähnlichen Körpern die gesamte Druck- und Geschwindigkeitsverteilung als Funktion der Koordinaten  $x$ ,  $y$ ,  $z$  dargestellt, so werden die Kräfte in den Eulerschen Grundgleichungen (Hütte, XXI. Aufl. Bd. 1 S. 268) der Hydrodynamik in folgender Weise aus diesen Funktionen berechnet: Wenn  $u$  die  $x$ -Komponente der Geschwindigkeit bedeutet, so ist die Trägheit der Raumeinheit:

$$\frac{\gamma}{g} u \frac{\partial u}{\partial x},$$

wozu noch zwei ähnliche Glieder treten, wenn die Stromlinie schief zur  $x$ -Achse verläuft. Das Druckgefälle ist

$$-\frac{\partial p}{\partial x}$$

und die Schwerkraft

$\gamma$ .

Sind nun bei dem größeren Körper alle Längenabmessungen, insbesondere die Koordinaten, im Verhältnis  $f_l$ , die Geschwindigkeiten und Drücke im Verhältnis  $f_v$  und  $f_p$  vergrößert, so wachsen die drei Kräfte in den Verhältnissen:

$$\frac{f_v^2}{f_l} \quad \frac{f_p}{f_l} \quad \text{r.}$$

Ist nun beim kleineren Körper Gleichgewicht vorhanden, so wird die Eulersche Gleichung nur dann auch bei dem größeren bestehen bleiben, wenn ihre drei Glieder sich im gleichen Verhältnis ändern, wenn also

$$\frac{f_v^2}{f_l} = \frac{f_p}{f_l} = 1$$

ist. Unter diesen Bedingungen ist in beiden Fällen das Kräftegleichgewicht an jedem Raumelement bei ähnlichen Geschwindigkeitsverteilungen vorhanden.

Auch die Kontinuitätsbedingung ist hierbei nicht gestört, und da dies unter den gemachten Voraussetzungen alle Gleichungen sind, denen der Vorgang genügen muß, so sind die Bedingungen:

$$\begin{aligned} f_v &= V\sqrt{f_l} \\ f_p &= f_l = f_v^2 \end{aligned}$$

notwendig und hinreichend dafür, daß die Stromlinien ähnlich sind. Von diesen Formeln gibt die erste die Beziehung zwischen den unabhängig Veränderlichen  $v$  und  $l$ , während die zweite aussagt, daß die unter ähnlichen Verhältnissen gemessenen Drücke dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional sind.

### 3) Folgerungen für das Gesetz der Beiwerte.

Diese zweite Aussage gilt aber nur gleichzeitig mit der ersten: nur wenn  $f_v = V\sqrt{f_l}$  ist, ist das Verhältnis  $p : v^2$  unveränderlich. Diese Einschränkung kann man auch so ausdrücken, daß der Beiwert  $k$  für ähnliche Schiffe nur Funktion von  $\frac{v^2}{l}$  ist, wenn  $v$  die Schiffsgeschwindigkeit und  $l$  die Länge oder Breite oder sonst ein Längenmaß am Schiff ist; man schreibt dies:

$$k = k\left(\frac{v^2}{l}\right), \quad k \text{ Funktion von } \frac{v^2}{l},$$

denn  $\frac{v^2}{l}$  bleibt ungeändert,  $\frac{v_1^2}{l_1} = \frac{v_2^2}{l_2}$ , wenn  $f_v = V\sqrt{f_l}$  ist.

Wenn man aus Rücksicht auf die Unabhängigkeit vom Maßsystem nur dimensionslose Größen einführen will, so schreibe man für  $\frac{v^2}{l}$  das Verhältnis der Geschwindigkeitshöhe zur Länge (oder anderen Längengrößen) also:

$$k = k\left(\frac{v^2}{2gl}\right), \quad k \text{ Funktion von } \frac{v^2}{2gl}.$$

Dies ist auch genauer, da man hierbei auch die Möglichkeit verschiedener  $g$ -Werte, die praktisch allerdings nicht in Betracht kommt, berücksichtigt. Wenn man nämlich bei obigem Vergleich auch  $\gamma$  und  $g$  veränderlich denkt, also etwa zwischen Wasser ( $\gamma = 1$ ) und Quecksilber ( $\gamma = 13,6$ ) vergleichen will, so muß man dies durch Faktoren  $f_\gamma$  und  $f_g$  zum Ausdruck bringen. Die Gleichsetzung der Vergrößerungsverhältnisse der Kräfte (s. Absatz 2) bringt dann die Gleichungen:

$$\frac{f_\gamma f_v^2}{f_g f_l} = \frac{f_p}{f_l} = f_\gamma$$

und hieraus:

$$f_v = V\sqrt{f_g f_l}$$

und

$$f_p = \frac{f_\gamma}{f_g} f_v^2 = f_\gamma f_l.$$

Aus der ersten Gleichung zwischen den unabhängig Veränderlichen ergibt sich dann die Konstanz von  $\frac{v^2}{2gl}$  als Merkmal der Aehnlichkeit; die zweite zeigt, daß  $p$  alsdann zu  $\frac{\gamma}{g} v^2$  proportional wird. Der Faktor 2 im Nenner von  $\frac{\gamma v^2}{2g}$  bzw.  $\frac{v^2}{2gl}$  ist willkürlich. Es stört die Proportionalität nicht, ob man ihn zusetzt oder fortläßt. Man schreibt ihn gewöhnlich hin, weil  $\frac{v^2}{2g}$  ein allgemein geläufiger Begriff ist. Es ist also das Verhältnis

$$p : \frac{\gamma v^2}{2g} = c$$

unveränderlich, wenn  $\frac{v^2}{2gl}$  unveränderlich ist, also

$$c = c\left(\frac{v^2}{2gl}\right); \quad c \text{ Funktion von } \frac{v^2}{2gl}.$$

Für die Kräfte wird dann:

$$K = k \left(\frac{v^2}{2gl}\right) \frac{\gamma F v^2}{2g},$$

so daß also unter ähnlichen Verhältnissen, d. h. unveränderlichem  $\frac{v^2}{2gl}$  und unveränderlichem  $k$ , die Kräfte proportional der dritten Potenz der Längen werden.

#### 4) Die Form des Reibungsgesetzes.

Ich habe das Aehnlichkeitsgesetz bei Vorgängen unter Einwirkung der Schwerkraft hier nochmals so ausführlich dargestellt, weil die Ableitung dieses Gesetzes aus den Dimensionen der Glieder in den Differentialgleichungen ein allgemeines Verfahren ist. Wir wollen dieses Verfahren nunmehr anwenden auf den Fall, daß die Schwere ausgeschlossen ist und die Zähigkeit des Wassers in Betracht kommt.

Bei Strömung in parallelen Stromlinien setzt man die Schubspannung  $\tau$  der Reibung proportional zum Geschwindigkeitsgefälle senkrecht zu den Stromlinien, d. h. proportional zum Unterschied derjenigen Werte  $u$  der  $x$ -Komponente, die man mißt, wenn man in der senkrechten Richtung ( $y$ ) um die Längeneinheit fortschreitet:

$$\tau_{xy} = \mu \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Also die Kraft, die in Richtung der  $x$ -Koordinate auf die Raumeinheit wirkt<sup>1)</sup>:

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Dies Gesetz ist bestätigt für den Druckverlust bei Strömungen geringer Geschwindigkeit in Röhren und liefert dort die Formel für den Druckverlust:

$$p = \gamma h = 32 \mu l \frac{v}{d^2},$$

wenn  $v$  die mittlere Geschwindigkeit ist.

Statt der Stoffkonstanten  $\mu$  führt man auch häufig den »kinematischen Reibungskoeffizienten«  $\nu = \frac{\mu}{\gamma}$  ein, da es bei Vorgängen, bei denen nur Trägheit

<sup>1)</sup> Hierzu treten noch Glieder derselben Dimension für die anderen Koordinaten, die ich aber unterdrücke, da es nur darauf ankommt, den Typus des Reibungsgliedes hinzustellen.

und Reibung eine Rolle spielen, nur auf das Verhältnis von  $\mu$  zur Masse ankommt.  $\nu$  hat die Dimension  $\frac{\text{Länge}^2}{\text{Zeit}}$  und ist in hohem Maße abhängig von der Temperatur. In Abb. 1 S. 35, ist  $\nu$  für Wasser, Luft und Rüböl als Funktion der Temperatur aufgetragen, und zwar in  $\text{cm}^2/\text{sk}$ . Will man in Metern rechnen, so ist mit  $\frac{1}{10000}$  zu multiplizieren. Es ist also bei  $15^\circ \text{C}$  für Wasser:  $\nu = 0,0115 \text{ cm}^2/\text{sk} = 1,15 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{sk}$ . Die Auftragung für Luft gilt bei einem Druck von  $1 \text{ kg/cm}^2 = 735 \text{ mm Hg}$ . Für Luft unter anderen Drücken ist  $\nu$  umgekehrt proportional dem Druck,  $-\mu = \frac{\nu''}{g}$  ist bei gleicher Temperatur vom Druck unabhängig. Es ist also bei  $15^\circ \text{C}$  für Luft unter 1 at Druck:  $\nu = 0,156 \text{ cm}^2/\text{sk}$ ; bei 2 at:  $\nu = 0,078 \text{ cm}^2/\text{sk}$ .

Für größere Geschwindigkeiten oberhalb der Reynoldsschen kritischen Grenze ist der Druckverlust ungefähr dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional, und man könnte daraus schließen, daß das einfache Proportionalitätsgesetz für  $\tau_{xy}$  nicht mehr gilt. Man kann aber auch, in Uebereinstimmung mit dem in Absatz 1) Gesagten, annehmen, daß die Aenderung des Gesetzes nur in der unregelmäßigen beschleunigten und verzögerten Stromverteilung ihren Grund hat, während in den kleinsten Teilen obiges Gesetz bestehen bleibt. Gestützt wird diese Ansicht durch die Ueberlegung, daß die Grenze des Gültigkeitsbereiches bei einer bestimmten Neigung  $\frac{\partial u}{\partial y}$  des Geschwindigkeitsprofils liegen müßte, während tatsächlich in engen Röhren viel schärfere Geschwindigkeitsunterschiede im Beharrungszustand verbleiben (laminare Strömung), als in weiteren. Die kritische Geschwindigkeit, bei der die Strömung turbulent wird, d. h. zeitlich veränderlich, um Mittelwerte von  $u$  schwankend, ist nämlich dem Durchmesser umgekehrt proportional. Wir bleiben also bei obigem Ansatz und bemerken, daß eine Bestätigung des daraus abzuleitenden Aehnlichkeitsgesetzes zugleich eine Bestätigung der hier ausgesprochenen Annahme sein wird.

### 5) Das Aehnlichkeitsgesetz bei Reibungsvorgängen.

Bei Vorgängen, die nur unter dem Einfluß der Trägheit und Reibung verlaufen, können wir nun nach demselben Verfahren wie oben bei Schwerkraftvorgängen ein anderes Aehnlichkeitsgesetz ableiten, welches bereits von Reynolds<sup>1)</sup> aufgestellt wurde, das aber in die einschlägigen Gebiete der Ingenieurwissenschaften bis heute noch nicht eingedrungen ist. Es findet sich auch<sup>1)</sup> bei Helmholtz und Lanchester, allerdings beschränkt auf Potenzgesetze.

Die Trägheitskräfte, die in den Eulerschen Gleichungen (Hütte, XXI. Aufl. Bd. 1 S. 268) vorkommen, sind vom Typus

$$\frac{\gamma}{g} u \frac{\partial u}{\partial x},$$

das Gefälle der Druckhöhe

$$\gamma \frac{\partial h}{\partial x},$$

die Reibungskraft vom Typus

$$\frac{\gamma}{g} \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

<sup>1)</sup> Phil. Transact. of the Royal Soc. of London, Bd. 174 (1883) S. 938 und 973 u. f. Helmholtz ges. Werke Bd. I S. 158. Lanchester, Aerodynamik S. 44 (deutsch von C. A. Runga, Verlag Teubner).

Die Geschwindigkeitskomponenten  $u, v, w$  und die Druckhöhe  $h$  sind dabei als Funktionen der Koordinaten  $x, y, z$  gedacht. Wir nehmen nun an, daß wir — durch Eichung am Modell — einen Vorgang (Index 1) kennen, bei dem diese 3 Kräfte gemäß den Eulerschen Gleichungen im Gleichgewicht sind, und wir gehen nun zum ähnlichen Vorgang (Index 2) über, indem wir alle Längen, also besonders die Koordinaten, im Verhältnis  $\frac{l_2}{l_1} = f_l$  vergrößern und ebenso die auf ähnliche Koordinatensysteme bezogenen Geschwindigkeiten und Druckhöhen im Verhältnis  $f_v$  bzw.  $f_h$  ändern. Bei einer Aenderung der Konstanten  $\gamma, g, r$ , also beim Uebergang zu anderen Flüssigkeiten, sind die Vergrößerungsverhältnisse  $f_\gamma = \frac{\gamma_2}{\gamma_1}$ , ebenso  $f_g$  und  $f_r$  zu berücksichtigen. Dann ändern sich die oben aufgezählten Kräfte in den Verhältnissen

$$\frac{f_\gamma f_v^2}{f_g f_l}, \quad \frac{f_l f_h}{f_l}, \quad \frac{f_\gamma f_v f_r}{f_g f_l^2}.$$

Nun bleibt das Gleichgewicht zwischen den Kräften beim Vorgang 2 nur dann gewahrt, wenn sich alle Kräfte im gleichen Verhältnis geändert haben. Die Gleichsetzung der drei Verhältnisse ergibt vereinfacht:

$$\frac{f_v f_l}{f_g} = 1 \quad f_h = \frac{f_v^3}{f_g}.$$

Aus der ersten Gleichung folgt, daß die Vorgänge nur dann ähnlich sind, wenn  $\frac{v l}{\nu}$  bei den verglichenen Vorgängen denselben Wert hat, denn  $\frac{f_v f_l}{f_g} = 1$  ist dasselbe wie

$$\frac{v_1 l_1}{\nu_1} = \frac{v_2 l_2}{\nu_2},$$

und aus der zweiten Gleichung ist abzulesen, daß in diesem Falle auch das Verhältnis  $h : \frac{v^2}{2g}$  dasselbe ist. Die Konstanten  $c = \frac{2gh}{v^2}$  und  $k$  (vergl. Absatz 1) sind also nur dann wirklich unveränderlich, wenn die Geschwindigkeiten und Längen bei den verglichenen Vorgängen dasselbe Produkt  $\frac{v l}{\nu}$  ergeben, mit anderen Worten:

$$c = \frac{2gh}{v^2} \text{ ist Funktion von } \frac{v l}{\nu},$$

geschrieben:  $c = c\left(\frac{v l}{\nu}\right)$ , ebenso:  $k = k\left(\frac{v l}{\nu}\right)$ .

Hierbei ist  $l$  irgend ein passendes, für den Maßstab der Anordnung charakteristisches Längenmaß.

#### 6) Ergänzungen zum obigen Beweis.

Wir haben noch anzumerken, daß bei dem oben gedachten Uebergang zum ähnlichen Vorgang sowohl die Kontinuitätsgleichung wie die Grenzbedingungen erfüllt bleiben, wenn man als Grenzbedingung das Haften der Flüssigkeit an den Wandungen einführt. — Ferner ist zu betonen, daß die Vergrößerung im Verhältnis  $f_l$  alle Längen betrifft. Neben der soeben festgestellten Abhängigkeit von  $\frac{v l}{\nu}$  bleiben die Koeffizienten  $c$  und  $k$  also noch von der Form der Anordnung abhängig, d. h. bei zwei oder mehreren unabhängigen Längengrößen vom Verhältnis dieser Längen. In den Ausdruck  $\frac{v l}{\nu}$  tritt dabei irgendeine passend gewählte Länge ein.

Wichtig ist auch die Bemerkung, daß sowohl  $c$  und  $k$  wie  $\frac{v^l}{\nu}$  dimensionslose Größen sind. Das Ergebnis physikalischer Ueberlegungen, wie der obigen Aehnlichkeitsbetrachtungen, liefert stets Gleichungen zwischen dimensionslosen Größen, und auch abgesehen von dieser grundsätzlichen Bemerkung ist es zweckmäßig<sup>1)</sup>, in die Interpolationsformeln Beiwerte einzuführen, die nicht vom Maßsystem abhängen, die in engl. Fuß dieselben Werte haben wie im Metermaß. Schon aus diesem Grunde ist das in Absatz 1) empfohlene Festhalten an der Form der Interpolationsformeln notwendig, im Gegensatz zu den Formen  $mv^n$ . Es ist dabei natürlich nicht ausgeschlossen, daß  $c$  durch eine derartige Potenz von  $\frac{v^l}{\nu}$  interpoliert wird, daß  $h$  im ganzen irgend einer ungeraden Potenz  $n$  von  $v$  proportional wird. Dann werden aber stets gleichzeitig derartige Potenzen von  $d$  und  $\nu$  auftreten, daß der gesamte Ausdruck für  $h$  wieder die richtige Dimension erhält. Eine Abweichung vom  $v^2$ -Gesetz ist danach stets ein Zeichen, daß auch  $\nu$  in die Formel hineingehört.

In etwas anderer Form ist das Gesetz bei Nusselt<sup>2)</sup> dargestellt: Es sind dort die vollständigen Eulerschen Gleichungen hingeschrieben, während hier der Uebersichtlichkeit wegen nur typische Glieder herausgegriffen sind. Dagegen leitet Nusselt das Gesetz nur für den Fall des Potenzansatzes

$$c = a \left( \frac{v^l}{\nu} \right)^n$$

ab, eine Einschränkung der Funktionsform, die durchaus nicht im Wesen der Sache liegt; vielmehr sagt das Reynoldssche Gesetz über die Form der Abhängigkeit  $c \left( \frac{v^l}{\nu} \right)$  gar nichts aus.

#### 7) Allgemeines über die Anwendungen.

Vorgänge, bei denen dieses Gesetz in Kraft tritt, sind der Druckverlust in Rohren, die Oberflächenreibung an Platten sowie die Drücke und Kräfte, die eingetauchte Körper in tiefem Wasser ohne freie Oberfläche erfahren. Letzteres trifft also besonders beim Widerstand von Ballonkörpern in Luft zu. Denn die Ausdehnung des Kielwassers, die Lage seiner Ablösungsstelle und die Drücke in demselben sind nur bestimmt durch die Reibungskräfte und die Trägheit. Bei allen diesen Vorgängen sind die Beiwerte der hydraulischen Formeln Funktionen der Reynoldsschen Zahl  $\frac{v^l}{\nu}$ . Daraus, daß die Gleichheit des Produktes  $\frac{v^l}{\nu}$  für die Aehnlichkeit der Vorgänge und die Gleichheit der Beiwerte maßgebend ist, folgt, daß bei Modellversuchen die korrespondierenden Geschwindigkeiten im umgekehrten Verhältnis der Längen zu wählen sind: Sind die Abmessungen des Modells  $\frac{1}{10}$  der Wirklichkeit, so muß man die Geschwindigkeiten beim Modell aufs 10-fache der in Wirklichkeit vorhandenen Geschwindigkeiten steigern, während sie beim Studium von Schwerkraftvorgängen im Verhältnis  $\frac{1}{\sqrt{10}}$  herabgesetzt werden konnten. Der Beiwert  $\nu$  im Nenner der Zahl  $\frac{v^l}{\nu}$  enthält

<sup>1)</sup> Vergl. die Ausführungen von Prandtl in Zeitschr. f. Flugtechnik u. Motorluftschiffahrt 1910 Heft 13 S. 157, wo das Aehnlichkeitsgesetz gerade aus der Forderung abgeleitet ist, daß nur dimensionslose Größen in den Gleichungen vorkommen.

<sup>2)</sup> Mitteilungen über Forschungsarbeiten Heft 89.

den Einfluß der Temperatur und wird auch dann für die Berechnung der korrespondierenden Geschwindigkeiten wesentlich, wenn man den Modellversuch mit anderen Flüssigkeiten anstellt. Wenn man z. B. bei Luft von der Zusammendrückbarkeit absieht, die erst bei hohen Geschwindigkeiten in Frage kommt, so unterscheidet sie sich vom Wasser nur durch das spezifische Gewicht und die Zähigkeit, unterliegt also den hier ausgeführten Aehnlichkeitsbetrachtungen. Bei Flüssigkeiten, bei denen  $\nu$  kleine Werte hat, erreicht man schon bei geringeren Geschwindigkeiten bzw. geringerem Maßstab hohe Reynoldssche Zahlen. Diese Ueberlegung läßt es als vorteilhaft erscheinen, Modellversuche für Luftschiffe in Wasser vorzunehmen, da  $\nu$  für Wasser nur  $1/10$  bis  $1/20$  von dem für Luft ist (vergl. Abb. 1). Flüssigkeiten mit noch geringerem  $\nu$ , die also für Modellversuche bei Reibungsvorgängen besonders vorteilhaft sind, sind Quecksilber, Schwefelkohlenstoff, Aether, Methylalkohol<sup>1)</sup>.

Wenn man in gleicher Flüssigkeit Modellversuche nach diesem Aehnlichkeitsgesetz anstellt, so mißt man Kräfte von derselben Größe wie in Wirklichkeit, denn es ist

$$K = k \gamma F \frac{v^2}{2g},$$

und da sich  $v$  umgekehrt proportional den Längen ändern soll, so erhält  $Fv^2$  denselben Wert im Modell wie in der Wirklichkeit. Schon dieser Umstand macht Modellversuche in gleicher Flüssigkeit unmöglich. Geht man dagegen zu anderer Flüssigkeit über, so ist

$$f_K = \frac{f_1 f_2^2 v^2}{f_g}$$

und

$$\frac{f_v f_1}{f_v} = 1$$

zu setzen, woraus durch Elimination von  $f_v$  folgt:

$$f_K = \frac{f_1 \gamma^2}{f_g}$$

oder ohne Rücksicht auf  $f_g$ :

$$\frac{K_2}{K_1} = \frac{\gamma_2 v_2^2}{\gamma_1 v_1^2}.$$

Der Kraftmaßstab ist also gleich dem Verhältnis der spezifischen Gewichte, multipliziert mit dem Quadrat des Verhältnisses der Reibungszahlen.

Für Vorgänge, bei denen sowohl Schwerkraft wie Reibung eine Rolle spielen, gilt bei gleicher Flüssigkeit überhaupt kein Aehnlichkeitsgesetz, da in solchem Falle sowohl  $\frac{v^2}{2g l}$  wie  $\frac{v l}{\nu}$  bei Modell und Wirklichkeit denselben Wert haben müßten. Nimmt man jedoch verschiedene Flüssigkeiten, so folgt aus der Auflösung der Gleichungen

$$\frac{v_1^2}{2g l_1} = \frac{v_2^2}{2g l_2} \quad \frac{v_1 l_1}{\nu_1} = \frac{v_2 l_2}{\nu_2},$$

daß auch für Vorgänge mit Schwerkraft und Reibung ein Modellversuch im Maßstab

$$l_2 = \left(\frac{\nu_2}{\nu_1}\right)^{2/3} l_1 \quad \frac{v_2}{v_1} = \left(\frac{\nu_2}{\nu_1}\right)^{1/3}$$

möglich wird.

<sup>1)</sup> Landolt-Börnstein, Physikalisch-chemische Tabellen 2. Aufl. 1894 Tabelle 110c, 3. Aufl. 1903 Tabellen 37 bis 40.

### Versuche über den Druckverlust in Rohren.

#### 8) Anwendung des Aehnlichkeitsgesetzes beim Druckverlust in Rohren.

Wir wollen uns nun den Bestätigungen des Aehnlichkeitsgesetzes durch den Versuch zuwenden, und zwar zunächst für den Fall des Druckverlustes in Rohren.

In der Formel

$$h = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g},$$

in der  $l$  die Länge der Meßstrecke und  $d$  den Durchmesser bedeutet, muß der Beiwert  $\lambda$  Funktion von  $\frac{vd}{v}$  sein. Es liegt hier nämlich zunächst der in Absatz

6) erwähnte Fall vor, daß zwei Längen  $l$  und  $d$  auftreten, so daß das Verhältnis  $h: \frac{v^2}{2g}$  Funktion von  $\frac{l}{d}$  und  $\frac{vl}{v}$  oder, wie man will, von  $\frac{l}{d}$  und  $\frac{vd}{v}$  ist. Die Proportionalität von  $h$  zur Meßlänge  $l$  erscheint selbstverständlich, wenn man sich in einer langen Rohrleitung genügend weit vom Eintritt entfernt befindet, daher ist  $h$  in obigem Ansatz sogleich zu  $\frac{l}{d}$  proportional gesetzt, und es bleibt dann nur der Durchmesser als maßgebende Länge übrig, so daß  $\lambda$  Funktion von  $\frac{vd}{v}$  wird.

Auf Grund dieser Ueberlegungen tragen wir alle vorliegenden Versuche in ein Diagramm ein, dessen Abszisse  $\frac{vd}{v}$  und dessen Ordinate  $\lambda = \frac{2gdh}{v^2l}$  ist. Jedes untersuchte Rohr, bei dem die Werte von  $\lambda$  bei verschiedenen Geschwindigkeiten gemessen sind, liefert darin eine Kurve, und die Bestätigung des Aehnlichkeitsgesetzes ist darin zu suchen, daß alle diese Kurven zusammenfallen.  $\lambda$  hat z. B. bei einem Rohr von 5 mm Dmr. und einer Geschwindigkeit von 10 m/sk denselben Wert wie bei  $d = 100$  mm und  $v = 0,5$  m/sk, denn die Reynoldssche Zahl  $\frac{vd}{\nu}$  ist, bei einer Temperatur von  $15^\circ$  C, mit  $\nu = 0,0115$  cm<sup>2</sup>/sk, in beiden Fällen:  $\frac{0,5 \cdot 1000}{0,0115} = \frac{10 \cdot 50}{0,0115} = 43500$ .  $d$  und  $v$  sind hierbei in Zentimetern zu messen, da auch  $\nu$  in cm<sup>2</sup>/sk abgelesen ist.

Wir werden sehen, daß dies Gesetz des Zusammenfallens der Kurven für glatte Rohre zutrifft.

Welche Kurve dabei herauskommt, darüber sagt das Aehnlichkeitsgesetz nichts aus, diese muß nach wie vor auf irgend eine passende Art interpoliert werden. Die Gültigkeit oder Ungültigkeit hängt nur daran, ob die Kurven für verschiedene Rohre zusammenfallen. Das Aehnlichkeitsgesetz hat nur zur Folge, daß die Abhängigkeit des  $\lambda$  von zwei Größen zurückgeführt wird auf die Abhängigkeit von nur einer Größe. Man braucht hiernach das  $\lambda$  nur für einen Rohrdurchmesser bei allen Geschwindigkeiten zu eichen und hat es dann für alle anderen Rohrdurchmesser im entsprechenden Geschwindigkeitsbereich. Oder anders ausgedrückt: durch die Abhängigkeit des  $\lambda$  von  $v$  bei gleichem Rohr ist die Abhängigkeit vom Durchmesser mitbestimmt: Wenn  $\lambda$  mit der Geschwindigkeit  $v$  bei gleichem  $d$  abnimmt, dann, so sagt das Gesetz, muß es auch mit dem Durchmesser  $d$  bei gleichem  $v$  abnehmen. In der Abhängigkeit des  $\lambda$  von  $\nu$  steckt der Einfluß der Temperatur, mit der  $\nu$  in hohem Maße veränderlich ist.

Das Aehnlichkeitsgesetz liefert daher eine Beschränkung der Interpolationsformeln für glatte Rohre nur insofern, als darin  $v$  und  $d$  nur in der Verbindung  $\frac{v d}{\nu}$  vorkommen dürfen. Die Formeln von Darcy, Weisbach und Biel (für  $f = 0$ ) genügen dieser Forderung nicht: Bei Darcy ist  $\lambda$  nur von  $d$ , bei Weisbach nur von  $v$  abhängig, Biel schreibt für  $f = 0$ :  $\lambda = a + \frac{b}{v \sqrt{d}}$ . Dagegen haben die Formeln von Flamant, Hagen, Reynolds, Saph und Schoder, Lang die vom Aehnlichkeitsgesetz geforderte Form, abgesehen davon, daß keiner derselben, außer Reynolds,  $\nu$  einführt (vergl. unten). Eine Bestätigung des Aehnlichkeitsgesetzes wird die Interpolation von  $\lambda$  insofern erleichtern, als die Darstellung einer Funktion von einer Veränderlichen leichter ist, als wenn man über die Abhängigkeit von drei Größen im Zweifel ist. Daß es unter diesen Verhältnissen vorteilhafter ist,  $\lambda$  als Funktion von  $\frac{v d}{\nu}$  aufzutragen und nicht  $h$  oder  $\frac{h}{v L}$  als Funktion von  $v$ , braucht nach obigem wohl nicht weiter begründet zu werden<sup>1)</sup>, ganz abgesehen davon, daß man bei der hier empfohlenen Art frei ist von Schwierigkeiten des Maßsystems. (Bei Biel  $h$  in Meter,  $L$  in Kilometer!) Man hat bei dimensionslosen Größen nur darauf zu achten, daß man alle Größen in gleichem Maß mißt. Wenn man  $\nu$  aus Abb. 1 in  $\text{cm}^2/\text{sk}$  abliest, so muß auch  $v$  und  $d$  in  $\text{cm}/\text{sk}$  bzw.  $\text{cm}$  gemessen werden, bei anderer Gewohnheit muß man sich die Kurve für  $\nu$  vorher in den Maßstab  $\text{m}^2/\text{sk}$  oder  $\text{Quadratfuß}/\text{sk}$  übertragen.

#### 9) Versuche von Saph und Schoder.

Die sorgfältigsten und ausführlichsten Versuche über den Druckverlust in glatten Rohren sind von den amerikanischen Ingenieuren Saph und Schoder<sup>2)</sup> ausgeführt. Die Durchmesser der 15 gezogenen Messingrohre reichen von 53,10 mm (Rohr II) bis 2,722 mm (Rohr XVI). In Abb. 2, Textblatt, ist eine Auswahl aus diesen Versuchen in der in Absatz 8 empfohlenen Art aufgetragen<sup>3)</sup>, und man erkennt daraus für die gezogenen Messingrohre, daß tatsächlich alle Beobachtungspunkte annähernd auf derselben Kurve liegen. Die Abweichungen betragen höchstens  $\pm 2$  vH. Damit ist für diese Rohre das Gesetz bestätigt.

Ausgelassen habe ich aus der Darstellung das Rohr VI, bei dem die Beobachter selbst Bemerkungen über geringe Verschmutzung des Rohrs machen. Auch war es aus Stücken zusammengesetzt, die etwas verschiedenen Durchmesser hatten. Bei der Berechnung ergaben sich die Werte bald höher bald geringer als die der anderen Rohre, wiesen also eine viel größere Streuung auf,

<sup>1)</sup> Außer der Auftragung von  $\lambda = \frac{2 g d h}{v^2 l}$  über  $\frac{v d}{\nu}$  läßt das Aehnlichkeitsgesetz auch z. B.  $\lambda \frac{v d}{\nu} = \frac{2 g d^2 h}{v l \nu}$  als Ordinate zu, wodurch man Kurven ähnlicher Form wie Biel erhält; auch kann man statt des Durchmessers den Halbmesser setzen u. dergl. Ich möchte aber, um den Vergleich zwischen den verschiedenen Verfassern zu erleichtern, vorschlagen, bei den hier benutzten Größen zu bleiben, denn  $\lambda$  ist bereits allgemein gebräuchlich, und auch der Durchmesser wird in der Praxis häufiger genannt als der Halbmesser.

<sup>2)</sup> Transact. of the American Society of Civ. Eng. Bd. 51 (1903) S. 253.

<sup>3)</sup> Die Abbildung ist im logarithmischen Maßstab gezeichnet, wodurch die Abszissenwerte bei kleinem  $\frac{v d}{\nu}$ , wo die meisten Punkte aufgetragen sind, weiter auseinanderrücken. Außerdem zeigt der logarithmische Maßstab das Bestehen eines Potenzgesetzes dadurch an, daß die Kurve eine Gerade wird.

ohne doch eine systematische Abweichung erkennen zu lassen. Daraufhin wurden VIII und XII, die ebenfalls Teile von verschiedenem Durchmesser besaßen, gar nicht erst durchgerechnet. XIV wurde verworfen, weil die Beobachter angaben, daß die Rohre wegen geringer Wandstärke etwas verbeult waren. Die Werte lagen daher auch ein wenig höher als die der anderen Rohre.

Die anderen Rohre sind zwar durchgerechnet, aber nicht alle aufgetragen, um Abb. 2 nicht zu überlasten; sie fallen in denselben Streifen hinein, wie die in Abb. 2 untergebrachten Rohre.

Außerdem sind in Abb. 2 noch 3 Beobachtungsreihen an verzinkten Eisenrohren eingetragen, welche zeigen, daß für rauhe Rohre das Gesetz nicht gilt. Die Kurven, die von Rohren verschiedenen Durchmessers herrühren, fallen hier nicht zusammen. Für solche Rohre, bei denen die Rauhmigkeit der Oberfläche eine Rolle spielt, bedarf das Gesetz einer Erweiterung. In der Ueberlegung von Absatz 6) sind nicht nur  $l$  und  $d$  als maßgebende Längen zu betrachten, sondern auch die Größe  $\varepsilon$  der Unebenheiten, die Rauhmigkeit.  $\lambda$  wird dann Funktion nicht nur von  $\frac{v d}{\nu}$ , sondern auch von  $\frac{\varepsilon}{d}$ , vom Verhältnis der Rauhmigkeit zum Durchmesser. Hier tritt der Durchmesser  $d$  also noch in einer anderen Verhältniszahl auf. Bei gleicher Rauhmigkeitszahl  $\varepsilon$ , die bei gleichem Stoff annähernd zu erwarten ist, ist das Rauhmigkeitsverhältnis  $\frac{\varepsilon}{d}$  für kleines  $d$  größer, die Kurve für  $\lambda$  müßte also für kleines  $d$  im allgemeinen höher liegen. Das ist auch bei den Saph-Schoderschen verzinkten Eisenrohren beinahe der Fall. Die Durchmesser bilden nach der Größe der Widerstandzahlen die Reihenfolge: 0,889 — (2,647) — 1,234 — 1,589 — 2,16 cm, Fig. 2 und 17, so daß nur der größte Durchmesser eine Ausnahmestellung einnimmt. Hier war also wohl trotz gleichen Stoffes größere Rauhmigkeit  $\varepsilon$  vorhanden; die Kurve ist nicht mit aufgetragen, weil ich ursprünglich beabsichtigte, die Abhängigkeit des  $\lambda$  von  $\frac{\varepsilon}{d}$  an diesen Kurven zu untersuchen. Für rauhe Rohre fallen also die Kurven für verschiedene  $d$  bei gleichem  $\varepsilon$  nicht mehr zusammen. Umgekehrt ist daher die Uebereinstimmung der Kurven bei den Messingrohren als Kennzeichen dafür aufzufassen, daß wir hier den Fall  $\varepsilon = 0$ , also den Fall ganz glatter Wandung vor uns haben. Nur mit diesem Fall wollen wir uns zunächst beschäftigen.

### 10) Interpolationsformeln für glatte Rohre.

Die Frage, durch welchen Funktionsausdruck  $\lambda$  als Funktion von  $\frac{v d}{\nu}$  für glatte Rohre dargestellt wird, wird vom Aehnlichkeitsgesetz nicht beantwortet. Der Versuch zeigt uns, daß bis zu dem Wert:

$$\frac{v d}{\nu} = 2000$$

das Poiseuillesche Gesetz der laminaren Strömung, des zeitlich unveränderlichen Beharrungszustandes:

$$h = 32 \frac{\nu l v}{g d^2}$$

befolgt wird; hier ist:

$$\lambda = 64 \frac{\nu}{v d}$$

Diese Funktion, die der Forderung des Aehnlichkeitsgesetzes entspricht, ist in Abb. 2 für kleine Werte von  $\frac{v d}{\nu}$  links eingetragen. Für  $\frac{v d}{\nu} < 2000$  fallen die

Saph-Schoderschen Beobachtungen mit wenigen Ausnahmen auf diese Kurve, und es sei bemerkt, daß auch über  $\lambda = 0,05$  noch eine Reihe von Punkten vorhanden ist, die auf der Zeichnung keinen Platz mehr fanden. Die Gültigkeit des Poiseuilleschen Gesetzes für laminare Strömung ist ja auch nicht mehr zweifelhaft, sondern dient im Gegenteil zur Eichung der Werte von  $\nu$ .

Zwischen

$$\frac{v d}{\nu} = 2000 \text{ bis } 3000$$

findet der bekannte Uebergang zur turbulenten Strömung, bei der die Geschwindigkeit zeitlich veränderlich und nur im Mittel gleichbleibend ist, statt.  $\lambda$  wächst dabei von 0,032 auf 0,043. Von  $\frac{v d}{\nu} = 3000$  an nimmt  $\lambda$  nach einer anderen Kurve ab. Ein neuer Uebergang, wie Biel<sup>1)</sup> behauptet, ist nicht mehr vorhanden. Die zweite Grenzgeschwindigkeit, die etwa bei 12 000 liegen würde, ist offenbar nur die Grenze seiner angenommenen Annäherungsformel, deren Wahl ich nicht für glücklich halte.

Die Kurve für  $\lambda$  bei turbulenter Strömung ist bei Saph-Schoder für

$$\frac{v d}{\nu} = 3000 \text{ bis } 100\,000$$

mit Punkten belegt.

Saph-Schoder selbst interpolieren sie durch

$$1000 \frac{h}{l} = 0,296 \frac{v^{1,75}}{d^{1,25}}$$

für engl. Fuß und für eine Temperatur von 55° Fahrenheit; sie ergibt

$$\lambda = \frac{2g d h}{v^2 l} = 2g \frac{0,296}{1000} \frac{1}{v^{0,25} d^{0,25}},$$

und es ist bemerkenswert, daß diese ohne Kenntnis des Aehnlichkeitsgesetzes aufgestellte Formel die nach Absatz 6) richtige Form erhalten hat:  $\lambda$  ist derselben Potenz von  $v$  und  $d$  proportional. Die Formel muß allerdings ergänzt werden durch die Abhängigkeit von  $\nu$ , unter Rücksicht auf  $\nu = 0,0122 \text{ cm}^2/\text{sk}$  für 55° Fahrenheit.

Es ergibt sich so:

$$\lambda = 0,3164 \sqrt[4]{\frac{\nu}{v d}}$$

gültig für alle Maßsysteme bei glatten Röhren bei beliebigen  $v$ ,  $d$  und beliebiger Temperatur.

In Zahlentafel 1, S. 29, sind die beobachteten Werte der Formel gegenübergestellt. Eine Vorstellung von der geringen Streuung der Messungen geben die aus Abb. 2 entnommenen oberen und unteren Grenzen der gemessenen Werte. Man kann nun die Frage aufwerfen, wie weit die Potenzform unserer Formel durch die Messungen verbürgt ist; durch einen Kurvenstreifen von einiger Breite kann man ja viele Kurven durchlegen. Ich habe deshalb einen Ansatz der Form:

$$\lambda = a + b \left( \frac{\nu}{v d} \right)^n$$

mit 3 unbestimmten Konstanten  $a$ ,  $b$ ,  $n$  versucht und diese Konstanten durch 3 beliebig herausgegriffene Punkte aus den Beobachtungen der Zahlentafel 1 (Mittel) bestimmt.

<sup>1)</sup> Biel, Mitteilungen über Forschungsarbeiten Heft 44.

Ich erhielt aus:

$$\begin{array}{l} \text{aus} \\ \text{aus} \\ \text{aus} \end{array} \begin{array}{l} \frac{v d}{\nu} = 5000 \quad 25000 \quad 100000 \\ \lambda = 0,0378 \quad 0,0251 \quad 0,0179 \end{array} \left\{ \lambda = 0,0028 + 0,3804 \left( \frac{\nu}{v d} \right)^{0,28} \right.$$

$$\begin{array}{l} \frac{v d}{\nu} = 10000 \quad 30000 \quad 90000 \\ \lambda = 0,0321 \quad 0,0240 \quad 0,0185 \end{array} \left\{ \lambda = 0,0067 + 0,6415 \left( \frac{\nu}{v d} \right)^{0,25} \right.$$

$$\begin{array}{l} \frac{v d}{\nu} = 3000 \quad 20000 \quad 100000 \\ \lambda = 0,0418 \quad 0,0266 \quad 0,0179 \end{array} \left\{ \lambda = 0,0021 + 0,2642 \left( \frac{\nu}{v d} \right)^{0,225} \right.$$

$$\begin{array}{l} \frac{v d}{\nu} = 5000 \quad 20000 \quad 80000 \\ \lambda = 0,0378 \quad 0,0266 \quad 0,0190 \end{array} \left\{ \lambda = 0,0030 + 0,377 \left( \frac{\nu}{v d} \right)^{0,28} \right.$$

Es ergab sich also nur bei den am engsten liegenden 3 Punkten ein höherer Wert der Asymptote  $a = 0,0067$ ; alle anderen Interpolationen geben für  $a$  so kleine Werte im Vergleich zu den üblichen Werten von  $\lambda$  zwischen 0,02 und 0,03, daß die Entscheidung für das reine Potenzgesetz

$$\lambda = 0,3164 \left( \frac{\nu}{v d} \right)^{0,25}$$

gerechtfertigt erscheint. Tatsächlich verläuft ja auch diese Kurve völlig innerhalb des Streifens.

#### 11) Versuche von Nusselt mit Druckluft.

Nachdem durch die Saph-Schoderschen Versuche für glatte Rohre mit Wasser das Gesetz bestätigt ist, ist eine kurze Versuchsreihe von Nusselt für Druckluft zu beachten<sup>1)</sup>, die in Zahlentafel 2 und Abb. 3, S. 35, in unserem Diagramm wiedergegeben ist. Der Durchmesser war  $d = 2,201$  cm. Bei der Ausrechnung ist zu beachten, daß  $\nu$  nicht unmittelbar aus Abb. 1 zu entnehmen ist, sondern auf den angegebenen Druck umgerechnet werden muß. Ferner nimmt bei Gasen mit dem Druck auch die Dichte ab und daher die Geschwindigkeit zu, so daß das zur Beschleunigung nötige Gefälle von dem gemessenen Gefälle in Abzug zu bringen ist, um den reinen Reibungsdruckverlust zu erhalten. Wir berechnen gleich den Anteil an  $\lambda$ , den die Beschleunigung ausmacht:

$$\lambda_B = \frac{2 g d h}{\nu^2 l} = \frac{2 g d}{\nu^2} \frac{\partial}{\partial x} \frac{v^2}{2 g} = \frac{2 d}{\nu} \frac{\partial v}{\partial x} = - \frac{2 d}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial x} = - \frac{2 d}{p} \frac{\partial p}{\partial x}$$

bei isothermer Ausdehnung.

Diese Werte sind in der vorletzten Spalte der Zahlentafel 2, S. 29, eingetragen, und zwar so, daß die angegebenen Zahlen mit  $10^{-6}$  multipliziert  $\lambda_B$  ergeben. Diese  $\lambda_B$  sind von dem aus den Messungen berechneten  $\lambda$  abzuziehen, um  $\lambda_R$  zu erhalten. Letzteres ist dann in Abb. 3, S. 35, als Funktion von  $\frac{v d}{\nu}$  aufgetragen. Der Vergleich mit der Kurve lehrt, daß diese 10 Punkte sich der oben für Wasser aufgestellten Interpolationsformel

$$\lambda = 0,3164 \left( \frac{v d}{\nu} \right)^{0,25}$$

ebenfalls anschließen. Hierdurch ist die Aehnlichkeit auch zwischen verschiedenen Flüssigkeiten, Wasser und Luft bestätigt.

<sup>1)</sup> Nusselt, *Mitteilungen über Forschungsarbeiten* Heft 89, Zahlentafel Nr. 7 auf S. 25.

12) Versuche von Reynolds.

Reynolds, der das oben genannte Aehnlichkeitsgesetz zuerst ausgesprochen hat, hat in seiner Arbeit auch Versuche veröffentlicht, aus denen er die Bestätigung seines Gesetzes ableitet. Zwei Bleirohre von 6,15 mm und 12,65 mm Dmr. wurden bei Geschwindigkeiten bis 4,7 und 7,1 m/sk untersucht. Die Versuche sind in Abb. 4, S. 36, mit  $\frac{v d}{\nu}$  als Abszisse und  $\lambda$  als Ordinate aufgetragen und zeigen untereinander die Uebereinstimmung, die das Gesetz verlangt. Allerdings stimmen sie nicht überein mit den Messungen von Saph und Schoder, die in derselben Abbildung dargestellt sind durch die obere und untere Grenze, sowie durch die Interpolationsformel.

Diese Abweichung zwischen Reynolds und Saph-Schoder würde auf einen Einfluß des Stoffes hindeuten, der um so unwahrscheinlicher ist, als es sich hier um glatte Rohre handelt. Ich habe infolgedessen die Reynoldsschen Versuche nachgeprüft und gefunden, daß auch Bleirohre denselben Widerstand wie die Saph-Schoderschen Messingrohre haben. Ich vermute demnach bei Reynolds einen systematischen Fehler der Messungen. Die Konstanten seiner Interpolationsformeln haben daher kein weiteres Interesse, jedoch möge bemerkt werden, daß auch Reynolds ein Potenzgesetz empfiehlt, in dem das Druckgefälle proportional zu  $v^{1,123}$  ist.  $\lambda$  würde hiernach, wie bei Saph-Schoder ungefähr zu  $\sqrt[4]{\frac{\nu}{v d}}$  proportional werden.

13) Versuche von Lang.

Eine beachtenswerte Reihe von Versuchen hat Lang an einem Kupferrohr von rd. 6 mm Dmr. angestellt, indem er unter Verwendung eines Druckes von 50 at Geschwindigkeiten bis 54 m/sk erreicht. Die Beobachtungen sind auch bei Biel verwertet, wo man eine Beschreibung der Versuche nachlesen kann, sie sind im Original nicht veröffentlicht. Das Manuskript der Versuche wurde mir von Hrn. Reg.- und Baurat Lang freundlichst zur Verfügung gestellt. Da das in Frage stehende Aehnlichkeitsgesetz einen Vergleich aufstellt zwischen großen Geschwindigkeiten bei kleinem Durchmesser einerseits und kleinem  $v$  bei großem  $d$  andererseits, so läßt sich aus solchen Versuchen eine besonders scharfe Prüfung desselben erwarten. Die Langschen Versuche erreichen den Wert  $\frac{v d}{\nu} = 326\ 000$ , während die Saph-Schoderschen Rohre XI und XIII, die etwa denselben Durchmesser haben, nur Punkte bis 20 000 liefern. In der neuesten Auflage der Hütte (XXI) interpoliert Lang seine Beobachtungen bei etwa 20° C durch

$$\lambda = 0,014 + \frac{0,0018}{\sqrt{v_B d}}$$

(Maße in Metern),

wobei  $v_B$  der Unterschied der Geschwindigkeit gegen die kritische ist. Diese Formel ist, ebenso wie die Saph-Schodersche, in Uebereinstimmung mit dem Aehnlichkeitsgesetz, wenn wir sie durch Einführung von  $\nu$  (für 20° C:  $\nu = 1,01 \cdot 10^{-6}$  m<sup>2</sup>/sk) ergänzen<sup>1)</sup>. Wir erhalten die Form:

<sup>1)</sup> Der Koeffizient  $b$  in dem Langschen Ansatz

$$\lambda = a + \frac{b}{\sqrt{v d}}$$

würde je nach den Werten von  $\nu$  für verschiedene Temperaturen die Werte  $b = 1,8 \sqrt{\nu}$  erhalten:  
 Temperatur:    0°            10°            20°            50°            100° C

Werte  $b$ :    0,00240    0,00206    0,00181    0,00136    0,00100  $\frac{m}{\sqrt{sk}}$

$$\lambda = 0,014 + 1,8 \sqrt{\frac{r}{v_B d}}$$

oder, wenn wir statt  $v_B$  die Geschwindigkeit  $v$  einführen:

$$\lambda = 0,014 + \frac{1,8}{\sqrt{\frac{v d}{\nu} - 2000}}.$$

Ich halte die Wahl dieser Formel nicht für glücklich, da sie  $\lambda$  zu stark unendlich werden läßt, wenn man sich der kritischen Geschwindigkeit mit turbulenter Strömung nähert (vergl. Zahlentafel 1). Für größere Werte von  $\frac{v d}{\nu}$  (vergl. die Abscissenwerte von Abb. 4) hat aber der Abzug von 2000 keine Bedeutung mehr, und die in der XX. Auflage der Hütte angegebene einfachere Form, in der statt  $v_B$  nur  $v$  steht, hätte auch genügt. Seine Versuchswerte schließen sich der Formel zum Teil gut an; für höhere Geschwindigkeiten kommen allerdings auch starke Streuungen vor, die wohl auf die Verwendung von Metallmanometern zurückzuführen sind. Die Kurve ist in Abb. 4 und Zahlentafel 1 eingetragen und liegt durchweg höher als die Saph-Schodersche: bei  $\frac{v d}{\nu} = 100\,000$  um 10 vH. Vermutlich hat hier die schon bei Biel (Seite 25) erwähnte Tatsache Einfluß, daß die Meßstelle sehr nahe am Anfang des Rohres lag. Nach meinen nachher zu besprechenden Versuchen (Absatz 16) findet am Anfang des Rohres ein etwas höherer Druckverlust statt, und zwar etwa in demselben Maße. Für ganz glatte Rohre gibt Lang einen noch geringeren Asymptotenwert  $a = 0,010$  bis  $0,009$  an. Diese Kurve ist ebenfalls in Abb. 4 eingetragen und liegt erheblich niedriger als die Saph-Schoderschen Beobachtungen, die wir vorhin in Anbetracht ihrer vorzüglichen Uebereinstimmung als maßgebend für glatte Rohre erkannt hatten. Ich vermute daher, daß auch das Langsche Kupferrohr schon zu den glatten Rohren gehört, und daß die zu hohen Werte von  $\lambda$  durch den Mangel an Eintrittslänge begründet sind, wie sich auch später aus meinen Versuchen ergeben wird. Die niedrigste Kurve von Lang dagegen erscheint mir nicht zulässig zu sein. Es wäre sehr erwünscht, die Versuche bei hohen Geschwindigkeiten zu wiederholen mit ausreichender Eintrittslänge und mit Quecksilbermanometer.

#### 14) Eigene Versuche an einem Bleirohr.

Zur Nachprüfung der Reynoldsschen Versuche unternahm ich an der Versuchsanstalt für Wasserbau und Schiffbau zu Berlin Versuche über den Druckverlust in einem Bleirohr von nominell 5 mm Dmr. Wie Abb. 5 bis 8 zeigen, lagen drei verschiedene Meßstrecken auf ihm; die Messungen wurden, um den Einfluß der Entfernung vom Eintritt zu untersuchen, für beide Durchflußrichtungen vorgenommen. Die Speisung des Rohrs erfolgte für die höheren Geschwindigkeiten aus der Wasserleitung, für geringere Geschwindigkeiten aus einem hochstehenden Gefäß. Dieses Gefäß, der Paraffinofen der Versuchsanstalt, war heizbar und lieferte mir für einige weitere Versuchsreihen Wasser von etwa  $80^\circ \text{C}$ , um die Richtigkeit des Einflusses von  $\nu$  auf  $\lambda$  zu prüfen. Es ergaben sich also Versuche an 3 Meßstrecken bei 2 Durchflußrichtungen und 3 Anordnungen des Zufusses.

Die Einrichtung der 4 Meßstellen  $A, B, C, D$ , nach denen die Meßstrecken je nach der Durchflußrichtung » $AB$ « oder » $BA$ « usw. benannt sind, ist in Abb. 5 bis 8 gezeichnet: Durch das Bleirohr waren 4 Löcher gebohrt, an

denen innen der Grat sorgfältig entfernt wurde. Als Schlauchansatz wurde ein Rohrstück von 12 mm lichter Weite hinübergeschoben, das an einer Seite zugelötet war. Der Schlauchansatz war nach unten gerichtet, so daß etwa vorhandene Luft in das Bleirohr zurücksteigen konnte, bis der Wasserspiegel die oberen Löcher erreichte. Beim Aufbau der Versuche wurde besonders darauf

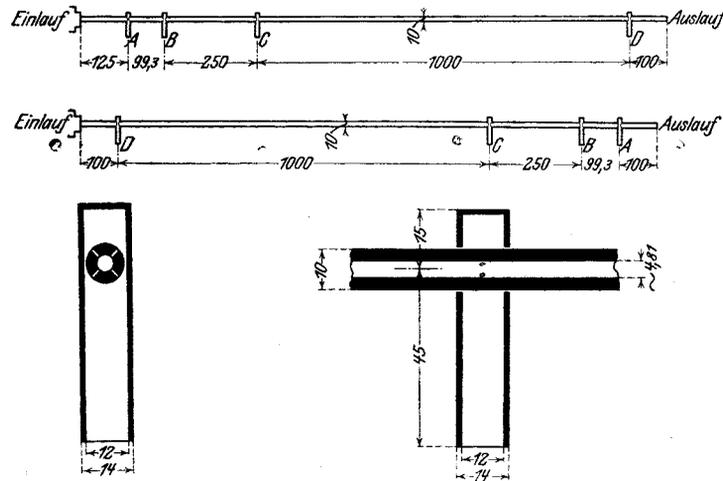


Abb. 5 bis 8.

gesehen, daß die Schläuche in einer einzigen Schlinge herunterhingen, so daß etwa vorhandene Luft entweder ins Manometer hinauf- oder ins Rohr zurücksteigen konnte. Bei den Heißwasserversuchen war am Eintritt ein Thermometer eingebaut und das Rohr zur Isolierung mit Putzwolle umwickelt.

Die Durchmesser der 3 einzelnen Meßstrecken wurden durch Wägen des Wasserinhalts bestimmt, und es ist unbedingt notwendig, gerade  $d$  so genau wie möglich zu bestimmen, denn da die Messung von  $v$  aus Wassermenge und Querschnittfläche ebenfalls von der Bestimmung von  $d$  abhängt, so wird  $\lambda = \frac{2g d h}{v^2 l}$  der fünften Potenz von  $d$  proportional. Ein Fehler von 1 vH in der Messung von  $d$  hat also 5 vH Fehler in  $\lambda$  zur Folge. Durchmesser, Querschnitt und Meßlänge sind in Zahlentafel 3, S. 30, und bei den einzelnen Versuchsreihen angegeben.

Verwendet wurden Wassermanometer und für die beiden längeren Meßstrecken bei den Versuchen mit Leitungswasser Quecksilbermanometer. Für die Umrechnung der Quecksilberhöhen auf Wassersäulenhöhen wurde der Wert  $\gamma_Q - 1 = 12,6$  benutzt.

Die Durchflußmenge wurde auf einer gewöhnlichen Dezimalwaage gewogen, die Durchflußzeit (3 bis 4 Minuten bei jedem Versuche) mit einer Stoppuhr bestimmt, hieraus  $v$  berechnet. Bei jedem Versuch wurde die Temperatur (8 bis 12° C) abgelesen und hieraus  $\nu$  nach Abb. 1 bestimmt. In den Versuchstafeln sind also das Gefälle  $\frac{h}{l}$ , die Geschwindigkeit  $v$  und der Reibungskoeffizient  $\nu$

bei jedem Versuch bestimmt und hieraus  $\frac{v d}{\nu}$  und  $\lambda$  berechnet. Die Zahlentafeln 4 und 5, S. 30 bis 32, zeigen dies für die längste Meßstrecke CD oder DC.

Bei den Heißwasserversuchen wurde die Ausdehnung des Rohres berücksichtigt und die in kg/sk gemessene Durchflußmenge zur Bestimmung von  $v$  auf ltr/sk umgerechnet. Die angegebene Druckhöhe gilt in Wassersäule derselben Temperatur wie das durchfließende Wasser; da die Höhen im Manometer mit kaltem Wasser gemessen wurden, so war eine Umrechnung nötig.

15) Folgerungen aus den Versuchen.

Die Ergebnisse der Messungen sind in Abb. 9 bis 13, S. 36 u. 37, aufgetragen. Als Kurve ausgezogen ist  $\lambda$  für laminare Strömung sowie die Interpolationsformel der Saph-Schoderschen Versuche, und man erkennt zunächst, daß diese Versuche mit Bleirohr im allgemeinen ausreichend übereinstimmen mit den Saph-Schoderschen Versuchen an Messingrohren. Die Messungen von Reynolds (Absatz 12) sind dadurch widerlegt, und wir können behaupten, daß alle glatten Rohre — bis jetzt gezogene Messing-, Kupfer und Bleirohre — dasselbe Gesetz der Widerstandzahlen haben, und daß sie sich dem Aehnlichkeitsgesetz:  $\lambda$  Funktion von  $\frac{v d}{\nu}$  fügen.

Im einzelnen ist zu den Abbildungen Folgendes zu bemerken:

Die verschiedenen in Absatz 14) gekennzeichneten Anordnungen des Zuflusses sind durch verschiedene Bezeichnungen dargestellt. Bei den äußeren Meßstrecken  $AB$  und  $CD$  sind die umgekehrten Durchflußrichtungen  $BA$  und  $DC$  in besonderer Abbildung dargestellt, um den Unterschied in der Entfernung vom Eintritt zu zeigen. Bei der Meßstrecke  $AB$ , Abb. 9, die nahe am Eintritt lag, fand nun der Uebergang von laminarer zu turbulenter Strömung bei höheren  $\frac{v d}{\nu}$ , 6000 bis 12 000 statt, als für  $BA$ , Abb. 7. Dies stimmt mit den Angaben von Reynolds überein, nach dessen bekannten Versuchen mit dem in das Rohr eingeführten gefärbten Wasserfaden die kritische Geschwindigkeit in der Anfangsstrecke bis  $\frac{v d}{\nu} = 12 000$  vorrücken kann. Man bemerkt aus Abb. 9 überdies, daß der Widerstand bei laminarer Strömung für  $AB$  viel höher liegt, als der Formel  $\lambda = 64 \frac{\nu}{v d}$  entspricht, auch für turbulente Strömung ist dies noch zu erkennen. Hiernach erscheint für die Eichung von  $\lambda$  die Forderung einer Eintrittslänge vom 50fachen Durchmesser vor der Meßstrecke notwendig. Saph-Schoder haben durchweg 200fachen Durchmesser innegehalten. Immerhin ist der Unterschied, wie man sieht, bereits bei  $AB$  (25facher Dmr. für die Eintrittslänge) praktisch ohne Belang.

Die Werte bei der Meßstrecke  $BC$  und  $CB$  liegen, Abb. 11, durchweg höher, als den Saph-Schoderschen Messungen entspricht. Der Durchmesser des verwendeten Bleirohres war nämlich nicht gleichmäßig; nach Zahlentafel 3, S. 30, unterschieden sich  $AB$  und  $CD$  um  $\frac{1}{10}$  mm. Vielleicht ist bei der Fabrikation des Rohres an dieser Stelle eine Unregelmäßigkeit eingetreten, die die Strecke  $BC$  betraf und deren Zustand verschlechterte.

Am besten ist die Uebereinstimmung bei den Wasserleitungspunkten Abb. 10 und bei  $CD$  und  $DC$ , bei der ja auch Ungenauigkeiten in der Höhenablesung wegen der großen Meßlänge nicht viel ausmachen. Die gemessenen Werte sind deswegen auch nur für diese Meßstrecke in den Zahlentafeln 4 und 5, S. 31 und 32, angegeben. Eine Verschiebung des Uebergangszustandes bei  $DC$ , das nur geringe Eintrittslänge aufwies, ist hier wenig zu merken, da der langen Meßstrecke ja auch weiter entfernte Punkte angehören.

Der Vergleich der mit kaltem und warmem Wasser gewonnenen Punkte zeigt, daß mit der Einführung von  $\nu$  in  $\frac{v d}{\nu}$  der Einfluß der Temperatur richtig getroffen ist. Zu vergleichen sind bei allen 3 Meßstrecken die schwarzen Punkte (Heißwasserversuche) mit den offenen Kreisen, die bei gleichen Geschwindigkeiten mit kaltem Wasser gewonnen sind. Da  $\nu$  für 10° C ungefähr = 0,013 cm<sup>2</sup>/sk,

für  $80^{\circ}\text{C}$  ungefähr  $\nu = 0,004\text{ cm}^2/\text{sk}$  ist, so fallen nach der Theorie bei gleichem  $\nu$  und  $d$  die Heißwasserpunkte etwa dreimal so weit auf der Kurve hinaus (bis 20 000) als die Kaltwasserpunkte (bis 6000); und in der Tat hat die Messung ergeben, daß die Versuche mit kaltem Wasser bei diesen Geschwindigkeiten den Uebergangszustand durchmachen, während die entsprechenden Heißwasserversuche denselben Teil der  $\lambda$ -Kurve einnehmen, den auch die schwarz-weißen Punkte der Wasserleitungsversuche (kaltes Wasser, höhere Geschwindigkeit) erfüllen. Vollkommen ist die Uebereinstimmung allerdings nicht, vielmehr liegen die Heißwasserpunkte durchschnittlich etwas zu hoch, aber im großen ganzen ist der Einfluß der Temperatur doch deutlich zu sehen, und zahlenmäßig werden wir in Absatz 17) genauere Versuche erhalten.

#### 16) Versuche an einem Messingrohr.

Die Form der Interpolation ist bei kleinem Bereich der Messungen sehr willkürlich, und wenn auch der Bereich der Saph-Schoderschen Messungen von 3000 bis 100000 (Verhältnis 1 : 33) und ihre Genauigkeit ausreichen, um die Langsche Formel auszuschalten (vergl. Absatz 10), Zahlentafel 1 und Abb. 4), so wird man doch danach streben müssen, den Bereich der Abszissenwerte  $\frac{\nu d}{\nu}$  weiter auszudehnen. Dies kann durch Vergrößerung der Geschwindigkeit (Lang, Absatz 13) oder des Durchmessers oder auch durch Uebergang zu anderer Flüssigkeit mit kleinerem  $\nu$  geschehen. Da mir hohe Drücke nicht zur Verfügung standen, so wählte ich ein Messingrohr, dessen Durchmesser durch Wägung zu  $d = 3,975\text{ cm}$  ermittelt wurde. Ähnlich wie beim Bleirohr waren 4 Meßstellen angeordnet, so daß die 2 Endstrecken und 3 Meßstrecken folgende Längen hatten:  $O - A : 28,4\text{ cm}$ ,  $A - B : 250\text{ cm}$ ,  $B - C : 200\text{ cm}$ ,  $C - D : 50\text{ cm}$ ,  $D - O : 10\text{ cm}$ . Der Druckverlust wurde für beide Durchflußrichtungen gemessen, und die Versuche reichten bis zum Abszissenwert 210000.  $\lambda$  als Funktion von  $\frac{\nu d}{\nu}$  ist in Abb. 14, S. 37, aufgetragen. Die Werte liegen in der Tat nur 3 bis 4 vH höher, als die von uns gewählte Potenzformel angibt. Dabei muß bemerkt werden, daß das benutzte Rohr lange Zeit gelegen hatte, ehe Gelegenheit zu den Versuchen gegeben war; es hatte innen nicht mehr eine völlig blanke Metalloberfläche. Erheblich höher fallen nur die Werte an der kleinsten Meßstrecke, wenn diese am oberen Ende der Leitung lag (Strecke und Richtung  $DC$ ), und zwar fallen sie gerade in die Höhe, in der die Langsche Kurve liegt. Hierdurch ist nachgewiesen, daß die hohen Werte an dem Langschen Kupferrohr sehr wohl durch die fehlende Eintrittslänge erklärt sind.

#### 17) Versuche an 2 Glasrohren.

Glasrohre werden bei Biel zu den rauhen Rohren gerechnet, eine Angabe, die wohl hauptsächlich auf eine Versuchsreihe von Darcy zurückzuführen ist. Abgesehen von den Fällen, wo durch Zusammenschmelzen mehrerer Längen besondere Widerstände an schlecht ausgeführten Verbindungen entstehen, erscheint diese Angabe einigermaßen befremdlich, da die Oberfläche von Glas durchaus nicht als rau erscheint. Durch Versuche an 2 Glasrohren bin ich zu dem Schluß gekommen, daß die Ergebnisse der Messungen sehr leicht gefälscht werden dadurch, daß der Durchmesser sich von einem Ende der Rohre zum anderen ändert. Wenn nämlich die untere Meßstelle kleineren Durchmesser hat als die obere, so addiert sich der Unterschied der Geschwindigkeitshöhen zum

Druckverlust, umgekehrt mißt man scheinbar geringeren Reibungsverlust, wenn sich das Rohr in der Stromrichtung erweitert. Diese Tatsache zeigte sich zunächst bei einem Glasrohr von 0,8145 cm Dmr. mit einer Meßstrecke  $AB$ .

Vorausgeschickt sei, daß jede Meßstelle aus einem mit Dreikantbohrer gebohrten Loch von etwa  $\frac{1}{2}$  mm Dmr. bestand, über welches als Schlauchansatz ein -Stück geschoben und verkittet war. Es war also vermieden worden, durch Anschmelzen den Durchmesser der Stelle zu verändern. Die Länge der Meßstrecke war bei beiden Rohren rd. 50 cm, die Eintrittsstrecken waren 55 cm lang.

Abb. 15, S. 38, zeigt die Ergebnisse mit dem ersten Glasrohr. Mit der Eintrittslänge konnte nur Richtung  $BA$  untersucht werden, da das andere Ende abbrach. Diese Versuche liegen höher als unsere Interpolationsformel. Ohne Eintrittslängen wurden beide Richtungen untersucht, und hierbei ergab  $BA$  höhere Werte als  $AB$ . Wenn man den Unterschied dieser beiden Kurven von den Werten  $\lambda$ , die  $BA$  mit Eintrittslänge ergab, abzieht, so gelangt man zu einer Kurve, die vermutlich bei der Untersuchung von  $AB$  mit Eintrittslänge herausgekommen wäre, und diese liegt nun unterhalb der angegebenen Potenzkurve. Das Maß dieser Schätzung ist natürlich ganz willkürlich, und um die Sache unmittelbar zu untersuchen, wurden deshalb an einem zweiten Glasrohre mit aller Sorgfalt Versuche angestellt.

Einrichtung der Meßstellen und Länge der Strecken waren dieselben wie bei dem ersten Rohre. Der Durchmesser war in der Eintrittslänge  $O - A$ : 0,972 cm, Meßstrecke  $AB$ : 0,9871 cm, Eintrittslänge  $B - O$ : 0,991 cm. Das Rohr erweitert sich also in Richtung  $AB$ . Die Ergebnisse sind in Zahlentafel 6 und 7, S. 33, abgedruckt und in Abb. 16, S. 38, dargestellt. Die Zahlentafeln sind wie bei den Bleirohr-Versuchen eingerichtet (Zahlentafel 4 und 5, Absatz 14); die Temperatur, nach der bei jedem Versuch  $\nu$  bestimmt wurde, Abb. 1, war 12° bis 14° C. Abb. 16 zeigt nun, daß in der Tat die Kurve für  $AB$  ebensoviel unter der angenommenen Interpolationsformel liegt, wie die Kurve der umgekehrten Durchflußrichtung  $BA$  darüber liegt. Der Anteil, der auf Beschleunigung entfällt, ist nach Abb. 16 etwa

$$h_B = 0,0010 \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}.$$

Wir können hieraus berechnen, wie groß der Unterschied im Durchmesser der Meßstellen sein müßte, um diese Abweichung zu erklären. Da die Geschwindigkeitshöhe der vierten Potenz des Durchmessers proportional ist, so ist der Unterschied der Geschwindigkeitshöhen:

$$h_B = \frac{4(d_2 - d_1)}{d} \frac{v^2}{2g}.$$

Es folgt also:

$$d_2 - d_1 = \frac{0,0010 l}{4}$$

oder mit  $l = 500$  mm:

$$d_2 - d_1 = 0,125 \text{ mm} = 0,0125 \text{ cm},$$

eine Zahl, die durch die oben angegebenen Messungen der Durchmesser der Eintrittslängen gerechtfertigt wird. Eine unmittelbare Messung ist so genau nicht möglich; nur den mittleren Durchmesser längerer Strecken kann man durch Wägung so genau, wie oben angegeben ist, ermitteln. Jedenfalls beweist Abb. 16, daß nach Abzug des Beschleunigungsanteils auch Glasrohre denselben Druckverlust liefern, wie alle anderen glatten Rohre.

Eine besondere, in Zahlentafel 8, S. 34, dargestellte Versuchsreihe wurde an diesem Rohr mit heißem Wasser von etwa 80° C durchgeführt. Wieder wurde

aus dem Paraffinofen der Versuchsanstalt gespeist, und es wurden für jede Durchflußrichtung 3 Versuche gemacht, die in Abb. 16 besonders gekennzeichnet sind. Zum Vergleich wurden bei derselben Anordnung, also ungefähr gleichen Drücken, je 3 Versuche mit kaltem Wasser von 14 bis 15° C gemacht und in Abb. 16 ebenfalls eingetragen; sie fallen zu kleineren Abszissenwerten und geben entsprechend höheres  $\lambda$ . Der Unterschied beträgt etwa 30 vH. Hervorzuheben ist, daß die Heißwasserpunkte genau auf die mit kaltem Wasser ermittelte Kurve fallen, so daß also der Einfluß der Temperatur durch die Reibungszahl  $\nu$  in  $\frac{vd}{\nu}$  richtig wiedergegeben wird.

#### 18) Der Druckverlust in rauhen Rohren.

Bereits in Absatz 9), bei Gelegenheit der Saph-Schoderschen Messungen an verzinkten Eisenrohren ist bemerkt, daß für rauhe Rohre das Aehnlichkeitsgesetz nicht mehr in dem Sinne von Absatz 8) gilt, daß die Kurven, welche Rohre verschiedenen Durchmessers im Diagramm  $\frac{vd}{\nu}$ ,  $\lambda$  liefern, zusammenfallen. Vielmehr ist hier die Größe  $\epsilon$  der Unebenheiten als neue Länge einzuführen (vergl. Absatz 6), und  $\lambda$  deshalb auch noch als abhängig von dem Längenverhältnis  $\frac{\epsilon}{d}$  zu betrachten, geschrieben:

$$\lambda = \lambda \left( \frac{vd}{\nu}, \frac{\epsilon}{d} \right).$$

Auch hier liefert also das Aehnlichkeitsgesetz noch eine Einschränkung der Formel für  $\lambda$ . Die Abhängigkeit von den 4 Größen  $\nu$ ,  $d$ , Temperatur und Rauigkeit  $\epsilon$  ist zurückgeführt auf die Abhängigkeit von nur zweien. In das Diagramm, dessen Abszisse  $\frac{vd}{\nu}$  und dessen Ordinate  $\lambda$  ist, werden wir eine Kurvenschar mit dem Parameter  $\frac{\epsilon}{d}$  einzeichnen können. Rohre von demselben Stoff ( $\epsilon$ ) und verschiedenem  $d$  haben danach allerdings verschiedene Parameterwerte; aber ein weiteres Rohr mit größerer Rauigkeitszahl muß dieselbe Kurve ergeben, wie ein engeres Rohr mit verhältnismäßig geringerer Rauigkeit.

Die Rauigkeit wird nun im allgemeinen nicht durch die Größe  $\epsilon$  der Höcker, sondern durch irgend einen empirischen Wert, durch eine Nummer, festgelegt sein. Dies ändert an dem Aehnlichkeitsgesetz:

$$\lambda = \lambda \left( \frac{vd}{\nu}, \frac{\epsilon}{d} \right)$$

nur die Form der zweiten unabhängigen Veränderlichen, des Parameters.  $\epsilon$  wird eine noch unbestimmte Funktion dieser Rauigkeitszahl  $n$ , wir müssen also schreiben:

$$\lambda = \lambda \left( \frac{vd}{\nu}, \frac{\epsilon(n)}{d} \right).$$

Wir können dann nicht mehr sagen, in welchem Verhältnis sich die Rauigkeitszahl  $n$  ändern muß, um bei anderem Durchmesser ähnliche Verhältnisse zu erreichen. Erst wenn zwei Rohre bei irgend einem Wert von  $\frac{vd}{\nu}$  dasselbe  $\lambda$  ergeben haben, können wir schließen, daß sie denselben Parameterwert  $\frac{\epsilon(n)}{d}$  haben, und daß die Kurven auch weiterhin zusammenfallen.

In Abb. 17, Textblatt, sind die hierzu vorliegenden Versuche von Darcy<sup>1)</sup> und Iben<sup>2)</sup> aufgetragen, und zwar im logarithmischen Maßstabe. Von den Saph-Schoderschen verzinkten Eisenrohren sind nur die Kurven, nicht wieder die einzelnen Punkte eingezeichnet. Von den Darcyschen Versuchen sind die Bleirohre und Glasrohre nicht aufgetragen, da diese Frage in den vorhergehenden Absätzen behandelt ist, es sind nur die gezogenen Eisenrohre sowie die Rohre aus asphaltiertem Gußeisen dargestellt. Die über den Signaturen stehenden Nummern geben die Nummer der Rohre bei Darcy an; die darunter stehende Zahl ist der Durchmesser in Zentimetern. Auch an den einzelnen Kurven ist Stoff und Nummer vermerkt. Die bei Iben angegebenen Versuchsreihen geben im allgemeinen keine guten Kurven, die Punkte streuen so stark, daß sie zur Feststellung irgend einer Gesetzmäßigkeit nicht zu gebrauchen sind. Oft findet überhaupt ein Steigen von  $\lambda$  mit wachsender Geschwindigkeit statt. Ich habe deshalb nur 3 Kurven in Abb. 17 eingetragen, die mir nach der Gleichmäßigkeit des Verlaufs zuverlässig erschienen. (Hamburger Versuche X, XIII 30,5 cm; Stuttgarter Versuche VI 5,0 cm.) Schließlich steht auf der Figur noch eine Versuchsreihe an einem asphaltierten Eisenblechrohr von 14,88 cm Dmr., zu der ich selbst Gelegenheit hatte.

Diese von verschiedenen Stoffen und verschiedenen Beobachtern herrührenden Kurven sollen sich nun in eine Kurvenschar einordnen, und man wird dies nach Anblick der Abb. 17 auch zugeben können, obwohl einzelne herausfallende Punkte, wie z. B. bei  $G$  15 oder der zweite Punkt des Darcyschen Rohres,  $G$  16, den Eindruck stark verfälschen. Auf die niedrigsten (links liegenden) Punkte, z. B. bei  $G$  18,  $aE$  8 und  $aE$  10, wird man überhaupt nicht viel geben dürfen, da diese bei den kleinsten Geschwindigkeiten gemessen sind und daher nur kleine, ungenau zu bestimmende Druckunterschiede ergaben.  $G$  22 ist der Streuung wegen ganz auszuschalten, und  $G$  13 liegt unter der für glatte Rohre gültigen Kurve. Die Werte sind daher wohl durchweg zu niedrig gemessen.

Zur Frage nach der Funktion, durch die

$$\lambda = \lambda \left( \frac{v d}{\nu}, \frac{\varepsilon}{d} \right)$$

interpoliert wird, zeigt Abb. 17 nur, daß jedenfalls kein reines Potenzgesetz in Frage kommt, da die Kurven sich für große  $\frac{v d}{\nu}$  anscheinend einer Asymptote nähern, und zwar um so eher, je höher sie liegen. Den Uebergangszustand bei  $\frac{v d}{\nu} = 2000$  bis  $3000$  erreichen nur wenige Kurven, und diese ungefähr an derselben Stelle, wo auch die glatten Rohre zum anderen Strömungszustand übergehen.

Zur Entscheidung über die Form der Interpolation sind die Unterlagen, die Abb. 17 zeigt, wohl noch zu ungenau und lückenhaft, und es wäre erwünscht, unter dem hier gegebenen Gesichtspunkte systematische Versuche mit möglichster Genauigkeit anzustellen. Natürlich ist für die Praxis im Einzelfall eine solche Genauigkeit nicht erforderlich, aber wenn es sich darum handelt, die Form der Interpolationsfunktion festzulegen, so können ungenaue Versuchsreihen gar keine

<sup>1)</sup> Darcy, Recherches expérimentales relatives au mouvement de l'eau dans les tuyaux. Paris 1857.

<sup>2)</sup> Iben, Druckhöhenverlust in geschlossenen eisernen Rohrleitungen. Denkschrift des Verbandes deutscher Architekten- und Ingenieurvereine. Hamburg 1880.

Entscheidung über die Form der Funktion geben, und man muß mögliche Ausdehnung der Abszissenwerte und möglichst geringe Streuung der Punkte anstreben. Der Praxis wäre mit der Ausdehnung des in Abb. 17 angedeuteten Diagramms bis zum Abszissenwert  $\frac{vd}{\nu} = 1000000$  genügend gedient. Diese Zahl entspricht z. B. einem Durchmesser von 50 cm und einer Geschwindigkeit von 200 cm/sk bei 20° C.

19) Zusammenfassung und theoretische Bemerkungen.

Es ist also festgestellt, daß bei den als glatte Röhre zu bezeichnenden Messing-, Kupfer-, Blei- und Glasröhren das Aehnlichkeitsgesetz gilt.  $\lambda$  ist nur Funktion von  $\frac{vd}{\nu}$  und zwar

$$\lambda = 0,3164 \left( \frac{\nu}{vd} \right)^{0,25},$$

hat also bei zwei Röhren denselben Wert, wenn die »korrespondierenden« Geschwindigkeiten im umgekehrten Verhältnis zu den Längen stehen und direkt proportional sind zu den zu verschiedenen Temperaturen gehörigen Werten der Reibungszahl  $\nu$ . Der Einfluß der Temperatur wird also dadurch wiedergegeben, daß höherer Temperatur ein kleineres  $\nu$  entspricht, dadurch wird der berechnete Abszissenwert  $\frac{vd}{\nu}$  größer, und das dabei abzulesende  $\lambda$  ist kleiner. In derselben Weise, durch den Wert von  $\nu$ , kommen die Unterschiede zwischen verschiedenen Flüssigkeiten zum Ausdruck (Absatz 11). Bei rauhen Röhren ist das theoretische Gesetz sinngemäß zu erweitern. Die vorliegenden Beobachtungen führen noch nicht zu vollständiger Festlegung der hier maßgebenden Kurvenschar (Absatz 18).

Es ist nun auch der umgekehrte Schluß gerechtfertigt (s. Absatz 9), daß das Zusammenfallen der von verschiedenen Durchmessern stammenden Kurven ein Zeichen dafür ist, daß der Vorgang nur von der inneren Reibung und nicht vom Rauheitszustand der Wandung abhängt. Die in Zahlentafel 1 und auf den meisten Abbildungen angegebenen Kurven stellen hiernach den Grenzfall »Rauigkeit null« mit ausreichender Annäherung dar; ein geringerer Widerstand bei gleichem Wert  $\frac{vd}{\nu}$  ist nicht möglich.

Ferner läßt sich nach Absatz 4) der Schluß ziehen, daß der aus der laminaren Strömung gewonnene Beiwert  $\nu$  auch für turbulente Strömung maßgebend ist<sup>1)</sup>. Das Gesetz für die Reibungskraft bleibt auch bei veränderlicher Bewegung für die Raumelemente gültig, auf die sich die Eulerschen Grundgleichungen beziehen; und das Gesetz für den Gesamtwiderstand ändert sich nur deswegen, weil die Anordnung der Strömung anders wird. Das Aehnlichkeitsgesetz ist eben gerade dadurch wichtig, daß es eine Aussage über die turbulente Strömung gestattet, zu deren vollständigen Durchrechnung, d. i. Integration der Eulerschen Gleichungen, die mathematischen Hilfsmittel zurzeit versagen.

Zu der vielumstrittenen Frage, ob die Geschwindigkeiten am Rande genau auf null herabgehen, oder, wie es die Messungen wahrscheinlich machen, auf etwa die Hälfte der Geschwindigkeit in der Mitte (Biel, Mitt. üb. Forschungsarbeit. 44 S. 26) gibt die folgende Rechnung einige Aufklärung: Durch die in Absatz 13) erwähnten Reynoldsschen Versuche ist die Vorstellung begründet, daß der Ueber-

<sup>1)</sup> v. Karman, Phys. Ztschr. 1909.

gang zur veränderlichen Strömung auf Unstetigkeit der laminaren Strömung beruht und deswegen bei weiteren Röhren eher eintritt als bei engen, bei denen das Wasser durch die Wandung besser in geraden Bahnen geführt wird. Man wird also die zeitlich veränderlichen Wirbel in der Mitte des Rohres zu suchen haben, während am Rande die Bahnen sich immer mehr der geraden Linie der Wandung anschmiegen müssen. Es wird also eine Grenzschicht vorhanden sein, in der die Stromlinien parallel und unveränderlich sind. Wenn wir nun vorläufig von der Annahme ausgehen, daß  $v$  am Rande null wird, Abb. 18,

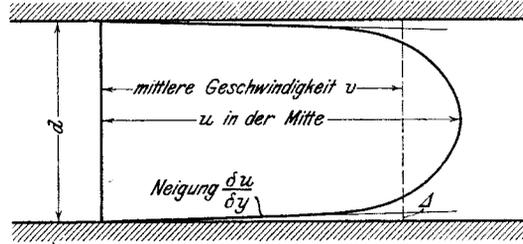


Abb. 18.

so können wir die Dicke der Grenzschicht berechnen aus der Ueberlegung, daß die Neigung  $\frac{\partial u}{\partial y}$  am Rande die Reibungsschubkraft (Absatz 4) bestimmt. Diese in der Grenzschicht am ganzen Umfang  $\pi d$  wirkende Kraft muß nun im Gleichgewicht sein mit dem auf der Fläche  $\frac{\pi d^2}{4}$  lastenden Druckgefälle:

$$\mu \frac{\partial u}{\partial y} \pi dl = \lambda \gamma \frac{lv^2 \pi d^2}{d 2g 4}.$$

Ein Maß für die Dicke der Grenzschicht finden wir in dem Abstand  $A$ , in dem die Tangente des Geschwindigkeitsprofils die mittlere Geschwindigkeit schneidet, so daß in obiger Formel

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{v}{A}$$

zu setzen ist. Die Auflösung nach  $A$  ergibt

$$A = \frac{8g\mu}{\lambda\gamma v}$$

oder mit Einführung von  $\nu = \frac{g\mu}{\gamma}$ :

$$\frac{A}{d} = \frac{8}{\lambda} \frac{\nu}{vd}.$$

Auch dieses Verhältnis  $\frac{A}{d}$  hängt nur von dem Werte  $\frac{vd}{\nu}$  ab, bei dem sich ja in der Tat alles ähnlich verhalten sollte. Bei  $\frac{vd}{\nu} = 10000$ , also nicht weit vom Uebergang ergibt sich mit dem Werte  $\lambda = 0,032$  aus der Formel  $\frac{A}{d}$  zu  $1/40$ ; für  $\frac{vd}{\nu} = 100000$ ,  $\lambda = 0,018$  folgt  $\frac{A}{d} = 1/225$ . Die Grenzschichten werden deswegen so dünn, weil ein sehr großes Druckgefälle durch die innere Reibung der Grenzschicht im Gleichgewicht gehalten werden muß. Es ist hiernach erklärlich, daß die Messungen des Geschwindigkeitsprofils diesen Abfall der Kurve nicht erreicht haben, und deshalb ist aus den Messungen kein Grund gegen die Annahme zu entnehmen, daß an der Wand selbst die Geschwindigkeit auf null

herabgeht: eine Grenzbedingung, die sonst durch die Versuche bei laminarer Strömung wohl begründet ist.

Das Bestreben der Verfasser der bisherigen Interpolationsformeln geht gewöhnlich dahin, eine Formel aufzustellen, die möglichst für alle Rohrquerschnittformen gilt, wobei die Form nur durch das Verhältnis Fläche: Umfang = Profilhalbmesser  $R$ , für Kreisform  $R = \frac{d}{4}$ , vertreten ist. Für praktische Zwecke ist dies Bestreben natürlich zu billigen, theoretisch muß man zunächst fragen, ob eine so allgemeine Formel auch möglich ist, ob mit anderen Worten der Einfluß der Querschnittform durch den Profilhalbmesser allein zum Ausdruck gebracht werden kann. Bei laminarer Strömung ist für den Kreisquerschnitt (Absatz 10)

$$h = 32 \frac{\nu}{g} l \frac{v}{d^2} = 2 \frac{\nu}{g} l \frac{v}{R^2},$$

Interpolationsformel:

$$h = \varrho \frac{l}{R} \frac{v^2}{2g} \quad (\text{Hütte XXI Bd. 1 S. 288}),$$

also:

$$\varrho = 4 \frac{\nu}{vR}.$$

Für den unendlich breiten Kanal der Tiefe  $T$  ist bei dagegen

$$h = 3 \frac{\nu}{g} l \frac{v}{T^2}, \quad T = R,$$

$$\varrho = 6 \frac{\nu}{vR}.$$

Hier sind also die Formeln für  $\varrho$  tatsächlich verschieden. Bei turbulenter Strömung sind allerdings wegen der dünnen Grenzschichten bessere Aussichten auf angenäherte Uebereinstimmung vorhanden.

### Oberflächenreibung an dünnen Platten.

#### 20) Vorhandene Versuche und das Aehnlichkeitsgesetz.

Ueber die Oberflächenreibung, die für die Berechnung des Reibungswiderstandes von Schiffen wichtig ist, sind die ersten Versuche von Froude gemacht. Eine dünne Holzplatte mit möglichst glatter Oberfläche wurde in Richtung ihrer Ebene durchs Wasser geschleppt und der Widerstand gemessen. Die Versuche wurden dann u. a. von Gebers<sup>1)</sup> wieder aufgenommen. Letztere mit großer Sorgfalt durchgeführten Versuche liegen meinen unten folgenden Rechnungen zugrunde.

Da die Platte so dünn wie möglich gewählt wurde, so war ein Wellenwiderstand so gut wie ausgeschlossen, es war ein reiner Reibungsvorgang, auf den daher obiges Aehnlichkeitsgesetz Anwendung findet.

Froude und seine Nachfolger interpolieren den Widerstand in der Form:

$$W = \lambda \gamma F v^x,$$

wobei  $F$  die Größe der bespülten Fläche und  $\lambda$  und  $x$  Konstanten sind, die von der Länge der Fläche abhängen. Bei Froude ist  $x = 1,825$ , seine Angaben für  $\lambda$  kann man durch  $\lambda = \frac{0,2132}{l^{0,128}}$  interpolieren. Wir wollen uns hier zunächst noch nicht für eine bestimmte Form der Interpolationsformel entscheiden, sondern

<sup>1)</sup> Gebers, Ein Beitrag zur experimentellen Ermittlung des Widerstandes gegen bewegte Körper. 1908. Verlag des »Schiffbau«.

nur den Ansatz machen, der durch das Aehnlichkeitsgesetz festgelegt ist. Wir schreiben:

$$W = \kappa \gamma F \frac{v^2}{2g}$$

Bei unveränderlichem  $\kappa$  ist hiernach, wie in Absatz 5), der Widerstand auf die Flächeneinheit dem Quadrat der Geschwindigkeit und der Masse  $\frac{\gamma}{g}$  proportional ( $f_v = \frac{f_v}{f_g} f_v^2!$ ). Dies ist aber nach Absatz 5) nur dann der Fall, wenn  $\frac{f_v f_l}{f_v} = 1$  ist, woraus dann zu schließen ist, daß der Beiwert  $\kappa$  nur Funktion von  $\frac{v l}{\nu}$  ist.

$$\kappa = \kappa \left( \frac{v l}{\nu} \right),$$

$$W = \kappa \left( \frac{v l}{\nu} \right) \gamma F \frac{v^2}{2g}$$

Für den Beharrungszustand (laminare Strömung) ist theoretisch <sup>1)</sup>:

$$W = 1,327 b \sqrt{\mu \frac{\gamma}{g} l v^3},$$

wenn  $b$  die Breite und  $l$  die Länge bedeutet. Es ist dann zu setzen  $F = 2 b l$  und daher

$$W = 1,327 \sqrt{\frac{\nu}{v l}} \gamma F \frac{v^2}{2g},$$

$$\kappa = 1,327 \sqrt{\frac{\nu}{v l}}$$

in Uebereinstimmung mit dem Aehnlichkeitsgesetz. Die vorhandenen Messungen beziehen sich durchweg auf den Fall der veränderlichen turbulenten Strömung, wo diese Formel keine Anwendung findet.

#### 21) Auftragung der Versuche.

Die Gebersschen Versuche sind an Platten von den Längen 6,52 m bis 0,60 m ausgeführt, die, um die Wellenbildung nach Möglichkeit zu verhindern, an beiden Enden in Messingschneiden ausliefen. Sie waren mit geschliffenem Lackfarbenanstrich versehen. Da sich nachträglich ergab, daß die glatte Oberfläche der Messingschneiden geringeren Widerstand hatte als eine gleich große Platte mit Anstrich, so wurden die Beobachtungen an allen Platten um den gefundenen Unterschied berichtigt. Den nachfolgenden Untersuchungen sind diese berichtigten Zahlen zugrunde gelegt, die aus Fig. XI Zahlentafel 3 der Gebersschen Arbeit abgegriffen sind. Aus den abgegriffenen Punkten wurde  $\kappa$  als Ordinate für Abb. 19, S. 39, berechnet. Als Abszisse müßte  $\frac{v l}{\nu}$  aufgetragen werden. Da aber bei den Versuchen die Angabe der Temperatur fehlt, und jedenfalls nicht Versuche bei verschiedener Temperatur vorliegen, so habe ich zunächst nur  $v l$  in  $m^2/sk$  aufgetragen. Abb. 19 ist also in dieser Beziehung nicht vollkommen.

Der Temperatur von  $10^{\circ} C$ , die nach mündlicher Mitteilung ungefähr zutrifft, entspricht  $\nu = 1,31 \cdot 10^{-6} m^2/sk$ . Hiernach ist die in Abb. 19 eingezeichnete Achse für  $\frac{v l}{\nu}$  geteilt. Ferner ist links ein Stück der theoretischen Kurve für

<sup>1)</sup> Blasius, Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung. Zeitschrift für Math. u. Physik Bd. 56 (1908) S. 13.

laminare Strömung eingetragen. Die aus den Gebersschen Versuchen berechneten Punkte für die Platten verschiedener Länge sind durch verschiedene Signaturen gekennzeichnet. Die mit der Platte von 60 cm Länge erhaltenen Punkte scheinen gerade den Uebergangszustand darzustellen, hier steigt  $\alpha$  mit  $vl$ . Die Grenzgeschwindigkeit ist nicht erreicht. Auch hier bilden die Beobachtungen an allen Platten eine Kurve, soweit es die schon in den Punkten derselben Platte erkennbare Streuung zuläßt. Dadurch ist das Aehnlichkeitsgesetz bestätigt:  $\alpha$  ist bei derselben Temperatur Funktion von  $vl$  allein.

## 22) Interpolationsformeln.

Auch hier läßt das Aehnlichkeitsgesetz unbestimmt, nach welcher Funktion  $K$  von  $\frac{vl}{\nu}$  abhängt. Durch einen Ansatz der Form  $a + \frac{b}{(vl)^n}$  mit drei unbestimmten Konstanten  $a$ ,  $b$ ,  $n$  erhielt ich die Formel:

$$\alpha = 0,00126 + \frac{0,00282}{\sqrt[4]{vl}},$$

die in Abb. 19 eingezeichnet ist. Aber auch schon eine einfache Potenzformel:

$$\alpha = \frac{0,00390}{(vl)^{0,136}}$$

leistet ebensoviel, wie die andere Kurve der Abbildung zeigt. Man sieht daraus, daß die vorliegenden Beobachtungen keineswegs eine endgültige Entscheidung über die Form der Interpolation gestatten, soweit diese nicht durch das Aehnlichkeitsgesetz festgelegt ist.

Die beiden gegebenen Formeln sind insofern nicht schulgemäß, als die Beiwerte keine reinen Zahlen sind und nicht für ein beliebiges Maßsystem gelten, vielmehr müssen  $\nu$  und  $l$  in Metern gemessen werden. Man erreicht dies erst durch Einführung von  $\nu$ , für das wir  $1,31 \cdot 10^{-6}$  m<sup>2</sup>/sk annehmen wollten. Die Potenzformel wird dadurch:

$$\alpha = 0,0246 \left( \frac{\nu}{vl} \right)^{0,136},$$

$$W = \alpha \gamma F \frac{v^2}{2g} = \frac{0,0123 \nu^{0,136}}{g l^{0,136}} \gamma F v^{1,864}$$

oder ohne die Konstanten  $\nu$  und  $g$ , für  $10^6$  C, Maße in Metern:

$$W = \frac{0,200}{l^{0,136}} \frac{\gamma}{1000} F v^{1,864}.$$

Daß die Exponenten von  $\nu$  und  $l$  in der Summe gerade 2 ergeben, ist Folge des Aehnlichkeitsgesetzes. Für höhere Temperaturen wird der Beiwert 0,200 kleiner, und zwar im Verhältnis der 0,136. Potenz des Reibungskoeffizienten  $\nu$ .

## 23) Versuche über die laminare Strömung.

Die vorhandenen Versuche reichen nicht zu so kleinen Werten von  $\frac{vl}{\nu}$  herunter, daß die Kurve der laminaren Strömung von Abb. 19 Versuchspunkte enthielte. Um diese zu bekommen, muß man möglichst kurze Platten bei geringen Geschwindigkeiten fahren. Um hierbei die benetzte Fläche und damit die Widerstände von bequem meßbarer Größe zu erhalten, muß die Fläche eine möglichst große Breite quer zur Fahrtrichtung erhalten. Ich hatte an der Versuchsanstalt Gelegenheit, eine Messingplatte von  $l = 51$  cm Länge in der

Fahrtrichtung, einer benetzten Breite von 153,4 bzw. 123,5 cm und 0,9 mm Stärke zu schleppen. Um ein Pendeln des Bleches zu verhüten, war es als Kreisbogen gekrümmt und außerhalb des Wassers an beiden Enden eingespannt. Einen Einfluß auf den Widerstand dürfte diese Krümmung kaum haben, da die Grenzschichten, in denen sich der Vorgang abspielt, nur wenige Millimeter dick sind. Die Messungen wurden mit den von Dr. Gebers entworfenen Meßgeräten der Versuchsanstalt ausgeführt und erstreckten sich von rd. 20 cm/sk bis zu Geschwindigkeiten von 2 und 3 m/sk. Bei höheren Geschwindigkeiten kippte der mittlere Teil der Platte plötzlich nach oben aus. Für solche Geschwindigkeiten müßte man also kleinere Breiten oder stärkeres Blech nehmen, letzteres ist allerdings wegen des dann auftretenden Formwiderstandes nicht zu empfehlen.

Die Ergebnisse sind in Abb. 20, S. 39, so dargestellt, daß  $\kappa$  als Funktion von  $\frac{vl}{\nu}$  aufgetragen ist. Die Temperatur war rd. 9° C, also  $\nu = 0,0134 \text{ cm}^2/\text{sk}$ . In einer besonderen Teilung sind noch die Geschwindigkeiten selbst (unter Rücksicht auf  $l = 51 \text{ cm}$ ) eingetragen. Die ausgezogene Kurve zeigt die theoretische Formel für laminare Strömung (s. Absatz 20):

$$\kappa = 1,327 \sqrt{\frac{\nu}{vl}}$$

Soweit die Versuchspunkte sich ihrem Verlauf anschließen, liegen sie etwa 10 bis 20 vH zu hoch. Zu erklären ist diese Abweichung durch Formwiderstand, und zwar müßte die Hauptspanntfläche, Dicke mal Breite, mit einem Druck von rd.  $0,4 \frac{\gamma v^2}{2g}$  belastet gewesen sein, um diese Abweichung zu erklären. Dies ist ziemlich viel, aber nicht unmöglich, da Wellenbildung auf dem Wasser deutlich zu erkennen war; auch war das Blech durchaus nicht genau eben. Die am weitesten links liegenden Punkte sind nicht zuverlässig, da hier der Widerstand nur wenige Gramm betrug. Die vier höchsten Punkte sind wohl schon durch das Auskippen beeinflusst.

Die kritische Geschwindigkeit liegt etwa bei  $\frac{vl}{\nu} = 450000$ , von hier an steigt  $\kappa$  wieder. Von den Gebersschen Versuchen ist eingetragen die Kurve für turbulente Strömung und gestrichelt der Teil des Uebergangszustandes, den die Platte von 0,60 m Länge darstellt. Auch letztere zielt etwa auf  $\frac{vl}{\nu} = 450000$  der laminaren Kurve hin, also auf denselben kritischen Wert. Auch über dieser gemessenen Uebergangskurve liegen die Versuchspunkte um 10 bis 15 vH höher, ebenso wie über der theoretischen laminaren Kurve und würden daher wohl auch noch für höhere Geschwindigkeiten um ebensoviel über die andere Kurve hinausgehen. Das endgültige Einlenken in die Kurve für  $\kappa$  bei turbulenter Strömung wird dann nach Abb. 19 erst etwa bei  $\frac{vl}{\nu} = 2500000$  erfolgen. Auch hier hat der Uebergangszustand eine gewisse Breite, ebenso wie beim Druckverlust in Rohren ( $\frac{vd}{\nu} = 2000$  bis  $3000$ ).

#### 24) Zusammenfassung.

Das in der Einleitung aus den hydrodynamischen Grundgleichungen abgeleitete Aehnlichkeitsgesetz ist für den Druckverlust in Rohren (vergl. Absatz 19) und für den Reibungswiderstand von Platten durch Versuche bestätigt. Hierdurch ist einerseits die zugrunde gelegte Form des Reibungsgesetzes be-

stättigt; andererseits ist die Abhängigkeit der hydraulischen Beiwerte von der Geschwindigkeit, den absoluten Maßen und der Temperatur in eine derartige Beziehung zueinander gebracht, daß aus der Eichung der Abhängigkeit von einer dieser Größen sich die Abhängigkeit von den beiden anderen ohne weiteres schließen läßt. Diese Beziehung muß im Ansatz von Interpolationsformeln von vornherein berücksichtigt werden. Es wird dadurch die Einführung von  $\nu$  in alle Formeln notwendig, in denen die Veränderlichkeit der Beiwerte, also die Abweichung vom  $v^2$ -Gesetz berücksichtigt wird; die hydraulischen Beiwerte sind bei Reibungsvorgängen eben nur Funktionen von  $\frac{vl}{\nu}$  bzw.  $\frac{vd}{\nu}$ . Als selbständige Veränderliche treten außerdem nur noch Längenverhältnisse und die Rauigkeit in ihrem Verhältnis zu den absoluten Maßen auf. Zur Bestimmung dieser Funktionen ist Versuchsmaterial zusammengetragen.

Meine eigenen Versuche wurden an der Versuchsanstalt für Wasserbau und Schiffbau zu Berlin ausgeführt. Dem Leiter derselben, Hrn. Regierungsrat Krey, schulde ich besonderen Dank für die Freundlichkeit, mit der er die Hilfsmittel der Versuchsanstalt für meine Untersuchungen zur Verfügung gestellt hat.

---

**Zahlentafeln.**

Zahlentafel 1. Werte von  $\lambda$ .

$\frac{vd}{\nu}$	$\lambda$				
	beobachtet: Saph-Schöder			verbesserte Formel von Saph-Schöder $0,3164 \cdot \left(\frac{\nu}{vd}\right)^{0,25}$	Lang $0,014 + \frac{1,8}{\sqrt{\frac{vd}{\nu} - 2000}}$
	untere Grenze	Mittel	obere Grenze		
3 000	0,0410	0,0418	0,0426	0,0428	0,0710
5 000	0,0370	0,0378	0,0386	0,0376	0,0469
7 000	0,0342	0,0349	0,0356	0,0346	0,0395
10 000	0,0315	0,0321	0,0327	0,0316	0,0341
15 000	0,0283	0,0288	0,0293	0,0286	0,0298
20 000	0,0262	0,0266	0,0270	0,0266	0,0274
25 000	0,0247	0,0251	0,0255	0,0252	0,0258
30 000	0,0236	0,0240	0,0244	0,0240 <sub>5</sub>	0,0247
40 000	0,0220	0,0224	0,0228	0,0224	0,0232
50 000	0,0209	0,0212	0,0215	0,0212	0,0222
60 000	0,0199	0,0202	0,0205	0,0202	0,0215
70 000	0,0193	0,0195	0,0197	0,0194 <sub>5</sub>	0,0209
80 000		0,0190		0,0188	0,0205
90 000		0,0185		0,0183	0,0201
100 000		0,0179		0,0178	0,0197
125 000				0,0168	0,0191
150 000				0,0161	0,0187
175 000				0,0155	0,0183
200 000				0,0149	0,0180
225 000				0,0145	0,0178
250 000				0,0141	0,0176
500 000				0,0119	0,0166
750 000				0,0108	0,0161
1 000 000				0,0100	0,0158

Zahlentafel 2. Versuche von Nusselt mit Druckluft.

Durchmesser 2,201 cm, Querschnitt 3,805 qcm,  $\gamma$  bei 15° C und 1 kg/cm<sup>2</sup> ist 1,188 kg/m<sup>3</sup>.

Nr.	Druck $p$	sp. G. $\gamma$	Gefälle		$v$	Temp. ° C	$\nu$		$\frac{vd}{\nu}$	$\lambda$	$\lambda_B$	$\lambda_E$
			$-\frac{\partial p}{\partial x}$	$-\frac{1}{\gamma} \cdot \frac{\partial p}{\partial x}$			für 1 $\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$	für $p$				
			$\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$	$\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$			$\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	1				
1	1,055	1,246	1,655	1,328	406	16,1	0,157	0,149	6 000	0,0349	6,90	0,0349
2	1,055	1,247	3,936	3,156	669	16,0	0,157	0,149	9 900	0,0305	16,4	0,0305
3	1,053	1,239	7,773	6,273	982	17,9	0,159	0,151	14 300	0,0280	32,5	0,0280
4	1,055	1,251	11,36	9,08	1216	15,0	0,155	0,147	18 200	0,0266	47,5	0,0266
5	1,093	1,298	22,9	17,65	1733	14,6	0,155	0,142	26 800	0,0254 <sub>5</sub>	92,2	0,0254
6	1,138	1,356	36,6	27,00	2222	13,0	0,153	0,134	36 500	0,0236 <sub>5</sub>	142,—	0,0235
7	1,273	1,517	69,9	46,09	3115	13,5	0,154	0,121	56 800	0,0206	242,—	0,0204
8	1,391	1,663	98,5	59,26	3598	12,8	0,153	0,110	72 000	0,0198	312,—	0,0195
9	1,848	2,217	172,4	77,84	4350	11,5	0,151	0,0818	117 000	0,0178	411,—	0,0174
10	2,205	2,638	222,9	84,50	4650	13,2	0,153	0,0694	147 000	0,0169	445,—	0,0165

Zahlentafel 3. Maße des Bleirohrs.

Mittel für	Querschnitt	Durchmesser	Meßlänge
Strecke <i>AB</i>	0,177 cm <sup>2</sup>	0,475 cm	9,93 cm
» <i>BC</i>	0,186 »	0,486 »	25,0 »
» <i>CD</i>	0,183 »	0,483 »	100,0 »
bei den höheren Temperaturen:			
<i>AB</i>	0,178 cm <sup>2</sup>	0,476 cm	9,95 cm
<i>BC</i>	0,187 »	0,487 »	25,05 »
<i>CD</i>	0,184 »	0,484 »	100,19 »

Zahlentafel 4.

Bleirohr.

Meßstrecke *CD*, entfernt vom Eintritt des Wassers.

Durchmesser	0,483 cm	} bei normaler Temperatur von 10 bis 15° C.
Querschnitt	0,183 cm <sup>2</sup>	
Meßlänge	100 cm	

Versuchsreihe III und VIII Wasserleitung. Quecksilbermanometer.

Nr.	Gefälle	<i>v</i>	<i>v</i>	$\frac{vd}{v}$	$\lambda$
	I	cm/sk	cm <sup>2</sup> /sk	I	I
29	0,649	128,3	0,0131	4700	0,0373
30	1,248	183,8	0,0132	6700	0,0351
31	1,890	232,0	»	8500	0,0334
32	2,60	278,5	0,0135	10000	0,0318
33	3,29	319,5	»	11400	0,0305
34	4,50	382,0	»	13700	0,0293
35	5,40	424,0	»	15200	0,0285
36	6,13	454,0	0,0136	16100	0,0283
37	6,84	482,0	»	17200	0,0280
38	7,37	505,0	»	18000	0,0274
39	3,79	344,0	»	12200	0,0304
	3,69	»	»	»	0,0296
III	1,562	209,2	0,0130	7800	0,0340
III	1,570	211,0	»	7900	0,0335
III	2,055	244,0	0,0132	8900	0,0328
III	2,70	286,0	0,0134	10300	0,0314
III	3,25	320,0	0,0135	11500	0,0301
III	3,62	338,0	»	12100	0,0301
III	4,34	374,0	»	13400	0,0294
III	5,33	421,0	»	15100	0,0285
III	6,31	466,0	»	16700	0,0276
III	7,62	517,0	»	18500	0,0270
III	9,10	571,0	»	20500	0,0265
III	10,42	617,0	»	22000	0,0260
III	11,78	659,0	»	23600	0,0257
III	10,50	620,0	»	22200	0,0259
III	10,54	620,0	0,0134	22400	0,0260
III	7,92	528,0	»	19000	0,0270
III	3,05	308,0	»	11100	0,0305

Zahlentafel 4. (Fortsetzung.)

Versuchsreihe V und VI Wasser aus Gefäß. Wassermanometer

Nr.	Gefälle	$v$	$\nu$	$\frac{vd}{\nu}$	$\lambda$
	I	cm/sk	cm <sup>2</sup> /sk	I	I
71	0,947	156,7	0,0126	6000	0,0366
72	0,9365	158,0	»	6100	0,0355
73	0,922	157,8	»	6100	0,0351
74	0,905	154,1	»	5900	0,0361
75	0,665	129,0	»	5000	0,0379
76	0,571	118,4	»	4500	0,0386
77	0,4145	98,1	»	3800	0,0408
78	0,335	87,8	»	3400	0,0412
79	0,273	79,3	»	3000	0,0412
80	0,192	66,5	»	2550	0,0412
81	0,129	58,3	»	2240	0,0360
82	0,0985	51,3	»	1970	0,0355
83	0,0698	38,8	»	1490	0,0440
84	0,9852	161,8	0,0127	6200	0,0357
85	0,975	161,5	»	6200	0,0355
86	0,9685	160,0	»	6100	0,0359
87	0,9325	156,9	»	6000	0,0360
88	0,802	143,0	»	5400	0,0373
89	0,657	127,8	»	4900	0,0380
90	0,5172	112,7	»	4300	0,0385
91	0,411	99,9	0,0125	3900	0,0390
92	0,3485	90,7	»	3700	0,0353
93	0,3065	89,4	0,0124	3500	0,0364
94	0,1592	75,7	»	2940	0,0263
95	0,1275	64,5	»	2510	0,0290
96	0,0655	37,2	»	1450	0,0449
97	0,0432	24,6	»	960	0,0678

Versuchsreihe VII Wasser aus Ofen rd. 80°, 1 kg Wasser = 1029 cm<sup>3</sup>.

Durchmesser 0,484 cm, Querschnitt 0,184 cm<sup>2</sup>, Meßlänge 100,19 cm.

Die Höhenunterschiede sind in kaltem Wasser abgelesen, daher mit 1,029/100,19 multipliziert, um das Gefälle zu erhalten.

98	0,880	177,7	0,00400	21500	0,0265
99	0,860	174,0	0,00395	21300	0,0270
100	0,835	166,0	0,00380	21100	0,0288
101	0,779	165,7	0,00370	21700	0,0270
102	0,763	164,1	»	21500	0,0270
103	0,660	150,2	»	19600	0,0278
104	0,541	133,6	»	17400	0,0288
105	0,405	107,0	0,00375	13800	0,0336
106	0,292	93,0	0,00385	11700	0,0320
107	0,2025	75,9	0,00380	9700	0,0334
108	0,121	55,7	0,00395	6800	0,0370
109	0,788	168,3	0,00370	22100	0,0264
110	0,453	119,0	»	15600	0,0303

Zahlentafel 5. Bleirohr.

Meßstrecke  $DC$  nahe dem Eintritt des Wassers.

Durchmesser 0,483 cm  
 Querschnitt 0,183 cm<sup>2</sup> } bei normaler Temperatur  
 Meßlänge 100,0 cm } (wie  $CD$ .)

Versuchsreihe XI Wasserleitung. Quecksilbermanometer.

Nr.	Gefälle	$v$	$\nu$	$\frac{vd}{\nu}$	$\lambda$
	I	cm/sk	cm <sup>2</sup> /sk	I	I
157	0,202	87,2	0,0119	3550	0,0252
158	0,403	112,7	0,0120	4540	0,0301
159	0,720	141,8	0,0121	5700	0,0340
160	1,114	176,7	0,0124	6900	0,0340
161	1,155	177,2	0,0125	6900	0,0349
162	1,966	235,3	0,0127	9000	0,0338
163	2,260	255,2	0,0127	9700	0,0330
164	3,140	306,8	0,0128	11600	0,0316
165	4,35	372,0	0,0130	13800	0,0298
166	4,42	372,0	0,0131	13700	0,0304
167	5,40	416,0	0,0130	15500	0,0296
168	8,04	525,0	0,0131	19400	0,0277
169	11,50	647,0	0,0127	24500	0,0260
170	9,59	582,0	0,0129	21800	0,0268
171	8,46	544,0	0,0129	20400	0,0271
172	7,14	492,0	0,0130	18300	0,0280
173	11,49	646,0	0,0128	24400	0,0261

Versuchsreihe XII Wasser aus Gefäß. Wassermanometer.

174	1,0665	169,0	0,0117	7000	0,0355
175	1,051	168,8	»	7000	0,0350
176	0,9465	159,0	»	6600	0,0355
177	0,8363	149,6	»	6200	0,0355
178	0,7453	140,0	»	5800	0,0360
179	0,6227	127,0	»	5200	0,0366
180	0,4985	113,3	»	4700	0,0368
181	0,4047	100,0	»	4100	0,0383
182	0,2930	84,6	»	3500	0,0389
183	0,1920	71,4	»	2950	0,0357
184	0,1405	69,8	»	2880	0,0274
185	0,1013	55,0	»	2270	0,0318
186	0,0657	37,4	»	1540	0,0445
187	0,1447	69,3	»	2860	0,0286

Versuchsreihe XIII

Wasser aus Ofen rd. 78° 1 kg Wasser = 1028 cm<sup>3</sup>, vergl. VII.

Durchmesser 0,484 cm, Querschnitt 0,184 cm<sup>2</sup>, Meßlänge 100,19 cm.

e Höhenunterschiede sind mit 1,028/100,19 multipliziert, um das Gefälle zu erhalten.

188	1,030	189,0	0,0040	22900	0,0274
189	1,006	187,3	0,0039	23200	0,0272
190	0,993	186,1	0,0038	23700	0,0273
191	0,880	174,3	»	22200	0,0275
192	0,793	165,5	0,0037	21600	0,0275
193	0,692	154,3	»	20200	0,0276
194	0,578	138,9	»	18200	0,0284
195	0,454	119,7	0,0038	15200	0,0301
196	0,306	95,8	»	12200	0,0316
197	0,2135	77,4	0,0039	9600	0,0338
198	0,1202	54,6	0,0040	6600	0,0383
199	0,0866	46,4	0,0042	5350	0,0381
200	0,916	178,7	0,0038	22800	0,0273
201	0,440	118,0	»	15000	0,0300

**Zahlentafel 6. Glasrohr.**

Durchflußrichtung A-B (erweitert), Durchmesser 0,9871 cm, Querschnitt 0,7653 cm<sup>2</sup>,  
Meßlänge 49,97 cm, Eintrittslänge ∞ 51 cm.

Nr.	Gefälle	v	ν	$\frac{v d}{\nu}$	λ	
	I	cm/sk	cm <sup>2</sup> /sk	I	I	
1	0,844	253,0	0,0121	20600	0,0255	18/10
2	0,476	181,5	»	14800	0,0280	
3	0,272	132,0	0,0120	10800	0,0302	
4	1,198	414,0	0,0121	33700	0,0224	
5	2,352	454,0	»	37000	0,0222	schwankend
6	2,740	499,0	»	40600	0,0213	19/10
7	2,830	508,0	»	41400	0,0213	
8	2,466	470,5	»	38400	0,0216	
9	2,070	425,2	»	34600	0,0222	
10	1,647	371,0	»	30200	0,0232	
11	1,367	336,0	»	27400	0,0235	
12	1,049	288,7	»	23500	0,0244	
13	0,781	241,7	»	19700	0,0260	
14	0,518	191,0	»	15600	0,0275	
15	0,324	145,7	»	11850	0,0296	
16	0,202	110,8	»	9020	0,0319	
17	0,147	92,8	»	7570	0,0330	
18	0,096	71,6	»	5820	0,0363	
19	0,061	55,1	0,0120	4530	0,0389	
52	2,480	470,0	0,0123	37700	0,0217	zuletzt schwankend
53	4,720	677,0	0,0122	54700	0,01995	23/10
54	7,430	878,0	»	70900	0,0187	
55	8,310	935,0	0,0122	75700	0,0184	stark schwankend
56	8,310	936,0	»	75800	0,0184	gut
57	6,710	827,0	»	66800	0,0190	
58	5,365	728,0	»	58900	0,0196	
59	4,600	672,0	»	54300	0,0197	vergl. 62
60	3,325	558,0	»	45100	0,0207	
61	2,090	426,5	»	34500	0,0225	
62	4,670	674,0	»	54500	0,0199	für 59 u. 53 zur Entscheidung
63	8,380	935,0	»	75700	0,01855	

**Zahlentafel 7. Glasrohr.**

Durchflußrichtung B-A (verengt), Durchmesser 0,9871 cm, Querschnitt 0,7653 cm<sup>2</sup>,  
Meßlänge 49,97 cm, Eintrittslänge ∞ 51 cm.

20	0,213	109,5	0,0122	8850	0,0344	20/10
21	0,540	188,6	0,0122	15200	0,0294	
22	0,802	235,3	0,0123	18900	0,0281	schwankend
23	1,465	331,3	0,0122	26800	0,0259	
24	2,085	407,0	0,0122	32900	0,0244	
25	2,808	485,0	0,0121	39500	0,0231	
26	2,866	487,0	0,0122	39400	0,0234	
27	2,894	492,0	0,0121	40000	0,0231	
28	2,438	445,0	»	36200	0,0238	
29	2,018	400,5	»	32600	0,0244	
30	1,565	344,7	»	28000	0,0255	
31	1,179	293,8	»	23900	0,0265	
32	0,827	240,6	0,0122	19400	0,0276	
33	0,535	186,5	»	15100	0,0298	schwankend
34	0,292	133,0	»	10740	0,0320	
35	0,208	108,1	»	8740	0,0345	
36	0,148	89,5	0,0121	7300	0,0357	
37	0,096	69,7	0,0120	5710	0,0382	
38	0,0614	54,3	»	4470	0,0404	
39	2,633	465,0	0,0123	37200	0,0235	21/10
40	3,792	571,5	0,0122	46200	0,0225	
41	5,210	681,0	»	55000	0,0218	schwankend
42	6,790	795,0	»	64200	0,0208	»
43	8,870	925,5	»	74800	0,0200	»
44	8,990	931,0	»	75200	0,0200 <sub>5</sub>	sehr stark schwankend
45	9,265	944,0	»	76300	0,0200 <sub>5</sub>	besser
46	7,770	859,0	»	69300	0,0203	
47	5,970	745,0	»	60100	0,0208	
48	4,505	635,0	»	51300	0,0216	
49	3,223	524,5	»	42500	0,0227	
50	2,040	403,5	»	32600	0,0243	
51	5,380	702,0	»	56800	0,0211	Zum Vergleich mit 41

Zahlentafel 8.

Vergleichsversuche an Glasrohr mit heißem und kaltem Wasser.

Durchmesser 0,9871 cm — (0,9875 cm bei 80°)  
 Querschnitt 0,7653 cm<sup>2</sup> — (0,7660 cm<sup>2</sup> bei 80°)  
 Meßlänge 49,97 cm — (49,99 cm bei 80°)

Nr.	Temp.	spezi- fisches Vo- lumen	Druck- höhen- unter- schied i. kaltem Wasser	Wassermenge			Durch- flußzeit	Gefälle i. Wasser von gleicher Temp.	Ge- schwin- digkeit <i>v</i>	Rei- bungs- koeffi- zient <i>ν</i>	$\frac{v d}{\nu}$	$\lambda$
		$\frac{1}{\gamma}$		kg	Liter	sk						
	° C	$\frac{\text{cm}^3}{\text{gr}}$	cm	kg	Liter	sk	I	$\frac{\text{cm}}{\text{sk}}$	$\frac{\text{cm}^2}{\text{sk}}$	I	I	

Durchflußrichtung *AB* (erweitert).

64	14,2	I	35,17	30	30	171,6	0,7038	228,4	0,0117	19300	0,0261
65	14,2	I	33,43	30	30	175,4	0,6690	223,5	0,0117	18800	0,0259
66	14,2	I	31,54	30	30	181,2	0,6312	216,3	0,0117	18300	0,0261
67	80,5	1,029	30,63	30	30,87	157,0	0,6305	256,7	0,0037	68500	0,0185
68	80,5	1,029	28,96	30	30,87	163,0	0,5961	247,2	0,0037	65900	0,0189
69	80,3	1,029	26,79	30	30,87	169,8	0,5514	237,3	0,0037	63300	0,0190

Durchflußrichtung *BA* (verengt).

70	71,1	1,023	32,30	30	30,69	162,6	0,6603	246,4	0,0041	59300	0,0211
71	78,5	1,028	30,70	30	30,84	165,2	0,6313	243,7	0,0038	63300	0,0206
72	81,0	1,030	28,27	30	30,90	173,2	0,5825	232,9	0,0037	62100	0,0208
73	14,5	I	37,49	30	30	171,4	0,7503	228,7	0,0116	19500	0,0278
74	14,5	I	35,06	30	30	177,4	0,7016	221,0	0,0116	18800	0,0278
75	14,8	I	33,59	30	30	181,4	0,6722	216,1	0,0116	18400	0,0279

Abbildungen.

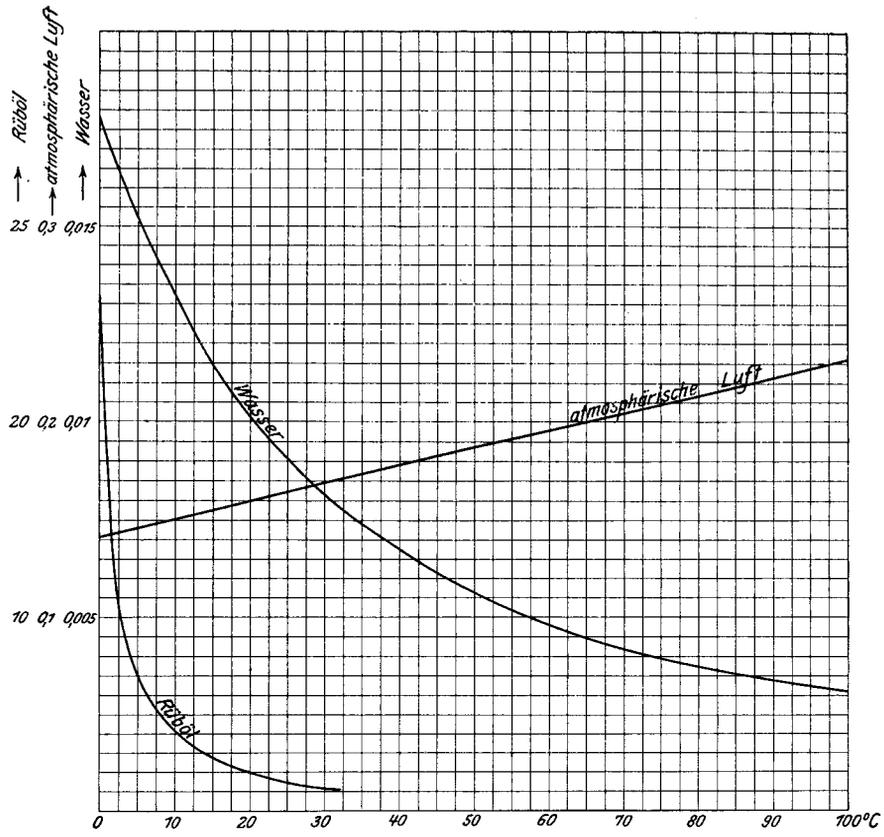


Abb. 1. Reibungskoeffizient  $\nu$  in  $\text{cm}^2/\text{sk}$  für Rüböl, Luft beim Druck von  $1 \text{ kg/cm}^2$  und Wasser.

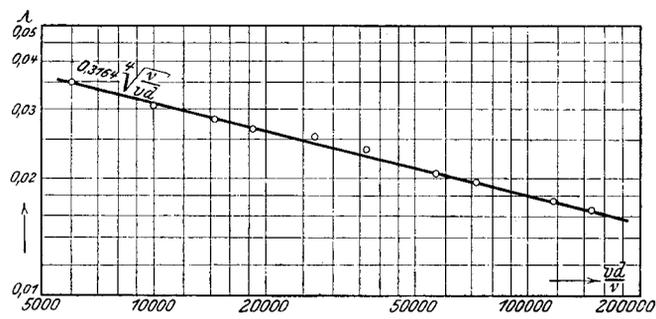


Abb. 3. Versuche von Nusselt mit Druckluft.

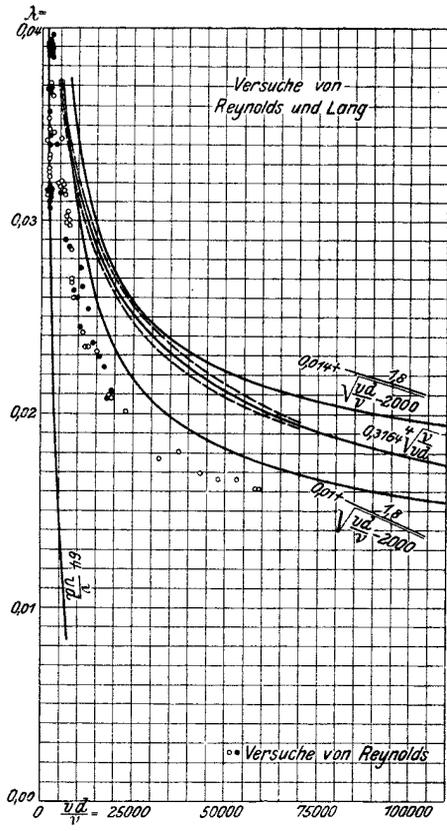


Abb. 4.

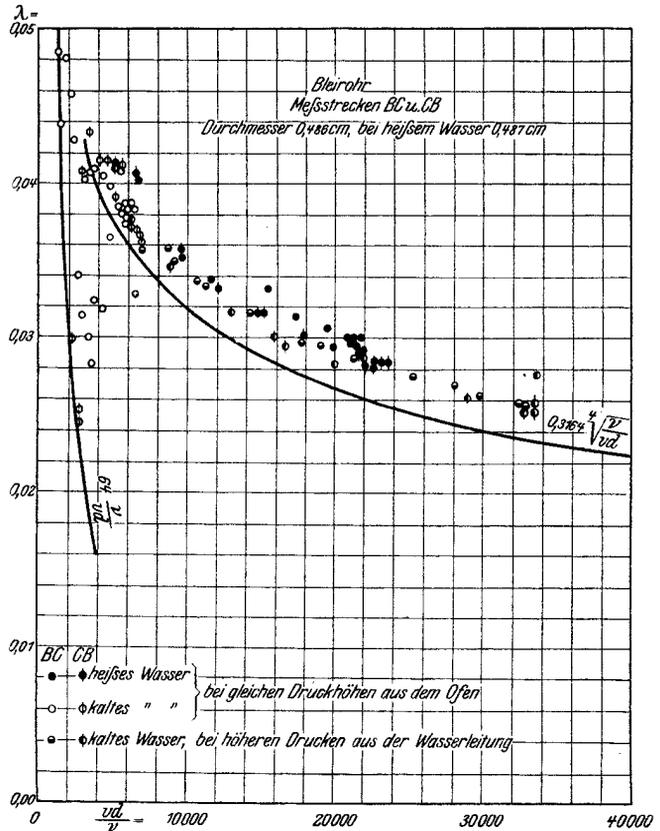


Abb. II.

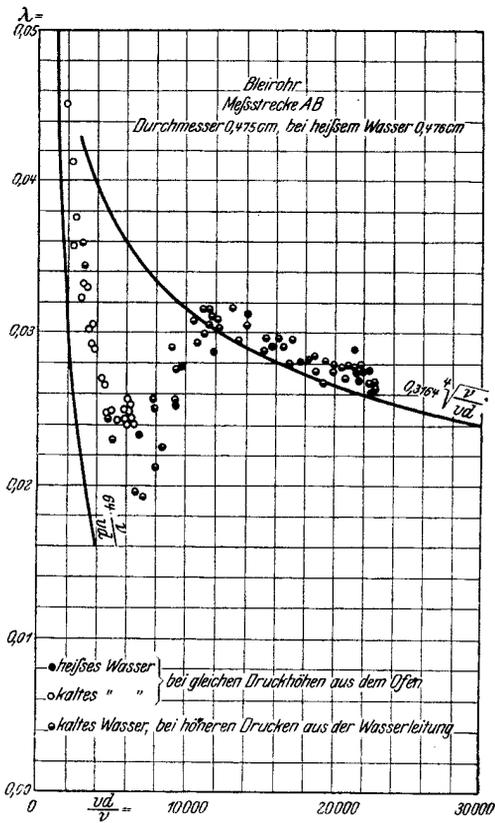


Abb. 9.

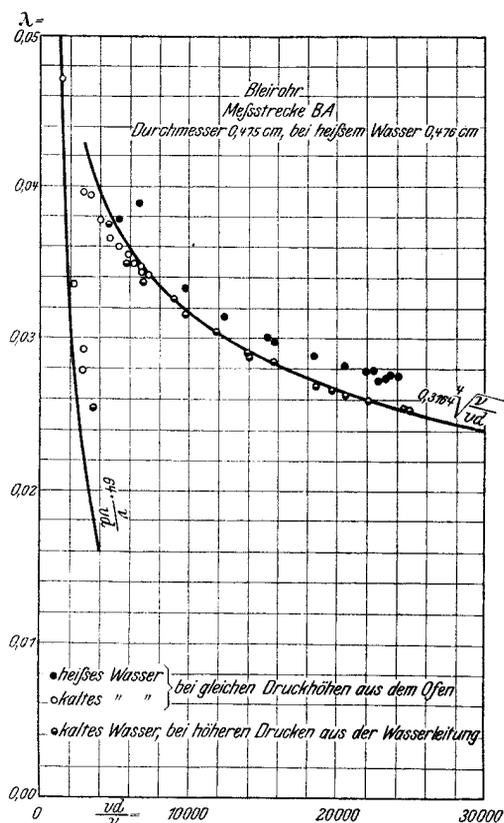


Abb. 10.

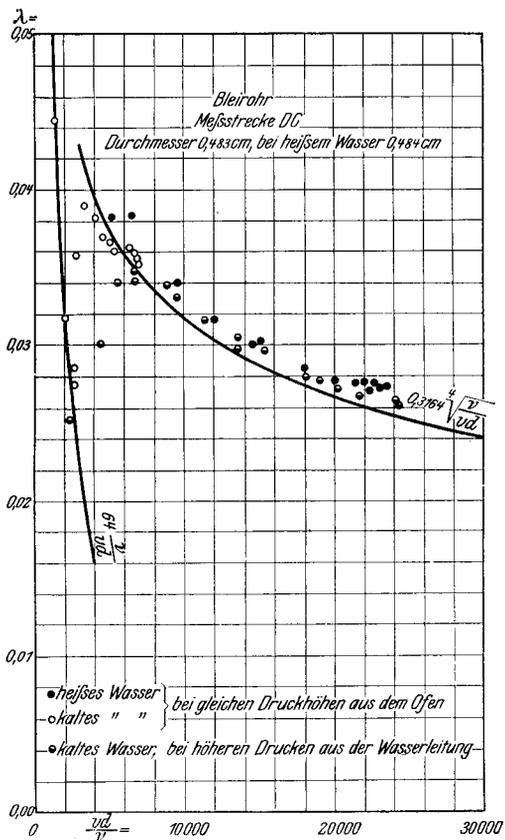


Abb. 12.

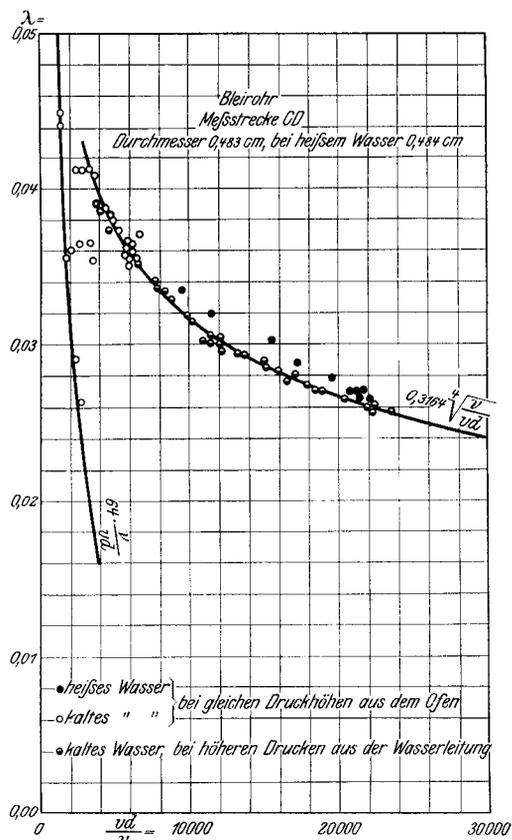


Abb. 13.

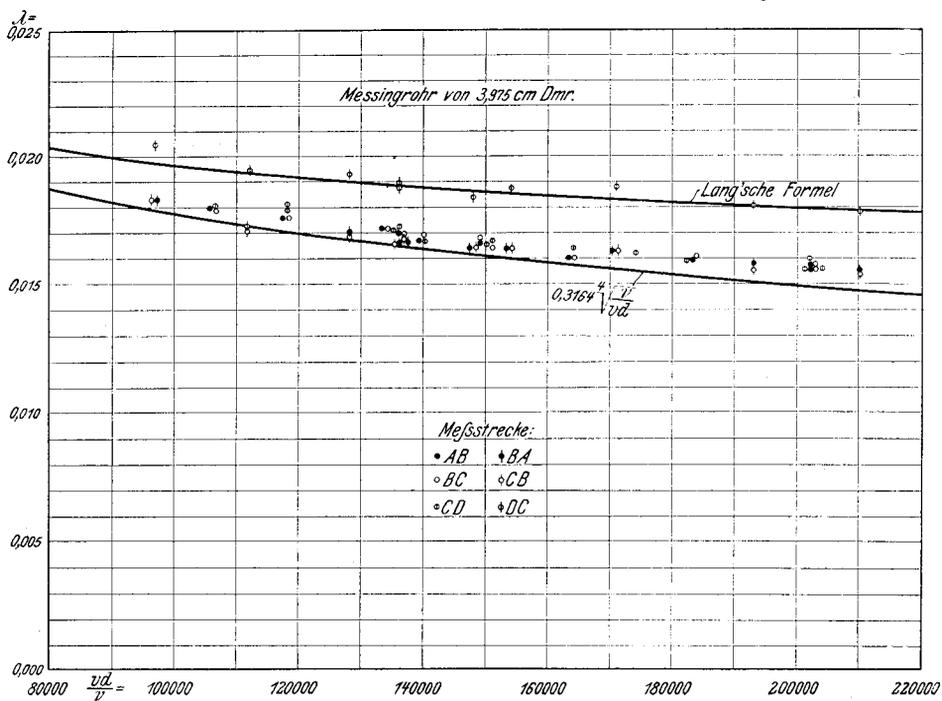


Abb. 14.

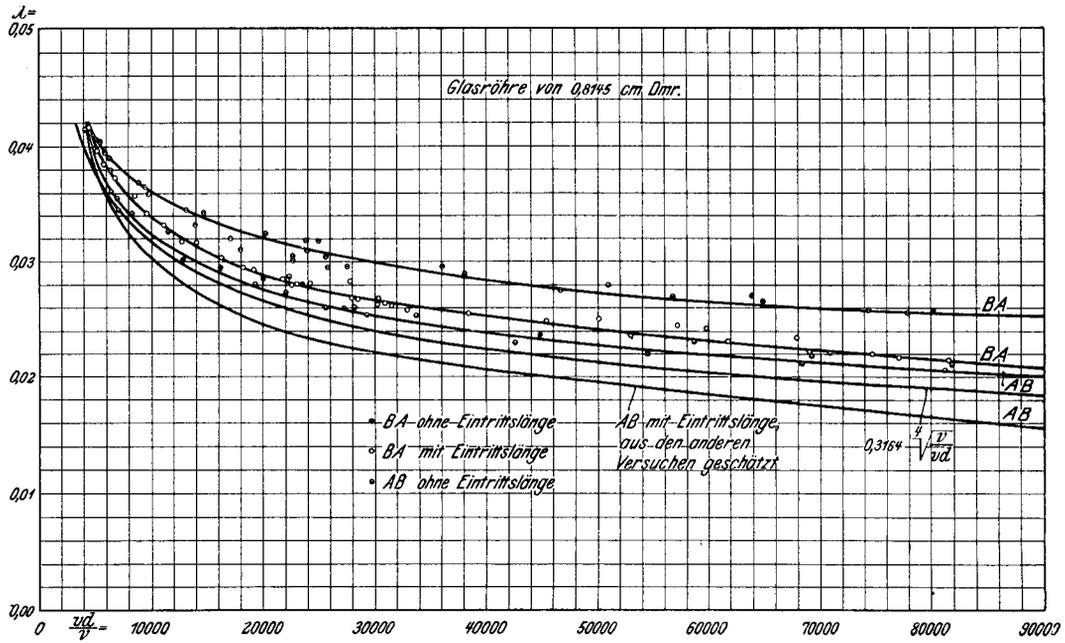


Abb. 15.

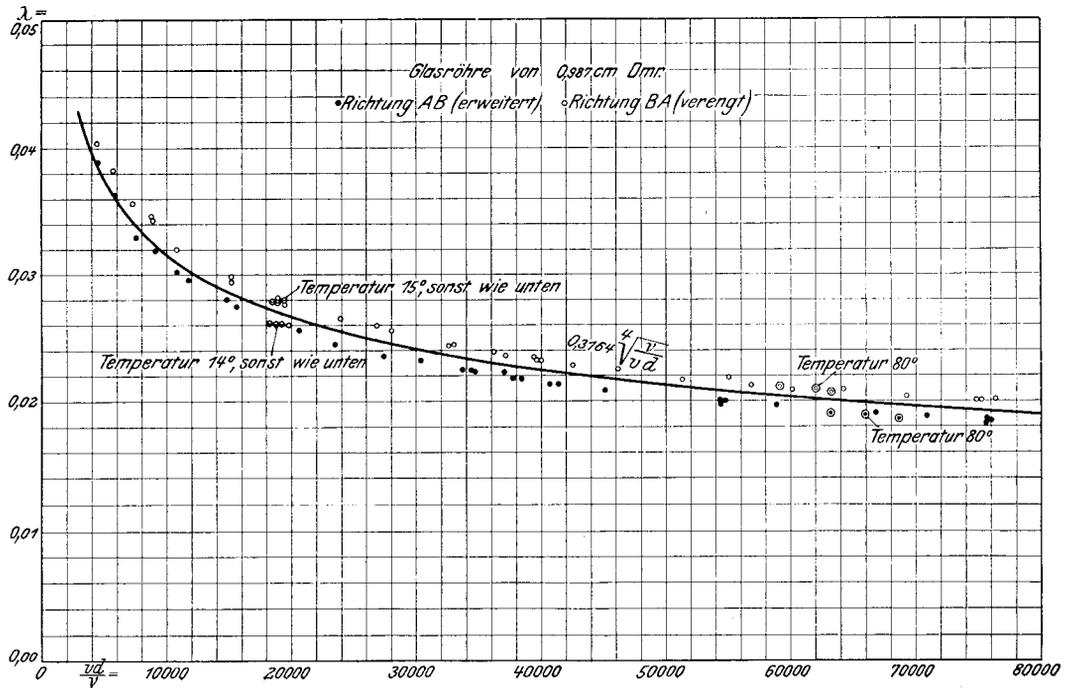


Abb. 16.

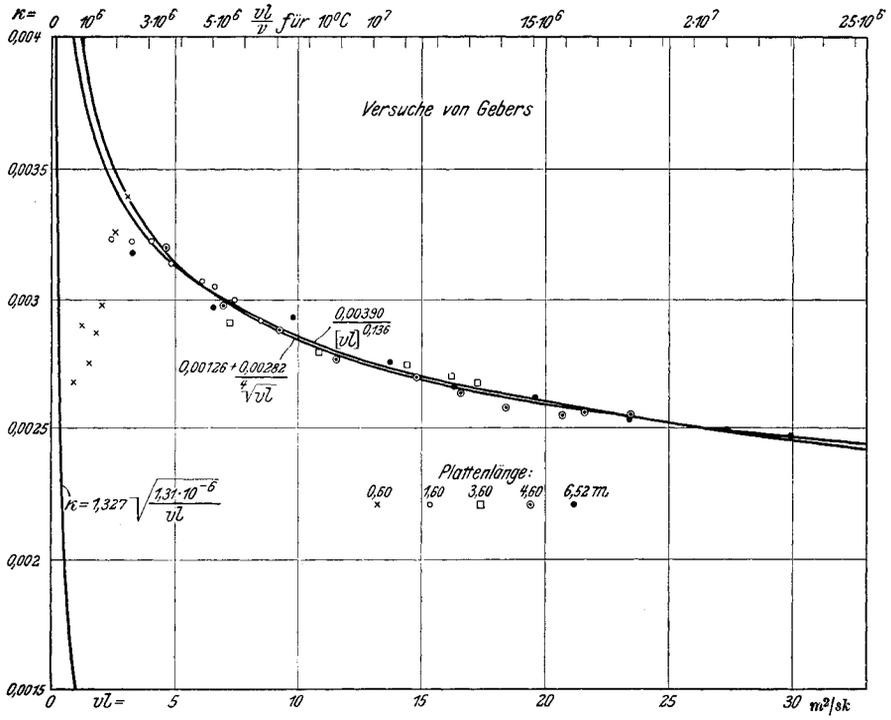


Abb. 19.

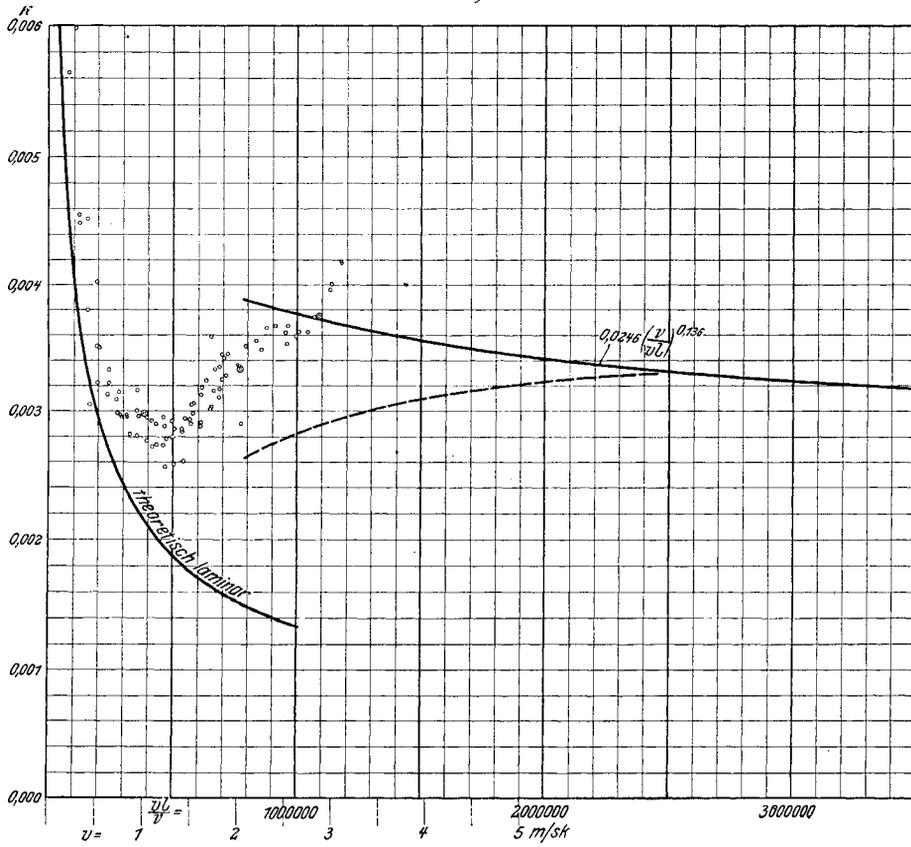


Abb. 20.

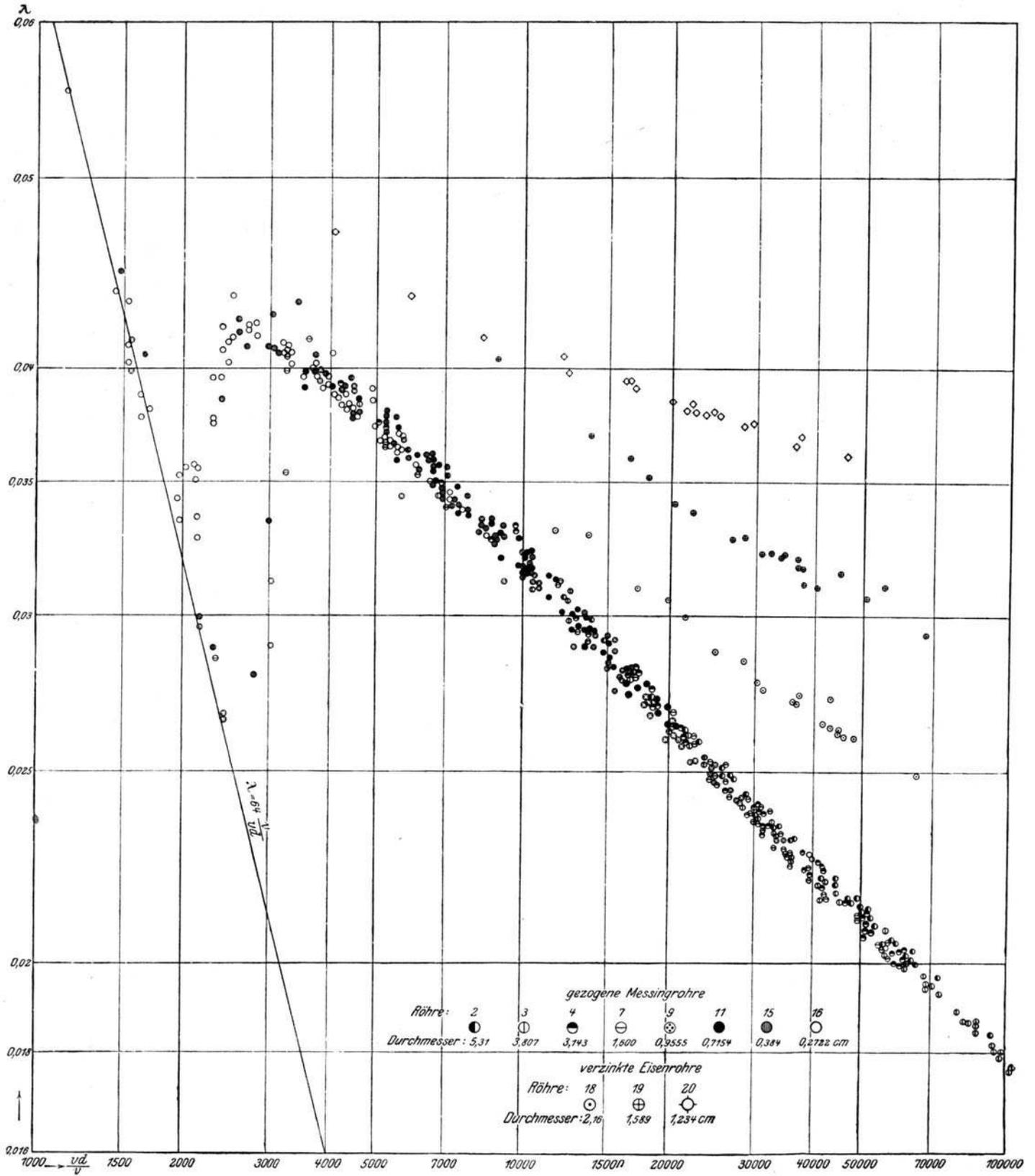


Abb. 2. Versuche von Saph und Schoder.

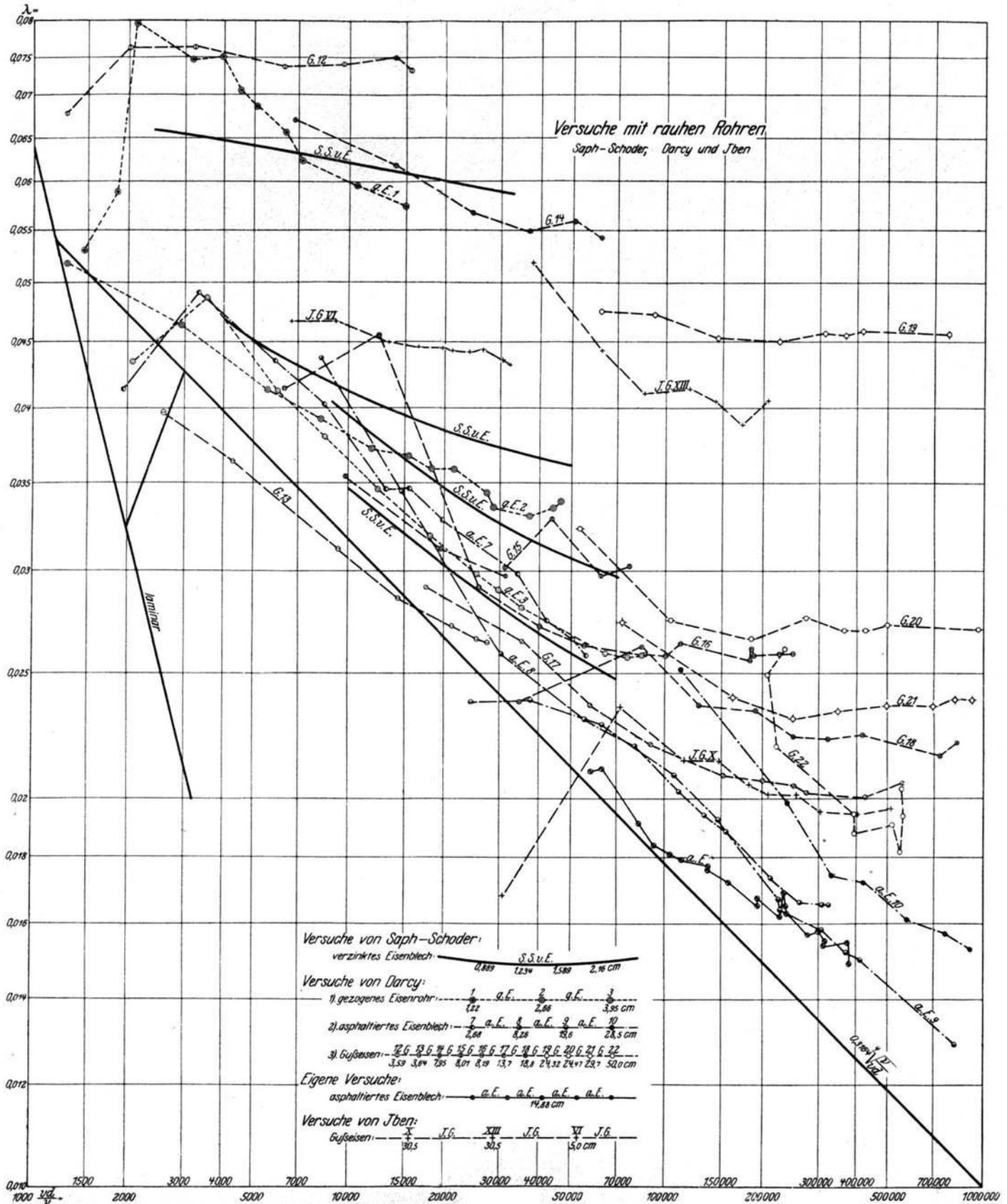


Abb. 17.