J. DIFFERENTIAL GEOMETRY
1 (1967) 371-380

DAS MORSE'SCHE INDEXTHEOREM BEI ALLGEMEINEN RANDBEDINGUNGEN

MANFRED KLINGMANN

Einleitung

Die bekannten Beweise des Indextheorems von Morse, das es gestattet, den Index der zweiten Variation einer Geodätischen aus den Multiplizitäten ihrer konjugierten Punkte zu berechnen, machen ausgedehnten Gebrauch von der Theorie der Jakobifelder. Besonders bei allgemeinen Randbedingungen sind die Beweise recht kompliziert. Wir zeigen demgegenüber, dass man den Morse'schen Indexsatz aus einem ziemlich elementaren Indexsatz für Legendreformen in Hilberträumen ableiten kann. Man erhält so einen sehr allgemeinen Indexsatz für beliebige Randbedingungen, der alle bekannten Versionen des Morse'schen Satzes umfasst.

1. Ein Indexsatz für Legendreformen im Hilbertraum

Sei A eine quadratische Form auf einem beliebigen linea-Raum H, dann definiert man *Index*, *erweiterten Index* und *Nullität* von A durch

$$\begin{aligned}\operatorname{Ind} A &= \sup\{\dim K;\ K \textit{ linearer Unterraum von } H,\ A \mid K < 0\}\ ,\\ \operatorname{Ind}_0 A &= \sup\{\dim K;\ K \textit{ linearer Unterraum von } H,\ A \mid K \leq 0\}\ ,\\ \operatorname{Null} A &= \operatorname{Ind}_0 A - \operatorname{Ind} A\ .\end{aligned}$$

Null A ist auch die Dimension des Nullraumes von A, bezw. der zu A gehörigen symmetrischen Bilinearform, die wir ebenfalls mit A bezeichnen wollen.

Eine quadratische Form L auf einem Hilbertraum H heißt *Legendreform* (Hestenes [2]), falls es einen Unterraum $H' \subset H$ endlicher Kodimension gibt, so daß $L \mid H'$ positiv definit ist, oder, was dasselbe ist, wenn durch Abänderung der Norm in H erreicht werden kann, daß $L = \mathrm{N} + Q$, wobei N das Quadrat der Norm und Q eine quadratische Form von endlichem Rang bezeichnet. Aus der zweiten Definition folgen unmittelbar einige Hilfssätze:

Lemma 1.1. *Für eine Legendreform sind Index und erweiterter Index endlich.*

Communicated by W. P. A. Klingenberg, September 8, 1967.

Lemma 1.2. *Ist P ein Prähilbertraum, der in H dicht liegt, und ist der Nullraum von L in P enthalten, so gilt:*

$$\operatorname{Ind} L \mid P = \operatorname{Ind} L, \qquad \operatorname{Ind}_0 L \mid P = \operatorname{Ind}_0 L \ .$$

Eine Schar $H_t \subset H$, $t \in T$ von Unterräumen eines Hilbertraumes H bezw. die zugehörige Schar h_t von orthogonalen Projektionen heißt *stetig*, falls

$$\operatorname{dist}(X, H_t) = \| (1 - h_t)X \|$$

für jedes $X \in H$ stetig von t abhängt.

Ist T dabei ein Intervall und H_t monoton wachsend, so genügt $\overline{\bigcup_{s<t} H_s} = \bigcap_{r>t} H_r$ für alle t für die Stetigkeit der Schar H_t, da eine monotone Schar von orthogonalen Projektionen nur Sprungstellen als Unstetigkeiten besitzen kann [4, S. 249]. Für jeden Endomorphismus q von H gilt $\| qh_t - qh_s \| = \| (h_t - h_s)q^* \|$. Ist daher $q^*(\{X ; \| X \| = 1\})$ kompakt und T lokalkompakt, so gilt $\| qh_t - qh_s \| \to 0$ für $t \to s$. Insbesondere erhalten wir:

Lemma 1.3. *Ist q ein Endomorphismus von H mit endlichem Rang, h_t $t \in [a, b]$ eine stetige Schar von orthogonalen Projektionen, so ist qh_t gleichmäßig stetig.*

Mit Hilfe dieses Lemmas beweisen wir folgenden Satz:

Satz 1.4. *Ist H_t, $t \in [a, b]$, eine stetige Schar von Unterräumen des Hilbertraumes H, L eine Legendreform auf H, so ist* $\operatorname{Ind} L \mid H_t$ *eine unterhalb-,* $\operatorname{Ind}_0 L \mid H_t$ *eine oberhalbstetige Treppenfunktion.*

Beweis. Wir haben zweierlei zu zeigen:

a) $\operatorname{Ind}_0 L \mid H_s \leq \operatorname{Ind}_0 L \mid H_t$ für festes t und genügend kleines $| s - t |$.

Sei $L = Q + N$, $H_t^+ \subset H_t$ so gewählt, daß $L \mid H_t^+ \geq \delta N$ für geeignetes $\delta > 0$, und $\operatorname{Ind}_0 L \mid H_t = \dim H_t / H_t^+$. Sei $| s - t |$ so klein, daß $\| q(h_s - h_t) \| \leq \delta/4$, wo q den zu Q gehörigen selbstadjungierten Endomorphismus bedeutet, dann gilt für alle $X \in H_t^+ \oplus H_t^\perp$:

$$\begin{aligned} Q(h_s(X)) + N(X) &= L(h_t X) + N(h_t^\perp X) + \langle q(h_s - h_t)X, (h_s + h_t)X \rangle \\ &\geq \frac{\delta}{2} N(X) \end{aligned}$$

Daraus folgt, für genügend kleines $| s - t |$,

$$\operatorname{Ind}_0 L \mid H_s = \operatorname{Ind}_0 (Q \circ h_s + N) \leq \dim H / H_t^+ \oplus H_t^\perp = \operatorname{Ind}_0 L \mid H_t \ .$$

b) $\operatorname{Ind} L \mid H_s \geq \operatorname{Ind} L \mid H_t$ für festes t und genügend kleines $| s - t |$.

Sei $H_t^- \subset H_t$ so gewählt, daß $L \mid H_t^- \leq -\delta N$ für geeignetes $\delta > 0$ und $\dim H_t^- = \operatorname{Ind} L \mid H_t$. Sei $| s - t |$ so klein, daß

$$\| q(h_t - h_s)X \| < \frac{\delta}{4} \| X \| \quad \text{für alle } X \in H_t^- \ .$$

Dann gilt für alle $X \in H_t^-$:

$$L(h_s X) = L(X - (h_t - h_s)X) = L(X) - N((h_t - h_s)X)$$
$$- <(h_t + h_s)X,\ q(h_t - h_s)X> \leq -\frac{\delta}{2}N(X) \leq -\frac{\delta}{2}N(h_s X) .$$

Da H_t^- endlichdimensional ist, ist $\dim h_s H_t^-$ konstant für genügend kleines $|s-t|$. Daher ist $\operatorname{Ind} L \mid H_s \geq \dim h_s H_t^- = \dim H_t^- = \operatorname{Ind} L \mid H_t$ für genügend kleines $|s-t|$. q.e.d.

Wächst die Schar H_t monoton und gilt $H_b = H$, so folgt wegen $\operatorname{Null} L \mid H_t = \operatorname{Ind}_0 L \mid H_t - \operatorname{Ind} L \mid H_t$ aus diesem Satz, wenn $\vec{n}_t = \operatorname{Null} L \mid H_t - \lim_{\tau \nearrow t} \operatorname{Null} L \mid H_\tau$ den links- und $\overline{n}_t = \operatorname{Null} L \mid H_t - \lim_{\tau \searrow t} \operatorname{Null} L \mid H_\tau$ den rechtsseitigen Sprung von $\operatorname{Null} L \mid H_t$ an der Stelle t bezeichnet:

$$\begin{aligned} \operatorname{Ind}_0 L &= \sum_{t \in (a,b]} \vec{n}_t + \operatorname{Ind}_0 L \mid H_a , \\ \operatorname{Ind} L &= \sum_{t \in [a,b)} \overline{n}_t + \operatorname{Ind} L \mid H_a . \end{aligned} \tag{1.1}$$

Besitzt $\operatorname{Null} L \mid H_t$ keine Sprungstelle im Intervall (s_1, s_2), so ist auch $\operatorname{Ind}_0 L \mid H_t$ dort konstant. Bezeichnet H_t^0 den Nullraum von $L \mid H_t$ und H_t^θ einen maximalen Unterraum, auf dem $L \mid H_t$ negativ semidefinit ist, so gilt $H_t^0 \subset H_t^\theta$. Ganz allgemein gilt:

$$H_{t_1} \cap H_{t_2}^0 \subset H_t^0 \text{ für } t_1 < t < t_2 , \tag{1.2}$$

also ist wegen $\dim (H_{t_1}^\theta + H_{t_2}^0) = \dim H_{t_1}^\theta$ und $\dim H_{t_1}^0 = \dim H_{t_2}^0$ für $s_1 < t_1 < t_2 < s_2$, $H_{t_1}^0 = H_{t_2}^0$ für $s_1 < t_1 < t_2 < s_2$. Daraus folgt aber $H_t^0 \subset H_{s_1}^0 \cap H_{s_2}^0$ und damit

$$H_{s_1}^0 \cap H_{s_2}^0 = H_t^0 \qquad \text{für } s_1 < t < s_2 . \tag{1.3}$$

Mit (1.1), (1.2) und (1.3) haben wir aus Satz 1.4 folgendes erhalten:

Satz 1.5 (Indexsatz). *Sei H_t, $t \in [a, b]$, eine stetige monoton wachsende Schar von Unterräumen des Hilbertraumes $H = H_b$ und L eine Legendreform auf H. Bezeichne H_t^0 den Nullraum von $L \mid H_t$ und $a = s_0 < s_1 < \cdots < s_n < s_{n+1} = b$ die Sprungstellen von* $\operatorname{Null} L \mid H_t$ *im Intervall $[a, b]$, so gilt:*

$$\operatorname{Ind}_0 L = \operatorname{Ind}_0 L \mid H_a + \sum_{i=1}^{n+1} \dim (H_{s_i}^0 / H_{s_i}^0 \cap H_{s_{i-1}}^0) ,$$
$$\operatorname{Ind} L = \operatorname{Ind} L \mid H_a + \sum_{i=0}^{n} \dim (H_{s_i}^0 / H_{s_i}^0 \cap H_{s_{i+1}}^0) .$$

2. Der Index von Geodätischen

Ist M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, B eine Untermannigfaltigkeit von $M \times M$, so genügt eine stückweise differenzierbare Kurve $x: [a, b] \to M$ $(a \neq b)$ der Randbedingung B, falls $(x(a), x(b)) \in B$. Die Lösungskurven des Variationsproblems $\delta \frac{1}{2} \int_a^b \dot{x}^2 dt = 0$ mit dieser Randbedingung sind dann Geodätische, die auf der Randbedingung senkrecht stehen. Das heißt $(\dot{x}(a), -\dot{x}(b)) \perp B_{(x(a), x(b))}$.

Unter dem (erweiterten) Index einer solchen Geodätischen versteht man den (erweiterten) Index der zweiten Variation

$$I_B(X, Y) = \int_a^b <\dot{X}, \dot{Y}> dt - \int_a^b <R(X, \dot{x})\dot{x}, Y> dt$$
$$- <(\dot{x}(a), -\dot{x}(b)), T((X(a), X(b)), (Y(a), Y(b)))>$$

im linearen Raum $C_{\dot{B}}$ derjenigen stückweise glatten Vektorfelder längs x, die der Randbedingung $\dot{B} = B_{(x(a), x(b))}$ genügen. ($\dot{X} = \frac{D}{Dt} X$ ist die kovariante Ableitung, T bezeichnet den Tensor der Relativkrümmung von B in $M \times M$, $\dot{B} = B_{(x(a), x(b))}$ den Tangentialraum von B im Punkte $(x(a), x(b))$, der Parameter auf x ist die Bogenlänge).

Bezeichne E den linearen Raum aller absolutstetigen Vektorfelder X längs x, für die die Energie $\frac{1}{2} \int_a^b \dot{X}^2 dt < \infty$. Wir nennen E den Raum der Vektorfelder beschränkter Energie längs x. Ein solches Vektorfeld ist fast überall differenzierbar [4, S. 47] und die Koordinaten von $\dot{X}$ bezüglich eines längs x parallelverschobenen n-Beinfeldes liefern zusammen mit $X(a)$ einen Isomorphismus

$$\left((a), \frac{D}{Dt}\right) : E \to M_{x(a)} \oplus L^2(R^n) .$$

$L^2(R^n)$ ist der Hilbertraum der quadratintegrierbaren Kurven im R^n mit dem Skalarprodukt $<A, B> = \int_a^b A \cdot B dt$. Da ein absolutstetiges Vektorfeld durch Anfangsvektor und Ableitung vollständig bestimmt ist [4, S. 47]. Versieht man E mit dem induzierten Skalarprodukt

$$<X, Y> = <X(a), Y(a)> + \int_a^b <\dot{X}(t), \dot{Y}(t)> dt$$

so wird es zu einem Hilbertraum.

Lemma 2.1. *Die Einschränkung* $([r, s]) : E \to E \mid [r, s]$ *definiert durch* $([r, s])(X) = X \mid [r, s]$ *ist eine stetige Projektion.* (*Statt* $([r, s])(F)$ *schreiben* *wir auch* $F \mid [r, s]$ *oder* $F(t)$ *falls* $r = s = t$ *für einen beliebigen Unterraum* $F \subset E$.)

Beweis. Die Stetigkeit von $([r, s])$ wird bewiesen durch die Abschätzung

$$X(r)^2 + \int_r^s \dot{X}(t)^2 dt \leq (2(b-a) + 2)(X(a)^2 + \int_a^b \dot{X}(t)^2 dt)$$

und eine isometrische Injektion $E \mid [r, s] \to E$ erhält man, indem man $X \in E \mid [r, s]$ durch Parallelverschiebung von $X(r)$ im Intervall $[a, r]$ und $X(s)$ im Intervall $[s, b]$ auf ganz $[a, b]$ ausdehnt.

Die zur zweiten Variation der Energie (bei beliebiger Randbedingung) gehörige quadratische Form $I_B(X)$ ist auf ganz E definiert und eine Legendreform. Diese Behauptung kann man auf verschiedene Weise einsehen. Z. B. ist $I_B(X)$ auf einen Unterraum, der von allen X mit $X(a) = 0$,

$$\dot{X} = \left(\cos\left(\pi k_1 \frac{t-a}{b-a}\right), \cdots, \cos\left(\pi k_n \frac{t-a}{b-a}\right)\right), \mid k_\nu > k ,$$

für genügend großes k erzeugt wird, positiv definit; und dieser Unterraum hat endliche Kodimension in E, da die

$$\left(\cos\left(\pi k_1 \frac{t-a}{b-a}\right), \cdots, \cos\left(\pi k_n \frac{t-a}{b-a}\right)\right), \quad k_\nu = 0, 1, 2, \cdots$$

eine stetige Basis von $L^2(R^n)$ bilden.

Der Nullraum von I_B besteht aus Jacobifeldern (liegt also in $C = C_{\dot{M} \times \dot{M}}$) genauer:

Lemma 2.2. *Sei* $I_B(X, Y) = 0$ *für alle* Y *mit* $Y(t) = 0$ *für* $t \in [a, r] \cup [s, b]$, *so ist* $X \mid [r, s]$ *ein Jacobifeld und für alle* $Z \in E$ *gilt:*

$$\begin{aligned} I_B(X, Z) = &\int_{[a,r] \cup [s,b]} \langle \dot{X}, \dot{Z} \rangle \, dt - \int_{[a,r] \cup [s,b]} \langle R(X, \dot{x})\dot{x}, Z \rangle \, dt \\ &- \langle (\dot{x}(a), -\dot{x}(b)), T((X(a), X(b)), (Z(a), Z(b))) \rangle \\ &- \langle \dot{X}_r(r), Z(r) \rangle + \langle \dot{X}_s(s), Z(s) \rangle , \end{aligned}$$

wo $\dot{X}_r$ *und* $\dot{X}_s$ *die rechts- bzw linksseitigen Ableitungen bezeichnen.*

Beweis. Der Beweis ergibt sich in der üblichen Weise durch partielle Integration. Aus $I_B(X, Y) = 0$ folgt

$$\int_r^s \langle \dot{X}, \dot{Y} \rangle \, dt + \int_r^s \langle \int_r^t R(X, \dot{x})\dot{x} \, d\tau - P, Y \rangle \, dt = 0$$

für alle $\dot{Y}$ mit $\int_r^s \dot{Y} \, dt = 0$ und alle Parallelfelder P.

Setzen wir $\dot{Y}(t) = \dot{X}(t) + \int_r^t R(X, \dot{x})\dot{x}\, d\tau - P$ mit geeignetem P, so folgt: $\dot{X} + \int_r^t R(X, \dot{x})\dot{x}\, d\tau = P$ und daraus die erste Behauptung. Die Formel für $I_B(X, Z)$ ergibt sich unmittlbar durch partielle Integration im ersten Summanden.

Der Raum $E_{\dot{B}}$ derjenigen Vektorfelder beschränkter Energie, die die Randbedingung $\dot{B} = B_{(x(a),\, x(b))}$ erfüllen, ist nach Lemma 2.1 wegen

$$E_{\dot{B}} = ((a), (b))^{-1}(\dot{B})$$

als abgeschlossener Unterraum von E wieder ein Hilbertraum. ($E_{\dot{B}}$ hat als Unterraum von E dieselbe Kodimension wie B in $M \times M$.) Da $\frac{D}{Dt}(E_0) \subset L^2(R^n)$ eine stetige Basis von n-Tupeln der Form $\left(\cos\left(\pi k_1 \frac{t-a}{b-a}\right), \cdots, \cos\left(\pi k_n \cdot \frac{t-a}{b-a}\right)\right)$, $k_\nu = 1, 2, \cdots$, besitzt, und der zu E_0 in $F_{\dot{B}}$ orthogonale Unterraum durch lineare Ausdrücke in parallelverschobenen Vektorfeldern P, Q von der Form $\frac{b-t}{b-a}P(t) + \frac{t-a}{b-a}Q(t)$, $(P(a), Q(b)) \in \dot{B}$ gegeben wird, liegt $C_{\dot{B}}$ dicht in $E_{\dot{B}}$. I_B ist eine Legendreform auf E_B, deren Nullraum in C_B liegt, also kann man nach Lemma 1.2 den (erweiterten) Index von I_B auch in $E_{\dot{B}}$ statt- wie ursprünglich definiert- in $C_{\dot{B}}$ bestimmen.

Zu der Randbedingung $\dot{B} \subset M_{x(a)} \times M_{x(b)}$ für die Vektorfelder längs x definieren wir die Anfangsbedingung $\dot{B}_a$ und die Endbedingung $\dot{B}_b$ als Projektion von $\dot{B}$ auf den ersten bzw zweiten Faktor von $M_{x(a)} \times M_{x(b)}$.

Ist $A \subset E_{M_{x(a)} \times \dot{B}_b}$ ein endlichdimensionaler Unterraum, so definieren wir:

$$A_t = \{X \in E_{\dot{B}};\, X \,|\, [t, b] \in A \,|\, [t, b]\}\,, \qquad a \leq t \leq b\,.$$

$A_t = E_{\dot{B}} \cap ([t, b])^{-1}([t, b])(A)$ ist nach Lemma 2.1 ein abgeschlossener Unterraum von $E_{\dot{B}}$ und es gilt:

Lemma 2.3. *A_t ist eine monoton wachsende stetige Schar von Unterräumen von $E_{\dot{B}}$.*

Beweis. Die Monotonie ist klar. Für die Stetigkeit muß zweierlei gezeigt werden: 1) $\bigcap_{t > t_0} A_t = A_{t_0}$ für $t_0 < b$, 2) $\overline{\bigcup_{t < t_0} A_t} = A_{t_0}$ für $t_0 > a$.

1) Sei $X \in \bigcap_{t > t_0} A_t$, dann existieren Vektoren $Y_t \in A$, $b > t > t_0$, mit beschränkter Norm und $Y_t \,|\, [t, b] = X \,|\, [t, b]$. Da A endlichdimensional ist, existiert in A ein Häufungspunkt Y_{t_0} der Y_t und es gilt $Y_{t_0} | [t, b] = X \,|\, [t, b]$ für alle $t > t_0$. Daraus folgt $Y_{t_0} | [t_0, b] = X \,|\, [t_0, b]$ und damit die Behauptung.

2) Sei $X \in A_{t_0}$, $Y \in A$ und $X|[t_0, b] = Y|[t_0, b]$, dann definieren wir für $a < t < t_0$ durch

$$X_t(s) = \begin{cases} Y(s) \text{ für } s \geq t \\ X(s) + \frac{s-a}{t-a}P(s) \text{ für } s \leq t \end{cases}$$

ein Vektorfeld $X_t \in A_t$. Dabei ist P das Parallelfeld mit $P(t) = Y(t) - X(t)$.

$$\|X - X_t\|^2 = \frac{1}{t-a}(Y(t) - X(t))^2 + \int_t^{t_0}(\dot{X}(s) - \dot{Y}(s))^2 ds$$

konvergiert gegen 0 mit $t \to t_0$ und daraus folgt die Behauptung.

Bemerkung. Ebenso wie die Stetigkeit der Schar A_t, beweist man diejenige der Schar

$${}_tA = \{X \in E_{\dot{B}};\ X|[a, b-t] \in A|[a, b-t]\},\ 0 < t < b-a\,,$$

wobei in diesem Fall A ein endlichdimensionaler Unterraum von $E_{\dot{B}_a \times M_{x(b)}}$ ist. Damit ist auch

$${}_{\sigma(t)}A_{\rho(t)} = \{X \in E_{\dot{B}};\ X|[a, b-\sigma(t)] \cup [\rho(t), b] \in A|[a, b-\sigma(t)] \cup [\rho(t), b]\}, \quad 0 < t < 1\,,$$

eine stetige Schar, wenn σ und ρ stetig monoton wachsende Funktionen bedeuten mit

$$b - \sigma(0) = \rho(0)\,,\ \sigma(1) = b - a\,,\ \rho(1) = b$$

und A endlichdimensional in $E_{\dot{B}}$.

Wir definieren konjugierte Punkte für stetige Scharen $A_t \subset E_{\dot{B}}$, $A \subset E_{M_{x(a)} \times \dot{B}_b}$, die folgende zusätzliche Bedingungen erfüllen:

(2.1) $$A(b) = \dot{B}_b$$

(2.2) Nullraum $I_B|A_t \cap$ Nullraum $I_B|A_s =$ Nullraum $I_B \cap A$, für $s \neq t$.

Die erste Bedingung sichert, daß $A_b = E_{\dot{B}}$ und die zweite, daß die Sprungstellen von Ind $I_B|A_t$ und $\mathrm{Ind}_0\, I_B|A_t$ zusammenfallen.

Definition. Wir nennen einen Punkt $x(t)$ (B, A)-konjugiert zu $x(a)$, mit der Multiplizität $\mu(x(t))$, falls die Dimension von Nullraum $I_B|A_t$ mod Nullraum $I_B \cap A$ gleich $\mu(x(t))$ ist.

Bemerkung. Für den Fall, daß $A_t|[t, b]$, $a < t < b$, nur aus Jacobifeldern besteht, bedeutet die Definition von $\mu(x(t))$: Es existieren maximal $\mu(x(t))$ mod Nullraum $I_B \cap A$ linear unabhängige bei t gebrochene Jacobifelder in A_t mit

$$\begin{aligned}&\langle(\dot{x}(a), -\dot{x}(b)), T((X(a), X(b)), (Z(a), Z(b)))\rangle \\ &\quad = \langle\dot{X}(a), Z(a)\rangle + \langle \text{Sprung}\, \dot{X}(t), Z(t)\rangle - \langle\dot{X}(b), Z(b)\rangle\end{aligned}$$

für alle $Z \in A_t$.

Definieren wir weiter die A-Parallelität und A-Konkavität von B durch

$$\text{Par}\,(B, A) = \dim\,(\text{Nullraum}\, I_B \cap A)\,,$$

$$\text{Kon}\,(B, A) = \text{Ind}\, I_B \,|\, A_a\,,$$

so gilt mit dem Indexsatz aus § 1:

Indexsatz. $\text{Ind}\, I_B = \sum_{a \leq t < b} \mu(x(t)) + \text{Kon}\,(B, A)\,,$

$$\text{Ind}_0\, I_B = \sum_{a \leq t \leq b} \mu(x(t)) + \text{Kon}\,(B, A) + \text{Par}\,(B, A)\,.$$

Die Auszeichnung des Anfangspunktes ist selbstverständlich willkürlich. Statt A_t kann man auch ${}_tA$ oder ${}_{\sigma(t)}A_{\rho(t)}$ mit den Randbedingungen $A(a) = \dot{B}_a$ oder $A\,|\,\{a\} \cup \{b\} = \dot{B}$ benutzen und erhält nach analogen Definitionen von zu b konjugierten Punkten oder von konjugierten Punktpaaren auch analoge Indexsätze. Der Indexsatz aus § 1 liefert auch noch Indexsätze, falls (2.2) verletzt ist. Wenn man dann allerdings überhaupt noch von konjugierten Punkten sprechen will, muß man die Multiplizitäten, die durch Sprung Ind_0 $I_B\,|\,A_t$, und diejenigen, die durch Sprung $\text{Ind}\, I_B\,|\,A_t$ gegeben werden, unterscheiden.

Die klassischen Ergebnisse für $B = B_a \times x(b)$, erhält man ohne weiteres mit Hilfe von $A = \{0\}$. Die konjugierten Punkte sind die Brennpunkte der Anfangsmannigfaltigkeit B_a. Parallelität und Konkavität der Randbedingung verschwinden offensichtlich, und der Anfangspunkt ist nicht zu sich selbst konjugiert. Bei allgemeineren Randbedingungen läßt sich $A = \{0\}$ nicht verwenden und es gibt keinen in ähnlicher Weise ausgezeichneten Unterraum von $E_{\dot{B}}$.

Für den Fall unabhängiger Variation auf einer Anfangs- und Endmannigfaltigkeit $B = B_a \times B_b$ ist von Ambrose [1] eine Theorie angegeben worden, die wir folgendermaßen wiedergeben können: Wir nehmen für $A \subset E_{M_{x(a)} \times \dot{B}_b}$ den Raum J^* aller Jacobifelder X mit $X(b) \in \dot{B}_b$ und

$$\langle X(b), \quad \rangle = -\langle\dot{x}(b), T_b(X(b), \quad)\rangle\,,$$

wo T_a bzw T_b den Tensor der Relativkrümmung von B_a bzw B_b bezeichnet.

Der Nullraum von $I_B\,|\,J_t^*$, $a < t < b$, besteht dann aus bei $x(t)$ gebrochenen Jacobifeldern $X \in J_t^*$, für die

$$\langle\dot{X}(a), \quad \rangle + \langle\dot{x}(a), T_a(X(a), \quad)\rangle \perp \dot{B}_a$$

und Sprung $\dot{X}(t) \perp J^*(t)$. Der Nullraum von I_B andererseits besteht aus allen Jacobifeldern aus $E_{\dot{B}}$ mit

$$\langle \dot{X}(a), \quad \rangle + \langle \dot{x}(a), T_a(X(a), \quad)\rangle \perp \dot{B}_a\,,$$
$$\langle \dot{X}(b), \quad \rangle + \langle \dot{x}(b), T_b(X(b), \quad)\rangle \perp \dot{B}_b\,.$$

Die Bedingung für die Nullräume ist also erfüllt, und ein Punkt $x(t)$, $a < t < b$, ist (B, J^*)-konjugiert zu $x(a)$ mit der Multiplizität $\mu(x(t))$, falls es $\mu(x(t))$ linear unabhängige, bei t echt gebrochene Jacobifelder mit

$$\langle \dot{X}(a), \quad \rangle + \langle \dot{x}(a), T_a(X(a), \quad)\rangle \perp \dot{B}_a\,,$$
$$\langle \dot{X}(b), \quad \rangle + \langle \dot{x}(b), T_b(X(b), \quad)\rangle = 0$$

gibt.

Die übrigen Ausdrücke in der Indexformel lassen sich ebenso einfach ausrechnen. Bei Ambrose werden übrigens nur die (B, J^*)-konjugierten Punkte im Innern der Kurve als konjugierte Punkte bezeichnet. Kon $(B, J) + \mu(x(a))$ heißt Konvexität und Par (B, J^*) und $\mu(x(b))$ haben keine besonderen Bezeichnungen. Wir wollen noch ein weiteres Beispiel für die Wahl von A angeben, das es gestattet, beliebige Randbedingungen zu behandeln. Dieses Beispiel hat den Vorteil, daß man Ergebnisseüber die Indizes für feste Randpunkte verwenden kann für die Berechnung der Indizes im allgemeinen Fall. Es entspricht für im gewöhnlichen Sinne nicht konjugierte Randpunkte einem von Morse [3] angegebenen Verfahren der Indexberechnung. Wir nehmen für A den Raum J aller Jacobifelder X mit $\dot{X}(b) \in \dot{B}_b$. Der Nullraum von I_B besteht aus allen Jacobifeldern in $E_{\dot{B}}$ mit

$$\langle (\dot{X}(a), -\dot{X}(b)), \quad \rangle + \langle (\dot{x}(a), -\dot{x}(b)), T((X(a), X(b)), \quad)\rangle \perp \dot{B}\,.$$

Für $a < t < b$ enthält der Nullraum von $I_B | J_t$ alle bei t gebrochenen Jacobifelder mit

$$\langle (\dot{x}(a), -\dot{x}(b)), T((X(a), X(b)), (Y(a), Y(b)))\rangle$$
$$+ \langle \dot{X}(a), Y(a)\rangle - \langle \text{Sprung } \dot{X}(t), Y(t)\rangle - \langle \dot{X}(b), Y(b)\rangle = 0$$

für alle $Y \in J_t$.

Die Bedingung für die Nullräume ist erfüllt. Ferner ist die Kodimension von $J_t(t)$ in $M_{x(t)}$ gleich der Multiplizität, mit der $x(t)$ im gewöhnlichen Sinne zu $x(b)$ kojugiert ist, und andererseits gehören die bei t gebrochenen Jacobifelder X mit $X | [a, t] = 0$ und $X(b) = 0$ zum Nullraum von $I_B | J_t$. Daher stimmen für $a < t < b$ die im gewöhnlichen Sinne zu $x(b)$ konjugierten Punkte mit den (B, J)-konjugierten Punkten zu $x(a)$ überein und die Multiplizitäten sind gleich. Da Nullraum $I_B \cap J \subset$ Nullraum $I_B | J_a$ ist $\mu(x(b)) = 0$, $\mu(x(a))$

$=$ Null $I_B|J_a$ $-$ Null I_B und Par $(B, J) =$ Null I_B. Null $I_B|J_a$ und Kon (B, J) $=$ Ind $I_B|J_a$ berechnen sich dabei einfach als Index und Nullität der quadratischen Form

$$(I_B|J_a)(X) = -\langle(\dot{x}(a), -\dot{x}(b)), T((X(a), X(b)), (X(a), X(b)))\rangle$$
$$-\langle\dot{X}(a), X(a)\rangle + \langle\dot{X}(b), X(b)\rangle$$

für alle Jacobifelder X, die die Randbedingung $\dot{B}$ erfüllen. Es gilt daher:

$$\mathrm{Ind}_0 I_B = \mathrm{Ind}\, I_{x(a)\times x(b)} + \mathrm{Ind}_0 I_B|J_a\,,$$
$$\mathrm{Ind}\, I_B = \mathrm{Ind}\, I_{x(a)\times x(b)} + \mathrm{Ind}\, I_B|J_a + \mu(x(a))\,.$$

Sind im Spezialfall $x(a)$ und $x(b)$ im gewöhnlichen Sinne nicht konjugiert, so ist zusätzlich $\mu(x(a)) = 0$. Ist man nur an dieser Vergleichsformel interessiert, so kann man auch viel direkter vorgehen. Besonders trivial ist der Spezialfall. Dort ist $E_{\dot{B}} = E_0 \oplus J_a$ mit I_B-orthogonalen Summanden.

Literaturverzeichnis

[1] W. Ambrose, *The index theorem in Riemannian geometry,* Ann. of Math. **73** (1961) 49–86.

[2] M. R. Hestenes, *Applications of the theory of quadratic forms in Hilbert space to the calculus of variations,* Pacific J. Math. **1** (1951) 525–581.

[3] M. Morse, *Generalized concavity theorem,* Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **21** (1935) 359–362.

[4] F. Riesz & B, Sz.-Nagy, *Vorlesungen über Funktionalanalysis,* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1956.

[5] T. Takahashi, *Corrections to "The index theorem in Riemannian geometry" by W. Ambrose,* Ann. of Math. **80** (1964) 538–541.

Universität Heidelberg