



Abb. 13

gehenden Schraubenflächen starr, etwa aus Blech ausgeführt, und würden wir diese Schraubenflächen mit konstanter Geschwindigkeit rückwärts bewegen, so würde die entstehende Potentialströmung gerade eine solche sein, wie sie die Betzsche Bedingung erfordert. Auf Grund dieser Vorstellung hat Prandtl die der Minimalbedingung entsprechende Zirkulationsverteilung näherungsweise berechnet, wie sie in Abb. 13 wiedergegeben ist.

38

## Das Turbulenzproblem.

(Nachtrag und Berichtigung.<sup>1)</sup>)

Von F. NOETHER in Berlin.

Einige neuere Arbeiten, die das Turbulenzproblem betreffen, waren mir erst verspätet zugänglich. Herr L. Schiller hat mir das Manuskript seiner demnächst in dieser Zeitschrift erscheinenden ausführlichen Arbeit zur Verfügung gestellt. Die wertvollen Versuchsergebnisse können weiter zur Klärung der Turbulenzfrage beitragen. Es war früher wiederholt (z. B. von J. Morrow<sup>2)</sup>) auf die Unsicherheit hingewiesen worden, die in die Messung der kritischen Zahl dadurch hineinkommt, daß infolge der Einströmungsverhältnisse die zum Ausgang genommene Laminarströmung unvollkommen hergestellt wird. Solche Einflüsse können auch bei den von allen anderen stark abweichenden Resultaten von Ruckes (vergl. S. 127) vorgelegen haben. L. Schiller zeigt nur, daß bei hinreichender »Anlaufänge«, d. h. Entfernung der Meßstelle vom Einlauf in das Versuchsrohr, sich immer eine scharf bestimmte untere Grenze der Reynoldsschen Zahl für den Uebergang zwischen laminarer und turbulenter Bewegung einstellt, die dann als die kritische Zahl aufzufassen ist. Die Stelle, an der der Uebergang tatsächlich stattfindet, hängt, übereinstimmend mit Ekmans Resultaten, von der Größe der am Einlauf stattfindenden Störung ab und konnte in glatten Röhren bis 11000 erhöht werden, auch in rauhen bis 9600. Nie aber konnte die Grenze  $R = 1160$  unterschritten werden. Diese untere Grenze scheint auch von der Rauigkeit der Röhren unabhängig zu sein, da sie sich für gleichartige Metallrohre verschiedener Weite, also verschiedener »relativer Rauigkeit«, übereinstimmend ergab und auch wenig von der von Reynolds mit Glasröhren festgestellten unteren Grenze<sup>3)</sup> abweicht.

Wenn die Unabhängigkeit des Eintritts der Turbulenz vom Rauigkeitsgrad des Rohres gesichert ist, so scheint mir das, übereinstimmend mit Hr. Schiller, eine starke Stütze für die im Bericht vertretene Auffassung der Turbulenz als eines freien Bewegungszustandes, für den die am Einlauf stattfindenden, sowie sonstige größere Störungen auflösenden Charakter haben, ohne daß andauernde Erregung im weiteren Verlauf der Strömung nötig wäre. Eine endgültige Entscheidung über die Frage, ob durch Wandrauigkeit »erzwungene« Bewegung vorliegt, würden allerdings erst Versuche über den Einfluß einer fortgesetzten Verminderung der Wandrauigkeit ergeben. Bemerkenswert ist auch im Zusammenhang mit den unter II besprochenen theoretischen Ergebnissen die Feststellung, daß an der kritischen Grenze  $R = 1160$  der Unterschied zwischen dem Widerstand des laminaren und des turbulenten Zustandes bereits ein bestimmter endlicher ist.

In ähnlichem Sinne sind neuere Versuche von T. E. Stanton und seinen Mitarbeitern<sup>4)</sup> wichtig für die Turbulenzfrage. Die Verfasser haben durch sehr feine Pitot-Rohre die Geschwindigkeit bis in unmittelbare Nähe der Wand (bis 0,03 mm Abstand) gemessen und das Vorhandensein der parabolischen Verteilung in der Randschicht ohne

<sup>1)</sup> S. diese Zeitschrift 1 1921 S. 125 bis 133.

<sup>2)</sup> Proc. Royal Soc. London A 75 1905.

<sup>3)</sup> Berichtigung: Hr. L. Schiller macht mich darauf aufmerksam, daß meine Angabe 1900 für diese Zahl irrig ist, vielmehr im Mittel 1000 bis 1200 aus Reynolds Versuchen zu entnehmen ist. Die vergleichenden Bemerkungen auf S. 128 des Berichts werden damit hinfällig.

<sup>4)</sup> On the conditions at the boundary of a fluid in turbulent motion. Proc. R. Soc. London A 97 S. 413 1920. S. auch Physik. Berichte 2 1921 S. 561.

Gleiten an der Wand selbst festgestellt, wie sie von der hydrodynamischen Theorie glatter Rohre gefordert wird. Es ist schwer denkbar, daß bei dieser Verteilung, wo wegen des Haftens an der Wand deren Unebenheiten sozusagen glatt überdeckt werden, die molekulare Rauigkeit der Wand noch ausschlaggebenden Einfluß haben kann, und insofern scheinen auch diese Versuche für unsere obige Auffassung zu sprechen.

Der gegenteiligen Auffassung der Turbulenz als einer durch fortdauernde Störungen erzwungenen Bewegung sucht C. W. Oseen<sup>1)</sup> vom theoretischen Standpunkt näher zu kommen. Er untersucht die Wirkung andauernder, beliebig verteilter Kräfte auf eine unendlich ausgedehnte Flüssigkeit, deren Geschwindigkeitsverteilung dem laminaren Gesetz (für den ebenen Fall) genügt<sup>2)</sup>. Es ergibt sich ein bestimmter gestörter Strömungszustand, aber im Grenzfall verschwindender Zähigkeit kann eine Komponente der erzeugten Strömung unendlich groß werden, so klein auch die störenden Kräfte sind (alles unter Beschränkung auf lineare Glieder zu verstehen). Wenn die Flüssigkeit begrenzende Wände hat, so fällt auch dieser Effekt weg, aber die Wirkung von störenden Kräften, deren Sitz in der Nähe der Wände ist, bedarf dann noch gesonderter Untersuchung, die der Verfasser in Aussicht stellt. Eine Andeutung, wie die andauernden Störungen bei bestimmter, nicht verschwindender Reibung den Übergang zur Turbulenz bewirken könnten, ergibt die Untersuchung nicht. Sie bestätigt nur im Sinne der schon von Lord Kelvin geäußerten und in unserem Bericht vertretenen Auffassung, daß die Stabilität der Laminarbewegung mit abnehmender Zähigkeit immer geringer wird; im Grenzfall verschwindender Reibung ist der laminare Strömungszustand (und wohl auch jeder andere) ohne feste Begrenzungen ein »indifferentes« gegenüber Kräften ohne Kräftepotential.

71

## KURZE AUSZÜGE

### Elementare Mechanik.

**Elastischer Stoß.** (Hartmann, Variation systématique de la valeur de la force vive dans le choc élastique des corps, Comptes rendus, Paris, Bd. 164, 1917, S. 94—96.) Herr H. entdeckt durch Beobachtungen an Stahlzylindern, daß die Gesetze des elastischen Stoßes nicht richtig sind, daß zwar das Gesetz des Descartes von der Erhaltung der Bewegungsgröße, aber nicht das Leibnizsche Gesetz von der Erhaltung der lebendigen Kraft mit der Erfahrung übereinstimmt. Die gesamte lebendige Kraft erfährt vielmehr eine Verminderung, die dem Quadrat der Geschwindigkeitsdifferenz vor dem Stoße proportional ist. Ein empirischer Faktor, analog dem Restitutions-Koeffizienten wird eingeführt. — Das steht wohl schon in allen deutschen Lehrbüchern; wertvoll ist vielleicht das Beobachtungsmaterial, das zeigt, daß der Restitutions-Koeffizient von der relativen Geschwindigkeit abhängt.

**Ballistische Kurve.** (Olive, Sur le tracé mécanique de l'photographie balistique, Comptes Rendus, Paris Bd. 164, 1917, S. 97—99.) Es wird ein einfacher Apparat angegeben, der gestattet, den Hodographen der ballistischen

Kurve zu zeichnen, wenn der Luftwiderstand linear von der Geschwindigkeit abhängt. Man muß also den gesamten Bewegungsvorgang in Teile zerlegen, in denen die lineare Abhängigkeit mit genügender Annäherung erfüllt ist.

**Drehung eines bewegten Balles.** (Appell, Mouvements aériens gauches de sphères pesantes légères, Comptes Rendus, Paris Bd. 166, 1918, S. 22—23; Expériences de M. Carrière sur le mouvement aérien de balles sphériques légères tournant autour d'un axe perpendiculaire au plan de la trajectoire, Comptes Rendus, Paris Bd. 165, 1917, S. 694—696.) Es wird die Idee ausgesprochen, das Problem der Bewegung eines rotierenden Balles in Luft mit Hilfe der Hypothese zu behandeln, daß der Widerstand der Luft (eine Funktion der Geschwindigkeit) nicht der Geschwindigkeit entgegengesetzt gerichtet sei, sondern ein Vektor, der aus dieser Richtung durch Drehung um die Rotationsachse, der Rotation entgegen, durch einen spitzen Winkel entsteht, der eine wachsende Funktion der Drehgeschwindigkeit des Balles sei. Es sei ferner wahrscheinlich, daß die Bewegung bei dieser Annahme schließlich in eine gleichförmige senkrechte Bewe-

<sup>1)</sup> Ueber das Stabilitätsproblem in der Hydrodynamik II, Archiv f. Mat. Astr. of Fysik 14 1919 Nr. 16.

<sup>2)</sup> An Stelle der Kanalbreite, die sonst in die Reynoldssche Zahl einkehrt, muß man sich hier eine gewisse Längendimension des Gebiets denken, in dem störende Kräfte wirken.