ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

A. CRUMEYROLLE

Déformations d'algèbres associées à une variété symplectique, une construction effective

Annales de l'I. H. P., section A, tome 35, nº 3 (1981), p. 175-194
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1981__35_3_175_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. XXXV, n° 3, 1981, p. 175-194.

Section A :
Physique théorique.

Déformations d'algèbres associées à une variété symplectique, une construction effective

par

A. CRUMEYROLLE
Université de Toulouse III, 118, Route de Narbonne

INTRODUCTION

On sait associer à une variété symplectique V, de dimension $n = 2r$, l'algèbre associative des fonctions $C^{\infty}(V)$ et l'algèbre de Lie N (dite de Poisson) induite sur $C^{\infty}(V)$ par le crochet de Poisson.

L'étude de déformations « formelles » de ces algèbres, au sens précis donné par Gerstenhaber [*5*], fondamentale en mécanique quantique, liées au crochet dit de Moyal, a été développée depuis 1973 par A. Lichnérowicz et certains de ses collaborateurs et présentée notamment dans [*7*] [*1*], dans le cadre plus général des variétés de Poisson. J. Vey a donné une condition suffisante très forte d'existence de ces déformations ($H^3(V, \mathbb{R}) = 0$, en cohomologie de de Rham) [*9*], pour ce qui concerne l'algèbre de Poisson.

Comme l'avait montré Gerstenhaber l'étude de ces déformations possède une signification cohomologique (au sens de Hoschschild pour les algèbres associatives, de Chevalley pour les algèbres de Lie). Cependant nous n'utiliserons pas ici ce point de vue, mais partirons de notions liées aux algèbres de Clifford symplectiques [*3*] et nous nous intéresserons aussi à des déformations de caractère non formel — c'est-à-dire pour lesquelles nous donnerons des conditions de convergence. Des déformations formelles des algèbres des fonctions différentiables sont susceptibles d'être construites sur toute variété symplectique (cas complexe), ou sur toute variété symplectique munie d'un champ de lagrangiens (cas réel) (*).

Si l'on compare ces déformations à celles que l'on a tirées du produit de Moyal, il apparaît une différence essentielle, alors que ces dernières ne comportent que des termes de degré pair, les nôtres possèdent des termes de toute parité, de plus elles ont un certain caractère universel : il existe un homomorphisme de nos déformations sur toute déformation de type Moyal.

Nous examinons brièvement comment on peut utiliser ces déformations dans le cadre d'une quantification des systèmes classiques. Enfin nous signalons que ces méthodes pourraient naturellement se généraliser à la théorie quantique des champs (bosons et fermions).

L'auteur exprime sa gratitude au Pr. A. Lichnérowicz pour des suggestions qui lui ont permis d'améliorer la présentation didactique de ce travail.

Nota. — Cet article a fait l'objet, sous une forme extrêmement voisine, d'exposés au Séminaire de Géométrie différentielle de la faculté des Sciences de Toulouse (février 1980), à la faculté des Sciences de Sfax (avril 1980) et de Saragosse (juin 1980). Il est joint à la note publiée aux C. R. Acad. Sciences de Paris en octobre 1980.

I. RAPPELS ET PRÉLIMINAIRES ALGÉBRIQUES

On considère d'abord un espace réel E de dimension $n = 2r$, muni d'une forme symplectique F. On sait qu'on peut associer naturellement à la structure symplectique une structure orthogonale. Pour les notions élémentaires concernant les algèbres de Clifford symplectiques $C_S(F)$, $C_S(F)_l$ on se reportera à nos travaux antérieurs [2]. Nous rappelons toutefois quelques résultats essentiels.

On construit d'abord l'algèbre associative $C_S(F)$, $\odot$, quotient de l'algèbre tensorielle de E par l'idéal bilatère engendré par l'ensemble des éléments :

$$x \otimes y - y \otimes x - F(x, y), \qquad x, y \in E.$$

Cela revient à calculer en tenant compte de la condition :

$$x \odot y - y \odot x = F(x, y).$$

$C_S(F)$ est linéairement isomorphe à l'algèbre symétrique $\vee E$, c'est aussi une algèbre isomorphe à l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Heisenberg d'espace

$$E \oplus K, \qquad \text{avec le crochet } [x, y] = F(x, y), \qquad [x, 1] = 0.$$

(*) Voir remarque bas de page 17, on peut déformer le crochet de Poisson de N sur toute variété symplectique, rendant caduque la condition de J. Vey.

Toutefois cette algèbre $C_S(F)$ est insuffisante (en particulier pour construire les revêtements du groupe symplectique), c'est pourquoi nous définirons l'algèbre de Clifford symplectique large $C_S(F)_l$, dont les éléments sont des séries à termes pris dans $C_S(F)$.

Il sera utile d'introduire aussi les algèbres complexifiées $C_S(F')$ et $C_S(F')_l$.

Prenons une base $(e_\alpha, e_{\beta *})$, $\alpha, \beta = 1, \ldots, r$, à la fois symplectique et orthonormée, et, associons-lui la base $(\varepsilon_\alpha, \varepsilon_{\beta *})$ du complexifié avec :

$$\varepsilon_\alpha = \frac{e_\alpha - ie_{\alpha *}}{\sqrt{2}}, \qquad \varepsilon_{\alpha *} = \frac{e_\alpha + ie_{\alpha *}}{\sqrt{2}},$$

qui est une base de Witt au sens orthogonal telle que

$$F(\varepsilon_\alpha, \varepsilon_{\beta *}) = i\delta_{\alpha\beta}, \qquad F(\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta) = F(\varepsilon_{\alpha *}, \varepsilon_{\beta *}) = 0,$$

une telle base sera appelée hermitienne.

Les éléments de $C_S(F)_l$, sont des séries $\hat{u}$ de terme général :

$$\lambda_{h_1,h_2,\ldots h_r,k_1,k_2,\ldots k_r}(e_1)^{h_1} \odot (e_2)^{h_2} \odot \ldots (e_r)^{h_r} \odot (e_{1*})^{k_1} \odot (e_{2*})^{k_2} \odot \ldots \odot (e_{r*})^{k_r}$$

écrit symboliquement :

$$\lambda_{HK*}e^H \odot e^{K*}, \qquad (e^\Phi = 1),$$

(les h_i, k_i sont des entiers positifs ou nuls), avec la majoration, à partir d'un certain rang :

$$(1) \qquad |\lambda_{HK*}| \leqslant \frac{\sigma(\hat{u})\rho(\hat{u})^{|H|+|K*|}}{H!\,K^*!} \quad \begin{cases} |H| = \Sigma h_i,\ H! = h_1!\,h_2!\ldots h_r!, \\ |K^*| = \Sigma k_i,\ K^*! = k_1!\,k_2!\ldots k_r!, \end{cases}$$

$\sigma(\hat{u})$, $\rho(\hat{u})$ constantes positives, qui ne dépendent que de $\hat{u}$ [*2*].

Il sera essentiel ici de remarquer que dans tout repère de l'algèbre symétrique, linéairement isomorphe à $C_S(F)$, *les conditions* (1) *sont de la même forme.*

Sans d'ailleurs utiliser nécessairement un repère symplectique de E, nous traduisons la loi de changement des composantes d'un terme homogène de $\hat{u}$, de degré k, par :

$\lambda_{A'} = M^B_{A'}\lambda_B$ ($M^B_{A'}$ étant la matrice de représentation dans l'algèbre symétrique du changement de repère) ; k sera arbitrairement grand relativement à n.

La division euclidienne de k par n donnant :

$k = an + b$, $o \leqslant b < n$, selon un résultat connu au sujet des coefficients multinomiaux :

$$\frac{1}{k!} \leqslant \frac{1}{b_1!\,b_2!\ldots b_n!} \leqslant \left(\frac{1}{a!}\right)^n, \qquad b_1 + b_2 + \ldots b_n = k.$$

La formule de Stirling, $k! \simeq \left(\frac{k}{e}\right)^k \sqrt{2\pi k}$, écrite modulo des scalaires constants, donne :

$$(a!)^n \simeq k^{k-b+\frac{n}{2}} e^{-k} n^{b-k-\frac{n}{2}}$$

$$\frac{1}{(a!)^n} \simeq \frac{k^{b-\frac{n}{2}+\frac{1}{2}} n^{k-b+\frac{n}{2}}}{k!}$$

$$|\lambda_{A'}| \leqslant \Sigma\,|M^{B}_{A'}| \left(\frac{1}{a!}\right)^n pq^k \qquad (p = \sigma(\hat{u}),\ q = \rho(\hat{u})),$$

somme étendue aux $\frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$ termes, dont le nombre est la dimension de l'espace des tenseurs symétriques de degré k. Comme :

$$(n+k-1)! \simeq k^{n-1+k-\frac{1}{2}} e^{-k} n^{-\frac{1}{2}}$$

$$(n-1)! \simeq \left(\frac{n-1}{e}\right)^{n-1} n^{-1/2},$$

le nombre de ces termes est de l'ordre de k^{n-2}, majoré par n^k, pour k suffisamment grand.

Si $C \geqslant \operatorname{Sup} |M^i_j|$, $i, j = 1, 2, \ldots n$,

$$\begin{aligned} |\lambda_{A'}| &\leqslant C^k pq^k \left(\frac{1}{a!}\right)^n n^k \\ &\leqslant \alpha C^k pq^k n^k \frac{k^{b-\frac{n}{2}+\frac{1}{2}} n^{k-b+\frac{n}{2}}}{k!} && (\alpha \text{ scalaire fixe}) \\ &\leqslant \frac{\alpha C^k pq^k n^{4k}}{k!} && (k^{b-\frac{n}{2}+\frac{1}{2}} < k^b < b^k < n^k) \\ &\leqslant \frac{\alpha C^k pq^k n^{4k}}{b_1!\, b_2! \ldots b_n!} \end{aligned}$$

et ceci donne une majoration du type souhaité.

Introduisant le complexifié $C_S(F')_l$, il sera utile de calculer aussi avec les repères déduits des repères hermitiens $(\varepsilon_\alpha, \varepsilon_{\beta^*})$ et de faire intervenir des changements de base de matrice A^i_j dans le groupe unitaire. *Comme* $A^\alpha_{\beta^*}$ *et* $A^{\alpha^*}_\beta$ *seront nuls, ces changements de repères respecteront l'identification faite à partir de l'un quelconque d'entre eux, entre l'algèbre symétrique et l'algèbre de Clifford symplectique.* De manière précise si $\mathscr{R}$ et $\mathscr{R}'$ sont 2 tels repères et $i_{\mathscr{R}}$, $i_{\mathscr{R}'}$ les identifications linéaires on a : $i_{\mathscr{R}}(u) \odot i_{\mathscr{R}}(v) = i_{\mathscr{R}'}(u) \odot i_{\mathscr{R}'}(v)$ pour tout u et tout v appartenant à l'algèbre symétrique (car dans un monôme $\lambda_{HK^*}\varepsilon^H\varepsilon^{K^*}$ il n'y a pas de modification de l'ordre relatif des indices étoilés avec les indices non étoilés).

On peut noter que cette remarque vaudrait aussi pour identifier l'algèbre extérieure et l'algèbre de Clifford orthogonale.

Remarque. — Abandonnant la condition de convergence, remplaçant E par $E \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \mathbb{R}((t))$ et F par tF, on pourra envisager des développements dont les coefficients sont des séries formelles en t, et des algèbres de Clifford symplectiques formelles.

En effet, il est clair, d'après la formule (12) du paragraphe IV (cf. plus loin) que le produit de deux séries dont les termes généraux sont dans $C_S(F)$ sera une nouvelle série à coefficients dans $\mathbb{R}((t))$ et qu'on engendra bien ainsi une algèbre associative, notée $C_S(tF)$ avec un léger abus de notation.

II. L'HOMOMORPHISME DE TAYLOR

V est une variété paracompacte symplectique de dimension $n = 2r$. On sait que l'on peut définir sur V le crochet de Poisson de $f, g \in C^\infty(V)$:

$$\{ f, g \} = \frac{1}{2} F^{ij}(\partial_i f)(\partial_j g)$$

à partir de la forme symplectique F; $dF = 0$ entraînant l'identité de Jacobi, $C^\infty(V)$ possède une structure d'algèbre de Lie N.

Sur V existe un fibré de Clifford symplectique [*2*] à fibres linéairement isomorphes à $C_S(F)_l$ (ou $C_S(F')_l$, cas complexe) avec un abus léger de notation. Les fibres ont une structure d'espace normé [*2*]. Sur ce fibré opère le groupe symplectique, $Sp(n, \mathbb{R})$ réductible au groupe unitaire $U(r)$. Après réduction au groupe unitaire, on peut identifier globalement et linéairement une section du fibré symétrique à une section du fibré de Clifford symplectique : cela suit de la remarque du I.

Si $f \in C^\infty(V)$ *on va montrer qu'on peut associer à* f *deux sections du fibré de Clifford symplectique, l'une banale, l'autre liée à un homomorphisme que nous dirons de Taylor.* La section non banale jouera un rôle fondamental dans la théorie de la quantification des champs classiques à r degrés de liberté.

Soit $x_0 \in V$, et $(x^1, x^2, \dots x^n)$ un système de coordonnés locales en x_0, nulles en x_0, ∇ est une connexion sur le fibré tangent symplectique, sans torsion, telle que $\nabla F = 0$, il existe une infinité de telles connexions (dites symplectiques), deux d'entre elles diffèrent par un tenseur complètement symétrique d'ordre 3, F définissant comme l'on sait un isomorphisme entre T(V) et T*(V).

$f \in C^\infty(V)$, et $\tilde{f}$ est le germe en x_0 de f; $\tilde{C}^\infty(x_0)$ est l'algèbre associative de ces germes; $\overset{**}{\vee} T^*_{x_0}(V)$ est l'algèbre des séries formelles à coefficients réels construite sur $T^*_{x_0}(V)$. A $\tilde{f} \in \tilde{C}^\infty(x_0)$ associons $\hat{f} \in \overset{**}{\vee} T^*_{x_0}(V)$ par le jet en x_0, d'ordre ∞ :

$$(2) \quad \underline{\hat{f} = f(x_0) + (\nabla_i f)_{x_0} dx^i + \ldots + S(\nabla_{l_1 l_2 \ldots l_k} f)_{x_0} dx^{l_1} \otimes dx^{l_2} \otimes \ldots dx^{l_k} + \ldots}$$

S étant une symétrisation que nous allons préciser.

Comme dans le cas plat, on veut retrouver le développement de Taylor avec terme général de degré k :

$$\sum_{q_1, q_2, \ldots q_n} \frac{1}{q_1!\, q_2! \ldots q_n!} (\partial_{q_1 q_2 \ldots q_n} f)(dx^1)^{q_1} \vee (dx^2)^{q_2} \vee \ldots \vee (dx^n)^{q_n}$$

où $(\partial_{q_1} f) = \dfrac{\partial^{q_1} f}{(\partial x^1)^{q_1}}$ et $q_1 + q_2 \ldots + q_n = k$; on prendra donc pour terme général de (2), en degré total k :

$$(3) \quad \underline{\Sigma \frac{1}{q_1!\, q_2! \ldots q_n!} (\nabla_{(q_1, q_2, \ldots q_n)} f)_{x_0} (dx^1)^{q_1} \vee (dx^2)^{q_2} \vee \ldots \vee (dx^n)^{q_n}}$$

somme étendue à tous les q_i entiers tels que $q_1 + q_2 + \ldots q_n = k$ avec : $\nabla_{(q_1, q_2, \ldots q_n)} f = \dfrac{q_1!\, q_2! \ldots q_n!}{k!} \Sigma(\nabla_{q_1 q_2 \ldots q_n} f)$, $q_1, q_2, \ldots q_n$ fixés, où on écrit toutes les dérivations avec tous les ordres possibles distincts, en nombre $\dfrac{k!}{q_1!\, q_2! \ldots q_n!}$.

Évidemment $\nabla_{(q_1 q_2 \ldots q_n)} f = \partial_{q_1 q_2 \ldots q_n} f$ dans le cas plat.

Ainsi le terme général de (2) en degré k pourra se noter encore :

$$(4) \quad \underline{\Sigma \frac{1}{H!\, K^*!} (\nabla_{(H, K^*)} f)_{x_0} dx^H \vee dx^{K^*}},$$

avec $\dfrac{(n + k - 1)!}{k!\, (n - 1)!}$ termes sous le signe Σ.

Nous dirons de $\nabla_{(q_1, q_2, \ldots, q_n)} f$ que c'est une *dérivée covariante symétrique* de $f \in C^\infty(V)$.

Le deuxième membre de (2) *ne dépend que du germe de* f *en* x_0, *il est indépendant du choix de tout repère, naturel* ou *non.*

La formule de Leibnitz s'écrit avec des dérivées ordinaires :

$$\frac{1}{q_1!\, q_2! \ldots q_n!} \partial_{q_1 q_2 \ldots q_n}(fg)$$
$$= \sum_{p_i \leqslant q_i} \frac{1}{p_1!\, p_2! \ldots p_n!} \times \frac{1}{(q_1 - p_1)!\, (q_2 - p_2)! \ldots (q_n - p_n)!}$$
$$(\partial_{p_1 p_2 \ldots p_n} f)(\partial_{q_1 - p_1, q_2 - p_2, \ldots, q_n - p_n} g)$$

On pose par définition (« dérivation covariante symétrique ») :

$$\underline{\nabla_{(p_1,p_2,\ldots,p_n)}(\nabla_{(q_1,q_2,\ldots,q_n)}f) = \nabla_{(p_1+q_1,p_2+q_2,\ldots,p_n+q_n)}f}$$

[en particulier $\nabla_{(i)}(\nabla_j f) = \nabla_{(ij)}f$]

et la formule de Leibnitz sera encore valable par simple analogie formelle pour les dérivées symétriques covariantes.

$$\nabla_{(0,0,\ldots,0,q_i,0,\ldots,0)}f \text{ s'identifie à } \underbrace{\nabla_i \circ \nabla_i \circ \ldots \nabla_i f}_{q_i \text{ fois}}$$

tandis que

(5) $$\underline{\nabla_{(ij)}f = \nabla_{\underset{i^e}{(0,0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)}} \underset{i \neq j}{} \nabla_{\underset{j^e}{(0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)}}f = \nabla_{ij}f = \nabla_{ji}f,}$$

si la torsion est nulle.

La validité de la formule de Leibnitz entraîne, comme pour un développement usuel de Taylor que $\widehat{fg} = \hat{f}\cdot\hat{g}$, où le produit du deuxième membre est dans l'algèbre symétrique (homomorphisme de Taylor).

Le noyau de cet homomorphisme quand $\tilde{f}$ décrit $\tilde{C}^\infty(x_0)$ est l'ensemble des germes dont les dérivées d'ordre quelconque sont nuls en x_0. Ce noyau est donc différent de 0 en général. Pour éliminer cette difficulté il est commode de faire des hypothèses de pseudo-analyticité et même d'analycité, l'homomorphisme de Taylor devient injectif, car un raisonnement par récurrence montre que la donnée de la suite des $\nabla_{(q_1,q_2,\ldots,q_n)}f$ est équivalente à celle de la suite des $\partial_{q_1 q_2 \ldots q_n} f$, (écrire les dérivations symétriques d'ordre 1, 2, 3, etc., les dérivées partielles ordinaires se calculent l'une après l'autre en fonction des $\nabla_i f$, $\nabla_{(ij)}f$, $\nabla_{(ijk)}f$..., etc.).

HYPOTHÈSE (H). — *Supposons qu'il existe, pour un certain choix de* ∇, $\tilde{C}^H(x_0) \subseteq \tilde{C}^\infty(x_0)$, *non nul, tel que si* $\tilde{f} \in \tilde{C}^H(x_0)$, *il existe des constantes* A *et* a *positives, pouvant dépendre de* f *et de* x_0, *avec :*

a) $\underline{(H_1) \mid \nabla_{(i_1,i_2\ldots i_k)}f\mid_{x_0} \leqslant Aa^k \text{ pour tout } k \text{ entier positif,}}$

b) $\underline{(H_2): \text{l'application } \varphi_{|\tilde{C}^H(x_0)} : \tilde{f} \to \hat{f} \text{ injective.}}$

On vérifie immédiatement que si $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ satisfont à (H_1) il en est de même de leur produit (formule de Leibnitz) et de leur somme. De plus la condition *a*) est indépendante de tout choix de repère local, car en vertu du caractère tensoriel du premier membre (H_1), il intervient par changement de base, un nombre de termes de l'ordre de k^{n-2}, majoré par quelque n'^k, et si M est une borne supérieure des coefficients matriciels apparaît au deuxième membre $AMn'^k a^k$.

Il existe des cas où la condition (H) peut être satisfaite :

. Si V est un espace vectoriel symplectique, muni de la connexion plate et f une fonction quasi-analytique telle que ses dérivées partielles vérifient (H_1).

(On pourrait même en supposant que (H_1) est satisfaite pour tous les points d'un ouvert relativement compact contenant x_0, supposer seulement que l'on considère des fonctions C^∞ satisfaisant à une majoration de même type $|\partial_{i_1 \dots i_k} f| \leqslant A a^k$, $\forall x \in \mathcal{O}$, (H_2) est alors vérifiée).

Si V est une variété symplectique à structure analytique [1], s'il existe une connexion plate, ou si l'on choisit f telle que $\nabla_{(ij)} f = 0$, ou $\nabla_{(ijk)} f = 0$, ou toute condition de ce type : $\nabla_{(i_1 i_2 \dots i_q)} f = 0$, q fixé, ∇ arbitraire, sur un voisinage ouvert de x_0.

Dans la suite nous abandonnerons la condition (H_1) et serons conduit à introduire des algèbres de Clifford symplectiques formelles et des déformations formelles de $C^\omega(V)$ (cas analytique) et de $C^\infty(V)$ (cas différentiable). L'hypothèse (H) aura donc servi comme hypothèse de travail, si nous nous intéressons spécialement au cas formel différentiable C^∞.

III. DÉFORMATIONS DES ALGÈBRES ASSOCIÉES A UNE VARIÉTÉ SYMPLECTIQUE

Introduisons maintenant des bases adaptées à la structure presque hermitienne (bases H-adaptées).

Nous prenons d'abord l'hypothèse (H).

φ restreinte à $\tilde{C}^H(x_0)$ est une application bijective de $\tilde{C}^H(x_0)$ sur l'algèbre de Clifford symplectique large cotangente en x_0. (A.Cl.S.l.x_0).

Il sera commode d'introduire des fonctions à valeurs complexes et une algèbre $\tilde{C}^H(x_0, \mathbb{C})$.

$\mathcal{R}$ étant un repère adapté, nous posons avec une notation déjà utilisée en (I) : $\varphi_1 = i_{\mathcal{R}} \circ \varphi$ et $\hat{\hat{f}} = \varphi_1(f)$, $\hat{\hat{f}}$ est un élément de l'(A.Cl.S.l.x_0) complexifiée. $\hat{\hat{f}} \odot \hat{\hat{g}}$ est le produit cliffordien. Nous définissons :

$$\underline{\tilde{f} * \tilde{g} = \varphi_1^{-1}(\hat{\hat{f}}) * \varphi_1^{-1}(\hat{\hat{g}}) = \varphi_1^{-1}(\hat{\hat{f}} \odot \hat{\hat{g}})}, \tag{6}$$

ce qui donne sur $\tilde{C}^H(x_0, \mathbb{C})$ une structure d'algèbre associative et ensuite, naturellement un crochet de Lie.

φ_1 composé à gauche avec tout automorphisme intérieur de l'algèbre de Clifford symplectique donne un autre isomorphisme d'identification $\psi \circ \varphi_1$ et le même produit $*$, ψ peut provenir d'une transformation symplectique locale ou globale.

---

[1] Avec atlas compatible avec le pseudo-groupe des fonctions entières de type exponentiel.

On peut remplacer l'espace symplectique standard par $E \underset{\mathbb{C}}{\otimes} \mathbb{C}((t))$, $\mathbb{C}((t))$ corps des fractions rationnelles en t, muni de la forme symplectique tF. Remplaçant partout F par tF, on obtient sur V, au point x_0, en utilisant (6) une déformation de l'algèbre associative $\tilde{C}^H(x_0, \mathbb{C})$. Si t est interprété comme un paramètre réel arbitraire, $\tilde{f} * \tilde{g}$ sera un élément de $\tilde{C}^H(x_0, \mathbb{C})$. On s'assure que les conditions de convergence introduites en (I) restent valables pour tF. Nous y reviendrons.

Avec une base H-adaptée $(\theta^\alpha, \theta^{\beta^*})$ au point x_0, prenons :

$$(7) \quad \hat{\tilde{f}} = \tilde{f}(x_0) + (\nabla_\alpha \tilde{f})_{x_0}\theta^\alpha + (\nabla_{\alpha^*}\tilde{f})_{x_0}\theta^{\alpha^*} + \dots \frac{1}{H!\,K^*!}(\nabla_{(H,K^*)}\tilde{f})_{x_0}\theta^H \vee \theta^{K^*} \dots$$

$$(8) \qquad \theta^\alpha \odot \theta^{\beta^*} - \theta^{\beta^*} \odot \theta^\alpha = it\delta^{\alpha\beta}.$$

On rappelle la formule tirée de [2] :

$$(9) \quad (\theta^{\alpha^*})^k \odot (\theta^\alpha)^l = (\theta^\alpha)^l \odot (\theta^{\alpha^*})^k - ilkt(\theta^\alpha)^{l-1} \odot (\theta^{\alpha^*})^{k-1}$$
$$+ \dots (-i)^p t^p \frac{l(l-1)\dots(l-p+1)}{p!} k(k-1)\dots(k-p+1)$$
$$(\theta^\alpha)^{l-p} \odot (\theta^{\alpha^*})^{k-p} \dots$$

Elle montre que dans $\tilde{f} * \tilde{g}$ le terme de degré 0 en t est $\tilde{f}\tilde{g}$. L'algèbre construite ne peut visiblement être isomorphe à $\tilde{C}^H(x_0, \mathbb{C}) \underset{\mathbb{C}}{\otimes} \mathbb{C}((t))$, donc nous avons bien obtenu une déformation non triviale de $\tilde{C}^H(x_0, \mathbb{C})$.

Si on construit maintenant :

$$t[\tilde{f}, \tilde{g}] = \tilde{f} * \tilde{g} - \tilde{g} * \tilde{f}$$

ou

$$t[f, g] = f * g - g * f$$

on a nécessairement une structure d'algèbre de Lie complexe sur $C^H(x_0, \mathbb{C})$, cette algèbre de Lie est une déformation de l'algèbre $N^H(x_0)$ que nous allons expliciter :

Cherchons le coefficient de t dans le développement de $\hat{\tilde{f}} \odot \hat{\tilde{g}}$. Le terme de degré 0 relativement aux $\theta^H \vee \theta^{K^*}$ vient uniquement, d'après (9) de :

$$\sum_\alpha (\nabla_{\alpha^*}\tilde{f})_{x_0}\theta^{\alpha^*} \odot (\nabla_\alpha \tilde{g})_{x_0}\theta^\alpha \qquad \text{et c'est : } -i\Sigma(\nabla_{\alpha^*}\tilde{f})_{x_0}(\nabla_\alpha \tilde{g})_{x_0}.$$

Quant au terme général du degré 1 en t, on ne peut l'obtenir qu'en réordonnant dans un produit de monômes en $\theta^H \vee \theta^{K^*}$ un seul couple $(\theta^{\alpha^*})^k \odot (\theta^\alpha)^l$; si ce produit de monômes s'écrit :

$$\frac{1}{k^*!\,A!\,B^*!}(\nabla_{(A,k^*,B^*)}\tilde{f})_{x_0}\theta^A \vee (\theta^{\alpha^*})^k \vee \theta^{B^*} \odot \frac{1}{l!\,C!\,D^*!}(\nabla_{(l,C,D^*)}\tilde{g})_{x_0}(\theta^\alpha)^l \vee \theta^C \vee \theta^{D^*}$$

où les θ^{B^*} ne contiennent plus de θ^{α^*}, et les θ^C plus de θ^α, il donne modulo tous les termes dont le degré en t est différent de 1, et venant des seuls θ^{α^*}, θ^α :

$$\frac{-i}{(l-1)!\,(k-1)^*!\,A!\,C!\,B^*!\,D^*!}(\nabla_{(A,k^*,B^*)}\tilde{f})_{x_0}$$
$$(\nabla_{(l,C,D^*)}g)_{x_0}(\theta^\alpha)^{l-1}\theta^C\theta^A(\theta^{\alpha^*})^{k-1}\theta^{B^*}\theta^{D^*}.$$

qui est une « dérivée covariante symétrique » attachée à $(\nabla_{\alpha^*}f)\times(\nabla_\alpha g)$. La formule de Leibnitz généralisée donne pour le coefficient de t, dans le développement de $(\hat{\hat{f}}\odot\hat{g})$, le terme général :

$$\frac{-i}{(h-1)!\,(k-1)^*!\,H!\,K^*!}\sum_{\alpha=1}^{\alpha=r}(\nabla_{(h,H,k^*,K^*)}\tilde{f}\tilde{g})_{x_0}(\theta^\alpha)^{h-1}\vee\theta^H\vee(\theta^{\alpha^*})^{k-1}\vee\theta^{K^*},$$

qui n'est autre que celui qui vient de :

$$-i\sum_\alpha(\nabla_{\alpha^*}\tilde{f})(\nabla_\alpha\tilde{g}).$$

En effet :

$$\nabla_k(\nabla_{\alpha^*}\tilde{f})=\nabla_{(k\alpha^*)}\tilde{f},\qquad\text{puisque la torsion est nulle}$$

donc $\nabla_{(k)}(\nabla_{\alpha^*}\tilde{f})=\nabla_k(\nabla_{\alpha^*}\tilde{f})$, où au premier membre figure la dérivée « symétrisée ».

$$\nabla_{(kl)}(\nabla_{\alpha^*}\tilde{f})=\nabla_{(k)}\nabla_{(l)}(\nabla_{\alpha^*}\tilde{f})=\nabla_{(kl\alpha^*)}\tilde{f}\ \text{ et ainsi de suite.}$$

Si on écrit avec $q_{\alpha^*}=1$:

$$\nabla_{(p_1,p_2,\dots,p_n)}(\nabla_{\alpha^*}\tilde{f})=\nabla_{(p_1,p_2,\dots,p_n)}\nabla_{(0_1,0,\dots,q_{\alpha}^*,\dots,0_n)}\tilde{f}$$

c'est encore :

$$\nabla_{(p_1,\dots,p_\alpha^*+q_\alpha^*,\dots,p_n)}\tilde{f},$$

de sorte que l'on peut à volonté « intégrer » ou non dans la symétrisation l'indice α^* (et l'indice α).

Finalement on obtient pour $\tilde{f},\tilde{g}\in\tilde{C}^H(x_0,\mathbb{C})$,

$$\underline{\tilde{f}*\tilde{g}=\tilde{f}\tilde{g}+tF^{\alpha^*\beta}(\nabla_{\alpha^*}\tilde{f})(\nabla_\beta\tilde{g})+\dots}\tag{10}$$

et en retranchant $\tilde{g}*\tilde{f}$ apparaît le crochet de Poisson.

En poursuivant on obtient les termes principaux dans les coefficients de t^2, t^3...

$$\frac{-1}{2!}\sum_{\alpha\beta}(\nabla_{(\alpha^*\beta^*)}\tilde{f})_{x_0}(\nabla_{(\alpha\beta)}\tilde{g})_{x_0},\qquad\frac{i}{3}\sum_{\alpha\beta\gamma}(\nabla_{(\alpha^*\beta^*\gamma^*)}\tilde{f})_{x_0}(\nabla_{(\alpha\beta\gamma)}\tilde{g})_{x_0}\dots$$

et en repères hermitiens les plus généraux pour le coefficient de t^k :

$$\frac{1}{k!}\mathrm{F}^{\alpha_1^*\beta_1}\mathrm{F}^{\alpha_2^*\beta_2}\ldots\mathrm{F}^{\alpha_r^*\beta_r}(\nabla_{(\alpha_1^*\alpha_2^*\ldots\alpha_r^*)}\tilde{f})_{x_0}(\nabla_{(\beta_1\beta_2\ldots\beta_r)}\tilde{g})_{x_0}.$$

Dans le cas plat, on obtient :

$$(11)\quad f * g = fg + t\mathrm{F}^{\alpha^*\beta}(\nabla_{\alpha^*}\tilde{f})(\nabla_\beta\tilde{g}) + \frac{t^2}{2\,!}\mathrm{F}^{\alpha_1^*\beta_1}\mathrm{F}^{\alpha_2^*\beta_2}(\nabla_{(\alpha_1^*\alpha_2^*)}\tilde{f})(\nabla_{(\beta_1\beta_2)}\tilde{g}) + \frac{t^3}{3\,!}\mathrm{F}^{\alpha_1^*\beta_1}\mathrm{F}^{\alpha_2^*\beta_2}\mathrm{F}^{\alpha_3^*\beta_3}(\nabla_{(\alpha_1^*\alpha_2^*\alpha_3^*)}\hat{f})(\nabla_{(\beta_1\beta_2\beta_3)}\hat{g}) + \ldots$$

qui diffère à première vue de celui de Moyal (cf. plus bas). Dans le cas d'une variété symplectique générale *des termes de courbure* s'ajoutent aux coefficients de t^2, t^3 ... déjà écrits. Par exemple, en repères hermitiens particuliers, le coefficient de t^2 est l'image par φ_1^{-1} des termes du produit $\hat{\hat{f}} \odot \hat{\hat{g}}$:

$$(\nabla_{(\mathrm{A},k^*,\mathrm{B}^*)}f)_{x_0}(\nabla_{(l,\mathrm{C},\mathrm{D}^*)}g)_{x_0}(\theta^\alpha)^{l-2} \vee \theta^{\mathrm{A}} \vee \theta^{\mathrm{C}} \vee (\theta^{\alpha^*})^{k-2} \vee \theta^{\mathrm{B}^*} \vee \theta^{\mathrm{D}^*}$$

où A, C ne contiennent pas θ^α, B*, D* ne contiennent pas θ^{α^*}, et :

$$(\nabla_{(\mathrm{A},k^*,s^*,\mathrm{B}^*)}f)_{x_0}(\nabla_{(l,n,\mathrm{C},\mathrm{D}^*)}g)_{x_0}(\theta^\alpha)^{l-1} \vee (\theta^\beta)^{n-1} \vee \theta^{\mathrm{A}} \vee \theta^{\mathrm{C}} \vee (\theta^{\alpha^*})^{k-1} \vee (\theta^{\beta^*})^{s-1} \vee \theta^{\mathrm{B}^*} \vee \theta^{\mathrm{D}^*}$$

où A et C ne contiennent ni θ^α, ni θ^β, B*, D* ne contiennent ni θ^{α^*}, ni θ^{β^*}, $\alpha \neq \beta$.

Remarques. — 1° Certaines hypothèses sur la courbure permettraient d'envisager à nouveau le développement (11). Par exemple pour le coefficient de t^2, si l'on pouvait écrire :

$$\mathrm{F}^{\alpha_1^*\beta_1}\mathrm{F}^{\alpha_2^*\beta_2}\nabla_{(i)}(\nabla_{(\alpha_1^*\alpha_2^*)}\tilde{f}\nabla_{(\beta_1\beta_2)}\tilde{g}) = \mathrm{F}^{\alpha_1^*\beta_1}\mathrm{F}^{\alpha_2^*\beta_2}\nabla_i(\nabla_{(\alpha_1^*\alpha_2^*)}\tilde{f}\nabla_{(\beta_1\beta_2)}\tilde{g})$$

condition réalisée avec :

$$\begin{cases} \mathrm{R}^i\alpha k\beta + \mathrm{R}^i\beta k\alpha = 0 \\ \mathrm{R}^i\alpha^* k\beta^* + \mathrm{R}^i\beta^* k\alpha^* = 0 \end{cases}$$

pour les coefficients du tenseur de courbure.

Dans le cas kählérien les identités de Bianchi, montrent que ces dernières conditions entraînent la platitude [*8*].

2° On observe que pour certaines fonctions on peut obtenir

$$\tilde{f} * \tilde{g} - \tilde{g} * \tilde{f} = 2t\{\tilde{f}, \tilde{g}\}.$$

Par exemple, dans le cas kählérien plat, si on a les conditions de Killing $\nabla_{(\alpha^*\beta^*)}\tilde{h} = 0$, $\nabla_{(\alpha\beta)}\tilde{h} = 0$, pour toute fonction h.

Les déformations formelles.

On peut observer que la formule (11) du cas plat, aussi bien que la formule analogue qui existe dans le cas d'une variété symplectique munie d'une connexion avec courbure non nulle et sous les hypothèses faites, donne un algorithme de calcul qui s'étend de lui-même au cas des germes de fonctions $C^\infty(V)$ et à valeurs dans l'anneau des séries formelles en t à coefficients complexes, car la vérification de l'associativité conduit à des calculs qui sont formellement identiques dans tous les cas.

Donc sur toute variété symplectique on peut construire en chaque point x_0, une déformation formelle de l'algèbre $C^\infty_{x_0}(\mathbb{C})$ des germes de fonctions différentiables déformations à valeurs dans l'anneau des séries formelles en t. Les déformations de l'algèbre $C^\infty(V, \mathbb{C})$.

Revenons d'abord au cas général, avec l'hypothèse (H). x_0 étant choisi, la déformation construite permet de définir l'application :

$$x_1 \to (\tilde{f}_{x_0} * \tilde{g}_{x_0})(x_1)$$

x_1 dans un voisinage de x_0, $\tilde{f}_{x_0} = \overset{(x_0)}{\varphi_1^{-1}}(\hat{\hat{f}}_{x_0})$, $\tilde{f}_{x_0}$ étant le germe de f en x_0, et $\overset{(x_0)}{\varphi_1^{-1}}$ l'isomorphisme déjà envisagé (au point x_0). Varions maintenant x_0, l'hypothèse (H) étant supposée vérifiée en chaque point x_0. L'application $x \to (\tilde{f}_x * \tilde{g}_x)(x)$ *notée* $(f * g)(x)$ *donne une loi de composition d'algèbre associative, qui comme dans le cas des germes en x_0, et pour les mêmes raisons s'étend au cas différentiable et fournit une déformation formelle de l'algèbre* $C^\infty(V, \mathbb{C})$ *à valeur dans le même anneau* $\mathbb{C}[[t]]$ ([2]).

Le produit $*$ possède la propriété de covariance symplectique.

Soit θ une transformation différentiable symplectique et $x_1 = \theta(x_0)$. $\mathcal{R}_0$ et $\mathcal{R}_1$ sont des repères adaptés en x_0 et x_1 respectivement. τ est le transport parallèle pour ∇ de $T_{x_0}(V)$ sur $T_{x_1}(V)$. On va montrer que :

$$\underline{\theta(f * g) = (\theta f * \theta g), \qquad \text{avec} \qquad (\theta f)(x) = (f \circ \theta^{-1})(x)}\,.$$

$$(\theta(f * g))_{x_1} = (f * g)_{x_0} = \{ \overset{(x_0)}{\varphi_1^{-1}}(\hat{\hat{f}}_{x_0} \odot \hat{\hat{g}}_{x_0}) \}_{x_0}$$

$$(\theta f * \theta g)_{x_1} = \{ \overset{(x_0)}{\varphi_1^{-1}}((\widehat{\widehat{\theta f}})_{x_1} \odot (\widehat{\widehat{\theta g_{x_1}}})) \}_{x_1}$$

$$(\theta f)_{x_1} = f(x_0)$$

Comme nous l'avons remarqué au début du paragraphe III, on peut

([2]) La loi $x \to (f * g)(x)$ ainsi obtenue s'exprime par la même formule (11), car on observe que les termes complémentaires obtenus pour $C^\infty(x_0)$ sont nuls pour $x = x_0$.

composer φ_1 avec un isomorphisme symplectique ψ, posant $\varphi_2 = \psi \circ \varphi_1$:

$$(\theta f * \theta g)_{x_1} = \{ \overset{(x_1)}{\varphi_2^{-1}}(\psi(\widehat{\widehat{\theta f}})_{x_1} \odot \psi(\widehat{\widehat{\theta g}})_{x_1} \}_{x_1},$$

choisissons ψ tel que $\tau\mathscr{R}_0 = \psi(\mathscr{R}_1)$, comme $\psi(\widehat{\widehat{\theta f}})_{x_1} = \tau\hat{\hat{f}}_{x_0}$

$$(\theta f * \theta g)_{x_1} = \{ \overset{(x_1)}{\varphi_2^{-1}}(\tau\hat{\hat{f}}_{x_0} \odot \tau\hat{\hat{g}}_{x_0}) \}_{x_1} ;$$

la connexion ∇ étant symplectique cela s'écrit :

$$\{ \overset{(x_1)}{\varphi_2^{-1}} \circ \tau(\hat{\hat{f}}_{x_0} \odot \hat{\hat{g}}_{x_0}) \}_{x_1} = \{ \overset{(x_0)}{\varphi_1^{-1}}(\hat{\hat{f}}_{x_0}) \odot \hat{\hat{g}}_{x_0}) \}_{x_0}$$

et cette égalité assure la propriété annoncée.

La construction des déformations de l'algèbre $C^\infty(V, \mathbb{C})$ peut se résumer ainsi du point de vue heuristique :

. on envoie par l'isomorphisme φ_1 (lié au choix de repères adaptés, et d'une réduction au groupe unitaire du groupe structural du fibré symplectique, le faisceau des germes des fonctions différentiables dans le faisceau des germes des sections du fibré de Clifford symplectique complexifié $Cl_S(tF')$ (ou $Cl_S(tF')_l$) ;

. on prend la composante de degré 0 (en θ^H, θ^{K^*}) du produit des germes de sections associées à f, $g \in C^\infty(V, \mathbb{C})$: ce faisceau définit $f * g$.

Cette remarque permet de mieux comprendre pourquoi l'hypothèse (H) n'intervient plus dans la construction finale des déformations formelles de $C^\infty(V, \mathbb{C})$. Par contre (H_1) est à conserver pour envisager des déformations non formelles.

Remarque. — Il est immédiat de vérifier sur la formule (11) que si l'on forme $f * g - g * f$, f et g réels, les termes de degré impair sont réels et les termes de degré pair (en t^{2k}, $k \geqslant 1$) sont imaginaires purs. Calculant modulo t^{2k} dans (11), on obtient donc un crochet de Lie réel qui est une déformation du crochet de Poisson $\{f, g\}$. Cependant moyennant une hypothèse globale supplémentaire on peut introduire une déformation pour le produit fg et le crochet $\{f, g\}$ en restant dans le domaine réel.

IV. DÉFORMATION DES ALGÈBRES RÉELLES

Si l'on veut rester dans le domaine réel, on suppose que la variété symplectique V est munie d'un champ global L de lagrangiens réels, ce qui signifie qu'il existe une sous-fibration de T(V) dont les fibres sont des lagrangiens réels (espaces totalement isotropes pour la forme symplectique). C'est le cas si V est l'espace des phases T(M) de la mécanique classique.

V possède une structure complexe J et l'on peut écrire $T(V) = L \oplus JL$; comme la grassmannienne lagrangienne de $\mathbb{R}^{2r}$ est difféomorphe à $\frac{U(r)}{O(r)}$, on voit que cette condition équivaut à une réduction du groupe structural $Sp(2r, \mathbb{R})$ à $O(r) \times O(r)$.

Dans cette situation on peut faire une identification globale entre sections de l'algèbre symplectique cliffordienne large réelle et sections de l'algèbre symétrique. Les développements de III se reprennent en utilisant des bases adaptées à la structure presque produit (non naturelles en général).

(9) est remplacé par [2] :

$$(12) \quad \underline{(\varphi^{\alpha^*})^k \odot (\varphi^\alpha)^l = (\varphi^\alpha)^l \odot (\varphi^{\alpha^*})^k - lkt(\varphi^\alpha)^{l-1} \odot (\varphi^{\alpha^*})^{k-1}}$$
$$\underline{+ \ldots (-1)^p t^p \frac{l(l-1)\ldots l-p+1}{p!} k(k-1)\ldots(k-p+1)(\varphi^\alpha)^{l-p} \odot (\varphi^{\alpha^*})^{k-p} \ldots}$$

on trouve une formule analogue à (10) mais le deuxième membre est réel.

En conclusion :

Les résultats obtenus pour l'algèbre des fonctions à valeurs complexes s'étendent sans modification sous l'hypothèse qu'il existe sur la variété symplectique un champ global de lagrangiens réels.

Le coefficient de t^k est un opérateur bidifférentiel d'ordre k relativement à chaque argument, dont le symbole principal est identique à celui que l'on obtient dans le cas plat.

Remarque. — Notre méthode est susceptible de s'adapter sous des précautions évidentes aux variétés de Poisson [7] [1].

V. RELATION AVEC LE PRODUIT DE MOYAL

Soit E un espace vectoriel muni de coordonnées cartésiennes réelles $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, $n = 2r$. Considérons d'abord l'ensemble P des fonctions polynomiales réelles en $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ de degré quelconque (mais fini).

Soient $f, g \in P$.

F est une forme symplectique sur E (aussi bien sur E*). On pose (produit de Moyal) :

$$(13) \quad \begin{aligned} & \underline{f \underset{M_t}{*} g = \sum_0^\infty \frac{t^k}{k!} MF^k(f \otimes g)} \\ & F^k(f \otimes g) = F^{i_1 j_1} F^{i_2 j_2} \ldots F^{i_k j_k} (\partial_{i_1 \ldots i_k} f) \underset{\mathbb{R}}{\otimes} (\partial_{j_1 j_2 \ldots j_k} g) \\ & M(f \otimes g) = fg \qquad f, g \in P \end{aligned}$$

avec les notations de [6].

t est un paramètre scalaire arbitraire. On en déduit un crochet attaché à tF.

Si on remplace P par l'ensemble P′ des séries entières en $(x^1, \ldots, x^n)$ avec des coefficients du type introduit au (I) pour les algèbres de Clifford symplectiques larges, il est facile de voir que produit et crochet de Moyal existent encore.

On introduit $\mathrm{E} \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \mathbb{R}((t)) = \mathrm{E}'$ et son dual $(\mathrm{E}')^*$, avec la forme symplectique tF, et l'algèbre de Clifford symplectique large $\mathrm{C_S}(t\mathrm{F})_l$, t sera encore considéré comme un paramètre réel arbitraire, afin de rendre claires les conditions de convergence.

Soit $(\varphi^i, t\varphi^i)$ une base de $(\mathrm{E}')^*$.

Posons : $u(\varphi^i) = x^i$, $u(t\varphi^i) = tx^i$, u s'étend à une application de E′ dans l'algèbre de Moyal déjà envisagée.

$$u(\varphi^i)\underset{\mathrm{M}_t}{*}u(\varphi^j) - u(\varphi^j)\underset{\mathrm{M}_t}{*}u(\varphi^i) = t\mathrm{F}^{ij} = t\mathrm{F}(\varphi^i, \varphi^j) \tag{14}$$

$$u(t\varphi^i)\underset{\mathrm{M}_t}{*}(t\varphi^j) - u(t\varphi^j)\underset{\mathrm{M}_t}{*}u(t\varphi^i) = t^3\mathrm{F}^{ij} = t\mathrm{F}(t\varphi^i, t\varphi^j)\,. \tag{15}$$

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{C_S}(t\mathrm{F})_l \arrow[dr, "u"] & \\ (\mathrm{E}')^* \arrow[ur, "\rho"] \arrow[rr, "u"'] & & \mathrm{P}' \end{tikzcd}$$

Dès lors la propriété universelle des algèbres de Clifford symplectiques implique l'existence d'un homomorphisme $\bar{u}$ de $\mathrm{C_S}(t\mathrm{F})_l$ dans P′ munie du produit de Moyal tel que $\bar{u} \circ \rho = u$, ρ homomorphisme canonique. $\mathrm{C_S}(t\mathrm{F})_l$ est simple [*2*], donc $\bar{u}$ est nécessairement injective. Par récurrence on voit que si $\rho(\varphi^i)$ est identifié à φ^i, $\bar{u}(\varphi^i)^n = (x^i)^n$, $\bar{u}(t^m(\varphi^i)^n) = t^m(x^i)^n$ et que l'on atteint tous les générateurs de P′.

Donc l'algèbre que nous avons construite est isomorphe à celle de Moyal. Comme :

$$\begin{aligned} &\bar{u}(\varphi^i) = x^i \\ &\bar{u}(\varphi^i \odot \varphi^j) = x^ix^j + t\mathrm{F}^{ij} \\ &\bar{u}(\varphi^i \odot \varphi^j \odot \varphi^k) = x^ix^jx^k + tx^k\mathrm{F}^{ij} + t^2(\mathrm{F}^{ik}x^j + \mathrm{F}^{jk}x^i), \text{ etc.} \end{aligned}$$

$\bar{u}(\varphi^{i_1} \odot \varphi^{i_2} \odot \ldots \odot \varphi^{i_p})$ sera un polynôme en t de degré au plus égal à t^{p-1}.

Ainsi, dans le cas plat, l'algèbre construite au IV, dans le cas non formel, est identique à celle qui vient du produit de Moyal, modulo une déformation triviale au sens de Gerstenhaber [*5*].

On observera que l'isomorphisme ne respecte pas le degré relativement à t (ce qui entraîne la perte de symétrie pour les termes de degré pair).

Dans le cas purement formel, il existe un homomorphisme de notre algèbre sur celle de Moyal. Il est à conjecturer que l'(A.Cl.S) formelle est encore simple, de sorte que l'on aurait encore un isomorphisme.

Revenons à une variété symplectique V, munie d'un champ de lagrangiens réels, avec une déformation (formelle ou non) de l'algèbre ($C^\infty(V)$ ou $C^\omega(V)$ éventuellement) du type introduit dans (IV).

Supposons que l'on sache construire une déformation $*_t$, qui pour tout système de coordonnées symplectiques $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ sur un ouvert U donne :

(16) $$x^i *_t x^j - x^j *_t x^i = tF^{ij}$$

c'est le cas pour la déformation :

$$f *_t g = \sum_0^\infty \frac{t^k}{k!} P^k(f, g)$$

avec

$$P^k(f, g) = F^{i_1j_1}F^{i_2j_2} \dots F^{i_kj_k}(\nabla_{i_1i_2\dots i_k}f)(\nabla_{j_1j_2\dots j_k}g)$$

introduite dans [*1*] à l'aide d'une connexion de Poisson sans courbure.

Soient $\varphi^i (i=1, \dots, n)$, les éléments d'une cobase attachée aux (x^i), $\varphi^i = dx^i$. Grâce aux repères produits les (φ^i) s'identifient à des sections cliffordiennes symplectiques $\hat{\hat{\varphi}}_i$ qui engendrent localement le fibré correspondant. Γ désignant une section, $\bar{u}$ associe à $\varphi^i \in \Gamma(Cl_S(U, tF)_l)$ (ou $\Gamma(Cl_S U, tF)$, cas formel), la fonction (x^i) de l'algèbre de Moyal $M_t(U)$; (14) et (15) s'appliquent et on obtient un homomorphisme $\underline{h}$ qui étend $\bar{u}$, au moins surjectif. Si la courbure est nulle les (x^i) ont le caractère tensoriel ([3]) et si $\underline{h}$ est un isomorphisme local (cas non formel) cet isomorphisme local s'étend à un isomorphisme global.

Si la courbure est non nulle, les (x^i) n'ont plus le caractère tensoriel ; au-dessus de $U \cap U'$, la même fonction développée selon les coordonnées (x^i), $(x^{i'})$ centrées respectivement en $x_0 \in U$ et $x'_0 \in U'$ peut provenir de deux éléments différents de $\Gamma(Cl_S(V, tF)_l)$, (ou $\Gamma Cl_S(V, tF)$, cas formel) selon qu'on se place sur U ou sur U′. Il ne peut exister en général qu'un homomorphisme surjectif. On obtient ainsi une propriété *de type universel.*

La déformation construite s'envoie par un homomorphisme sur toute déformation satisfaisant localement (16) (*par exemple sur celle de Moyal, explicitée dans* [*1*]).

Remarque. — On peut conjecturer que la déformation (10) est « rigide ». Ce résultat étendrait une propriété signalée dans [*5*] qui affirme que toutes

([3]) Un tel choix, du moins est possible.

les algèbres semi-simples de dimension finie, séparables sont rigides. Ainsi en est-il d'une algèbre de Clifford de dimension finie attachée à une forme quadratique non dégénérée. La propriété conjecturée serait l'extension au cas symplectique.

VI. DÉFORMATIONS DES ALGÈBRES SYMÉTRIQUES ET EXTÉRIEURES

Sur une variété C^∞ presque symplectique, introduisons une structure riemannienne g naturelle à l'aide de l'opérateur J, $J^2 = -1$.

Selon ce que nous venons d'exposer l'algèbre symétrique se déforme en algèbre de Clifford symplectique (les conditions de convergence imposant certaines restrictions comme nous avons dit).

De même, utilisant le fibré réduit au groupe unitaire et des repères adaptées à cette réduction, toute algèbre de Clifford orthogonale associée à la forme tg est la déformation de l'algèbre extérieure, l'identification de 2 sections se faisant grâce aux repères adaptés. Dans ce dernier cas les conditions de convergence n'ont pas à être postulées.

Plus généralement si une variété pseudo-riemannienne C^∞ admet une structure spinorielle au sens large, il existe pour le fibré tangent complexifié une structure presque produit et une structure symplectique complexe. On peut donc pour les fibrés complexes donner des résultats analogues pour les déformations des algèbres extérieures et symétriques.

On peut obtenir ainsi des déformations de l'algèbre de Weil de la variété C^∞ qui ont un caractère universel et donnent un cadre naturel pour le développement de la théorie quantique des champs.

L'algèbre de Lie des déformations de l'algèbre de Weil contient alors des termes naturels d'interaction, au sens des physiciens (lien avec les superchamps).

Enfin il est possible d'envisager, au lieu des fonctions différentiables C^ω, ou C^∞ à valeurs scalaires, des fonctions à valeurs tensorielles. Les déformations se construisent de la même manière.

VII. APPLICATION A LA MÉCANIQUE QUANTIQUE : UN CADRE GÉOMÉTRIQUE

Nous avions déjà abordé ce problème dans [*4*] et donné ce qui constitue selon nous, les principes essentiels ; cependant au sujet des systèmes à r degrés de liberté nous n'avions considéré que le cas où V était un espace plat.

Nous rappelons quelques résultats.

Il existe au-dessus du fibré des repères de T(V) de groupe $Sp(2r, \mathbb{R})$ une extension au groupe métaplectique [*2*]. Il existe alors selon nos critères, au-dessus de T(V) tout à la fois un fibré en spineurs orthogonaux et un fibré en spineurs symplectiques (au sens large, dont les sections sont définies modulo un facteur complexe de norme 1).

Avec les notations de [*4*] il est possible de définir sur les champs de spineurs symplectiques une forme sesquilinéaire $\mathscr{H}'$ définie positive :

$$\Phi\mathscr{H}'(v\Phi^*, u\Phi^*)\Phi^* = \Phi\beta(\overline{u})v\Phi^*$$

(β anti-automorphisme principal).

Il existe des champs supplémentaires de lagrangiens complexes, si η est une telle section lagrangienne, on obtient les relations de commutations :

$$\begin{aligned} [a_\eta^+, a_{\eta'}^+] &= [a_\eta^-, a_{\eta'}^-] = 0 \\ [a_\eta^+, a_{\eta'}^-] &= -\, it\mathrm{F}(\eta, \eta') = \mathscr{H}'(\eta\Phi^*, \eta'\Phi^*) \end{aligned}$$

où tF est la forme symplectique, a_η^+ l'application $u\Phi \rightarrow \eta u\Phi$ et a_η^- l'adjoint de a_η^+ relativement à $\mathscr{H}'$.

Pour quantifier un observable classique, soit une fonction f définie sur une variété symplectique V :

. on choisit sur V une structure presque hermitienne ;

. on associe à f, dans l'une des hypothèses décrites plus haut (III) $\hat{\hat{f}}$, champ cliffordien symplectique ;

. on fait opérer $\hat{\hat{f}}$ sur les sections du fibré spinoriel symplectique complexifié (définies modulo un facteur complexe de norme 1) naturellement associé à la structure hermitienne

$$\hat{\hat{f}} : u\Phi^* \rightarrow \hat{\hat{f}}u\Phi^* \ ;$$

cet opérateur est anti-hermitien si et seulement si

$$\overline{\beta(\hat{\hat{f}})} + \hat{\hat{f}} = 0 \ ;$$

. on observe que l'algèbre de Lie des crochets de 2 opérateurs est isomorphe à celle de la déformation, la quantification est bien attachée à une déformation de l'algèbre de Poisson (qui peut être formelle ou non) ;

. on observe que si on considère l'espace des phases avec coordonnées locales canoniques (p_α, q_α)

$$p_\alpha = x^\alpha, \; q^\alpha = x^{\alpha *}, \qquad [\hat{\hat{q}}^\alpha, \hat{\hat{p}}_\alpha] = t \, ,$$

et les autres crochets sont nuls.

t représente donc la constante de Planck.

Il est loisible d'obtenir une représentation de l'algèbre de Lie de Heisenberg par des opérateurs ;

. on écrit les équations d'évolution pour un observable f et un hamiltonien H classique.

$$\frac{d\hat{\hat{f}}}{d\theta} = (\hat{\hat{f}} * \hat{\hat{\mathrm{H}}} - \hat{\hat{\mathrm{H}}} * \hat{\hat{f}})t ,$$

θ paramètre temporel. Cette théorie est naturellement non relativiste. La « covariance » symplectique résulte de la construction même.

Remarques diverses. — *1°* Le processus de quantification n'est pas en général associé à un homomorphisme entre une algèbre de Lie d'observables classiques munie du crochet de Poisson et une algèbre de Lie d'opérateurs. Les règles dites de Schrödinger deviennent ici inutiles. Il est intéressant de rechercher quels sont les observables qui donnent lieu à un homomorphisme.

2° On peut se demander si les divers choix de structure hermitienne sur V conduisent à des quantifications en un certain sens « équivalentes ». Pour les questions qui ont un caractère local, la réponse est évidemment affirmative, de même dans le cas plat.

3° Pour les problèmes avec contraintes de deuxième classe et la construction du crochet de Dirac systématisée par Lichnérowicz dans [*7*], dans les hypothèses de régularité, notre méthode s'applique en considérant la sous-fibration déterminée par les contraintes et prenant un repère hermitien adapté à la sous-fibration.

4° Enfin, en rapprochant les développements des n^{os} IV et VII, de l'article [*4*] on peut aisément adapter notre méthode à la théorie quantique des champs. On obtient un cadre géométrique qui semble cohérent.

RÉFÉRENCES

[*1*] F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnérowicz et D. Sterheimer, Deformation theory and quantization (I) (Déformations of Symplectic Structures). *Annals of Physics*, t. **111**, 1978, p. 61-110.

[*2*] A. Crumeyrolle, Algèbre de Clifford symplectique... etc. *J. Math. pures et appl.*, t. **56**, 1977, p. 205-230.

[*3*] A. Crumeyrolle, Classes de Maslov. Fibrations spinorielles symplectiques... etc. *J. Math. pures et appl.*, t. **58**, 1979.

[*4*] A. Crumeyrolle, Un formalisme lié à la seconde quantification sur les fibrés spinoriels orthogonaux ou symplectiques. *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. **282**, Série A, p. 1367-1976.

[*5*] M. Gerstenhaber, On the deformation of rings and algebras. *Annals of Mathematics*, t. **79**, 1964, p. 59-103.

[*6*] R. Hermann, *Quantum and fermion differential geometry*, Part A, Math. Sci. Press. Brookline.

[7] A. LICHNÉROWICZ, Les variétés de Poisson et leurs algèbres de Lie. *J. differential Geometry*, t. **12**, 1977, p. 253-300.
[8] A. LICHNÉROWICZ, *Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie.* Dunod, Paris, 1954.
[9] J. VEYS, Déformation du crochet de Poisson sur une variété symplectique. *Comment. Math. Helvetici*, t. **50**, 1975, p. 421-454.